

Национальный исследовательский университет «МЭИ»



Кафедра Теоретических Основ Электротехники

Компьютерная лабораторная работа № 2

Технология машинного расчета электрических цепей методом узловых потенциалов

Выполнил:	
Группа:	
Проверил:	

Москва 2017

Лабораторная работа № 2. Технология машинного расчета электрических цепей методом узловых потенциалов

1. Цель работы

Ознакомление с принципами поэлементного формирования и компьютерного решения узловых уравнений.

2. Теоретическая справка

Познакомимся с топологическими списками цепей и правилами их составления, начиная с самого простого случая, когда рассматриваются линейные, стационарные, резистивные (состоящие только из резисторов и источников тока) цепи с GJ -ветвями, т.е. цепи, каждый элемент которых можно представить в виде параллельного соединения некоторого резистора с проводимостью G и источника тока J . Для формирования Т-списка такой цепи необходимо последовательно, начиная с нуля или единицы, пронумеровать ее узлы. При этом базисному узлу¹ присваивается номер ноль или же максимальный номер. Для исключения необходимости приписывать в Т-списке знак источнику тока за начало ветви принимают узел, от которого направлен ток источника, за конец – узел, к которому направлен этот ток. При этом условно-положительное направление тока I и напряжения U такой GJ -ветви принимается от ее начального узла к конечному узлу (рис. 1).

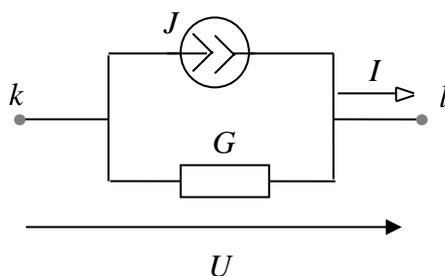


Рис. 1. Условное изображение GJ -ветви

Описав каждую ветвь цепи по следующему, представленному в табл. 1 шаблону (номер начала ветви → номер конца ветви → значение проводимости ветви → значение источника тока), можно получить информационно-компактное формальное описание цепи в виде ее Т-списка.

Таблица 1

Номер узла		Проводимость, См	Ток источника тока, А
Начало ветви	Конец ветви		
k	l	G	J

Из большого многообразия методов расчета электрических цепей в машинных расчетах предпочтение отдается методу узловых напряжений, называемому также узловым методом. Этот метод равно пригоден к расчету установившихся и переходных процессов цепей с любым типом элементов – взаимных и невзаимных, линейных и нелинейных, двухполюсных, как резисторы и многополюсных, как например, транзисторы. Он отличается канонически простой математической моделью, удобной как для численной

¹ узлу, потенциал которого полагается равным нулю или некоторому фиксированному значению

обработки, так и для качественного анализа решений, которая представляет собой запись всех m уравнений по первому закону Кирхгофа цепи с $(m+1)$ -узлом в базисе узловых напряжений $U_j, j=1,2,\dots,m$, т.е. напряжений между каждым j -м узлом и базисным узлом, номер которого для определенности положим равным $m+1$.

$$\mathbf{GU}=\mathbf{J}.$$

Здесь \mathbf{G} – $m \times m$ матрица узловых проводимостей, каждый ее jj -й диагональный элемент равен сумме проводимостей ветвей, подходящих к ее j -му узлу, а ij -элемент ($i \neq j$) равен величине проводимости ветви между узлами i и j , взятой с обратным знаком; \mathbf{J} – вектор задающих токов, j -й элемент его равен алгебраической сумме токов источников тока, инцидентных j -му узлу ($j=1,2,\dots,m$), причем, знак плюс соответствует тем источникам, которые направлены к этому узлу, минус – источникам, направленным от j -го узла; \mathbf{U} – вектор узловых напряжений.

Главное для машинного расчета – это наличие исключительно простой в реализации процедуры формирования узловых уравнений путем обработки Т-списков цепей на основе принципа поэлементного вклада. Применение этого принципа для обычной резистивной цепи с двухполюсными элементами заключается в последовательном расчете коэффициентов матрицы \mathbf{G} и вектора \mathbf{J} (при машинном формировании – соответствующих элементов массивов) по мере построчной обработки Т-списка цепи. Изначально при машинном формировании массив расширенной матрицы \mathbf{G}_p размером $(m+1) \times (m+1)$ и массив расширенного вектора \mathbf{J}_p размером $(m+1) \times 1$ обнуляются.

На каждом i -ом, $i=1,2,\dots,N$ (N – число ветвей), шаге обработки Т-списка цепи по принципу поэлементного вклада проводимость G ветви с номером i прибавляется со знаком плюс к диагональным kk -му и ll -му элементам G_{kk} и G_{ll} массива \mathbf{G}_p и со знаком минус к недиагональным элементам G_{kl} и G_{lk} этого массива. Здесь же ток источника тока J этой ветви прибавляется со знаком плюс к l -му и со знаком минус к k -му элементам массива \mathbf{J}_p . В результате получают

шаг i ($i=1,2,\dots,N$) i -я строка Т-списка

k	l	G	J
-----	-----	-----	-----

$$\mathbf{G}_p^j = \mathbf{G}_p^{j-1} + \begin{matrix} & 1 & k & l & m+1 \\ \begin{matrix} 1 \\ k \\ l \\ m+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & G & \dots & -G & \dots \\ \dots & -G & \dots & G & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix},$$

т.е. $G_{kk}^j := G_{kk}^{j-1} + G, G_{ll}^j := G_{ll}^{j-1} + G, G_{kl}^j := G_{lk}^j = G_{kl}^{j-1} - G.$

$$\mathbf{J}^j = \mathbf{J}^{j-1} + \begin{matrix} & 1 & k & l & m+1 \\ \begin{matrix} 1 \\ k \\ l \\ m+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ -J \\ \vdots \\ J \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\text{т.е. } J_k^j := J_k^{j-1} - J, J_l^j := J_l^{j-1} + J.$$

Здесь \mathbf{G}^0 и \mathbf{J}^0 – соответствующие нулевые массивы; $\mathbf{G}^N = \mathbf{G}_p$, $\mathbf{J}^N = \mathbf{J}_p$, а G_{kk} , G_{ll} , G_{kl} и J_k , J_l – соответствующие элементы матрицы \mathbf{G}_p и вектора \mathbf{J}_p .

Окончательно матрица узловых проводимостей равна расширенной матрице \mathbf{G}_p , в которой вычеркнуты столбцы и строки, соответствующие базисному узлу. Вектор задающих токов равен расширенному вектору \mathbf{J}_p , в котором вычеркнута строка, соответствующая базисному узлу.

Простота формирования узловых уравнений по принципу поэлементного вклада, высокая алгоритмичность рассмотренной процедуры, отсутствие в ней мультипликативных операций (умножения, деления) сводят к минимуму вычислительные затраты при формировании уравнений на ЭВМ.

Теперь, чтобы определить напряжения, достаточно решить составленную систему уравнений:

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{J}.$$

Чтобы посчитать токи в ветвях, воспользуемся обобщенным законом Ома. Нам его необходимо записать в матричном виде. Для этого будет полезным использовать матрицу соединений \mathbf{A} размера $m \times N$ ($m+1$ — количество узлов, v — количество ветвей), в которой i -я строка соответствует узлу i , а j -й столбец соответствует ребру j , причём элемент A_{ij} равен

- 0, если ребро j не присоединено к узлу i ;
- 1, если ребро выходит из узла;
- -1, если ребро входит в узел.

Понятие «входит» и «выходит» означает, что для каждого ребра задаётся направление, которое обычно ассоциируется с направлением тока в этом ребре.

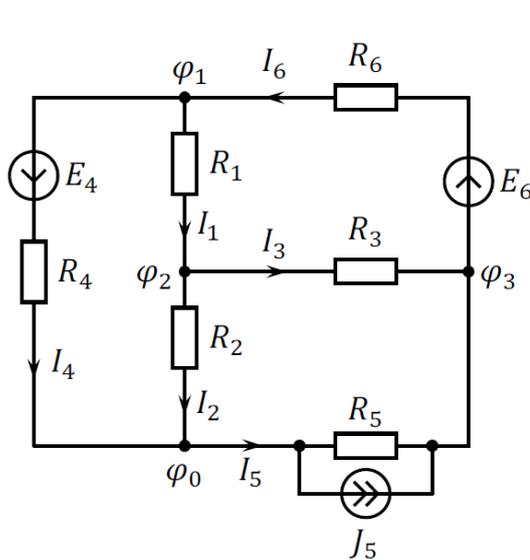
Токи в ветвях вычисляются

$$\mathbf{I}_v = \mathbf{G}_v \mathbf{A}^t \mathbf{U} + \mathbf{J}_v,$$

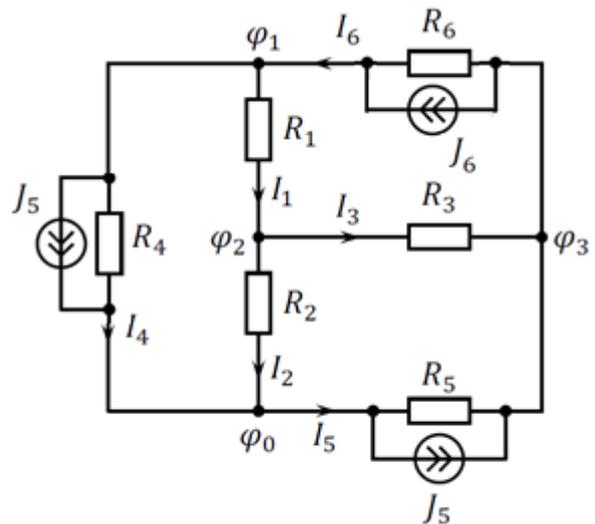
где

\mathbf{G}_v — диагональная матрица проводимостей размера $v \times v$, в которой диагональный элемент G_i равен проводимости i -й ветви, а недиагональные элементы равны нулю;

\mathbf{A}^t — транспонированная матрица соединений.



а)



б)

Рис. 1. Пример схемы а) исходная, б) после приведения к GJ виду

Для примера рассмотрим схему рис. 1. а). После приведения ветвей к виду GJ схема выглядит как на рис. 1. б).

Сформируем топологический список:

№ ветви	Нач. узел	Кон. узел	G	J
1.	1	2	G_1	0
2.	2	0	G_2	0
3.	2	3	G_3	0
4.	1	0	G_4	J_4
5.	0	3	G_5	J_5
6.	3	1	G_6	J_6

Пошаговое формирование матрицы узловых проводимостей и вектора задающих токов проводится следующим образом:

Шаг 0 – всего 4 узла, формируем нулевые расширенную матрицу узловых проводимостей и вектор задающих токов размерности 4×4 и 4×1 соответственно.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 1, ветвь №1, нач. узел 1, кон. узел 2. Поскольку у нас имеется узел 0, то отсчет строк и столбцов начинается с 0.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & -G_1 & 0 \\ 0 & -G_1 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2, ветвь №2, нач. узел 2, кон. узел 0.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_2 & 0 & -G_2 & 0 \\ 0 & G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_2 & -G_1 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3, ветвь №3, нач. узел 2, кон. узел 3.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_2 & 0 & -G_2 & 0 \\ 0 & G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_2 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 4, ветвь №4, нач. узел 1, кон. узел 0.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_2 + G_4 & -G_4 & -G_2 & 0 \\ -G_4 & G_1 + G_4 & -G_1 & 0 \\ -G_2 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} J_4 \\ -J_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 5, ветвь №5, нач. узел 0, кон. узел 3.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_2 + G_4 + G_5 & -G_4 & -G_2 & -G_5 \\ -G_4 & G_1 + G_4 & -G_1 & 0 \\ -G_2 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_5 & 0 & -G_3 & G_3 + G_5 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} J_4 - J_5 \\ -J_4 \\ 0 \\ J_5 \end{bmatrix}.$$

Шаг 6, ветвь №6, нач. узел 3, кон. узел 1.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_2 + G_4 + G_5 & -G_4 & -G_2 & -G_5 \\ -G_4 & G_1 + G_4 + G_6 & -G_1 & -G_6 \\ -G_2 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_5 & -G_6 & -G_3 & G_3 + G_5 + G_6 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} J_4 - J_5 \\ -J_4 + J_6 \\ 0 \\ J_5 - J_6 \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить окончательные матрицы, вычеркнем строки и столбцы, относящиеся к базисному (нулевому) узлу, т.е. первую строку и первый столбец у расширенной матрицы узловых проводимостей и первую строку у вектора узловых токов.

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_1 + G_4 + G_6 & -G_1 & -G_6 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_6 & -G_3 & G_3 + G_5 + G_6 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} -J_4 + J_6 \\ 0 \\ J_5 - J_6 \end{bmatrix}.$$

В результате получим окончательно систему уравнений по методу узловых потенциалов:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 + G_6 & -G_1 & -G_6 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_6 & -G_3 & G_3 + G_5 + G_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_4 + J_6 \\ 0 \\ J_5 - J_6 \end{bmatrix}.$$

Для определения токов в ветвях (применения закона Ома) используем следующие матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}; \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix}; \mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \end{bmatrix}.$$

Запишем, как будет выглядеть расчет токов в ветвях схемы с помощью сформированных матриц:

$$\mathbf{I}_e = \mathbf{G}_e \mathbf{A}^t \mathbf{U} + \mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & G_3 & -G_3 \\ G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_5 \\ -G_6 & 0 & G_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \cdot \varphi_1 - G_1 \cdot \varphi_2 \\ G_2 \cdot \varphi_2 \\ G_3 \cdot \varphi_2 - G_3 \cdot \varphi_3 \\ G_4 \cdot \varphi_1 + J_4 \\ -G_5 \cdot \varphi_3 + J_5 \\ -G_6 \cdot \varphi_1 + G_6 \cdot \varphi_3 + J_6 \end{bmatrix}.$$

Как и в случае с матрицей узловых проводимостей в своей программе мы можем составить расширенную матрицу соединений, включая базисный узел. А после для получения окончательной матрицы вычеркнуть строку, соответствующую базисному узлу.

3. Вопросы для коллоквиума

1. Каким образом вводится расчетная модель в машину?
2. Каков алгоритм поэлементного формирования узловых уравнений?
3. Какова размерность расширенной (полной) матрицы узловых проводимостей? Какова размерность матрицы узловых проводимостей?
4. Как составляется матрица соединений? Какова ее размерность матрицы соединений?
5. Чем расширенные матрицы отличаются от конечных?
6. Как проверяется расчет электрической цепи методом узловых потенциалов?

4. Подготовка к работе

1. Ознакомьтесь с теоретической справкой, ознакомьтесь с шаблоном программы в п. 1 раздела выполнения работы.

2. Для схемы в таблице 2 пронумеруйте узлы от 1 до m . Индексация матриц в MATLAB начинается с 1. Поэтому не рекомендуется в расчетах использовать узел 0. Пусть последний узел будет базисным. Составьте T-список. Ток в источниках тока равен 1 А. ЭДС источников равна 1 В. Сопротивления резисторов, кроме R_2 и R_7 , равны 1 Ом. Сопротивления R_2 и R_7 приведены в таблицах 3 и 4.

3. Выполните первые 3 шага составления матрицы узловых проводимостей и вектора узловых токов. Составьте матрицу соединений.

Таблица 2

Номер бригады (номер компьютера)	Схема
1, 4, 7, ... $3n+1$	
2, 5, 8, ... $3n+2$	
3, 6, 9, ... $3n$	

Таблица 3

Номер группы	1, 5, 10, 18	3, 6, 11, 17	2, 4, 12, 16	7, 8, 15	9, 13, 14
G_2 , См	1	1,3	1,6	1,9	2,2

Таблица 4

Номер бригады (номер компьютера)	1, 6, 11, 16, 21	2, 7, 12, 17, 22	3, 8, 13, 18	4, 9, 14, 19	5, 10, 15, 20
-------------------------------------	---------------------	---------------------	--------------	--------------	------------------

$G_7, \text{См}$	4	3,5	3	2,5	2
------------------	---	-----	---	-----	---

5. Рабочее задание

1. В вычислительной среде MATLAB используйте шаблон расчета электрических цепей с помощью принципа поэлементного вклада. Скопируйте шаблон лабораторной работы в блокнот и сохраните в файл «название файла латиницей».m в свою папку, откройте его в программе MATLAB. Шаблон:

```
%% Задайте T-список в формате [1;2;3]
```

```
begin_nodes = [_____];
```

```
end_nodes = [_____];
```

```
Gv = [_____];
```

```
Jv = [_____];
```

```
%% Формирование расширенных (полных) матрицы узловых проводимостей и вектора  
% задающих токов
```

```
m=max(max(begin_nodes),max(end_nodes)); %всего узлов
```

```
N=length(Gv); %всего ветвей
```

```
%-----
```

```
% введите размерность матриц Gp и Jp
```

```
%-----
```

```
Gp = zeros(_____, _____);
```

```
Jp = zeros(_____, _____);
```

```
for i=1: _____ % сколько раз должен отработать цикл for?
```

```
  k=begin_nodes(i);
```

```
  l=end_nodes(i);
```

```
%-----
```

```
% введите выражение для пошагового расчета матрицы узловых проводимостей,
```

```
% вектора задающих токов, матрицы соединений
```

```
%-----
```

```
end
```

```
%% Удаление строки и столбца последнего узла (базисного)
```

```
G=Gp;
```

```
G(m,:)=[];
```

```
G(:,m)=[];
```

```
J=Jp;
```

```
J(m,:)=[];
```

```
A=Ap;
```

```
A(m,:)=[];
```

```
%% Решение
```

```
%-----
```

```
% введите выражение для расчета узловых напряжений
```

```
%-----
```

```
U = _____;
```

```
%-----
```

```
% введите выражение для расчета токов ветвей
```

```
%-----
```

```
I = _____
```

Выполните задачи, записанные в тексте шаблона.

2. На первых трех строках T-списка проверьте, что массивы заполняются в соответствии с алгоритмом. Для этого либо измените цикл for соответствующим образом, чтобы программа не выполняла все циклы сразу, либо добавьте команду pause, которая остановит выполнение программы до тех пор, пока пользователь не нажмет клавишу Enter для продолжения. Одновременно можно убрать точку с запятой, чтобы матрицы отображались в командном окне. Запишите матрицу узловых проводимостей, вектор задающих токов и матрицу соединений на 1, 2 и 3 шаге обработки элементов T-списка.
3. Запишите результаты расчета.
4. Проверьте правильность расчета тока и напряжения в третьей ветви, повторив расчет в Simulink.
5. Проверьте правильность составления узловых уравнений, составив их вручную.
6. Сохраните программу для последующего использования.

6. Вопросы к защите

1. Перечислите правила формирования T-списка.
2. Почему в расширенной матрице узловых проводимостей удаляются последняя строка и столбец? Что будет, если их не удалить?
3. Как определить ток в любой ветви, зная узловые потенциалы?
4. Как изменится расчет, если изменить очередность ветвей в T-списке?
5. Как использовать изученный алгоритм для ветвей, содержащих источники ЭДС?
6. Можно ли технологию составления T-списка использовать для многополюсника (а не ветви)? Если да, то что в алгоритме изменится?