МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»
(ФГБОУ ВПО «СГГА»)

В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром
высшего профессионального образования для межвузовского использования
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по специальности 120401.65 «Прикладная геодезия»

Новосибирск
СГГА
2013

УДК 51
В31

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор, СГУПС
А.В. Пожидаев

доктор технических наук, профессор, СГУПС
К.Л. Комаров

кандидат физико-математических наук, доцент НГТУ
Д.А. Крымских

кандидат технических наук, доцент, СГГА
О.В. Твердовский

Вербная, В.П.

В31 Математика для дистанционного обучения : учеб. пособие / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 278 с.

ISBN 978-5-87693-605-9

Учебное пособие подготовлено доцентами кафедры высшей математики Сибирской государственной геодезической академии: В.П. Вербной, Г.П. Мартыновым и Е.С. Плюсниной. Пособие предназначено для студентов специальности 120401.65 «Прикладная геодезия», а также рекомендовано для студентов 1-го и 2-го курсов специальности «Горное дело» и направлений: «Геодезия и дистанционное зондирование», «Картография и геоинформатика», «Землеустройство и кадастры», «Экономика», «Менеджмент», «Экология и природопользование», «Информационные системы и технологии», «Техносферная безопасность». Пособие содержит краткую теорию по 7 разделам курса «Математики» (определения, формулы и теоремы), подробные примеры решения типовых задач и контрольные задания по 10 вариантам. Структура учебного пособия основана на примерном содержании АПИМ федеральных тестов по дисциплине «Математика».

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГГА

УДК 51

ISBN 978-5-87693-605-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенты дистанционной формы обучения СГГА при изучении математических дисциплин выполняют контрольные работы в соответствии с учебным планом. Количество контрольных работ зависит от объема математической дисциплины, который определен выпускающей кафедрой для данной специальности или направления обучения (в соответствии с ГОС или ФГОС). Содержание контрольных работ сформировано на основе примерной структуры АПИМ (аттестационных педагогических измерительных материалов) математических дисциплин данной специальности или направления обучения. Примерная структура АПИМ взята авторами на сайте fepo.ru.

●● Студенты специальности **«Прикладная геодезия»** изучают курс «Математика» (объем 720 часов, включающий 540 часов курса «Математика» и 180 часов курса «Теория вероятностей и математической статистики») на 1-м и 2-м курсах и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5); контрольная работа № 2 (раздел 1.5: задачи 1.6, 1.7, 1.8; раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2); контрольная работа № 3 (раздел 2.9: задачи 2.4, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10).

2 курс: контрольная работа № 4 (раздел 3.7: задачи 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6); контрольная работа № 5 (раздел 4.6: задачи 4.1, 4.2, 4.3, 4.4); контрольная работа № 6 (раздел 5.7: задачи 5.1, 5.2, 5.3, 5.4); контрольная работа № 7 (раздел 7.10: задачи 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5).

●● Студенты специальности **«Горное дело»** изучают курс «Математика» (объем 504 часа) на 1-м и 2-м курсах и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8); контрольная работа № 2 (раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.3, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10); контрольная работа № 3 (раздел 3.7: задачи 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.6).

2 курс: контрольная работа № 4 (раздел 4.6: задачи 4.1, 4.2, 4.3, 4.4); контрольная работа № 5 (раздел 5.7: задачи 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Картография и геоинформатика»** изучают курс «Математика» (объем 612 часов) на 1-м и 2-м курсах и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5); контрольная работа № 2 (раздел 1.5: задачи 1.6, 1.7, 1.8; раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2); контрольная работа № 3 (раздел 2.9: задачи 2.3, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10).

2 курс: контрольная работа № 4 (раздел 4.6: задачи 4.1, 4.2, 4.3, 4.4); контрольная работа № 5 (раздел 5.7: задачи 5.1, 5.2, 5.3, 5.4); контрольная работа № 6 (раздел 6.4: задачи 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Экология и природопользование»** изучают курс «Математика» (объем 288 часов) на 1-м курсе и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8); контрольная работа № 2 (раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10); контрольная работа № 3 (раздел 4.6: задачи 4.1, 4.2, 4.3; раздел 5.7: 5.1, 5.2, 5.3).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Экономика»** изучают математические дисциплины (объем 648 часов) на 1-м и 2-м курсах: на 1-м курсе – курс «Математический анализ», а на 2-м курсе – курсы «Линейная алгебра» и «Теория вероятностей и математической статистики». При этом они выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.3, 2.4); контрольная работа № 2 (раздел 2.9: задачи 2.5, 2.6, 2.7, 2.8); контрольная работа № 3 (раздел 2.9: задачи 2.9, 2.10; раздел 3.7: задачи 3.1, 3.2, 3.3).

2 курс: контрольная работа № 4 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5); контрольная работа № 5 (раздел 1.5: задачи 1.6, 1.7, 1.8); контрольная работа № 6 по курсу «Теории вероятностей и математической статистики» (раздел 7.10: задачи 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Менеджмент»** изучают математические дисциплины (объем 324 часа) на 1-м и 2-м курсах: на 1-м курсе – курс «Математика», на 2-м курсе – курс «Теория вероятностей и математической статистики» и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5); контрольная работа № 2 (раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.4, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10).

2 курс: контрольная работа № 3 (раздел 7.10: задачи 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Геодезия и дистанционное зондирование»** изучают курс «Математика» (объем 396 часов) и курс «Теория вероятностей и математическая статистика» (объем 108 часов) на 1-м и 2-м курсах и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8); контрольная работа № 2 (раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10); контрольная работа № 3 (раздел 3.7: задачи 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6).

2 курс: контрольная работа № 4 (раздел 4.6: задачи 4.1, 4.2, 4.3, 4.4; раздел 5.7: задачи 5.2, 5.3); контрольная работа № 5 по курсу «Теории вероятностей и математической статистики» (раздел 7.10: задачи 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Землеустройство и кадастры»** изучают курс «Математика» (объем 396 часов) на 1-м и 2-м курсах и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8); контрольная работа № 2 (раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.4, 2.9, 2.10).

2 курс: контрольная работа № 3 (раздел 3.7: задачи 3.1, 3.2, 3.4; раздел 5.7: задачи 5.1, 5.2, 5.3; раздел 6.4: задачи 6.1, 6.2); контрольная работа № 4 (раздел 6.4: задачи 6.4, 6.5, 6.6; раздел 7.10: задачи 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Информационные системы и технологии»** изучают математические дисциплины (объем 936 часов, включающий 792 часа курса «Математика» и 144 часа курса «Теория вероятностей и математической статистики») на 1-м и 2-м курсах. На 1-м курсе изучают курсы «Математика» и «Математика (математический анализ)». На 2-м курсе – курсы «Математика (математический анализ и дифференциальные уравнения)» и «Математика (дискретная математика)». При этом они выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5); контрольная работа № 2 (раздел 1.5: задачи 1.6, 1.7; раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.3, 2.4); контрольная работа № 3 (раздел 2.9: задачи 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10); контрольная работа № 4 (раздел 3.7: задачи 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6).

2 курс: контрольная работа № 5 (раздел 4.6: задачи 4.1, 4.2, 4.3, 4.4); контрольная работа № 6 (раздел 5.7: задачи 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5); контрольная работа № 7 по курсу «Математика (дискретная математика)» (раздел 6.4: задачи 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6); контрольная работа № 8 по курсу «Теории вероятностей и математической статистики» (раздел 7.10: задачи 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5).

●● Студенты-бакалавры по направлению **«Техносферная безопасность»** изучают курс «Высшая математика» (объем 360 часов) на 1-м курсе и выполняют следующие контрольные работы (номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки студента):

1 курс: контрольная работа № 1 (раздел 1.5: задачи 1.1, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7; раздел 3.7: задачи 3.1, 3.2, 3.4); контрольная работа № 2 (раздел 2.9: задачи 2.1, 2.2, 2.4, 2.9, 2.10; раздел 5.7: задачи 5.1, 5.2, 5.3); контрольная работа № 3 (раздел 6.4: задачи 6.1, 6.2, 6.4, 6.5, 6.6); контрольная работа № 4 (раздел 7.10: задачи 7.1, 7.2, 7.4, 7.5).

1. АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Матрицы. Системы линейных уравнений

Определение 1.1. Прямоугольная таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

называется *матрицей* размера $m \times n$. Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называются *элементами матрицы*.

Если в матрице число строк m совпадает с числом столбцов n, то такая матрица называется *квадратной.*

Определение 1.2. *Суммой* двух матриц одинакового размера $m \times n$:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3}\dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрица размера $m \times n$:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3}\dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Определение 1.3. *Произведением числа* α *на матрицу* A называется матрица

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13}\ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23}\ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3}\ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

т. е. матрица, все элементы которой умножаются на число α.

Определение 1.4. *Произведением матрицы* A (размера $m \times p$) на матрицу B (размера $p\times n$) называется матрица $A \cdot B$ (размера $m \times n$), каждый элемент которой, стоящий в i-й строке и k-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{ip}b_{pk}. \qquad (1.4)$$

При этом, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

При умножении матрицы A (слева) на матрицу B (справа) необходимо, чтобы количество столбцов матрицы A равнялось количеству строк матрицы B. В противном случае матрицы перемножать нельзя.

Определение 1.5. *Элементарными преобразованиями матриц* называются следующие преобразования:

1) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженного на одно и то же постоянное число;

2) перестановка двух любых строк (столбцов) в матрице.

Определение 1.6. Две матрицы называются *эквивалентными*, если они получены одна из другой с помощью цепочки элементарных преобразований (обозначается $A\sim B$).

Пример 1.1. Даны матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и матрица $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Найти AB.

Решение

$$AB=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 6 \\ \mathbf{7} & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1 \cdot 5 + 2 \cdot 7} & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{19} & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

(Элементы 1-й строки первой матрицы умножаются на соответствующие элементы 1-го столбца второй матрицы, полученные произведения складываются, получается элемент, стоящий на пересечении 1-й строки и 1-го столбца матрицы-произведения. Аналогично, перемножением каждой строки первой матрицы на каждый столбец второй матрицы получаются остальные элементы).

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

Пример 1.2. Даны матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти AB.

Решение

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{расчеты элементов аналогичны} \\ \text{предыдущему примеру} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot 4+0\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot(-3)+0\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ 4\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+0\cdot(-2) & 4\cdot 4+(-2)\cdot 3+0\cdot(-1) & 4\cdot(-3)+(-2)\cdot 1+0\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 1+3\cdot(-2) & 3\cdot 4+1\cdot 3+3\cdot(-1) & 3\cdot(-3)+1\cdot 1+3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & -7 \\ -6 & 10 & -14 \\ -8 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -7 \\ -6 & 10 & -14 \\ -8 & 12 & -5 \end{pmatrix}$.

Определители второго и третьего порядков

Определение 1.7. *Определитель второго порядка*, соответствующий матрице элементов $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1.5)$$

Определение 1.8. *Определитель третьего порядка*, соответствующий матрице элементов $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ может быть вычислен разложением по любой строке (столбцу).

Например, по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (1.6)$$

Разложение по второй строке выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}).$$

Определители выше третьего порядка также могут быть вычислены разложением по первой строке (или по любой другой строке (столбцу)).

Метод Крамера решения систем алгебраических уравнений

Пусть дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots a_{33}, b_1, b_2, b_3$ – заданные постоянные; x_1, x_2, x_3 – неизвестные.

Если определитель Δ системы не равен нулю: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Это единственное решение может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{1.7a}$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Справка. Габриэ́ль Кра́мер (1704–1752, Баньоль-сюр-Сез, Франция) – швейцарский математик, ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры.

Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Определение 1.9. Пусть дана квадратная матрица A размера $n \times n$. Матрица A^{-1} размера $n \times n$ называется *обратной* по отношению к матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & 1 & 0... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – *единичная матрица размера* $n \times n$.

Обратная матрица существует для всякой квадратной матрицы, определитель которой отличен от нуля, причем

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n}\dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

где Δ – определитель матрицы A, а числа $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$ – *алгебраические дополнения* соответствующих элементов матрицы A. Алгебраические дополнения находятся по формуле:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \tag{1.9}$$

где M_{ij} – определитель, полученный вычеркиванием в определителе матрицы A i-й строки и j-го столбца. Число M_{ij} называется *минором* элемента a_{ij} матрицы A.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (1.7):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2; \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется *основной матрицей* системы. Вектор-матрица $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ называется *матрицей неизвестных.* Вектор-матрица $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ называется *матрицей правых частей*. Тогда исходную систему можно переписать в матричной форме: $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$ то решение этой системы находится по формуле: $\boldsymbol{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$.

Пример 1.3. Решить систему уравнений матричным методом и по правилу Крамера:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12; \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -24. \end{cases}$$

Решение

1. Найдем определитель основной матрицы системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$ (разлагаем определитель по первой строке $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, где a_{1j} – элементы первой строки; A_{1j} – алгебраические дополнения к этим элементам) $= -2A_{11} + 3A_{12} + 5A_{13}$.

Так как определитель отличен от нуля, существует обратная матрица A^{-1}. Для нахождения обратной матрицы находим все алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{5} \\ \cancel{-4} & 1 & -3 \\ \cancel{1} & 3 & -4 \end{vmatrix} =$ (вычеркиваем первую строку и первый столбец) =

$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 5;$

$A_{12} =$ (аналогично предыдущему, вычеркваем первую строку, второй столбец) =

$= (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -19;$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -13 \Rightarrow \Delta = -2 \cdot 5 + 3 \cdot (-19) + 5 \cdot (-13) = -132 \neq 0 \Rightarrow$ существует обратная матрица (формула (1.8) при $n = 3$).

Поэтому находим остальные алгебраические дополнения:

$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=27$; $\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 1 & -4\end{vmatrix}=3$; $\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9$;

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14$; $\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -4 & -3\end{vmatrix}=-26$; $\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -4 & 1\end{vmatrix}=10.$

Тогда $\quad A^{-1}=-\dfrac{1}{132}\begin{pmatrix}5 & 27 & -14\\ -19 & 3 & -26\\ -13 & 9 & 10\end{pmatrix}.$

Решение системы $\quad \boldsymbol{X}=\mathrm{A}^{-1}\boldsymbol{b},\;$ где $\;\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}12\\ 0\\ -24\end{pmatrix}.$

Тогда

$$\boldsymbol{X}=-\frac{1}{132}\cdot\begin{pmatrix}5 & 27 & -14\\ -19 & 3 & -26\\ -13 & 9 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\ 0\\ -24\end{pmatrix}=-\frac{1}{132}\begin{pmatrix}5\cdot 12+27\cdot 0+(-14)\cdot(-24)\\ -19\cdot 12+3\cdot 0+(-26)\cdot(-24)\\ -13\cdot 12+9\cdot 0+10\cdot(-24)\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{132}\begin{pmatrix}396\\ 396\\ -396\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -3\\ 3\end{pmatrix}.$$

2. По правилу Крамера: определитель основной матрицы системы $\Delta=-132\neq 0$, поэтому можно применить формулы Крамера (1.7а).

Найдем:

$\Delta_x=\begin{vmatrix}12 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -3\\ -24 & 3 & -4\end{vmatrix}=$ (так как во второй строке один из элементов равен нулю, для простоты расчетов разлагаем определитель по второй строке) =

$=\;0\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}12 & 5\\ -24 & -4\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}12 & 3\\ -24 & 3\end{vmatrix}=0+(-48+120)+3(36+72)=$
$=72+324=396;$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}-2 & 12 & 5\\ -4 & 0 & -3\\ 1 & -24 & -4\end{vmatrix}=$ (так как во второй строке один из элементов равен нулю, для простоты расчетов разлагаем определитель по второй строке) =

$$= -(-4)\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ -24 & -4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & -24 \end{vmatrix} = 4(-48 + 120) + 0 + 3(48 - 12) =$$

$= 288 + 108 = 396;$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 12 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -24 \end{vmatrix} =$ (так как во второй строке один из элементов равен нулю, для простоты расчетов разлагаем определитель по второй строке) =

$$= 4\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 3 & -24 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & -24 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4(-72 - 36) + (48 - 12) + 0 =$$

$= -432 + 36 = -396.$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{396}{-132} = -3; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{396}{-132} = -3; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-396}{-132} = 3.$$

Ответ: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Ранг матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Пусть задана произвольная матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.10. Группа элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots,$ называется *главной диагональю* матрицы A.

С помощью цепочки элементарных преобразований приведем матрицу A к «треугольному» виду. Матрицей в «треугольном» виде называется матрица у которой, элементы, стоящие ниже «главной» диагонали равны нулю.

После преобразований получим матрицу:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13}\ldots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23}\ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots & \tilde{a}_{kn} \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } k\le m,$$

или матрицу:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13}\ldots & \tilde{a}_{1l}\ldots\tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23}\ldots & \tilde{a}_{2l}\ldots\tilde{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33}.. & \tilde{a}_{3l}\ldots\tilde{a}_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots\ \ldots. \\ 0 & 0 & 0\ldots & \tilde{a}_{ll}\ldots\tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{где } l\le n.$$

Определение 1.11. Число ненулевых строк в матрице $\tilde{A}$ называется *рангом* матрицы A и обозначается $rangA$ (нулевой строкой назовем строку, состоящую из всех нулей).

Рассмотрим систему (1.7) трех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2; \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

Назовем матрицу $B=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ *расширенной матрицей системы.*

Найдем $rangA$ и $rangB$, где A – основная матрица системы.

Если:

1) $rangA = rangB = n$, где n (в нашем случае $n = 3$) – число неизвестных в системе, то система имеет единственное решение;

2) $rangA = rangB < n$, система имеет бесконечное множество решений;

3) $rangA \neq rangB$, система не имеет решений (не совместна).

В тех случаях, когда система имеет одно или множество решений по «треугольному» виду расширенной матрицы восстанавливаем систему и решаем ее снизу вверх.

Справка. Иоганн Карл Фри́дрих Га́усс (1777, Брауншвейг – 1855, Гёттинген) – немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времен. С именем Гаусса связано множество теорем и научных терминов в математике, астрономии и физике.

Пример 1.4. Исследовать системы на совместность:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6; \\ -4x_1 + 8x_2 = -12; \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 10; \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 7; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

Решить совместную систему методом Гаусса.

Решение

а) Запишем расширенную матрицу системы и с помощью цепочки элементарных преобразований приведем ее к «треугольному» виду.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ -4 & 8 & 0 & -12 \\ 2 & -2 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim$$ (умножим первую строку на 4 и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (–2) и сложим с третьей) ~

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -12 & 12 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim$$ (поменяем местами вторую и третью строки матрицы) ~

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 12 & -12 & 12 \end{array}\right) \sim$$ (умножим вторую строку на 3 и сложим с третьей) ~

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -3 & 6 \\ 0 & \mathbf{-4} & 4 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right).$$

Получили матрицу «треугольного» вида (ниже главной диагонали стоят только нули). Найдем ранги основной и расширенной матриц.

В «треугольном» виде расширенной матрицы две ненулевых строки, а $B \sim \widetilde{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ следовательно, $rangB = 2$.

«Треугольный» вид основной матрицы получаем из «треугольного» вида расширенной матрицы отбрасыванием последнего столбца, стоящего за чертой:

$$A \sim \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ здесь также две ненулевые строки} - rangA = 2.$$

Так как $rangA = rangB = 2 < 3 = n \Rightarrow$ система имеет бесконечное множество решений. Найдем его, для этого восстановим систему по «треугольному» виду расширенной матрицы $\widetilde{B}$.

$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6; \\ -4x_2 + 4x_3 = -4, \end{cases}$ получили два уравнения для трех неизвестных, пусть x_3 – любое число, из последнего уравнения найдем x_2 и подставим в первое уравнение:

$$\left.\begin{cases} x_1 = 6 - x_2 + 3x_3; \\ x_2 = 1 + x_3; \\ x_3 - \text{любое число}. \end{cases}\right| \Rightarrow \left.\begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3; \\ x_2 = 1 + x_3; \\ x_3 - \text{любое число}. \end{cases}\right|$$ – бесконечное множество решений.

б) Запишем расширенную матрицу системы и с помощью цепочки элементарных преобразований приведем ее к «треугольному» виду.

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 2 & 10 \\ 7 & 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim$ (для получения нулей в первом столбце умножим первую строку на 7 и сложим со второй, затем на 2 и сложим с третьей) $\sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 2 & 10 \\ 0 & 54 & 18 & 77 \\ 0 & 18 & 6 & 26 \end{array}\right) \sim$ (так как во второй строке на втором месте стоит больший элемент, чем на том же месте в третьей строке поменяем местами вторую и третью строки) $\sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 & \vert 10 \\ 0 & 18 & 6 & \vert 26 \\ 0 & 54 & 18 & \vert 77 \end{pmatrix} \sim$ (для получения нуля на втором месте в третьей строке умножим вторую строку на (–3) и сложим с третьей) $\sim \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 7 & 2 & \vert 10 \\ 0 & \mathbf{18} & 6 & \vert 26 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \vert -1 \end{pmatrix} = \tilde{B}$.

Получили «треугольный» вид. Найдем ранги основной и расширенной матрицы.

В «треугольном» виде $\tilde{B}$ расширенной матрицы три ненулевых строки, следовательно, $rangB = 3$. «Треугольный» вид основной матрицы получаем из «треугольного» вида расширенной матрицы отбрасыванием последнего столбца, стоящего за чертой в матрице $\widetilde{B}$.

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, здесь две ненулевые строки – $rangA = 2$.

Так как $rangA \neq rangB$ система не имеет решений.

Ответ: а) $\begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3; \\ x_2 = 1 + x_3; \\ x_3 - \text{любое число}; \end{cases}$ б) система не имеет решений.

1.2. Векторы и действия над ними

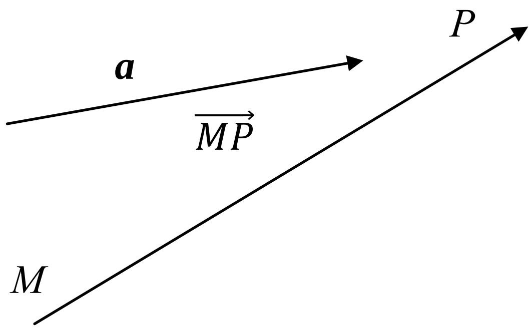

Рис. 1.1

Определение 1.12. *Геометрический вектор* – это направленный отрезок, заданной длины. Векторы могут обозначаться следующим образом: ***a***, $\overrightarrow{MP}$, M – начальная точка вектора; P – конечная точка вектора (рис. 1.1).

Понятие вектора имеет более широкий смысл. Вектором называют элемент линейного пространства, как правило, конечномерного. Все множество геометрических векторов составляет линейное пространство. Линейное пространство образуют многие математические объекты, например, матрицы одного размера, или многочлены. Далее, под словом вектор всегда имеем в виду геометрический вектор.

Определение 1.13. Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* или *модулем*, и обозначается $|\boldsymbol{a}|, |\overrightarrow{MP}|$.

Определение 1.14. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *коллинеарными* (параллельными), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (обозначение: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$).

Определение 1.15. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *сонаправленными,* если они коллинеарны и их направления совпадают (обозначение: $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$).

Определение 1.16. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *противоположно-направленными*, если они коллинеарны и их направления противоположны (обозначение: $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$).

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором*.

Определение 1.17. *Ортом вектора* $\boldsymbol{a}$ называется единичный вектор $\boldsymbol{a}_0$ сонаправленный с $\boldsymbol{a}$ (рис. 1.2), т. е.

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.10}$$

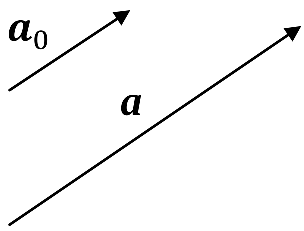

Рис. 1.2

Нулевой вектор $\mathbf{0}$ – это вектор, начало и конец которого совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю, а направление не определено.

Два вектора равны ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$), если их направления совпадают и длины равны ($|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ и $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$).

Базис в пространстве (в R^3)

Определение 1.18. Три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, параллельные одной плоскости или лежащие в одной плоскости называются *компланарными* векторами. Если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ не являются компланарными, то их называют *базисом в пространстве (в R^3).*

Определение 1.19. Если векторы рассматриваются на плоскости, то неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ также называются *базисом на плоскости (в R^2).*

Разложение вектора по базису

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ – базис в R^3. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ однозначно разлагается по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, т. е. существуют единственные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называют *координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Запись $\boldsymbol{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\} \cdot \boldsymbol{e}$ означает, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ являются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, при этом $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$.

Правая и левая тройки векторов

Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – три некомпланарных вектора. Говорят, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют *правую тройку векторов* (рис. 1.3), если из конца третьего вектора $\boldsymbol{c}$ кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ виден против часовой стрелки. В противоположном случае тройка векторов называется *левой* (рис. 1.4).

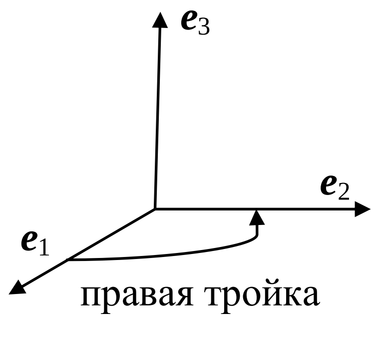

Рис. 1.3

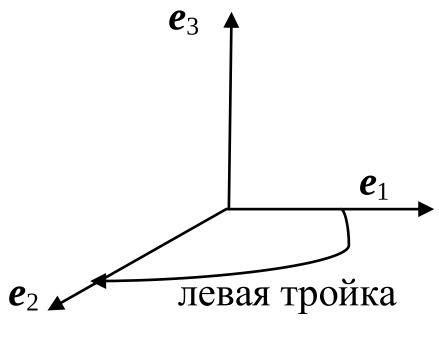

Рис. 1.4

Проекция вектора на вектор

Определение 1.20. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ – векторы; φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. *Проекцией вектора* $\boldsymbol{a}$ *на направление вектора* $\boldsymbol{b}$ (рис. 1.5) называется число

$$OC = Пр_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi. \qquad (1.11)$$

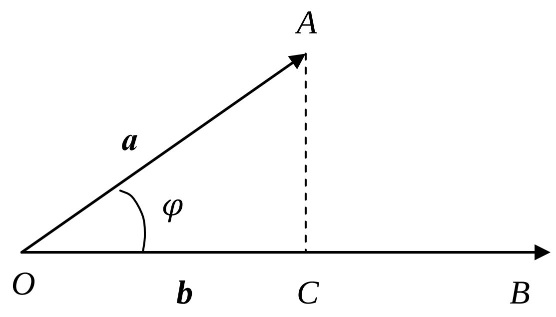

Рис. 1.5

Если $\varphi = \pi/2$, то $Пр_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = 0$, и векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ называются *перпендикулярными* или *ортогональными* (обозначение: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$).

Ортонормированный базис

Определение 1.21. Базис, состоящий из единичных взаимно перпендикулярных векторов, называется *ортонормированным*, а векторы, составляющие ортонормированный базис, называются *ортами*.

Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение 1.22. *Скалярным произведением векторов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ называется число

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\varphi, \qquad (1.12)$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$;

2) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$;

3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

4) $(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, α – вещественное число;

5) если $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} \neq 0$, и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$, то $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$;

6) $$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}. \qquad (1.13)$$

Векторное произведение векторов и его свойства

Определение 1.23. Вектор $\boldsymbol{c}$ удовлетворяющий условиям:

1) $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$;

2) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\varphi$;

3) векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов;

называется *векторным произведением векторов* и обозначается $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, (рис. 1.6).

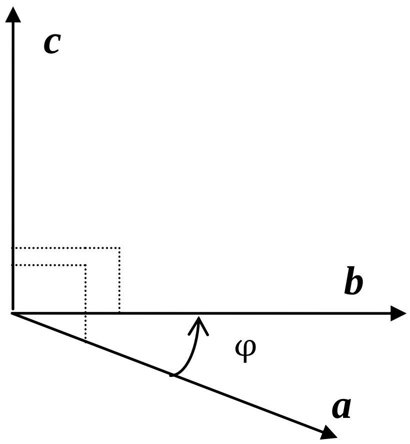

Рис. 1.6

Векторное произведение обладает свойствами:

1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$;

2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$;

3) $(\alpha\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, α – вещественное число;

4) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = S$, (1.14)

где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$;

5) если $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} \neq 0$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$, то $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Смешанное произведение векторов и его свойства

Определение 1.24. Число $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ называется *смешанным произведением векторов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и обозначается $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

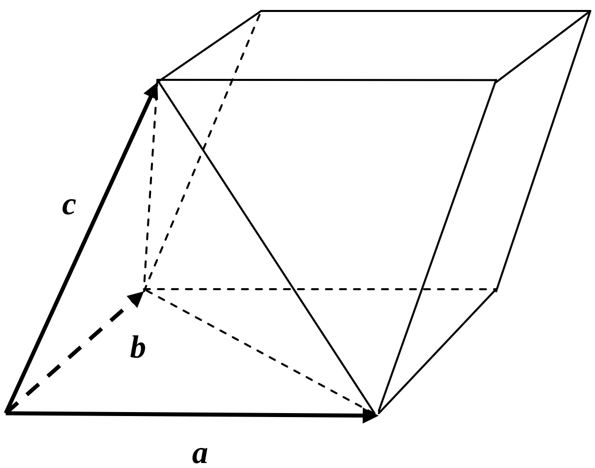

Рис. 1.7

Если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – компланарные векторы, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$.

Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, либо шести объемам пирамиды, построенной на этих векторах (рис. 1.7).

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\right|. \tag{1.15}$$

Прямоугольная декартовая система координат (ПДСК)

Определение 1.25. *Прямоугольная декартовая система координат* (ПДСК) состоит из фиксированной точки O (*центра системы координат*) и трех пересекающихся в ней, взаимно перпендикулярных направленных прямых Ox, Oy, Oz (*осей системы координат*).

Единичные векторы, задающие направления осям Ox, Oy, Oz, обозначаются буквами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и образуют ортонормированный базис в R^3 (их длины задают масштаб по осям Ox, Oy, Oz). Направления векторов выбираются так, чтобы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образовывали правую тройку векторов.

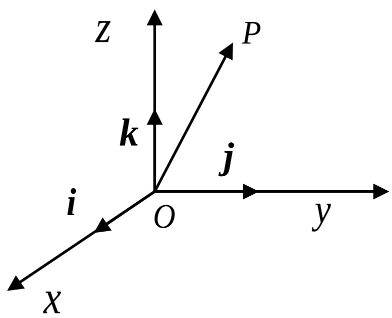

Рис. 1.8

Вектор $\overrightarrow{OP}$ называется *радиус-вектором* точки P. Координаты вектора $\overrightarrow{OP}$ относительно базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ назовем координатами точки P в ПДСК, т. е. если $\overrightarrow{OP} = p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}$ $\left(\overrightarrow{OP} = \{p_x; p_y; p_z\}\right)$, то $P(p_x; p_y; p_z)$ – точка с координатами p_x, p_y, p_z (рис. 1.8).

Так как $\boldsymbol{i} = 1\cdot\boldsymbol{i} + 0\cdot\boldsymbol{j} + 0\cdot\mathbf{k}$, $\boldsymbol{j} = 0\cdot\boldsymbol{i} + 1\cdot\boldsymbol{j} + 0\cdot\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} = 0\cdot\boldsymbol{i} + 0\cdot\boldsymbol{j} + 1\cdot\boldsymbol{k}$, то $\boldsymbol{i} = \{1;0;0\}$, $\boldsymbol{j} = \{0;1;0\}$, $\boldsymbol{k} = \{0;0;1\}$.

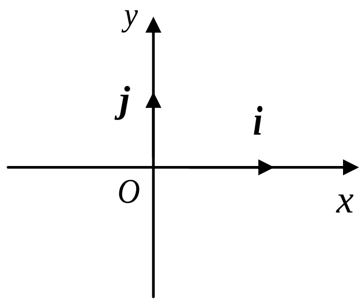

Рис. 1.9

Если векторы рассматриваются на плоскости, то ПДСК состоит из двух перпендикулярных осей Ox, Oy с направляющими ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ (рис. 1.9), то $\boldsymbol{i} = \{1;0\}$, $\boldsymbol{j} = \{0;1\}$.

Нахождение координат вектора, заданного двумя точками

Пусть в ПДСК заданы точки $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда вектор

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} = \{x_2 - x_{1,} y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \tag{1.16}$$

т. е. чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, необходимо из координат конца вектора (точка B) отнять координаты начала вектора (точка A).

Линейные операции над векторами

Пусть в ПДСК заданы векторы $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$.

Тогда:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k}$, т. е. при сложении векторов их одноименные координаты складываются;

$\alpha \cdot \boldsymbol{a} = (\alpha \cdot x_1)\boldsymbol{i} + (\alpha \cdot y_1)\boldsymbol{j} + (\alpha \cdot z_1)\boldsymbol{k}$, α – вещественное число, т. е. при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число.

Векторы $\alpha \cdot \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}$ являются коллинеарными, при этом если $\alpha > 0$, то их направления совпадают, если $\alpha < 0$, то их направления противоположны. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны, т. е. если $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, то $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов в ПДСК

Пусть в ПДСК заданы векторы $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$. Тогда

1) скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2; \qquad (1.17)$$

2) модуль вектора:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \qquad (1.18)$$

3) векторное произведение:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \qquad (1.19)$$

4) смешанное произведение:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.20}$$

Пример 1.5. В ПДСК даны векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. Найти косинус угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Решение

Косинус угла между векторами находится по формуле (1.13):

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

Найдем скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1) = -5$.

Длины векторов $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$,

тогда $\cos\varphi=\dfrac{-5}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{-5}{6}$.

Ответ: $\cos\varphi=\dfrac{-5}{6}$.

Пример 1.6. В ПДСК даны векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. Найти единичный вектор $\boldsymbol{x}$ перпендикулярный векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Решение

Вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}.$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2+(-5)^2}=5\sqrt{3}.$$

В качестве искомого вектора $\boldsymbol{x}$ можно взять вектор $\boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = -\frac{\boldsymbol{i}}{5\sqrt{3}} - \frac{7\boldsymbol{j}}{5\sqrt{3}} - \frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$ или вектор $\boldsymbol{x}_2 = -\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = \frac{\boldsymbol{i}}{5\sqrt{3}} + \frac{7\boldsymbol{j}}{5\sqrt{3}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$. Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_1$ образуют правую тройку векторов, а векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_2$ – левую тройку.

Ответ: $\boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = -\frac{\boldsymbol{i}}{5\sqrt{3}} - \frac{7\boldsymbol{j}}{5\sqrt{3}} - \frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$, или $\boldsymbol{x}_2 = -\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = \frac{\mathbf{i}}{5\sqrt{3}} + \frac{7\boldsymbol{j}}{5\sqrt{3}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$.

Пример 1.7. Найти $\text{Пр}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}$, если известно, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, угол φ между векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ равен $\pi/6$.

Решение

Из формул (1.11) и (1.13) следует, что $\textit{Пр}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}|}$.

Используя свойства скалярного произведения, находим:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) =$$

$$= 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 2|\boldsymbol{a}|^2 + 3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi - 2|\boldsymbol{b}|^2 =$$

$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2\cos\frac{\pi}{6} - 2 \cdot 2^2 = 3\sqrt{3} - 6;$$

$$|\boldsymbol{y}|^2 = (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - 4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) =$$

$$= 4|\boldsymbol{a}|^2 - 4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi + |\boldsymbol{b}|^2 = 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} + 4^2 = 8 - 4\sqrt{3} \Rightarrow |\boldsymbol{y}| = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $\textit{Пр}_y\boldsymbol{x} = \frac{3(\sqrt{3} - 2)}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}} = \frac{3(\sqrt{3} - 2)}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Ответ: $\textit{Пр}_y\boldsymbol{x} = \frac{3(\sqrt{3} - 2)}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Пример 1.8. В ПДСК заданы векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ такой, чтобы его скалярное произведение с векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ равнялось $-12, 6, -8$ соответственно.

Решение

Пусть $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k},$ из условия задачи получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = x_1 + 3x_2 - x_3 = -12; \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 + x_3 = 6; \quad (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -8. \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -12; \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными x_1, x_2, x_3. По формулам Крамера находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \text{(разлагаем по первой строке)} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3+1) - 3(-3-2) - (1+2) = 10;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -12 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \text{(разлагаем по первой строке)} =$$

$$= -12\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = -12(-3+1) - 3(18+8) - (-6-8) = -4.$$

Аналогично находим:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -12 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -8 & 3 \end{vmatrix} = -30; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -12 \\ -1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = -10 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = -4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Ответ: $\boldsymbol{x} = -4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$

Пример 1.9. В ПДСК заданы векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y},$ где вектор $\boldsymbol{x}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, и $|\boldsymbol{x}| = 3,$ а вектор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$

Решение

Вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\-3&1&-2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}-1&1\\1&-2\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}2&1\\-3&-2\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\quad |\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}.$$

Вектор $\boldsymbol{x}$ должен быть (см. определение векторного произведения) коллинеарен вектору $\boldsymbol{c}$. Так как по условию задачи $|\boldsymbol{x}|=3$, то $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}\sqrt{3}=\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}-\sqrt{3}\boldsymbol{k}$. Находим $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\sqrt{3}&\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\-1&0&-1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\0&-1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\-1&-1\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}\\-1&0\end{vmatrix}=-\sqrt{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\Rightarrow$$

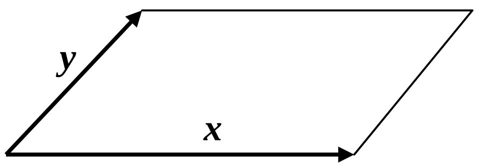

Рис. 1.10

$$\Rightarrow S=|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|=\left(-\sqrt{3}\right)^2\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$$

– площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ (рис. 1.10).

Ответ: $S=3\sqrt{2}$.

Пример 1.10. В ПДСК заданы векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, и точки $M(1;-3;5)$, $N(-2;1;4)$. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{z}=\overrightarrow{MN}$.

Решение

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}-2&1\\-1&3\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}1&-2\\1&-1\end{vmatrix}=$$

$$=\boldsymbol{i}(-6+1)-\boldsymbol{j}(3-1)+\boldsymbol{k}(-1+2)=-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{z}=\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{i}(-2-1)+\boldsymbol{j}(1+3)+\boldsymbol{k}(4-5)=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\begin{vmatrix}-5 & -2 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ -3 & 4 & -1\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-48.$$

По свойствам смешанного произведения: $V=|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|=48-$ объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

Ответ: $V=48$.

1.3. Прямая и плоскость в пространстве, прямая на плоскости

Плоскость в пространстве

Определение 1.26. Пусть дана ПДСК. Уравнение:

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad A^2+B^2+C^2\neq 0, \tag{1.21}$$

задает плоскость и называется *общим уравнением плоскости*, если оно выполняется для всех точек $M(x, y, z)$ на этой плоскости; и не выполняется для точек, не лежащих на этой плоскости. Для написания общего уравнения плоскости надо определить вектор *нормали* $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ (нормаль плоскости – это вектор перпендикулярный плоскости) и одну точку плоскости $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \;\Rightarrow\; Ax+By+Cz+D=0,$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Если известно общее уравнение плоскости, то можно легко получить *нормальное уравнение плоскости*; разделив на $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$:

$$\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y+\cos\gamma\cdot z-p=0, \tag{1.22}$$

где $\cos\alpha=\pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\beta=\pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

$\cos\gamma=\pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $p=\mp\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Знак «плюс» или знак «минус» выбирается так, чтобы $p>0$. Углы α, β, γ – это углы между вектором нормали $\boldsymbol{n}$ и осями координат Ox, Oy, Oz соответственно.

Если известно нормальное уравнение плоскости, то легко найти расстояние ρ от точки $P_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ до этой плоскости:

$$\rho = |\cos\alpha \cdot x_1 + \cos\beta \cdot y_1 + \cos\gamma \cdot z_1 - p|. \tag{1.23}$$

Прямая в пространстве

Прямая, проходящая через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{s} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$, задается:

- *либо общими уравнениями прямой в R^3:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{1.24}$$

в этом случае

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2; \tag{1.25}$$

- *либо каноническими уравнениями прямой:*

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}; \tag{1.26}$$

- *либо параметрическими уравнениями прямой:*

$$\begin{cases} x = lt + x_0; \\ y = mt + y_0; \\ z = nt + z_0, \end{cases} \tag{1.27}$$

где t – параметр.

Определение 1.27. Вектор $\boldsymbol{s}$ лежащий на прямой или ей параллельный, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Прямая на плоскости

Определение 1.28. Пусть задана ПДСК на плоскости. Уравнение

$$Ax+By+D=0,\ \ A^2+B^2\neq 0. \qquad (1.28)$$

задает прямую на плоскости и называется *общим уравнением прямой* на плоскости (при этом данное уравнение выполняется для всех точек $M(x, y)$, принадлежащих этой прямой и не выполняется для всех точек, не принадлежащих этой прямой). Для написания общего уравнения прямой надо знать вектор нормали $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}$ (нормаль прямой – это вектор перпендикулярный данной прямой) и одну точку прямой $P_0(x_0;\, y_0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \ \Rightarrow\ Ax+By+D=0,$$

где $D=-Ax_0-By_0$.

Если известно общее уравнение прямой, то можно найти *нормальное уравнение прямой*, разделив на $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\cos\varphi\cdot x+\sin\varphi\cdot y-p=0, \qquad (1.29)$$

где $\cos\varphi=\pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $\sin\varphi=\pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $p=\mp\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак «плюс» или знак «минус» выбирается так, чтобы $p>0$. Здесь φ – угол между вектором нормали $\boldsymbol{n}$ и осью Ox.

Если известно нормальное уравнение прямой, то легко найти расстояние ρ от точки $P_1(x_1;\, y_1)$ до этой прямой:

$$\rho=|\cos\varphi\cdot x_1+\sin\varphi\cdot y_1-p|. \qquad (1.30)$$

Если из общего уравнения прямой можно выразить переменную y, то получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом*:

$$y=kx+b, \qquad (1.31)$$

здесь $k=-\dfrac{A}{B}$ – угловой коэффициент; $b=-\dfrac{D}{B}$ – свободный член уравнения; $B\neq 0$.

1.4. Кривые второго порядка

Определение 1.29. *Кривой 2-го порядка* называется линия, уравнение которой является уравнением 2-го порядка относительно ПДСК:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \qquad (1.32)$$

где $a_{11}, \ldots, a_0$ – заданные числа, причем $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, (при этом данное уравнение выполняется для всех точек $M(x, y)$, принадлежащих этой кривой, и не выполняется для всех точек, не принадлежащих этой кривой).

Уравнение кривой 2-го порядка может определять окружность, эллипс, гиперболу, параболу, пару пересекающихся прямых, пару параллельных прямых, одну точку или же вообще не определять вещественных точек.

Окружность

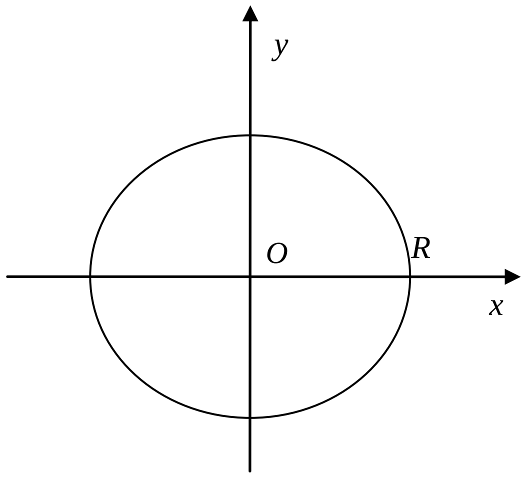

Рис. 1.11

Определение 1.30. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии, называемом *радиусом*, от фиксированной точки, называемой *центром окружности* (рис. 1.11).

Каноническое уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \qquad (1.33)$$

здесь R – радиус окружности; точка $C(x_0, y_0)$ – центр окружности. Если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности примет более простой вид:

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (1.34)$$

Эллипс

Определение 1.31. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$. Каноническое уравнение эллипса, с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.35}$$

здесь $a > 0$ – большая полуось; $b > 0$ – малая полуось ($a > b$).

Основными параметрами эллипса являются: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – левый и правый фокусы; $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет; $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ – левая и правая директриса (рис. 1.12), аналогичным образом можно определить эллипс и при $a < b$.

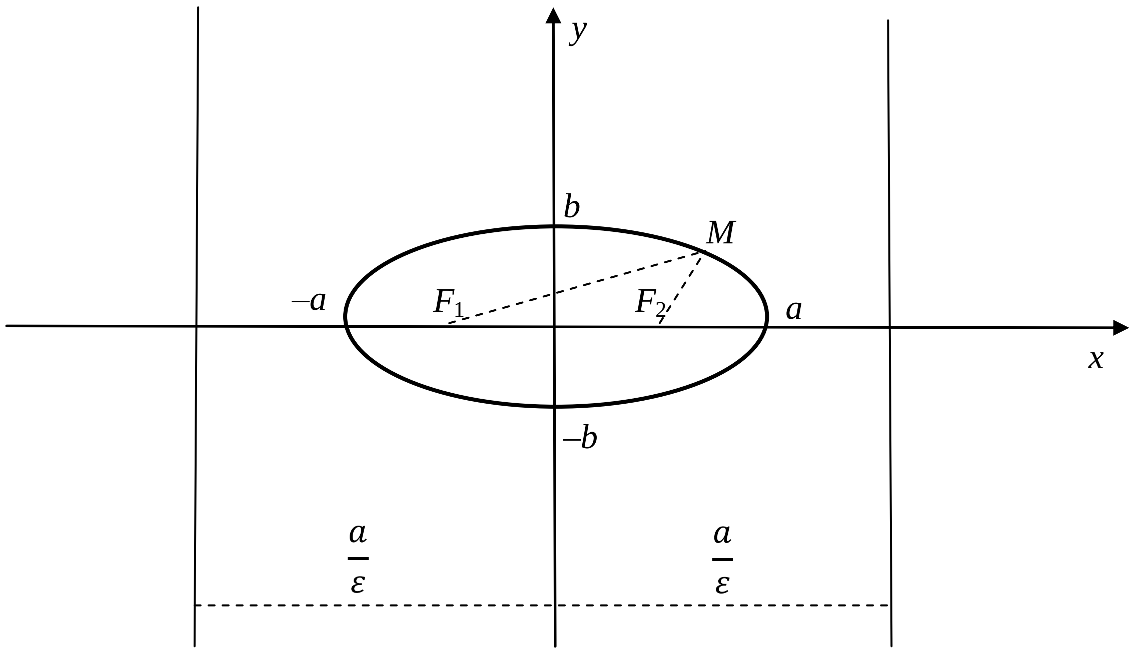

Рис. 1.12

Гипербола

Определение 1.32. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.36}$$

– каноническое уравнение гиперболы; $a>0$ – действительная полуось; $b>0$ – мнимая полуось; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – левый и правый фокусы; $c=\sqrt{a^2+b^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ – эксцентриситет; $x=-\frac{a}{\varepsilon}$, $x=\frac{a}{\varepsilon}$ – левая и правая директрисы; $y=-\frac{b}{a}x$, $y=\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы (рис. 1.13). Аналогичным образом можно определить сопряженную гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1. \tag{1.37}$$

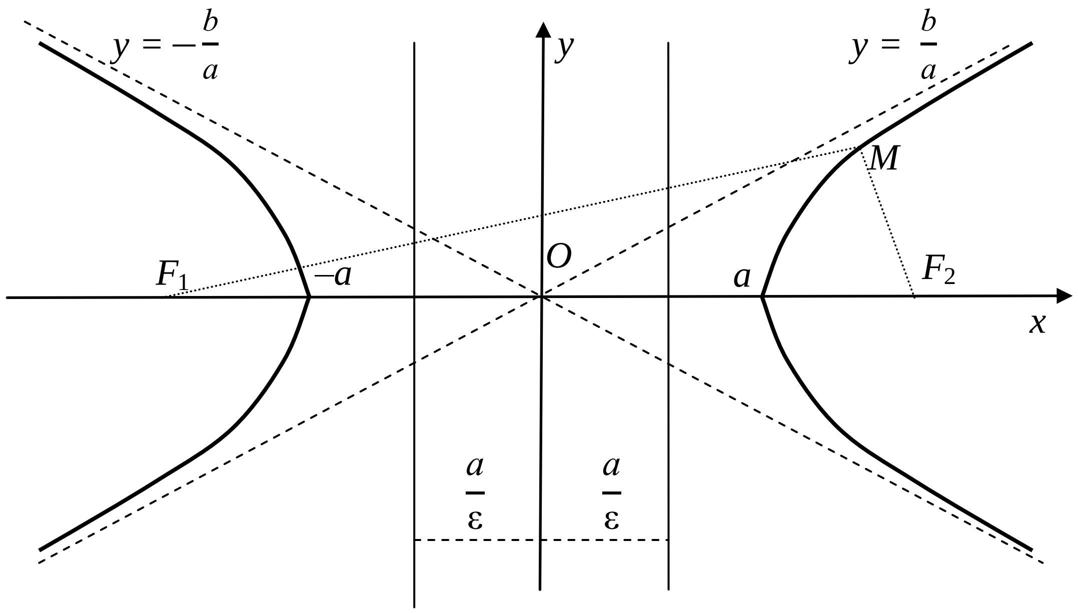

Рис. 1.13

Парабола

Определение 1.33. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой*.

$$y^2 = 2px \qquad (1.38)$$

– каноническое уравнение параболы; $p > 0$ – фокальный параметр; $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус; $x = -\frac{p}{2}$ – директриса (рис. 1.14).

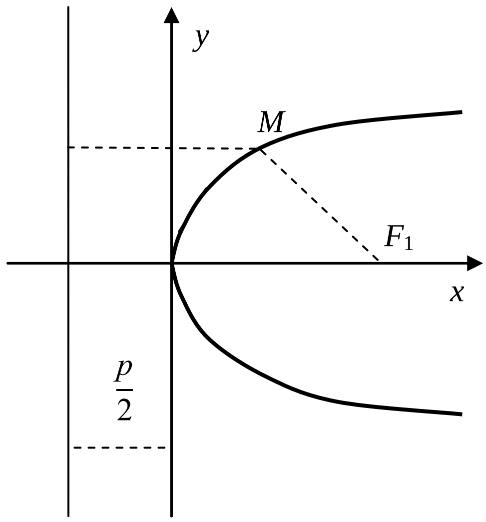

Рис. 1.14

Пример 1.11. Написать общее уравнение плоскости, проходящей через точку $L(-3; -2; 9)$ и прямую $\frac{x-5}{4} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z+9}{-1}$.

Решение

Заданная прямая проходит (рис. 1.15) через точку $M(5; 6; -9)$ в направлении вектора $\boldsymbol{s} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Чтобы найти вектор нормали плоскости, необходимо найти вектор $\overrightarrow{ML} = -8\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}$, а затем векторное произведение:

$$\boldsymbol{s} \times \overrightarrow{LM} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -4 & -1 \\ -8 & -8 & 18 \end{vmatrix} = -80\boldsymbol{i} - 64\boldsymbol{j} - 64\boldsymbol{k} =$$

$$= -16(5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}).$$

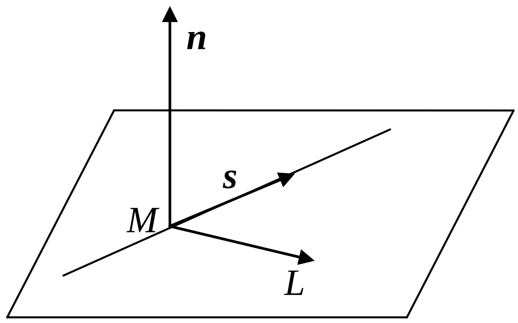

Рис. 1.15

Следовательно, $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ – вектор нормали плоскости.

Тогда

$5(x+3) + 4(y+2) + 4(z-9) = 0 \Rightarrow 5x + 4y + 4z - 13 = 0$ – общее уравнение плоскости.

Ответ: $5x + 4y + 4z - 13 = 0$.

Пример 1.12. Даны вершины пирамиды $A(1, 1, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(2, 0, -1)$, $D(4, -2, 3)$. Найти: а) угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$; б) площадь грани ABC; в) проекцию вектора $\overline{CA}$ на вектор $\overline{CD}$; г) объем пирамиды; д) длину высоты пирамиды, опущенной из вершины D.

Решение

а) Найдем векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$, $\overline{CA}=\{-1,\ 1,\ 0\}$, $\overline{CB}=\{-2,\ 1,\ 2\}$. Угол между векторами находится по формуле $\cos\left(\overline{CA},\ \overline{CB}\right)=\dfrac{\left(\overline{CA},\ \overline{CB}\right)}{\left|\overline{CA}\right|\left|\overline{CB}\right|}$, следовательно $\cos\left(\overline{CA},\ \overline{CB}\right)=\dfrac{2+1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

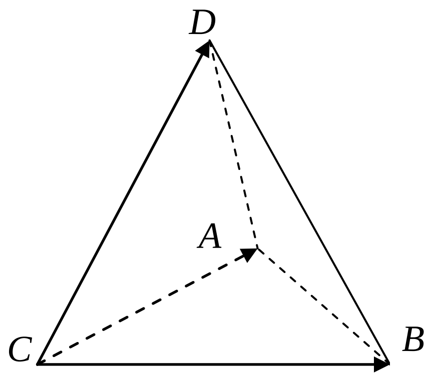

Рис. 1.16

б) Площадь грани ABC найдем как площадь треугольника ABC (рис. 1.16), $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{CA}\times\overline{CB}\right|$.

Итак, $\overline{CA}\times\overline{CB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,

$\left|\overline{CA}\times\overline{CB}\right|=\sqrt{4+4+1}=3$, $S_\Delta=\frac{3}{2}$.

в) Найдем вектор $\overline{CD}=\{2,-2,4\}$.

$$Пр_{\overline{CD}}\overline{CA}=\frac{\left(\overline{CA},\overline{CD}\right)}{\left|\overline{CD}\right|},\quad Пр_{\overline{CD}}\overline{CA}=\frac{-2-2}{\sqrt{4+4+16}}=\frac{-4}{\sqrt{24}}=\frac{-2}{\sqrt{6}}.$$

г) $V=\frac{1}{6}\left|(\overline{CA},\ \overline{CB},\ \overline{CD})\right|$, где $(\overline{CA},\ \overline{CB},\ \overline{CD})=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}=4$, $V=\frac{2}{3}$.

д) Из элементарной геометрии объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{осн}h$, тогда $h=\frac{3V}{S_{осн}}$. Объем из п. г) $V=\frac{2}{3}$; площадь основания из п. б) $S_{осн}=\frac{3}{2}$.

Следовательно, длина высоты пирамиды $h=\dfrac{3\cdot\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$.

Ответ: а) $\cos\left(\overline{CA},\ \overline{CB}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $S_\Delta=\frac{3}{2}$; в) $Пр_{\overline{CD}}\overline{CA}=\frac{-2}{\sqrt{6}}$; г) $V=\frac{2}{3}$; д) $h=\frac{4}{3}$.

Пример 1.13. В треугольнике с вершинами $K(-5;\,4)$, $L(1;\,-4)$, $M(-9;\,1)$ найти:

а) уравнение прямой LQ, содержащей опущенную из вершины L высоту;

б) длину высоты, опущенной из вершины L на сторону MK;

в) точку N, симметричную точке L, относительно прямой, проходящей через точки K, M;

г) уравнение медианы KP, опущенной из вершины K;

д) уравнение прямой LR, параллельной прямой KM, проходящей через точку L.

Решение

а) Вектор нормали прямой LQ, содержащей высоту (рис. 1.17), является вектор $\overrightarrow{KM}=-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$. Находим уравнение прямой

$$-4(x-1)-3(y+4)=0 \quad\Rightarrow\quad -4x-3y-8=0.$$

LQ: $4x+3y+8=0$ – уравнение прямой, содержащей опущенную из вершины L, высоту.

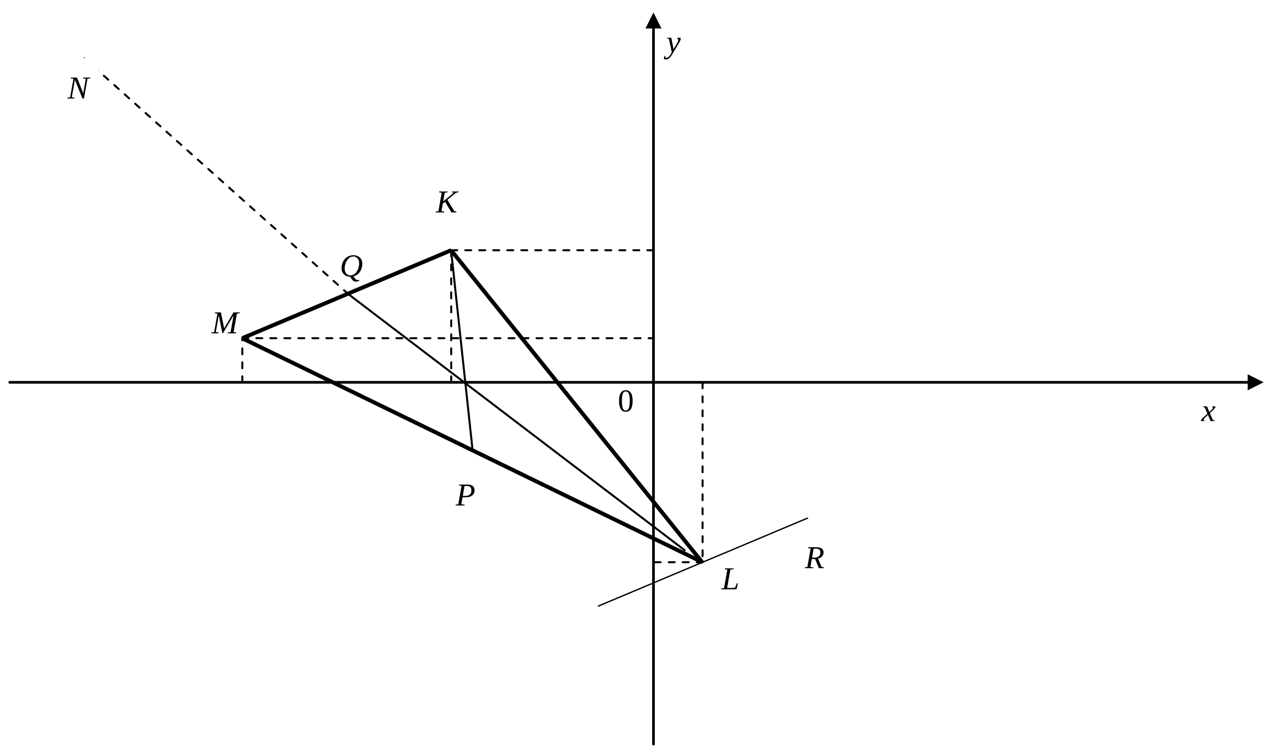

Рис. 1.17

б) Длина высоты, опущенной из вершины L, равна расстоянию ρ от точки L до прямой KM, проходящей через точки K, M. Найдем уравнение этой прямой. Так как $\overrightarrow{KM} = -4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, то $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ – вектор нормали этой прямой. Находим общее уравнение прямой KM:

$$3(x+5) - 4(y-4) = 0 \Rightarrow \quad KM:\ 3x - 4y + 31 = 0 \ \Rightarrow |\boldsymbol{n}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Нормальное уравнение прямой KM имеет вид:

$$-\frac{3}{5}\cdot x + \frac{4}{5}\cdot y - \frac{31}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \left| -\frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{4}{5}\cdot(-4) - \frac{31}{5} \right| = 10$$ – длина высоты.

в) Чтобы найти точку N, необходимо определить точку пересечения Q прямых LQ, KM, т. е. необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 8 = 0; \\ 3x - 4y + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -3y - 8; \\ 3x - 4y + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3}{4}y - 2; \\ 3\left(\dfrac{-3}{4}y - 2\right) - 4y + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3}{4}y - 2; \\ \dfrac{-9}{4}y - 6 - 4y + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3}{4}y - 2; \\ -\dfrac{25}{4}y = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3}{4}\cdot 4 - 2; \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow Q(-5;\, 4).$$

Теперь находим точку $N(x;y)$: $\overrightarrow{LN} = 2\cdot\overrightarrow{LQ} = -12\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$. Пусть $N(x;\, y) \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{LN} = (x-1)\boldsymbol{i} + (y+4)\boldsymbol{j}$, то $x - 1 = -12,\ y + 4 = 16 \Rightarrow N(-11; 12)$.

г) Найдем координаты точки P – середины отрезка ML по формулам:

$$x_P = \frac{x_M + x_L}{2};\quad y_P = \frac{y_M + y_L}{2};\quad x_P = \frac{-9+1}{2} = -4;\quad y_P = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Запишем уравнение медианы KP, зная $K(-5; 4)$:

$$\frac{x - x_K}{x_P - x_K} = \frac{y - y_K}{y_P - y_K};\qquad \frac{x+5}{-4+5} = \frac{y-4}{-\frac{3}{2} - 4};\qquad \frac{x+5}{1} = \frac{2(y-4)}{-11};\quad -11x - 55 = 2y - 8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 11x + 2y - 47 = 0$ – уравнение медианы.

д) Так как прямые KM и LR параллельны, направляющим вектором прямой LR можно взять вектор $\overrightarrow{KM} = -4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, тогда $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+4}{-3}$, $-3x + 3 = -4y - 16 \;\Rightarrow\; 3x - 4y - 19 = 0$ – уравнение прямой LR.

Ответ: а) LQ: $4x + 3y + 8 = 0$; б) $\rho = 10$; в) $N(-11; 12)$; г) $11x + 2y + 47 = 0$; д) $3x - 4y - 19 = 0$.

Пример 1.14. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $K(3; -7; 7)$ перпендикулярно плоскости, содержащей точки $L(-6; 2; -2)$, $M(1; -5; -5)$, $N(2; 3; 1)$.

Решение

За вектор нормали плоскости LMN, проходящей через точки L, M, N, можно взять вектор коллинеарный вектору $\overrightarrow{LM} \times \overrightarrow{LN}$ (рис. 1.18).

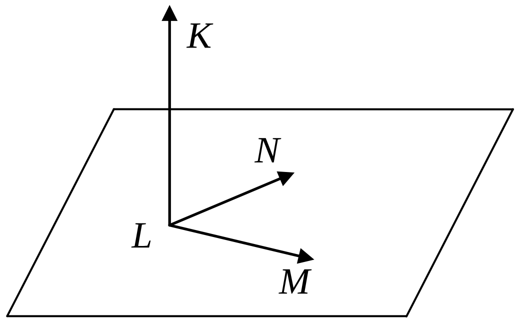

Рис. 1.18

$\overrightarrow{LM} = 7\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$; $\quad \overrightarrow{LN} = 8\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$;

$$\overrightarrow{LM} \times \overrightarrow{LN} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 7 & -7 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}(-21 + 3) - \boldsymbol{j}(21 + 24) + \boldsymbol{k}(7 + 56) = -18\boldsymbol{i} - 45\boldsymbol{j} + 63\boldsymbol{k} = -9(2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$ – вектор нормали плоскости LMN.

Вектор нормали к плоскости LMN, является направляющим вектором прямой $\boldsymbol{S}$, проходящей через точку K перпендикулярно плоскости LMN:

$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+7}{5} = \dfrac{z-7}{-7}$ – каноническое уравнение прямой.

Ответ: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+7}{5} = \dfrac{z-7}{-7}$.

Пример 1.15. Даны вершины пирамиды $A(-1, 1, 1)$, $B(1, 2, -1)$, $C(0, -1, -1)$, $D(-2, 3, 1)$. Найти: а) угол между гранями ABC и ABD; б) каноническое и параметрические уравнения прямой CD; в) уравнение плоскости, проходящей через точку D и параллельной плоскости ABC; г) каноническое уравнение высоты пирамиды.

Решение

а) Угол между гранями (плоскостями) равен углу между нормалями к этим плоскостям: $\cos(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = \dfrac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

Найдем нормали плоскостей по формулам: $\boldsymbol{n}_1 = \overline{AB} \times \overline{AC}$, $\boldsymbol{n}_2 = \overline{AB} \times \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = \{2, 1, -1\}, \quad \overline{AC} = \{1, -2, -2\}, \quad \overline{AD} = \{-1, 2, 0\},$$

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(-2-2) - \boldsymbol{j}(-4+1) + \boldsymbol{k}(-4-1) =$$
$$= -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(0+2) - \boldsymbol{j}(0-1) + \boldsymbol{k}(4+1) =$$
$$= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k};$$

$$\cos(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = \frac{-8 + 3 - 25}{\sqrt{16 + 9 + 25}\,\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{-30}{\sqrt{50}\,\sqrt{30}} = \frac{-6}{\sqrt{60}}.$$

б) Найдем вектор $\overline{CD} = \{-2, 4, 2\}$, который будет направляющим вектором прямой CD, в качестве известной точки возьмем точку C, тогда:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$$ – каноническое уравнение прямой CD;

$$\begin{cases} x = -t; \\ y = 2t - 1; \\ z = t - 1 \end{cases}$$ – параметрические уравнения прямой CD.

в) Нормаль к плоскости ABC найдена в п. а) $\boldsymbol{n_1} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$. Применим формулу $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где в качестве известной точки берем точку $D(-2,3,1)$, тогда: $-4(x+2)+3(y-3)-5(z-1)=0$ или $-4x + 3y - 5z - 12 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

г) Для нахождения высоты пирамиды используем в качестве направляющего вектора высоты:

$\boldsymbol{n}_1 = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ – нормаль к плоскости ABC, тогда

$\frac{x+2}{-4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-5}$ – канонические уравнения высоты пирамиды.

Ответ: а) $\cos(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = \frac{-6}{\sqrt{60}}$; б) $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$; $\begin{cases} x=-t; \\ y=2t-1; \\ z=t-1; \end{cases}$

в) $-4x + 3y - 5z - 12 = 0$; г) $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

Пример 1.16. Привести уравнение кривой второго порядка $3x^2+y^2+6x-2y-77=0$ к каноническому виду, выяснить, что это за кривая. Найти координаты смещенного центра. Построить кривую на плоскости.

Решение

Выделим «полный квадрат» по обеим переменным, для этого прибавим и отнимем внутри каждой скобки половину коэффициента при x или y соответственно, это позволит применить формулу: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

$$3(x^2+2x)+(y^2-2y)-77=0;$$

$$3\left(\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}-1\right)+\left(\underbrace{y^2-2y+1}_{(y-1)^2}-1\right)-77=0;$$

$$3(x+1)^2+(y-1)^2=81.$$

Разделим левую и правую части равенства на 81, получим:

$\dfrac{(x+1)^2}{27}+\dfrac{(y-1)^2}{81}=1$ – эллипс (рис. 1.19); координаты смещенного центра – $C(-1,1)$; $a=\sqrt{27}$, $b=9$ – полуоси эллипса.

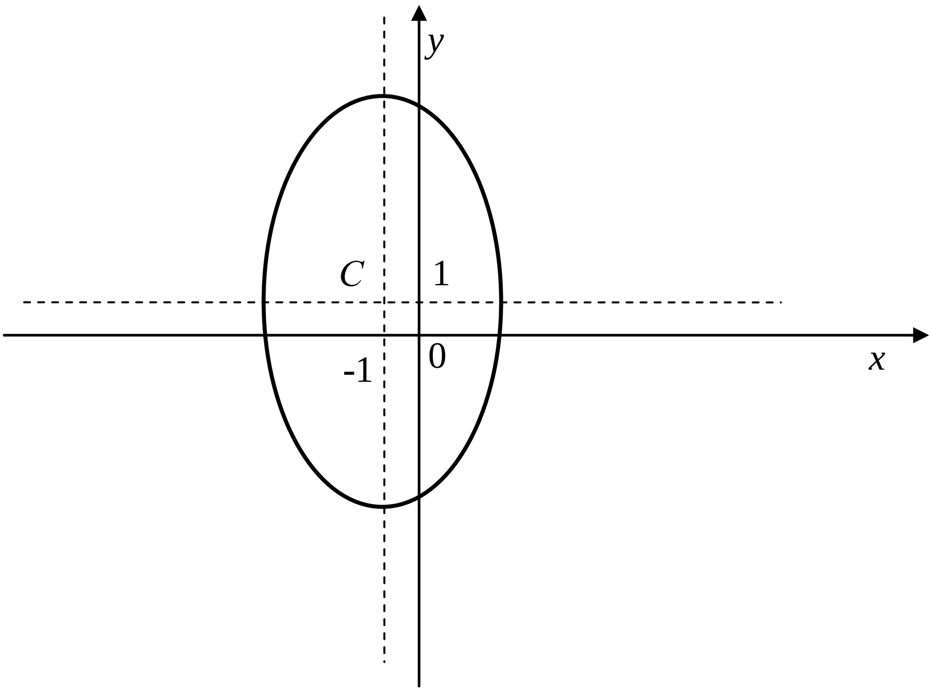

Рис. 1.19

Ответ: $\dfrac{(x+1)^2}{27}+\dfrac{(y-1)^2}{81}=1.$

Пример 1.17. Найти уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых от точки $F(4;0)$ и от прямой $x=25/4$ равно $4/5$.

Решение

Возьмем произвольную точку $P(x,y)$, удовлетворяющую условию задачи. На прямой: $x=\dfrac{25}{4}$ возьмем точку $N\left(\dfrac{25}{4};y\right)$. Длина вектора $\overrightarrow{PN}$ равна расстоянию от точки P до прямой $x=\dfrac{25}{4}$, а длина вектора $\overrightarrow{PF}$ равна расстоянию от точки P до точки F: $|\overrightarrow{PN}|=\left|\dfrac{25}{4}-x\right|$, $|\overrightarrow{PF}|=\sqrt{(4-x)^2+y^2}$.

Из условия задачи находим:

$$\frac{4}{5}=\frac{|\overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PN}|}=\frac{4\sqrt{(4-x)^2+y^2}}{|25-4x|}\Rightarrow (25-4x)^2=25((4-x)^2+y^2)\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\ -$$

эллипс.

Ответ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ – эллипс.

1.5. Контрольные задания по теме «Алгебра и геометрия»

Задача 1.1. Заданы матрицы A, B, C. Найти: а) $(3A + 2B)\cdot C$; б) вычислить определитель матрицы A (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Вариант	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 1.1

Вариант	A	B	C
6	$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Задача 1.2. Для матрицы A найти: а) A^{-1}; б) AA^{-1}; в) решить систему $A\bar{x} = \bar{b}$ матричным методом (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Вариант	A	$\bar{b}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 1.2

Вариант	A	$\bar{b}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -25 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -25 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -20 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

Задача 1.3. Решить систему уравнений методом Гаусса (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Вариант	Система	Вариант	Система
1	$\begin{cases} 4x-4y-2z=6 \\ -4x+5y-2z=-15 \\ 4x+4y+z=-31 \end{cases}$	2	$\begin{cases} -3x+4y+4z=-6 \\ -4x+4y+5z=-2 \\ -4x-4y-3z=22 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x+3y+4z=-21 \\ -2x-2y+5z=-18 \\ 3x-2y-5z=32 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x-3y+5z=-34 \\ -3x-2y+5z=-18 \\ x-2y+2z=-15 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -2x+3y-3z=2 \\ -5x+3y-2z=15 \\ 3x+2y-3z=-17 \end{cases}$	6	$\begin{cases} -2x-5y-5z=-10 \\ -5x-2y-z=-20 \\ 5x-2y-2z=25 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 4x-4y+z=-31 \\ x+2y-5z=20 \\ -3x+5y-4z=41 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x+4y-5z=25 \\ 2x-y+z=-15 \\ 2x-3y-3z=1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} -x-3y+4z=16 \\ -4x-2y+z=9 \\ -3x+5y+z=1 \end{cases}$	0	$\begin{cases} 2x-2y-5z=-25 \\ -x-2y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$

Задача 1.4. Исследовать совместность каждой системы а) и б), для совместной системы найти решение (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Вариант	а)	б)
1	$\begin{cases} 3x-3y+3z=12 \\ -2x+3y-5z=-10 \\ -x+2z=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x+y=-4 \\ -9x+2y+z=3 \\ 6x-y-z=-5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x-y-z=-3 \\ -x-3y+3z=5 \\ -2x+3z=7 \end{cases}$	$\begin{cases} -x+2y-5z=-5 \\ x-y+3z=-7 \\ -x+4y-9z=-2 \end{cases}$

3	$\begin{cases} -3x-9y-3z=-12 \\ -8y-8z=-8 \\ -3x-5y+z=-8 \end{cases}$	$\begin{cases} -8x-4z=10 \\ -x-y-2z=9 \\ -5x+3y+2z=-8 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 6y-3z=3 \\ -3x-3y+3z=2 \\ 3x+y-2z=10 \end{cases}$	$\begin{cases} -x+2y+4z=1 \\ -3x+2y=-1 \\ -5x+6y+8z=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -x-5y-3z=8 \\ 2x+8y+4z=-12 \\ -x-3y-z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+5y+3z=-7 \\ 2x+2y-2z=-5 \\ -3x-7y-z=-10 \end{cases}$
6	$\begin{cases} -3x+3y+9z=-12 \\ -3x+2y+7z=-10 \\ 3x-y-5z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y-z=6 \\ -x+3y=-8 \\ -2x+3z=-11 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x+5y-z=6 \\ -2y-2z=6 \\ -x-y+z=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x+y-3z=9 \\ 9x-3y-z=-10 \\ x-2y+z=-5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} -3x-2y+z=10 \\ 3x-2y+3z=11 \\ 2y-2z=-11 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y+3z=-1 \\ x-2y+5z=1 \\ 7x-2y-z=-5 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x-3y+5z=-4 \\ -4x-3y+z=4 \\ -3y+3z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x+y+3z=-1 \\ -8x-2y-2z=1 \\ -2x-y+z=6 \end{cases}$
0	$\begin{cases} -2x+5y-z=5 \\ 4x-8y=-12 \\ 2x-7y+3z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} -x-4y-2z=9 \\ -8x-2y-6z=-6 \\ 3x-3y+z=-3 \end{cases}$

Задача 1.5. Даны вершины пирамиды $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Найти: а) угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$; б) площадь грани ABC; в) проекцию вектора $\overline{CA}$ на вектор $\overline{CD}$; г) объем пирамиды; д) длину высоты пирамиды, опущенной из вершины D (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Вариант	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	6	2	2	–6	4	–2	2	4	5	3	6	–1
2	1	3	2	0	6	2	4	0	0	3	2	7
3	8	4	1	7	7	3	6	5	8	3	5	8
4	7	2	2	5	7	7	5	3	1	2	3	7
5	4	2	5	0	7	1	0	2	7	1	5	0
6	1	–1	6	4	5	–2	-1	3	0	6	1	5
7	3	5	4	8	7	4	5	10	4	4	7	8
8	0	0	2	1	1	0	4	1	2	3	0	5
9	1	–1	6	4	5	–2	–1	3	0	6	1	5
0	1	1	1	3	4	0	–1	5	6	4	0	5

Задача 1.6. Даны вершины пирамиды $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Найти: а) угол между гранями ABC и ABD; б) каноническое и параметрические уравнения прямой CD; в) уравнение плоскости параллельной плоскости ABC, проходящей через точку D; г) каноническое уравнение высоты пирамиды (табл. 1.6).

Таблица 1.6

Вариант	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	6	2	2	–6	4	–2	2	4	5	3	6	–1
2	1	3	2	0	6	2	4	0	0	3	2	7
3	8	4	1	7	7	3	6	5	8	3	5	8
4	7	2	2	5	7	7	5	3	1	2	3	7
5	4	2	5	0	7	1	0	2	7	1	5	0
6	1	–1	6	4	5	–2	–1	3	0	6	1	5
7	3	5	4	8	7	4	5	10	4	4	7	8
8	0	0	2	1	1	0	4	1	2	3	0	5
9	1	–1	6	4	5	–2	–1	3	0	6	1	5
0	1	1	1	3	4	0	–1	5	6	4	0	5

Задача 1.7. Даны три точки на плоскости: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты, опущенной из

вершины A; в) уравнение медианы, опущенной из вершины B; г) уравнение прямой, параллельной прямой BC, проходящей через точку A; д) угол при вершине B. Сделать чертеж (табл. 1.7).

Таблица 1.7

Вариант	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	1	–2	7	6	–11	3
2	14	1	2	–4	–2	–1
3	4	3	–12	–9	–5	15
4	0	–2	6	6	–12	3
5	8	0	–4	–5	–8	–2
6	1	–5	7	3	–11	0
7	3	12	27	5	9	29
8	–6	–4	–10	–1	6	1
9	12	0	18	8	0	5
0	8	2	14	10	–4	7

Задача 1.8. Привести уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ к каноническому виду, выяснить, что это за кривая. Найти координаты смещенного центра. Построить кривую на плоскости (табл. 1.8).

Таблица 1.8

Вариант	a_{11}	a_{22}	a_1	a_2	a_0
1	2	4	4	–6	–50
2	1	–4	2	1	–20
3	–1	3	1	3	–12
4	3	2	3	4	–45
5	0	5	5	4	–100
6	5	0	–2	–3	–35
7	–2	1	0	5	–30
8	2	4	1	8	–54
9	7	3	7	0	–49
0	5	4	–15	–12	–30

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Функции: основные понятия и определения

Определение 2.1. Числа 1, 2, 3, … называются *натуральными*, множество натуральных чисел обозначают через N.

Дальнейшее расширение – это множество Z целых чисел:

$$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots\}.$$

Добавим к целым числам все дробные числа, а также рассматривая не только положительные дробные числа, но и отрицательные дробные числа получим *рациональные* числа, множество рациональных чисел обозначают через Q. Каждое рациональное число может быть записано в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in Z$.

Иррациональными числами называются бесконечные непериодические десятичные дроби.

Определение 2.2. *Действительными (или вещественными)* числами называется совокупность рациональных и иррациональных чисел, множество действительных чисел обозначают через R. Множество действительных чисел можно изобразить в виде точек на числовой прямой.

Определение 2.3. δ – окрестностью точки x_0 называется множество точек, задаваемое на числовой прямой неравенством $|x - x_0| < \delta$ или интервалом $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Определение 2.4. Возьмем некоторое множество значений переменной величины x и обозначим его через D. Если каждому значению x из множества D по какому-нибудь правилу поставлено в соответствие одно или несколько определенных значений другой величины y, $y \in E$, то говорят, что величина y есть *функция* величины x. При этом величина x называется *аргументом* функции $y(x)$, а множество D – *областью определения* функции y, множество E – *областью значений* функции.

Если функция задается формулой $y = f(x)$, то это означает, что для нахождения значения y необходимо выполнить некоторые действия с величиной x. Примеры функций:

1) функция, выражающая зависимость между стоимостью выпускаемой продукции и стоимостью суммарных затрат на ее производство, называется *однофакторной производственной функцией*;

2) функция, определенная на множестве натуральных чисел, называется *числовой последовательностью.*

Определение 2.5. *Элементарной функцией* называется функция, которую можно задать одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Основными элементарными функциями являются следующие функции:

1) *степенная функция:* $y = x^{\alpha}$, где α – действительное число;

2) *показательная функция:* $y = a^{x}$, где a – положительное число и $a \neq 1$;

3) *логарифмическая функция:* $y = \log_a x$, где основание логарифма a – положительное число и $a \neq 1$;

4) *тригонометрические функции:* $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$;

5) *обратные тригонометрические функции:* $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение 2.6. Функция $y = f(x)$, $x \in D$, где область D – симметрична относительно прямой $x = 0$, называется *четной*, если при изменении знака у любого значения аргумента значение функции не изменяется: $f(-x) = f(x), x \in D.$

Определение 2.7. Функция $y = f(x)$, где область D – симметрична относительно точки $x = 0$, называется *нечетной*, если при изменении знака у любого значения аргумента изменяется только знак значения функции, а абсолютная величина этого значения остается без изменения: $f(-x) = -f(x)$, $x \in D.$

Определение 2.8. Функция $y = f(x)$ называется *периодической,* если существует такое постоянное число $T \neq 0$, что от прибавления его к любому значению аргумента значение функции не изменяется: $f(x+T) = f(x)$.

2.2. Предел функции

Определение 2.9. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$ (при $x = a$ функция $f(x)$ может быть не определена). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a ($x \to a$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Выражение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ означает, что предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a равен A.

Если для любого сколь угодно большого положительного числа M найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$, то говорят, что функция $f(x)$ является *бесконечно большой величиной* при x, стремящемся к a, и записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Если при этом значения $f(x) > 0$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, а если $f(x) < 0$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при x, стремящемся к a (или коротко – бесконечно малой при $x \to a$).

Сравнение бесконечно малых величин

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ при $x \to a$, является *бесконечно малой более высокого порядка* по сравнению с $\beta(x)$. В этом случае говорят, что $\alpha(x)$ есть *o* малое от $\beta(x)$, и записывают $\alpha = o(\beta)$, при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, где k – число, отличное от нуля и от единицы, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *бесконечно малые одного порядка*, при $x\to a$. В этом случае говорят, что $\alpha(x)$ есть O большое от $\beta(x)$, и записывают $\alpha=O(\beta)$, при $x\to a$.

В частном случае, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и записывают: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Если $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$. Следовательно, $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\alpha(x)$ ($\beta=o(\alpha)$), при $x\to a$.

При вычислении пределов часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых:

$$\sin u\sim u,\ \operatorname{tg}u\sim u,\ \arcsin u\sim u,\ \operatorname{arctg}u\sim u,\ \ln(1+u)\sim u \text{ при } u\to 0. \qquad (2.1)$$

Односторонние пределы

Определение 2.10. Если $x\to a$ и при этом $x<a$, то говорят, что x стремится к a слева, и записывают: $x\to a-0$. Предел $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)$ называют *левым пределом* функции $y=f(x)$.

Определение 2.11. Если $x\to a$ и при этом $x>a$, то говорят, что x стремится к a справа, и записывают: $x\to a+0$. Предел $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)$ называют *правым пределом* функции $y=f(x)$.

Левый и правый пределы функции называются *односторонними пределами.* Для существования предела функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к a, необходимо и достаточно, чтобы $f(a-0)=f(a+0)$.

Теоремы о пределах

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, то:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$. (2.2)

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x).$ (2.3)

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0).$ (2.4)

Первый и второй замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1. \tag{2.5}$$

Следствия из первого замечательного предела:

1. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, u}{u}=1.$ (2.6)

2. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\arcsin u}{u}=1.$ (2.7)

3. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, u}{u}=1.$ (2.8)

Второй замечательный предел:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e\approx 2,71828\ldots \tag{2.9}$$

Следствие из второго замечательного предела:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e\approx 2,71828\ldots. \tag{2.10}$$

Пример 2.1. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{3x+x^2-2}$.

Решение

Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной x (в нашем случае на x^2).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1}{3x+x^2-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{3x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}+1-\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{3+0+0}{0+1-0}=3,$$

так как, при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{x^2}$ стремится к нулю.

Ответ: 3.

Пример 2.2. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x+2x^2+x^3}$.

Решение

Числитель и знаменатель дроби при $x\to 0$ также стремятся к нулю. В этом случае имеет место неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}$ и используем формулу: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x+2x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{x(1+2x+x^2)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-(9-x)}{x(1+x)^2(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+x)^2(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}.$$

Знаменатель дроби $(1+x)^2(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})\to 6$ при $x\to 0$, следовательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x+2x^2+x^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 2.3. Вычислить: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

Решение

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$(для разложения знаменателя на множители используем формулу: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$) $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3}{x^2-2x+4}=\dfrac{3}{4+4+4}=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Пример 2.4. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin 4x}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой: $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, тогда числитель примет вид $2\sin^2\dfrac{5x}{2}$, заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми см. (2.1) $\sin 4x\sim 4x$ и $2\sin^2\dfrac{5x}{2}\sim 2\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2$, при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{\sin 4x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}{4x}=2\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{16x}=\frac{25}{8}\lim_{x\to 0}x=\frac{25}{8}\cdot 0=0.$$

Ответ: 0.

Пример 2.5. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+25}\right)^{x+7}$.

Решение

При $x \to \infty$ выражение $\left(1+\dfrac{1}{x+25}\right) \to 1$, а $(x+7)$ неограниченно возрастает. В этом случае имеет место неопределенность типа $[1^{\infty}]$. Рекомендуется использовать второй замечательный предел (2.10):

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e \approx 2{,}71828\ldots.$$

В нашем случае $z = x + 25,\ z \to \infty,\ x = z - 25.$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+25}\right)^{x+7} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z-25+7} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-18}.$$

Так как $z \to \infty$, то $\lim\limits_{z\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}\right] = e$, и учитывая, что $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{-18} = (1+0)^{-18} = 1$, окончательно получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+25}\right)^{x+7} = e\cdot 1 = e.$$

Ответ: e.

Пример 2.6. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{\frac{x+5}{2}}$.

Решение

Так как при $x \to \infty$ выражение $\dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{x(x+1)}{x(x-3)} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} \to 1$, имеет место неопределенность типа $[1^{\infty}]$. Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел. Выделим целую часть из дроби (для этого к числителю дроби прибавим и отнимем 3): $\dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{x-3+1+3}{x-3} = 1+\dfrac{4}{x-3}$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{\frac{x+5}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^{\frac{x+5}{2}} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{x-3}=\dfrac{1}{z}, \\ z\to\infty, \\ 4z=x-3, \\ x=4z+3 \end{array}\right] =$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{4z+3+5}{2}} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{2z+4} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{2z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4} =$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{2}\cdot(1+0)^4 = (\text{используем } \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e) = e^2\cdot 1 = e^2.$$

Ответ: e^2.

Пример 2.7. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение

Так как при $x\to 0$ выражение $(1+\sin x)\to 1$, имеет место неопределенность типа $[1^{\infty}]$.

Воспользуемся вторым замечательным пределом (2.10):

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x} = \left[\begin{array}{l} \sin x = z, \\ z\to 0, \\ x=\arcsin z, \\ \operatorname{ctg} x = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{z} \end{array}\right] = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}} =$$

$$=\lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\sqrt{1-z^2}} = (\text{так как } \lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]=e) =$$

$$=\lim_{z\to 0} e^{\sqrt{1-z^2}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-z^2}\to 1, \\ \text{при } z\to 0 \end{array}\right] = e.$$

Ответ: e.

2.3. Непрерывность функции

Непрерывные и разрывные функции

Определение 2.12. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = a$, если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение 2.13. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Если говорят, что функция $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[x_0; x_1]$, то при этом подразумевают, что функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале $(a; b)$, содержащем отрезок $[x_0; x_1]$.

Элементарные функции непрерывны в своей области определения, точнее, на наибольшем открытом множестве, содержащемся в области определения. Например, функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1; 1]$, а непрерывна на интервале $(-1; 1)$.

Точки разрыва и их классификация

Если в какой-либо точке $x = a$ функция $y = f(x)$ не определена, либо $f(a) \neq f(a-0)$ и (или) $f(a) \neq f(a+0)$, то точка $x = a$ называется *точкой разрыва* функции, а сама функция – разрывной в точке $x = a$.

Определение 2.14. Если $x = a$ – точка разрыва функции $y = f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, то точка $x = a$ называется *точкой разрыва I рода.*

Точки разрыва I рода делятся на:

1) *точки устранимого разрыва I рода*, если $f(a-0) = f(a+0)$;

2) *точки скачка или точки неустранимого разрыва I рода*, если $f(a-0) \neq f(a+0)$.

Если хотя бы один из односторонних пределов не является конечным, то точка $x = a$ называется *точкой разрыва II рода.*

Пример 2.8. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{1+5^{\frac{1}{x^2-3}}}$ на непрерывность и построить схематически ее график.

Решение

Данная функция терпит разрыв в точках $x_1=-\sqrt{3}$ и $x_2=\sqrt{3}$, так как при этих значениях знаменатель дроби $\dfrac{1}{x^2-3}$ обращается в ноль. Исследуем характер разрыва в каждой из этих точек. Для этого найдем:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} y(x),\quad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0} y(x),\quad \lim_{x\to\sqrt{3}-0} y(x),\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} y(x).$$

Для точки $x_1=-\sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{2}{1+5^{\frac{1}{x^2-3}}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x^2-3=\left(-\sqrt{3}-0\right)^2-3=\left(\sqrt{3}+0\right)^2-3=3+2\sqrt{3}\cdot 0+0^2-3=+0,\\ x^2-3\to+0,\qquad \dfrac{1}{x^2-3}\to+\infty,\\ 5^{\frac{1}{x^2-3}}\to 5^{+\infty}=+\infty,\qquad \text{при } x\to-\sqrt{3}-0 \end{array}\right|=\frac{2}{1+\infty}=0;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{2}{1+5^{\frac{1}{x^2-3}}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x^2-3=\left(-\sqrt{3}+0\right)^2-3=\left(\sqrt{3}-0\right)^2-3=3-2\sqrt{3}\cdot 0+0^2-3=-0,\\ x^2-3\to-0,\qquad \dfrac{1}{x^2-3}\to-\infty,\\ 5^{\frac{1}{x^2-3}}\to 5^{-\infty}=0,\qquad \text{при } x\to-\sqrt{3}+0 \end{array}\right|=\frac{2}{1+0}=2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0} y(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0} y(x) = 2$ и $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0} y(x) \neq \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0} y(x)$, то в точке $x_1 = -\sqrt{3}$ функция имеет неустранимый разрыв I рода.

Для точки $x_2 = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{2}{1+5^{\frac{1}{x^2-3}}} = \left| \begin{array}{l} x^2-3 = \left(\sqrt{3}-0\right)^2 - 3 = 3 - 2\sqrt{3}\cdot 0 + 0^2 - 3 = -0, \\ x^2-3 \to -0, \qquad \dfrac{1}{x^2-3} \to -\infty, \\ 5^{\frac{1}{x^2-3}} \to 5^{-\infty} = 0, \qquad \text{при } x \to \sqrt{3}-0 \end{array} \right| = \frac{2}{1+0} = 2;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{2}{1+5^{\frac{1}{x^2-3}}} = \left| \begin{array}{l} x^2-3 = \left(\sqrt{3}+0\right)^2 - 3 = 3 + 2\sqrt{3}\cdot 0 + 0^2 - 3 = +0, \\ x^2-3 \to +0, \qquad \dfrac{1}{x^2-3} \to +\infty, \\ 5^{\frac{1}{x^2-3}} \to 5^{+\infty} = +\infty, \qquad \text{при } x \to \sqrt{3}+0 \end{array} \right| = \frac{2}{1+\infty} = 0.$$

Таким образом, для точки $x_2 = \sqrt{3}$ $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0} y(x) = 2$ и $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0} y(x) = 0$, значит и при $x_2 = \sqrt{3}$ функция также терпит неустранимый разрыв I рода. Для схематического построения графика исследуем поведение функции при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1+5^{\frac{1}{x^2-3}}} = \left| \begin{array}{l} x^2-3 \to +\infty, \qquad \dfrac{1}{x^2-3} \to 0, \\ 5^{\frac{1}{x^2-3}} \to 5^0 = 1, \text{ при } x \to \pm\infty \end{array} \right| = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Следовательно, при $x \to \pm\infty$, график функции находится около прямой $y = 1$. Найдем точку пересечения графика с осью *Oy*: $y(0) = \dfrac{2}{1+5^{-\frac{1}{3}}} \approx 1{,}26$.

Ответ: 1) в точках $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$ функция терпит неустранимый разрыв I рода; 2) схематический график функции на рис. 2.1.

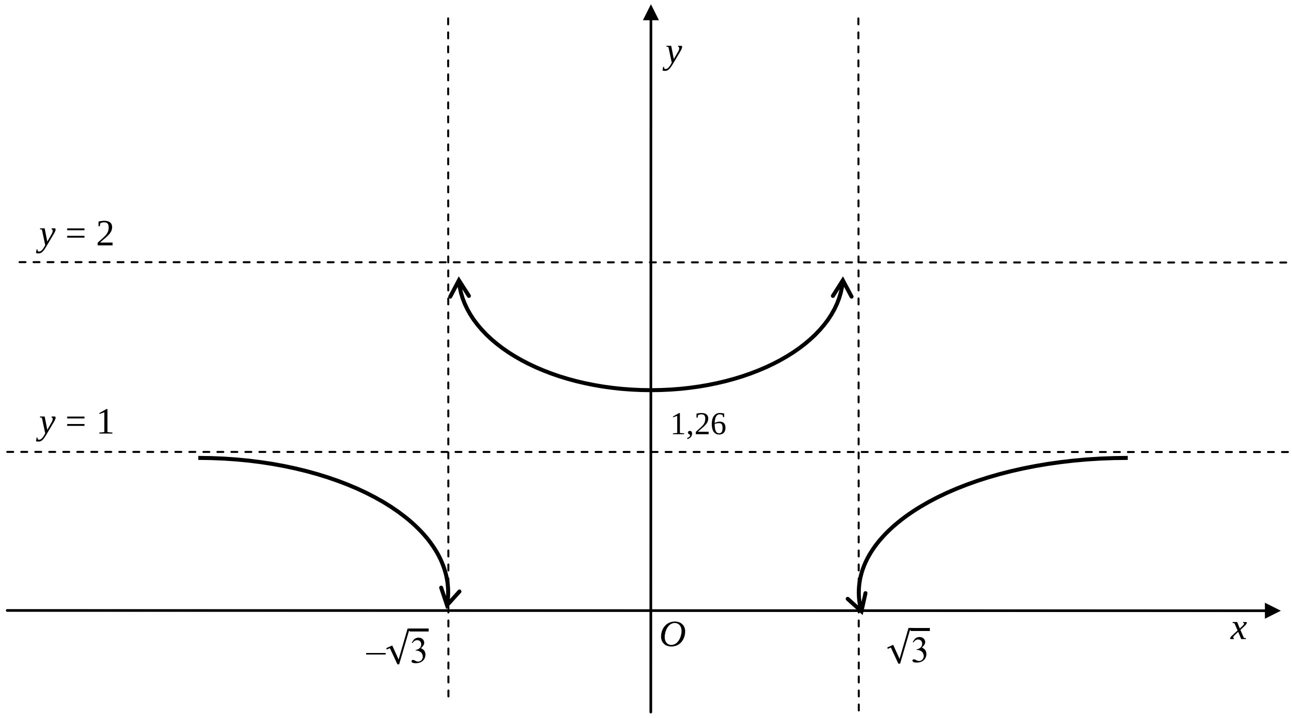

Рис. 2.1

2.4. Производные первого порядка функции одной переменной

Определение 2.15. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b), и число $x \in (a,b)$. Придадим x приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in (a,b)$. Приращение аргумента Δx вызовет приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Предел (если он существует) отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ называется *производной* функции $y = f(x)$ и обозначается $f'(x)$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \qquad (2.11)$$

При этом сама функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x.*

Для обозначения производной также используются следующие символы: $y', y'_x, f'_x(x), \dfrac{dy}{dx}$.

Механический смысл производной в данной точке – мгновенная скорость прямолинейного движения в данный момент времени.

Геометрический смысл производной в данной точке – угловой коэффициент касательной к графику функции в данной его точке.

Экономический смысл производной в данной точке – предельные издержки производства при данном его объеме.

Основные правила дифференцирования

Пусть C – произвольная постоянная; $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; (2.12)

2) $(Cu)' = Cu'$; (2.13)

3) $(uv)' = u'v + v'u$; (2.14)

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. (2.15)

Таблица производных

1. $(C)' = 0$ (C – константа).
2. $(x)' = 1$.
3. $(kx+b)' = k$, (k, b – константы).
4. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$; $\alpha \neq 0$.
5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.
6. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$; $a \neq 1$, $a > 0$.
7. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $a \neq 1$, $a > 0$.
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
11. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
12. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
14. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
15. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
16. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Замечание. В таблице в качестве u может быть функция независимой переменной x.

Производная параметрически заданной функции

Определение 2.16. Функция, заданная в виде: $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ $t \in D$, называется *параметрически заданной функцией*, переменная t ($t \in D$) – называется *параметром.*

Производная функции, заданной параметрически, находится по следующей формуле:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{2.16}$$

Дифференцирование показательно-степенной функции

Определение 2.17. Функцию вида $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$, при $f(x) > 0$, $x \in D$, где и основание $f(x)$, и показатель $\varphi(x)$ изменяются вместе с аргументом x, называют *показательно-степенной* функцией.

Производная показательно-степенной функции вычисляется по следующей формуле:

$$y' = \left[f(x)\right]^{\varphi(x)} \cdot \left\{\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \varphi(x)\right\}. \tag{2.17}$$

Пример 2.9. Найти производную функции:

а) $y = \sin(2x+5)$; б) $y = \sin^4(2x+5)$.

Решение

а) Сложная функция состоит из двух частей: $y = \sin u$, где $u = 2x + 5$. Следовательно, по формулам пп. 4, 9 и 3 из таблицы производных получим:

$y' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(2x+5) \cdot (2x+5)' = \cos(2x+5) \cdot 2 = 2\cos(2x+5).$

б) Сложная функция состоит из трех частей: $y = u^4$, где $u = \sin z$, $z = 2x + 5$. Следовательно, по формулам пп. 9 и 3 из таблицы производных получим:

$y' = (u^4)' = 4u^3 \cdot u' = 4\sin^3 z \cdot (\sin z)' = 4\sin^3 z \cdot \cos z \cdot z' =$

$= 4\sin^3(2x+5) \cdot \cos(2x+5) \cdot (2x+5)' = 4\sin^3(2x+5) \cdot \cos(2x+5) \cdot 2 =$

$= 8\sin^3(2x+5) \cdot \cos(2x+5).$

Ответ: а) $y' = 2\cos(2x+5)$; б) $y' = 8\sin^3(2x+5) \cdot \cos(2x+5)$.

Пример 2.10. Найти производную функции: $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{\ln x - 3}}$.

Решение

Преобразуем квадратный корень в степень:

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{\ln x - 3}} = \left(\frac{x+1}{\ln x - 3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Данная функция – сложная, она состоит из дроби $\dfrac{x+1}{\ln x - 3}$ и степенной функции: $u^{\frac{1}{2}} = y$.

$y' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'$ = (по формуле п. 4 из таблицы производных) = $\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \cdot u'$.

Так как $u = \frac{x+1}{\ln x - 3}$, то

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\ln x - 3}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{x+1}{\ln x - 3}\right)' = \text{(по правилу дифференцирования дроби)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\ln x - 3}\right)^{\frac{1}{2}-1} \frac{(x+1)'(\ln x - 3) - (x+1)(\ln x - 3)'}{(\ln x - 3)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\ln x - 3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\ln x - 3) - (x+1)\frac{1}{x}}{(\ln x - 3)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ln x - 3}{x+1}} \cdot \frac{x(\ln x - 3) - (x+1)}{x(\ln x - 3)^2} = \frac{x(\ln x - 3) - x - 1}{2x\sqrt{(x+1)(\ln x - 3)^3}} = \frac{x\ln x - 4x - 1}{2x\sqrt{(x+1)(\ln x - 3)^3}}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{x\ln x - 4x - 1}{2x\sqrt{(x+1)(\ln x - 3)^3}}$.

Пример 2.11. Найти производную функции: $y=\dfrac{2x}{\cos x(x-\cos x)}$.

Решение

Функция сложная, она состоит из дроби $y=\frac{u}{v}$, следовательно, $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, в свою очередь знаменатель дроби v – есть произведение двух функций $v=w\cdot t$, тогда $v'=w'\cdot t+t'\cdot w$, где $w=\cos x$, а $t=x-\cos x$. Таким образом:

$w'=-\sin x,\quad t'=1+\sin x,\quad v'=-\sin x\big(x-\cos x\big)+(1+\sin x)(\cos x)\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ y'=\left(\frac{2x}{\cos x(x-\cos x)}\right)'=\frac{(2x)'\cdot\cos x\cdot(x-\cos x)-2x\cdot\big(\cos x\cdot(x-\cos x)\big)'}{\cos^2 x\cdot(x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot\cos x\cdot(x-\cos x)-2x\cdot\big(-\sin x\cdot\big(x-\cos x\big)+(1+\sin x)\cdot\cos x\big)}{\cos^2 x\cdot(x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2x\cos x-2\cos^2 x-2x\cdot\big(-\sin x\cdot\big(x-\cos x\big)+(1+\sin x)\cdot\cos x\big)}{\cos^2 x\cdot(x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-2\cos^2 x+2x^2\sin x-4x\sin x\cos x}{\cos^2 x\cdot(x-\cos x)^2}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{-2\cos^2 x+2x^2\sin x-4x\sin x\cos x}{\cos^2 x\cdot(x-\cos x)^2}$.

Пример 2.12. Найти производную функции: $y=\big(1+\cos x\big)^{x^5}$.

Решение

Данная функция относится к виду показательно-степенной функции $y=f(x)^{\varphi(x)}$. Для нахождения ее производной используем формулу:

$$y'=\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}\cdot\left\{\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\varphi(x)\right\},$$

где $f(x) = 1 + \cos x$, $\varphi(x) = x^5$, тогда $f(x)' = -\sin x$, $\varphi(x)' = 5x^4$, подставив полученные выражения в формулу производной показательно-степенной функции получим:

$$y' = (1+\cos x)^{x^5}\left[5x^4\ln(1+\cos x) - \frac{x^5\sin x}{1+\cos x}\right].$$

Ответ: $y' = (1+\cos x)^{x^5}\left[5x^4\ln(1+\cos x) - \frac{x^5\sin x}{1+\cos x}\right].$

Пример 2.13. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t + \cos t; \\ y = t^2 - \sin t. \end{cases}$

Решение

Производную параметрически заданной функции находим по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

где $y'_t = (t^2)' - (\sin t)' = 2t - \cos t$; $x'_t = t' + (\cos t)' = 1 - \sin t$.

$$y'_x = \frac{2t - \cos t}{1 - \sin t}.$$

Ответ: $y'_x = \dfrac{2t - \cos t}{1 - \sin t}.$

Пример 2.14. Найти производную функции, заданной неявно: $\sin(xy) + \cos(x - y) + 3y^2 = 0.$

Решение

При нахождении производной неявной функции важно учитывать, что $y = y(x)$ – функция; x – независимая переменная. Дифференцируем обе части данного уравнения:

$$\left(\sin(xy) + \cos(x-y) + 3y^2\right)' = 0;$$

$$\cos(xy)\cdot(xy)'-\sin(x-y)\cdot(x-y)'+6y\cdot y'=0;$$

$$\cos(xy)\cdot(x'y+xy')-\sin(x-y)\cdot(x'-y')+6y\cdot y'=0;$$

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')-\sin(x-y)\cdot(1-y')+6y\cdot y'=0.$$

Откроем скобки

$$y\cdot\cos(xy)+xy'\cdot\cos(xy)-\sin(x-y)+y'\cdot\sin(x-y)+6y\cdot y'=0.$$

Из полученного равенства находим y':

$$y'\cdot\left(x\cdot\cos(xy)+\sin(x-y)+6y\right)=\sin(x-y)-y\cdot\cos(xy);$$

$$y'=\frac{\sin(x-y)-y\cdot\cos(xy)}{x\cdot\cos(xy)+\sin(x-y)+6y}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{\sin(x-y)-y\cdot\cos(xy)}{x\cdot\cos(xy)+\sin(x-y)+6y}$.

2.5. Приложения дифференциального исчисления функции одной переменной

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную первого порядка $f'(x)$ в каждой точке отрезка $[a;b]$. Производная $f'(x)$ также является функцией от x, дифференцируя эту функцию, получим вторую производную от функции $y=f(x)$.

Определение 2.18. Производная от первой производной называется *производной второго порядка* или *второй производной* от первоначальной функции и обозначается $y''=(y')'=f''(x)$.

Аналогичным образом определяются производные более высоких порядков.

Монотонность функции

Определение 2.19. Функция $f(x)$ называется *монотонно возрастающей* в интервале (a,b), если для любых двух точек x_1 и x_2, таких, что $a\le x_1<x_2\le b$, выполняется неравенство: $f(x_1)<f(x_2)$.

Определение 2.20. Функция $f(x)$ называется *монотонно убывающей* в интервале (a,b), если для любых двух точек x_1 и x_2, таких, что $a \le x_1 < x_2 \le b$, выполняется неравенство: $f(x_1) > f(x_2)$.

Теорема 2.1. Если для любой точки $x_0 \in (a;b)$ выполняется неравенство $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ *монотонно возрастает в интервале* (a,b).

Если для любой точки $x_0 \in (a;b)$ выполняется неравенство $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ *монотонно убывает в интервале* (a,b).

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности функции.*

Асимптоты графика функции

Определение 2.21. Прямая L называется *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние от некоторой точки кривой $M(x,y)$ до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т. е. при стремлении хотя бы одной из координат точки M к бесконечности).

Асимптоты делятся на вертикальные и наклонные.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ и (или) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если одновременно существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]. \tag{2.18}$$

Если окажется, что $k = 0$, то асимптота называется *горизонтальной* $y = b$.

Локальные экстремумы функции

Определение 2.22. Значение функции $f(x_0)$ называется *локальным максимумом* функции $f(x)$, если для любой точки x из некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) \ge f(x)$.

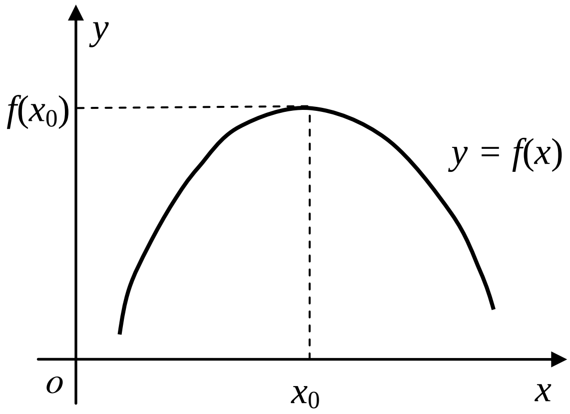

Рис. 2.2

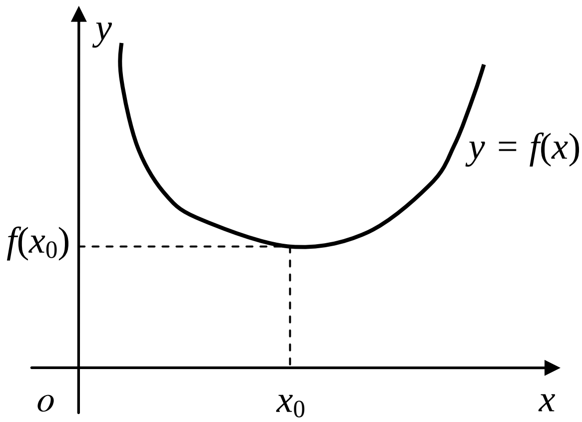

Рис. 2.3

Точка x_0 называется в этом случае *точкой локального максимума* функции $f(x)$ (рис. 2.2).

Определение 2.23. Значение функции $f(x_0)$ называется *локальным минимумом* функции $f(x)$, если для любой точки x из некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) \le f(x)$. Точка x_0 называется в этом случае *точкой локального минимума* функции $f(x)$ (рис. 2.3).

Локальный максимум или локальный минимум функции называются *экстремумами функции.* Точка локального максимума или локального минимума функции называется *точкой экстремума функции.*

Необходимое условие существования экстремума: если функция $y = f(x)$, имеющая непрерывную производную первого порядка в окрестности точки x_0, достигает экстремума в точке x_0 (x_0 – стационарная точка функции), то ее производная первого порядка в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Определение 2.24. Точки $x_0 \in D$, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует, называются *стационарными (критическими) точками* функции $f(x)$, $x \in D$.

Достаточное условие существования экстремума:

- если x_0 стационарная точка функции $f(x)$ и при переходе через нее производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то точка x_0 есть точка локального максимума, а значение функции $f(x_0)$ – локальный максимум функции;

▪ если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» , то точка x_0 есть точка локального минимума, а значение $f(x_0)$ – локальный минимум функции;

▪ если при переходе через точку x_0 производная знака не меняет, то экстремума в точке x_0 нет, а значение $f(x_0)$ не является экстремумом функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда на этом отрезке она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Если требуется найти наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, то необходимо:

1) найти все стационарные точки функции на отрезке;

2) определить значения функции на концах отрезка, т. е. вычислить $f(a)$ и $f(b)$; кроме того, вычислить значения функции во всех стационарных точках;

3) из всех, полученных выше значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции

Определение 2.25. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* в интервале (a,b), если на этом интервале график расположен ниже касательной, проведенной в любой точке M графика $y = f(x)$ (рис. 2.4).

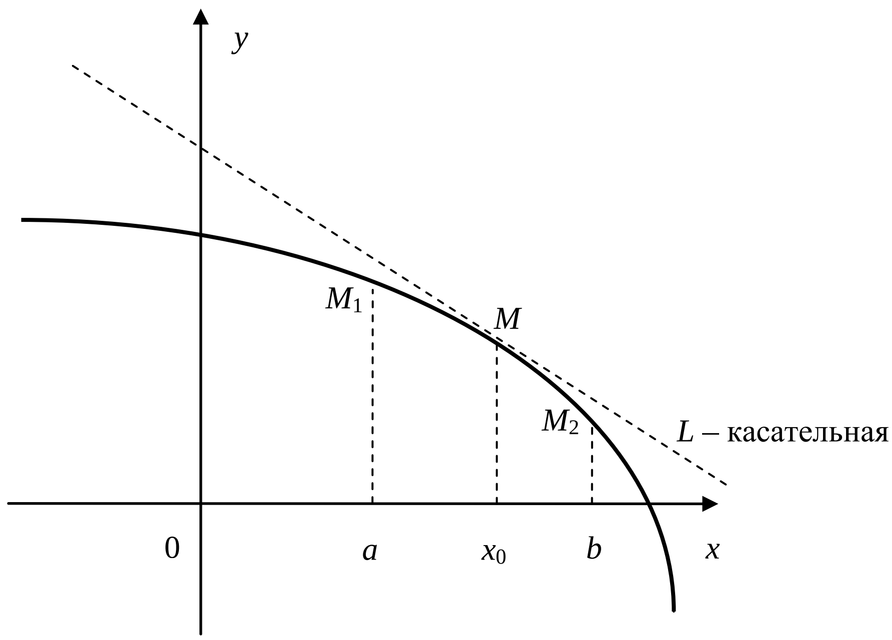

Рис. 2.4

Определение 2.26. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* в интервале (a,b), если на этом интервале график расположен выше касательной, проведенной в любой точке точке M графика $y = f(x)$ (рис. 2.5).

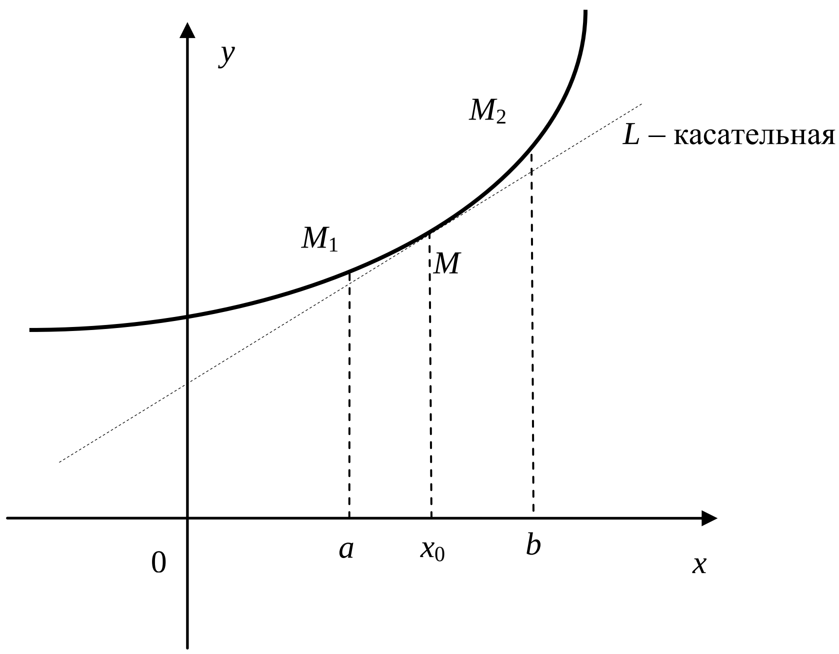

Рис. 2.5

Определение 2.27. Точка графика функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба* графика.

Теорема 2.2. 1. Если $f''(x) > 0$ в интервале (a,b), то график функции на этом интервале вогнутый.

2. Если $f''(x) < 0$ в интервале (a,b), то график функции на этом интервале выпуклый.

3. Если $f''(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка графика $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба.

При исследовании функции также следует учитывать точки, где вторая производная не существует.

План общего исследования функции

Полное исследование функции проводят по следующему плану:

1. Область определения функции.
2. Четность, нечетность, периодичность функции.
3. Непрерывность функции.
4. Асимптоты.
5. Нули функции и интервалы знакопостоянства.
6. Интервалы монотонности и экстремумы.
7. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
8. Дополнительные точки.
9. Построение графика.
10. Область значений функции.

Пример 2.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[1;\ 3]$.

Решение

Наибольшее и наименьшее значение на отрезке функция может достигать:

1) на концах отрезка (т. е. при $x = 1$ или $x = 3$);

2) в стационарных точках, если они существуют и принадлежат отрезку $[1;\ 3]$.

Найдем стационарные точки. Для этого найдем y' и выясним, где $y'=0$ и где y' не существует.

$y'=3x^2-12$; $\quad 3x^2-12=0$; $\quad x^2=4 \quad \Rightarrow x=\pm 2$.

y' существует при любых x, поэтому имеется одна стационарная точка $x=2\in[1;\ 3]$, следовательно достаточно найти $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ и выбрать из них наибольшее и наименьшее значения.

$y(1)=1^3-12\cdot 1+7=-4$;

$y(2)=2^3-12\cdot 2+7=-9$;

$y(3)=3^3-12\cdot 3+7=-2$.

Ответ: $y(3)=-2$ – наибольшее значение функции; $y(2)=-9$ – наименьшее значение функции.

Пример 2.16. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2}{x+3}$ и построить ее график.

Решение

1. Область определения.

Исключим точку, в которой знаменатель дроби $x+3=0$, т. е. $x=-3$.

$D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

2. Четность, нечетность, периодичность функции.

Так как $y(-x)=\dfrac{x^2}{-x+3}$, то $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$.

Следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной. Так как в состав функции не входят периодические функции, то $y=\dfrac{x^2}{x+3}$ также непериодическая.

3. Непрерывность.

Так как заданная функция является элементарной, то она непрерывна на своей области определения.

Единственной точкой, в которой функция не существует, является точка $x=-3$.

Исследуем характер разрыва функции в этой точке.

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x^2}{x+3}=\frac{9}{-0}=-\infty,\quad \text{так как } x+3\to -0 \text{ при } x\to -3-0;$$

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{x^2}{x+3}=\frac{9}{+0}=+\infty,\quad \text{так как } x+3\to +0 \text{ при } x\to -3+0.$$

Так как и левый и правый пределы не являются конечными, то точка $x=-3$ есть точка бесконечного разрыва II рода.

4. Асимптоты.

При $x=-3$ функция терпит бесконечный разрыв II рода, значит прямая $x=-3$ вертикальная асимптота. Найдем наклонные асимптоты: $y = kx + b$, коэффициенты k и b определяем по формулам (2.18).

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x+3)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\left|\frac{3}{x}\to 0\right|=1=k;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x+3}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\cancel{x}^2-\cancel{x}^2-3x}{x+3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3x}{x+3}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3x}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3}{1+\frac{3}{x}}\right]=\frac{-3}{1+0}=-3=b.$$

Прямая $y=x-3$ – наклонная асимптота, прямая $x=-3$ – вертикальная асимптота.

5. Нули функции и интервалы знакопостоянства.

Функция $y=\dfrac{x^2}{x+3}$ обращается в нуль при $x=0$. Разобьем числовую прямую на интервалы точками $x=-3$, $x=0$ и определим интервалы знакопостоянства функции.

Интервал	$(-\infty;-3)$	$(-3;0)$	$(0;+\infty)$
$y(x)$	–	+	+

Функция отрицательна на интервале $(-\infty;-3)$ и положительна на интервалах $(-3;0)\cup(0;+\infty)$.

6. Интервалы монотонности и экстремумы.

Найдем стационарные точки.

$$y' = \frac{\left(x^2\right)'(x+3)-(x+3)'x^2}{(x+3)^2} = \frac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x}{(x+3)^2};$$

$x^2+6x=0 \Rightarrow x_1=0 \in D,\quad x_2=-6 \in D$ – стационарные точки.

y' не существует при $x=-3$, но $x=-3 \notin D \Rightarrow$ есть только две критические точки: $x=0$ и $x=-6$.

Разобьем всю числовую прямую на интервалы точками $x=-3$, $x=0$ и $x=-6$ и определим знак производной $y' = \dfrac{x(x+6)}{(x+3)^2}$ на этих интервалах.

Интервал	$(-\infty;-6)$	-6	$(-6;-3)$	-3 точка разрыва	$(-3;0)$	0	$(0;+\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	не существует	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	$y(-6)= =-12\max$	$\searrow$	не существует	$\searrow$	$y(0)= =0\min$	$\nearrow$

Функция возрастает в интервалах $(-\infty;-6)$ и $(0;+\infty)$, убывает в интервалах $(-6;-3)$ и $(-3;0)$; $y(-6)=-12$ – локальный максимум функции; $y(0)=0$ – локальный минимум функции.

7. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

Найдем точки перегиба:

$$y'' = \left[\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}\right]' = \left[\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}\right]' = \frac{\left(x^2+6x\right)'(x+3)^2-\left((x+3)^2\right)'\left(x^2+6x\right)}{(x+3)^4} =$$

$$= \frac{(2x+6)(x+3)^2-\left(x^2+6x\right)2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{(x+3)\left[(2x+6)(x+3)-2\left(x^2+6x\right)\right]}{(x+3)^4} =$$

$$= \frac{(2x+6)(x+3)-\left(x^2+6x\right)2}{(x+3)^3} = \frac{2x^2+6x+6x+18-2x^2-12x}{(x+3)^3} = \frac{18}{(x+3)^3}.$$

В области D y'' всегда существует и $y'' \neq 0$, следовательно, точек перегиба нет. Исследуем выпуклость и вогнутость графика слева и справа от точки разрыва. Для этого определим интервалы знакопостоянства второй производной y''.

Интервал	$(-\infty;-3)$	–3	$(-3;+\infty)$
$y''(x)$	–	не существует	+
$y(x)$	выпукла	не существует	вогнута

8. Дополнительные точки.

x	–4	–2	–1	1
y	–16	4	0,5	0,25

9. Построение графика (рис. 2.6).

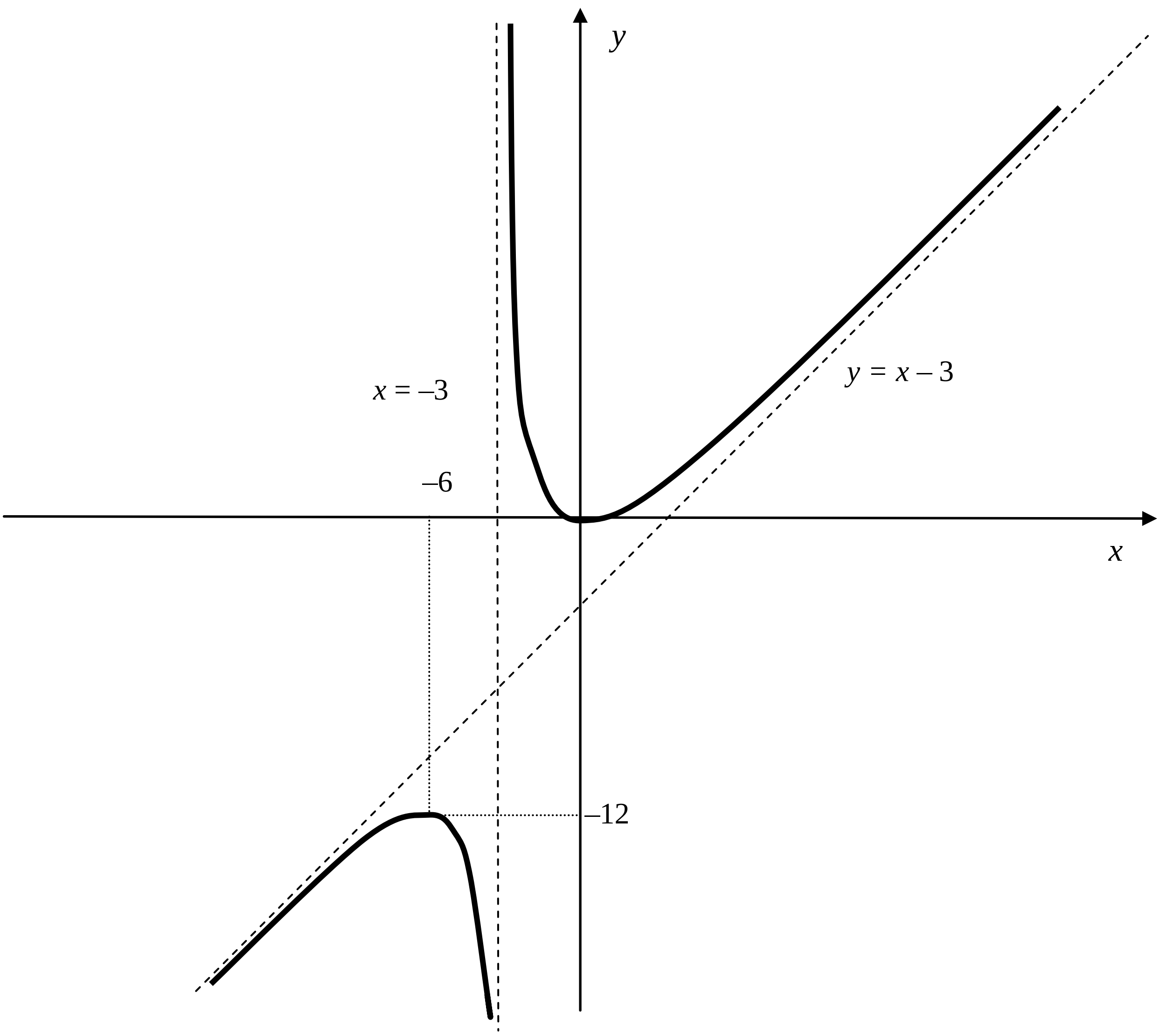

Рис. 2.6

10. Область значений находим проектированием графика на ось Oy:

$$E(x) = (-\infty; -12] \cup [0; +\infty).$$

Кривизна плоской кривой

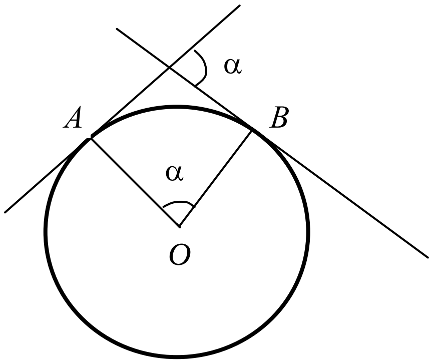

Рис. 2.7

Определение 2.28. *Кривизной* K_A линии в данной точке A называется предел средней кривизны дуги $\overset{\frown}{AB}$, когда длина этой дуги стремится к нулю (т. е. когда точка B приближается к точке A) (рис. 2.7):

$$K_A = \lim_{B\to A} K_{cp} = \lim_{AB\to 0} \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}. \tag{2.19}$$

Рабочая формула для вычисления кривизны:

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.20}$$

Пример 2.17. Определить кривизну линии $y = \sqrt{x}$ в точках:
а) $M_1(0;0)$; б) $M_2(1;1)$; в) $M_3(\infty)$.

Решение

Найдем первую и вторую производные от функции $y = \sqrt{x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Тогда по формуле (2.20) получим:

$$K = \frac{\left|\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}\right|}{\left[1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{x^3}\left[1 + \frac{1}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{(4x)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{x^3}[4x+1]^{\frac{3}{2}}} = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}[4x+1]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[4x+1]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[4x+1]^{\frac{3}{2}}}.$$

а) $K(M_1) = \dfrac{2}{[4\cdot 0 + 1]^{\frac{3}{2}}} = 2;$

б) $K(M_2) = \dfrac{2}{[4 \cdot 1 + 1]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{5^3}}$;

в) $K(M_3) = \dfrac{2}{[\infty]^{\frac{3}{2}}} = 0$.

Ответ: а) $K(M_1) = 2$; б) $K(M_2) = \dfrac{2}{\sqrt{5^3}}$; в) $K(M_3) = 0$.

2.6. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных (ФНП)

Область определения ФНП

Определение 2.28. Величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y на плоском множестве D, если каждой точке этого множества соответствует одно или несколько определенных значений величины z. Множество точек D называется *областью определения функции.*

Область определения функции $z = f(x, y)$ может представлять собой:

1) часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой, причем точки этой кривой могут как принадлежать, так и не принадлежать области определения;

2) совокупность нескольких частей плоскости;

3) всю плоскость.

Аналогично определяется функция трех и более переменных.

Например, функция n независимых переменных, устанавливающая зависимость между затратами n производственных ресурсов и объемом выпускаемой продукции, называется n-*факторной производственной функцией.*

Пример 2.18. Найти область определения функции:

$$z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Решение

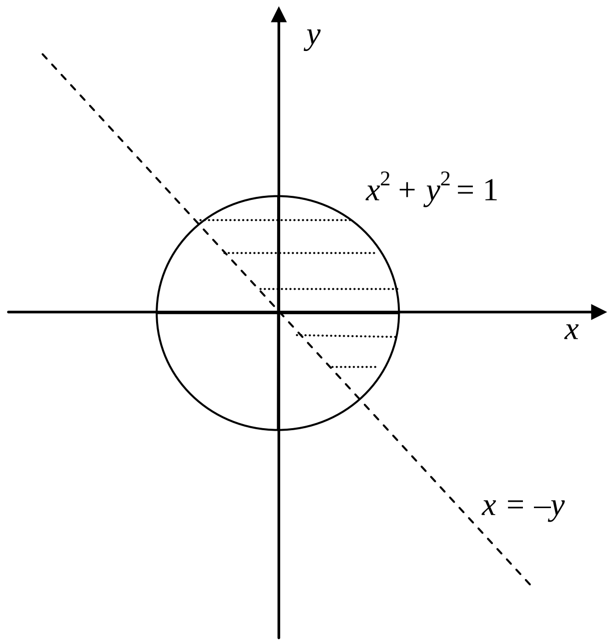

Рис. 2.8

Данная функция имеет действительные значения только тогда, когда выполняются одновременно два неравенства: $\begin{cases} x+y>0; \\ 1-x^2-y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-y; \\ x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$

Первое неравенство $x>-y$ задает часть плоскости, лежащую выше прямой $x=-y$.

Второе неравенство $x^2+y^2 \leq 1$ задает внутренность круга вместе с гра-
ницей, радиуса $R = 1$, центр – в начале координат. Пересечение этих областей дает искомую часть области (рис. 2.8), при этом граница круга входит в область, а граница прямой нет, что показано пунктирной линией (см. рис. 2.8).

Ответ: $D(z)=\begin{cases} x>-y; \\ x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$

Частные производные

Определение 2.29. Пусть $z=f(x,y)$ определена на области D. Будем считать аргумент y постоянным и рассмотрим получающуюся при этом функцию одной переменной x. Придадим переменной x приращение Δx. Приращение Δx вызовет приращение функции $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$. Конечный предел отношения приращения функции $\Delta_x z$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ называется *частной производной по* x *первого порядка* и обозначается $f'_x(x,y)$, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x,y).$$

Определение 2.30. Если считать аргумент x постоянным, и рассматривать функцию $z = f(x, y)$ как функцию одной переменной y, то приращение Δy вызовет приращение функции $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Конечный предел, отношения приращения функции $\Delta_y z$ к приращению аргумента Δy, при $\Delta y \to 0$ называется *частной производной по y первого порядка* и обозначается $f'_y(x, y)$, т. е. $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = f'_y(x, y)$.

Для обозначения частных производных также используют символы: $z'_x, z'_y, f'_x(x, y), f'_y(x, y), \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Определение 2.31. *Частными производными второго порядка* от функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y).$$

Причем $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, если эти производные непрерывны. Аналогично вычисляются частные производные более высоких порядков.

Полный дифференциал

Определение 2.32. *Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется величина $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Определение 2.33. *Полным дифференциалом функции* $z = f(x, y)$ называется величина вычисляемая по формуле: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Формула приближенных вычислений:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \qquad (2.21)$$

Производная сложной функции

Пусть задана сложная функция $z = z(u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, тогда частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ можно найти по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad (2.22)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (2.23)$$

Производная неявной функции

Определение 2.34. *Неявной функцией y аргумента x* называется функция, значения которой находятся из уравнения, связывающего x, y и не разрешенного относительно y, т. е. $F(x,y) = 0$.

Производная неявной функции одной переменной находится по следующей формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (2.24)$$

Определение 2.35. *Неявной функцией z аргументов x и y* называется функция, значения которой находятся из уравнения, связывающего z, x, y и не разрешенного относительно z, т. е. $F(x,y,z) = 0$.

Частные производные неявной функции находятся по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (2.25)$$

Пример 2.19. Найти частные производные первого порядка от функции $z = 3x^2y^5 - 5x^3 + 2y^3 - 4x + 5y - 2$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y - \text{постоянная}) = 3y^5 \cdot (x^2)'_x - 5 \cdot 3x^2 + 0 - 4 \cdot 1 + 0 - 0 =$$

$= 3y^5 \cdot 2x - 15x^2 - 4 = 6y^5x - 15x^2 - 4.$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x - \text{постоянная}) = 3x^2 \cdot (y^5)'_y - 0 + 2 \cdot 3y^2 - 0 + 5 \cdot 1 - 0 =$$

$= 3x^2 \cdot 5y^4 + 6y^2 + 5 = 15x^2y^4 + 6y^2 + 5.$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6y^5x - 15x^2 - 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 15x^2y^4 + 6y^2 + 5.$

Пример 2.20. Найти частные производные первого порядка от функции $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\ln(x^2 + y^2)\right]'_x = \left| \begin{array}{l} \text{используем формулу таблицы производных} \\ (\ln u)' = \frac{1}{u}u', \text{ где } u = x^2 + y^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2}\left(x^2 + y^2\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x + 0) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Рассуждая аналогично, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[\ln(x^2 + y^2)\right]'_y = \left| \begin{array}{l} \text{используем формулу } (\ln u)' = \frac{1}{u}u', \\ \text{где } u = x^2 + y^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2}\left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (0 + 2y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

Пример 2.21. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; если $z = \frac{1}{\left(\sqrt{xy}\right)^3} - \cos\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение

Преобразуем условие, избавимся от дроби и корня:

$$z=(xy)^{\frac{-3}{2}}-\cos\left(x^2+y^2\right)=x^{\frac{-3}{2}}\cdot y^{\frac{-3}{2}}-\cos\left(x^2+y^2\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left((xy)^{-\frac{3}{2}}-\cos\left(x^2+y^2\right)\right)'_x=-\frac{3}{2}(xy)^{-\frac{5}{2}}\cdot(xy)_x'+\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'=$$

$$=-\frac{3y}{2\left(\sqrt{xy}\right)^5}+2x\cdot\sin\left(x^2+y^2\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left((xy)^{-\frac{3}{2}}-\cos\left(x^2+y^2\right)\right)'_y=-\frac{3}{2}(xy)^{-\frac{5}{2}}\cdot(xy)_y'+\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'=$$

$$=-\frac{3x}{2\left(\sqrt{xy}\right)^5}+2y\cdot\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3y}{2\left(\sqrt{xy}\right)^5}+2x\cdot\sin\left(x^2+y^2\right);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3x}{2\left(\sqrt{xy}\right)^5}+2y\cdot\sin\left(x^2+y^2\right).$

Пример 2.22. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; если $z=uv+u^2+v^2$, $u=xy$, $v=y\cdot\operatorname{tg}x$.

Решение

Функция z – сложная, так как $z=z(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, поэтому используем (2.21) и (2.22):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(uv+u^2+v^2\right)_u'=v+2u+0=v+2u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(uv+u^2+v^2\right)_v'=u+0+2v=u+2v;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(xy)_x'=y;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\left(y\cdot\operatorname{tg}x\right)_x'=\frac{y}{\cos^2 x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=(xy)_y'=x;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\left(y\cdot\operatorname{tg}x\right)_y'=\operatorname{tg}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=(v+2u)y+(u+2v)\frac{y}{\cos^2 x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=(v+2u)x+(u+2v)\operatorname{tg}x.$$

Далее подставим в полученные выражения $u = xy$, $v = y \cdot \mathrm{tg}\, x$. Получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y \cdot \mathrm{tg}x + 2xy)y + (xy + 2y \cdot \mathrm{tg}x)\frac{y}{\cos^2 x} = (\mathrm{tg}x + 2x)y^2 + (x + 2\mathrm{tg}x)\frac{y^2}{\cos^2 x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y \cdot \mathrm{tg}\, x + 2xy)x + (xy + 2y \cdot \mathrm{tg}\, x)\mathrm{tg}\, x = (\mathrm{tg}x + 2x)xy + (x + 2\mathrm{tg}x)y \cdot \mathrm{tg}x.$$

Ответ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\mathrm{tg}x + 2x)y^2 + (x + 2\mathrm{tg}x)\frac{y^2}{\cos^2 x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (\mathrm{tg}x + 2x)xy + (x + 2\mathrm{tg}x)y \cdot \mathrm{tg}x.$$

Пример 2.23. Вычислить приближенно $\mathrm{A} = \mathrm{tg}46^\circ \cdot \sqrt{1{,}02}$, с помощью полного дифференциала.

Решение

Воспользуемся формулой приближенных вычислений (2.21):

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Составим функцию $f = \mathrm{tg}\, x \cdot \sqrt{y}$, заменив числовые значения переменными. Полагаем $x + \Delta x = 46^\circ$, $y + \Delta y = 1{,}02$, т. е. $x = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$, $y = 1$, $\Delta y = +0{,}02$, тогда $f(x, y) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{1} = 1$.

Находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\mathrm{tg}\, x \cdot \sqrt{y}\right)'_x = \sqrt{y}(\mathrm{tg}\, x)'_x = \frac{\sqrt{y}}{\cos^2 x}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\mathrm{tg}\, x \cdot \sqrt{y}\right)'_y = \mathrm{tg}\, x \cdot \left(\sqrt{y}\right)'_y = \frac{\mathrm{tg}\, x}{2\sqrt{y}}.$$

Вычислим эти производные при $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$: $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = 2$; $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \frac{1}{2}$.

Подставим полученные значения в формулу приближенных вычислений: $A = \mathrm{tg}46^\circ \cdot \sqrt{1{,}02} \approx 1 + 2\frac{\pi}{180} + \frac{1}{2}0{,}02 \approx 1{,}045$.

Ответ: $A \approx 1{,}045$.

Экстремумы функции двух переменных

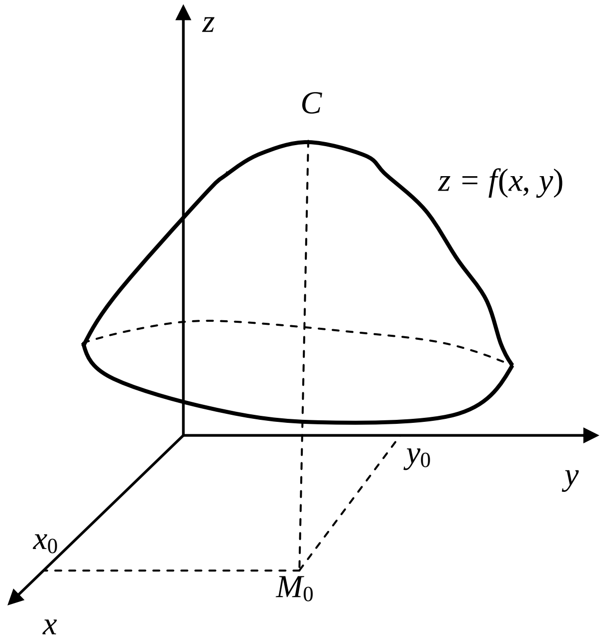

Рис. 2.9

Определение 2.36. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* функции $z = f(x, y)$, если для всех точек (x, y), принадлежащих достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. Значение функции $f(x_0, y_0)$ в точке локального максимума называется локальным *максимумом* функции (рис. 2.9).

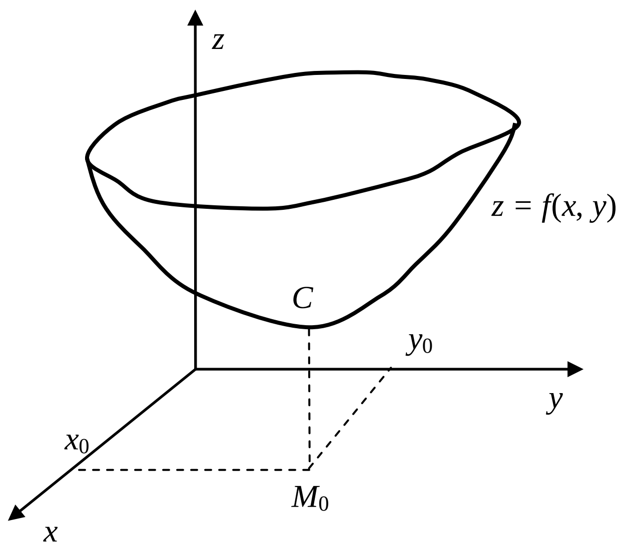

Рис. 2.10

Определение 2.37. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального минимума* функции $z = f(x, y)$, если для всех точек (x, y), принадлежащих достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. Значение функции $f(x_0, y_0)$ в точке локального минимума называется *локальным минимумом* функции (рис. 2.10).

Точки локального максимума и локального минимума функции называются *точками экстремума функции*, а значения функции в этих точках называются *экстремумами функции.*

Необходимое условие существования экстремума функции двух переменных: если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}$ и достигает экстремума в точке $M_0(x_o, y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т. е. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$.

Точки, в которых обе частные производные равны нулю, называются *стационарными точками.* Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных: пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим: $A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$; $C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$; $B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$, и составим соотношение $\Delta = AC - B^2$.

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то значение функции $f(x_0, y_0)$ – есть экстремум, причем $f(x_0, y_0)$ – максимум, если $A < 0$ и $f(x_0, y_0)$ – минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то значение функции $f(x_0, y_0)$ экстремумом не является;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Пример 2.24. Найти точки экстремума функции: $z = x^3 - 3x + y^2 + 6y + 16.$

Решение

Найдем стационарные точки функции. Для этого сначала найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1; \\ 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3, \end{cases}$ находим стационарные точки $P_1(1, -3)$, $P_2(-1, -3)$, Выясним, достигает ли заданная функция экстремума в этих точках. Находим значения вторых частных производных в точке P_1:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 3)'_x = 6x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, -3) = 6;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2y+6)'_y = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-3) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 3)'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-3) = 0.$$

Вычислим $\Delta = AC - B^2 = 12 > 0$, $A = 6 > 0$. Следовательно, в точке P_1 функция z имеет локальный минимум: $z_{\min}(1,-3) = 5$.

Аналогично проводится исследование для точки P_2:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1,-3) = -6; \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1,-3) = 2; \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1,-3) = 0;$$

$\Delta = -12 - 0 = -12 < 0$ – в точке P_2 экстремума нет.

Ответ: $z_{\min}(1,-3) = 5$.

Пример 2.25. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x + 1$ в области $D: \{x \geq 0,\ \ y \geq 1,\ \ x + y \leq 3\}$.

Решение

Построим область D (рис. 2.11).

Наибольшее и наименьшее значения функция достигает:

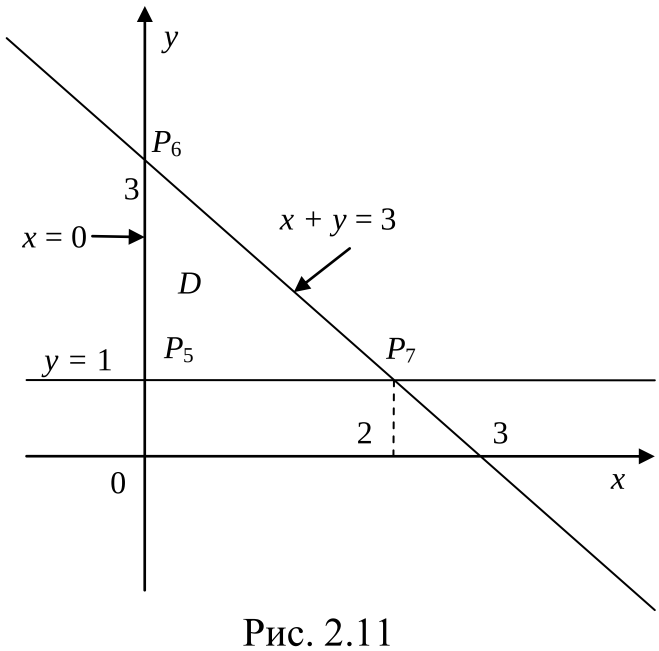

Рис. 2.11

1) в стационарных точках, если они принадлежат области D;

2) на границах области D;

3) в точках пересечения границ D.

1. Найдем стационарные точки. Для этого сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x + 4y.$$

Координаты стационарных точек, являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-6=0; \\ 4x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3=0; \\ x=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3; \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow P_1(-3;3)$$ – стационарная точка.

Но точка P_1 не попадает в область D, следовательно, значение функции в этой точке нами не рассматривается.

2. Исследуем функцию на границах области D. Ее границы задаются уравнениями: $a)\ x=0;$ $b)\ y=1;$ $c)\ x+y=3$.

a) если $x=0,\quad 1\le y\le 3,$ то

$z\big|_{x=0}=(x^2+2y^2+4xy-6x+1)\Big|_{x=0}=f=2y^2+1,\ 1\le y\le 3$ – функция одной переменной. Найдем ее стационарные точки: $f'=4y\Rightarrow 4y=0\Rightarrow y=0\notin[1;3]$. Получаем стационарную точку $P_2(0,0)$, не попадающую в область D;

b) если $y=1,\quad 0\le x\le 2,$ то

$z\big|_{y=1}=(x^2+2y^2+4xy-6x+1)\Big|_{y=1}=g=x^2-2x+3,\ 0\le x\le 2$ – функция одной переменной.

Найдем ее стационарные точки: $g'=2x-2\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow x=1\in[0;2]$. Получаем стационарную точку $P_3(1,1)$ принадлежащую области D;

c) если $x+y=3,\ 0\le x\le 2,\ y=3-x$, следовательно

$z\big|_{y=3-x}=x^2+2(3-x)^2+4x(3-x)-6x+1,\quad 0\le x\le 2.$ После преобразований получаем функцию одной переменной: $\varphi=-x^2-6x+19,\ 0\le x\le 2$.

Найдем ее стационарные точки: $z'=-2x-6\Rightarrow 2x+6=0\Rightarrow x=-3\notin[0;2]$. Получаем критическую точку $P_4(-3,6)$, не попадающую в область D.

3. Угловые точки области $P_5(0,1)$, $P_6(0,3)$, $P_7(2,1)$ – это точки пересечения линий $x=0,\quad y=1,\quad x+y=3$ между собой.

Таким образом, получили четыре точки, в которых функция может достигать наибольшего и наименьшего значений: P_3, P_5, P_6, P_7. Вычислим значения функции z в этих точках и выберем из них наибольшее и наименьшее:

$z(1,1)=1+2+4-6+1=2;\qquad z(0,1)=2+1=3;$

$z(0,3)=18+1=19;\qquad z(2,1)=4+2+8-12+1=3.$

Ответ. Наибольшее значение $z(0{,}3)=19$; наименьшее значение $z(1{,}1)=2$, т. е. $\max_D z(x{,}y) = z(0{,}3) = 19$ и $\min_D z(x{,}y) = z(1{,}1) = 2$.

Производная по направлению, градиент

Определение 2.38. *Градиентом* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке M, имеющий своими координатами частные производные функции z, т. е. $\mathbf{grad}\,\mathbf{z}|_M = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \mathbf{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \mathbf{j}$. Для обозначения градиента часто используют символ ∇z. Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции z в данной точке.

Определение 2.39. *Производной* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ *в направлении вектора* $\mathbf{s} = \overline{MM_1}$ называется число:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \mathbf{s}}\right|_M = \lim_{|\overline{MM_1}|\to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|\overline{MM_1}|}.$$

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial s}\Big|_M = \frac{(\mathbf{grad}\,Z|_M, s)}{|s|} = (\mathbf{grad}\,Z|_M, \boldsymbol{S_0}),$$

т. е. производная функции по данному направлению равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор этого направления.

Производная $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{s}}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение равное $\left(\frac{\partial z}{\partial \mathbf{s}}\right)_{наиб} = |\nabla \mathbf{z}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Пример 2.26. Найти $\nabla\,\mathbf{z}|_A$ и производную по направлению $\left.\frac{\partial z}{\partial \mathbf{s}}\right|_A$, если заданы: функция $z = x^2 e^y$, точка $A(-1{,}1)$ и направление $\mathbf{s} = \{3, -1\}$.

Решение

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2e^y$, вычислим их значения в точке A: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = -2e$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = e$.

Следовательно, $\nabla \mathbf{z}\big|_A = -2e \cdot \mathbf{i} + e \cdot \mathbf{j} = \{-2e, e\}$. Найдем производную по направлению: $\left.\frac{\partial z}{\partial \mathbf{s}}\right|_A = \frac{(\nabla \mathbf{z}, \mathbf{s})}{|\mathbf{s}|} = \frac{-2e \cdot 3 - 1 \cdot e}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{-7e}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\nabla \mathbf{z}\big|_A = \{-2e, e\}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \mathbf{s}}\right|_A = \frac{-7e}{\sqrt{10}}$.

2.7. Неопределенный интеграл

Определение 2.40. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F(x) + C$ – тоже первообразная данной функции.

Определение 2.41. Множество всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Символ $\int$ называется *интегралом,* $f(x)$ называется *подынтегральной функцией,* $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением,* x называется *переменной интегрирования*.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\int a f(x)\, dx = a \int f(x)dx = a F(x) + C$ (a – постоянное значение).
2. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
3. $\int df(x) = f(x) + C.$
4. $d\,(\int f(x)dx) = f(x) + C.$
5. $\int f(x + a)dx = F(x + a) + C$ (a – постоянное значение).
6. $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$ (a, b – постоянные значения).

Таблица интегралов

1. $\int 1du = \int du = u + C.$

2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

3. $\int u^{-1} du = \int \dfrac{du}{u} = \ln\ |u| + C.$

4. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C.$

5. $\int e^{u} du = e^{u} + C.$

6. $\int \cos u\ du = \sin u + C.$

7. $\int \sin u\ du = -\cos u + C.$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

10. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C.$

11. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2\,a} \ln\left(\dfrac{u-a}{u+a}\right) + C.$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C.$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\dfrac{u}{a}\right) + C.$

Замечание. В этой таблице в качестве u может быть функция независимой переменной x.

Задача интегрирования

Задача интегрирования состоит в сведении неопределенного интеграла к элементарной функции. Процесс интегрирования заключается в преобразовании подынтегрального выражения так, чтобы, можно было воспользоваться свойствами интеграла или методами интегрирования, т. е. преобразовать исходный интеграл в один или несколько табличных интегралов. Не все неопределенные интегралы сводятся к элементарным функциям. Например, интегралы $\int \dfrac{\sin x}{x} dx$, $\int \dfrac{\cos x}{x} dx$, $\int e^{-x^2} dx$ не выражаются через элементарные функции (для них есть другие методы интегрирования).

Основные методы интегрирования. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{2.26}$$

При помощи интегрирования по частям исходный интеграл $\int u dv$ сводят к более простому интегралу $\int v du$. Формулу интегрирования по частям применяют для интегралов двух классов:

I класс: $\int Q(x)\cdot \sin^m(nx)dx$; $\int Q(x)\cdot \cos^m(nx)\, dx$; $\int Q(x)\cdot \mathrm{tg}^m(nx)\, dx$; $\int Q(x)\cdot \mathrm{ctg}^m(nx)\, dx$, где $Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k$ – многочлен; m – целое положительное число. При этом принимают за функцию $u=Q(x)$, а за dv соответственно: $a^x dx$, $\sin^m(nx)dx$, $\cos^m(nx)dx$, $\mathrm{tg}^m(nx)dx$, $\mathrm{ctg}^m(nx)dx$ (в этом случае получается упрощение).

II класс: $\int Q(x)\cdot \log_a^m(nx)dx$; $\int Q(x)\cdot \arcsin^m(nx)dx$; $\int Q(x)\cdot \arccos^m(nx)dx$; $\int Q(x)\cdot \mathrm{arctg}^m(nx)dx$; $\int Q(x)\cdot \mathrm{arcctg}^m(nx)dx$, где $Q(x)$ – многочлен; m – целое положительное число. В интегралах вида (II) за функцию $u(x)$ соответственно принимают: $u=\log_a^m(nx)$, $u=\arcsin^m(nx)$, $u=\arccos^m(nx)$, $u=\mathrm{arctg}^m(nx)$, $u=\mathrm{arcctg}^m(nx)$, тогда $dv=Q(x)dx$ (в этом случае интеграл второго класса упрощается).

Замена переменной в неопределенном интеграле

Неопределенный интеграл иногда может быть упрощен заменой переменной интегрирования x на новую переменную t. Если $x=\varphi(t)$, то $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t),\varphi'(t)$ – непрерывные функции от t и подынтегральное выражение зависит только от t и dt: $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Пример 2.27. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}dx.$

Решение

$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}dx =$ (заменим корни соответствующими степенями) $= \int \frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{3}}}dx =$

(разобьем на два интеграла) $= \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx - \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}dx - \int x^{-\frac{1}{3}}dx =$

$= \int x^{\frac{1}{6}}dx - \int x^{-\frac{1}{3}}dx$ = (используем формулу п. 2 из таблицы интегралов) =

$$= \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$

Пример 2.26. Найти неопределенный интеграл: $\int (3x-1)^4 dx$.

Решение

$$\int (3x-1)^4 dx = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем замену переменной} \\ 3x-1=t, \ \text{найдем производную} \\ (3x-1)'dx=dt, \ 3dx=dt, \ dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{15}(3x-1)^5 + C.$$

Ответ: $\int (3x-1)^4 dx = \frac{1}{15}(3x-1)^5 + C$.

Пример 2.29. Найти неопределенный интеграл: $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

Решение

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \cos x = t, \\ dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int t^3 \cdot (-1) dt =$$

$$= \text{(по таблице интегралов)} = -\frac{t^4}{4} + C = |t = \cos x| = -\frac{\cos^4 x}{4} + C.$$

Ответ: $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + C.$

Пример 2.30. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-1}+1}$.

Решение

Чтобы проинтегрировать данную функцию, сделаем замену переменной $\sqrt{4x-1} = t$.

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{4x-1}+1} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4x-1} = t, \quad 4x-1 = t^2, \\ x = \frac{t^2+1}{4}, \; dx = \left(\frac{t^2+1}{4}\right)' dt = \frac{t}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{8}\int \frac{(t^2+1)tdt}{t+1} = \frac{1}{8}\int \frac{t^3+t}{t+1} dt.$$

Получили неправильную рациональную дробь. Выделяем в ней целую часть, деля уголком многочлен, стоящий в числителе, на многочлен знаменателя.

Чтобы сократить t^3 (стоящее в делимом $(t^3 + t)$), нужно делитель $(t + 1)$ умножить на t^2, получим $t^3 + t^2$, $t^3 + t - (t^3 + t^2) = -t^2 + t$, продолжая аналогичным образом, получим $t^2 - t + 2$ – целая часть; –2 – остаток от деления.

$$\left| \begin{array}{l|l} t^3 + t & t+1 \\ \underline{t^3 + t^2} & \overline{t^2 - t + 2} \\ -\quad -t^2 + t & \\ \quad\; \underline{-t^2 - t} & \\ \qquad\quad 2t & \\ \qquad - \underline{2t + 2} & \\ \qquad\qquad -2 & \end{array} \right| \Rightarrow \frac{t^3+1}{t+1} = t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}.$$

$$I = \frac{1}{8}\int \left(t^2 - t + 2\right) dt - \frac{1}{8}\int \frac{2\,dt}{t+1} = \left| \begin{array}{l} \int \frac{2\,dt}{t+1} = \left| \begin{array}{l} t+1 = z, \; t = z-1, \\ dt = dz \end{array} \right| = \\ = 2\int \frac{dz}{z} = 2\ln|z| = 2\ln|t+1| + C \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{1}{8} \cdot 2t - \frac{1}{4} \ln|t+1| + C = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем обратную подстановку} \\ t = \sqrt{4x-1}, \; t+1 > 0 \Rightarrow |t+1| = t+1 \end{array} \right| =$$

$$=\frac{\sqrt{(4x-1)^3}}{24}-\frac{4x-1}{16}+\frac{1}{4}\sqrt{4x-1}-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{4x-1}+1\right)+C.$$

Ответ: $\int\frac{xdx}{\sqrt{4x-1}+1}=\frac{\sqrt{(4x-1)^3}}{24}-\frac{4x-1}{16}+\frac{1}{4}\sqrt{4x-1}-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{4x-1}+1\right)+C.$

Пример 2.31. Найти неопределенный интеграл: $\int x\sin 5xdx$.

Решение

Применим формулу (2.26) интегрирования по частям. Данный интеграл – интеграл I класса.

$$\int x\sin 5xdx=\left|\begin{array}{l} u=x,\quad du=dx,\ dv=\sin 5xdx, \\ v=\int\sin 5xdx=\frac{1}{5}\int\sin 5xd\,(5x)=-\frac{1}{5}\cos 5x \end{array}\right|=$$

$$=uv-\int vdu=-\frac{1}{5}x\cdot\cos 5x+\frac{1}{5}\int\cos 5xdx=$$

$$=\left|\int\cos 5xdx=\frac{1}{5}\int\cos 5xd\,(5x)=\frac{1}{5}\sin 5x+C\right|=-\frac{1}{5}x\cdot\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C_1,$$

$$C_1=\frac{1}{5}C.$$

Ответ: $\int x\sin 5xdx=-\frac{1}{5}x\cdot\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C_1.$

Пример 2.32. Найти неопределенный интеграл: $\int x\ln xdx$.

Решение

Применим формулу (2.26) интегрирования по частям. Данный интеграл – интеграл II класса.

$$\int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, \ du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = xdx, \quad v=\int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = uv - \int vdu = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Ответ: $\int x^2 \ln x dx = \dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C.$

2.8. Определенный интеграл и его приложения

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Внутри отрезка возьмем n последовательных точек $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим $a = x_0, b = x_{n+1}$. Весь отрезок разобьется на $(n+1)$ частичных промежутков. В каждом промежутке возьмем по точке $\xi_1 \in [x_0, x_1)$, $\xi_2 \in [x_1, x_{21})$, …, $\xi_n \in [x_{n-1}, x_{n1})$, $\xi_{n+1} \in [x_n, x_{n+1}]$. Найдем значения функции $f(\xi_1),..., f(\xi_{n+1})$ и длины промежутков $h_1 = x_1 - x_0, \ldots$, $h_{n+1} = x_{n+1} - x_n$. Составим сумму $S_n = f(\xi_1)\cdot h_1 + f(\xi_2)\cdot h_2 + ... + f(\xi_{h+1})\cdot h_{n+1}$, которая называется *интегральной суммой.* Обозначим через h длину наибольшего промежутка, т. е. $h = \max\limits_i h_i$. Устремим n к бесконечности, так чтобы h стремилось к нулю.

Определение 2.42. Конечный предел последовательности S_n (если он существует) при $h \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на $n+1$ промежуток, ни от выбора точек $\xi_1,...,\xi_{n+1}$ называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\lim\limits_{\max h_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)h_i = \int\limits_a^b f(x)dx$, при этом функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, число a – называется *нижним пределом интегрирования*, число b – называется *верхним пределом интегрирования*, отрезок $[a,b]$ – *отрезком интегрирования*.

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является интегрируемой на $[a,b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x) \geq 0$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Интегральная сумма S_n при $f(x) \geq 0$ равна площади фигуры, составленной из прямоугольников со сторонами $f(\xi_i) \cdot h_i$. Следовательно, предел последовательности S_n при $h \to 0$ равен *площади* S криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

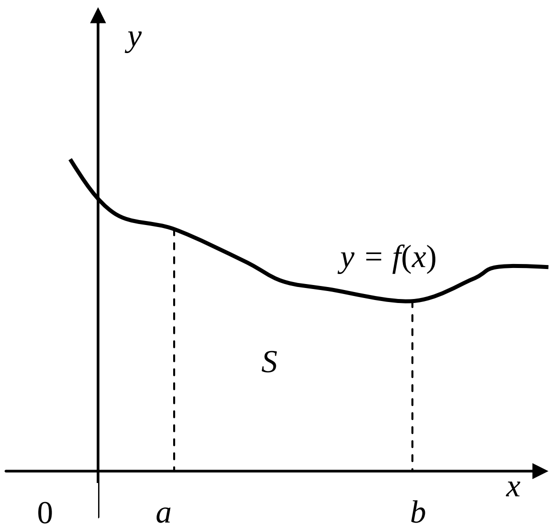

Рис. 2.12

Этот же предел называется *мерой множества* S, т. е. мерой плоской области, ограниченной графиком $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 2.12).

Замечание. Мера плоской области – обобщение понятия длины отрезка, площади плоской фигуры и объёма тела на множествах более общей природы. Линейная мера равна длине отрезка, плоская мера равна площади плоской фигуры, ограниченной линиями.

Формула Ньютона – Лейбница

Если у функции $y = f(x)$ непрерывная первообразная $F(x)$ является элементарной функцией, то для нахождения определенного интеграла используют формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (2.27)$$

Справка. Исаак Ньютон (04.01.1643–31.03.1727) – английский физик и математик, создатель теоретических основ механики и астрономии. Он открыл закон всемирного тяготения, разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобрел зеркальный телескоп и был автором важнейших экспериментальных работ по оптике. Ньютона по праву считают создателем «классической физики».

Лейбниц Готфрид Вильгельм (01.07.1646–14.11.1716) – немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед.

Несобственный интеграл

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от функций, имеющих бесконечный разрыв на интервале интегрирования называются *несобственными интегралами.*

Несобственный интеграл от функции $y = f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Если этот предел существует и конечен, то несобственный *интеграл сходится*; если предел не существует (или равен бесконечности), то несобственный *интеграл расходится.*

Аналогичным образом вычисляются следующие несобственные интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx; \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c \in [a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to0}\int\limits_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim\limits_{\beta\to0}\int\limits_{c+\beta}^{b} f(x)dx$.

Несобственный интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв на интервале интегрирования называется *сходящимся*, если существуют оба предела: $\lim\limits_{\alpha\to0}\int\limits_a^{c-\alpha} f(x)dx,$ $\lim\limits_{\beta\to0}\int\limits_{c+\beta}^{b} f(x)dx$ и *расходящимся*, если хотя бы один из этих пределов не существует (или равен бесконечности).

Вычисление площадей в прямоугольных координатах

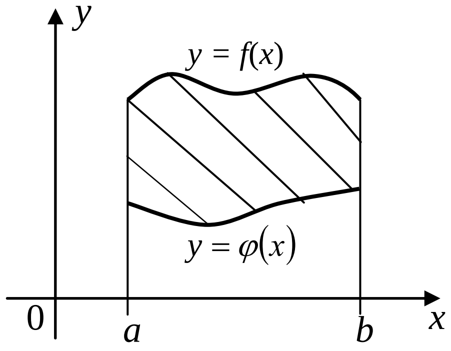

Рис. 2.13

Пусть две функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, причем $f(x) \geq \varphi(x)$ для всех $x \in [a,b]$ (рис. 2.13). Площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = f(x), y = \varphi(x)$ и прямыми $x = a, \quad x = b$, находится по формуле:

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx. \tag{2.28}$$

Вычисление длины дуги кривой в прямоугольных координатах

Пусть кривая задается функцией $y = f(x)$, дифференцируемой на отрезке $[a,b]$. Длина L дуги кривой от точки $A(a, f(a))$ до точки $B(b, f(b))$ находится по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\ . \tag{2.29}$$

Вычисление длины дуги кривой, заданной в параметрической форме

Пусть кривая задана в параметрической форме: $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$ причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются дифференцируемыми. Тогда длина L дуги кривой при $\alpha \leq t \leq \beta$, равна:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{2.30}$$

Объем тела вращения

Объем V тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, осью Ox и прямыми: $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, находится по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2.31}$$

Пример 2.33. Найти плоскую меру множества, ограниченного на плоскости Oxy линиями: $y_1 = 4 - x^2$, $y_2 = 2 - x$.

Решение

Плоская мера множества равна площади фигуры, ограниченной указанными линиями.

1) Находим точки пересечения линий $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$4 - x^2 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad (2 - x)(2 + x) - (2 - x) = 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow (2 - x)(2 + x - 1) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 - x)(1 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2 \Rightarrow x \in [-1; 2]$·

2) Построим фигуру на плоскости Oxy, ограниченную $y_1 = 4 - x^2$ – параболой и $y_2 = 2 - x$ – прямой (рис. 2.14).

Для построения прямой зададим две точки:

x	0	2
y	2	0

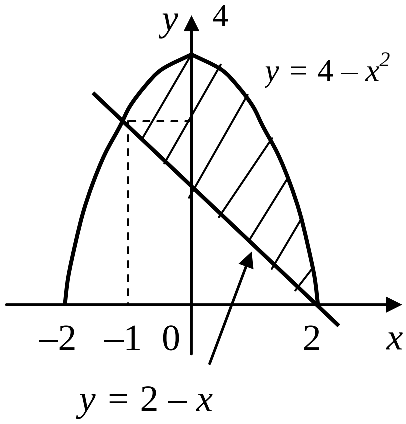

Рис. 2.14

Для построения параболы найдем координаты вершины по формуле: $x = \frac{-b}{2a}$, $x = \frac{0}{-2} = 0$. Вторую координату вершины находим из уравнения $y = 4 - 0 \Rightarrow y = 4$. Координаты вершины параболы (0; 4), так как коэффициент при x^2 в уравнении $y = 4 - x^2$ отрицательный, то ветви параболы направлены вниз.

Точки пересечения с осью Ox находим из уравнения: $4-x^2=0$ (полагая $y=0$) $\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$.

Так как $4-x^2 \geq 2-x$ на отрезке $[-1;2]$, то площадь S данной фигуры вычисляется следующим образом:

$$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(4-x^2\right)-(2-x)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(2+x-x^2\right)dx=2x\Big|_{-1}^{2}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=2(2-(-1))+2-\frac{1}{2}-\left(\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=6+\frac{3}{2}-3=4{,}5.$$

2.9. Контрольные задания по теме «Математический анализ»

Задача 2.1. Найти пределы.

Вариант 1

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(3x)}{\sin\left(x^2\right)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{x+2}{3}}$.

Вариант 2

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x+2}{x^2-8x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{3-\sqrt{5+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{x^2-3}$.

Вариант 3

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2}{5x^5-x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{8x+8}$.

Вариант 4

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+x^7+9}{x^5-3x^2-5x^6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{x+5}}{1-\sqrt{5-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(2x^2\right)}{\sin^2(5x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x+6}$.

Вариант 5

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-2x^2+1}{x^6-2x^7+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x-4}-2}{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(6x)}{6x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x^2+3}$.

Вариант 6

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+2x+3}{6x^3-7x^5+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{tg}\left(x^2\right)}{\sin^2 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{2x+5}\right)^{\frac{1}{2}(x+1)}$.

Вариант 7

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-3x+1}{x^3-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(2x)}{\mathrm{tg}^2(5x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+7}\right)^{5x}$.

Вариант 8

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^5+2x^2+8x}{x^4-5x^5+8x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6x-18}{x^3-27}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{4\cdot\mathrm{tg}7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+8}\right)^{2x+1}$.

Вариант 9

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x^4-2x+1}{3x^3-5x^4-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^6(6x)}{5x^5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-6}\right)^{x-1}$.

Вариант 0

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x(3-5x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{\mathrm{tg}\left(5x^2\right)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+7}\right)^{6x}$.

Задача 2.2. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если функция $y(x)$ задается так:

Вариант 1

а) $y = 3^{x \cdot \ln^3 x}$;

б) $y = (\sin x)^{x^2}$;

в) $x^2 + \cos y + y^2 - \sin x = 0$;

г) $\begin{cases} x = t - 2\ln t; \\ y = 3t^5. \end{cases}$

Вариант 2

а) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$;

б) $y = \left(x + 2x^2\right)^{\sin x}$;

в) $x^3 + y^3 - e^{y^2} = 0$;

г) $\begin{cases} x = 3 + \cos 3t; \\ y = 3t + \sin(3t + 1). \end{cases}$

Вариант 3

а) $y = x \cdot \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}$;

б) $y = \left(\mathrm{ctg} x^2\right)^{\ln x}$;

в) $x + \cos y - 2x + 3y^2 = 0$;

г) $\begin{cases} x = t \cdot \sin 3t; \\ y = t + \sin 2t. \end{cases}$

Вариант 4

а) $y = \frac{1 - \mathrm{tg}\, 2x}{1 + \mathrm{tg}\, 2x}$;

б) $y = (1 + \mathrm{tg} x)^{x^3}$;

в) $y \cdot e^x - x \cdot e^y + x^2 - y = 0$;

г) $\begin{cases} x = t \cdot \cos 5t; \\ y = (t + 1) \cdot \mathrm{tg} 6t. \end{cases}$

Вариант 5

а) $y = \sin\left(\ln\left(5^x - x^5\right)\right)$;

б) $y = (3 + \mathrm{arctg} x)^{\mathrm{tg} x}$;

в) $y - \cos\left(2x - y^3\right) = 0$;

г) $\begin{cases} x = \mathrm{tg}(t^2); \\ y = \mathrm{arctg}(t^3). \end{cases}$

Вариант 6

а) $y = e^{x/\arcsin x}$;

б) $y = (\mathrm{ctg} 5x)^{\sin 2x}$;

в) $3x^2 + y^2 - 2xy + y^3 = 0$;

г) $\begin{cases} x = (t^2 - 1) \cdot \ln t; \\ y = t \cdot \ln(t^3 - 3). \end{cases}$

Вариант 7

а) $y=3^{2^x \cdot \ln^3 x}$;

б) $y=\left(2+x^2\right)^{\mathrm{ctg} x^2}$;

в) $x^2-y^2+e^{x^3 \cdot y^2}=0$;

г) $\begin{cases} x=\dfrac{t-1}{t+1}; \\ y=e^{3t}. \end{cases}$

Вариант 8

а) $y=\sin^6(x-\ln x)$;

б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\mathrm{tg} x}$;

в) $x^4-e^x+x^3 \cdot y=0$;

г) $\begin{cases} x=t^5 \cdot \ln\left(t^2\right); \\ y=\arcsin 3t. \end{cases}$

Вариант 9

а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^3+1}{1-x^3}}$;

б) $y=\left(e^x+4x\right)^{3^x}$;

в) $x^3 \cdot y^3-\sin\left(x^2+y\right)=0$;

г) $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t}; \\ y=\sqrt{t} \cdot \arcsin t. \end{cases}$

Вариант 0

а) $y=\mathrm{ctg}\, 4x \cdot 9^{x^4}$;

б) $y=\left(3+x^3\right)^{\ln x}$;

в) $x+2x^4 \cdot y-e^{x+y}=0$;

г) $\begin{cases} x=t^3+2t; \\ y=\cos\left(t^2\right)-3t. \end{cases}$

Задача 2.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=y(x)$ на отрезке $[a,b]$ (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Вариант	$y = y(x)$	a	b
1	$\dfrac{x^2}{x+3}$	–1	5
2	$\dfrac{x}{x^2-2}$	–1	1

Окончание табл. 2.1

Вариант	$y = y(x)$	a	b
3	$\dfrac{x^2}{2x-3}$	–2	1
4	$\dfrac{x+1}{3x+4}$	–1	1
5	$\dfrac{2x-1}{4x+5}$	–1	2
6	$\dfrac{3x}{x^2-1}$	3	5
7	$\dfrac{3x^2}{1+x}$	–5	–2
8	$\dfrac{5x+2}{1-3x}$	–4	0
9	$\dfrac{2x-1}{1+3x}$	0	5
0	$\dfrac{x^2}{5x+3}$	1	3

Задача 2.4. Провести полное исследование функции и построить график функции (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Вариант	$f(x)$	Вариант	$f(x)$
1	$y=\dfrac{4x-12}{(x-2)}$	6	$y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$
2	$y=\dfrac{2-4x^2}{1-x^2}$	7	$y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$
3	$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$	8	$y=\dfrac{2}{x^2+3}$
4	$y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$	9	$y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
5	$y=\dfrac{x^2}{4(x+2)}$	0	$y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$

Задача 2.5. Найти и построить область определения функции двух переменных (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Вариант	$f(x, y)$	Вариант	$f(x, y)$
1	$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$	6	$z=\ln\left(6x^2+3y^2-6\right)$
2	$z=\sqrt{x^2+y^2-5}+\ln\left(6-x^2-y^2\right)$	7	$z=\dfrac{2}{\sqrt{2x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-y}}$
3	$z=\arcsin(x+y)$	8	$z=\ln\left(x^2+2y\right)$
4	$z=\sqrt{y+\sqrt{x}}$	9	$z=\arccos\dfrac{2x}{y-1}$
5	$z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$	0	$z=\sqrt{2x+3y}-\sqrt{3x-2y}$

Задача 2.6. Найти частные производные первого порядка (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Вариант	$f(x, y)$	Вариант	$f(x, y)$
1	$z=(y+2)\ln(x+3)$	6	$z=\ln\left(\mathrm{tg}\left(x^2\cdot y\right)\right)$
2	$z=\sin\left(x^2+y^2\right)$	7	$z=x^y+\ln(xy)$
3	$z=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3-256$	8	$z=e^x(\cos y+x\sin y)$
4	$z=x+\sin(xy)+y-\cos(yx)$	9	$z=\dfrac{x^2+2y}{3x-xy}$
5	$z=\sin(2x+3y)$	0	$z=\dfrac{x^4-8xy^3}{x-2y}$

Задача 2.7. Решить задачу, соответствующую Вашему варианту.

Вариант 1. Найти точки локального экстремума функции: $z=3xy-3x^2-y^2+2x$.

Вариант 2. Найти точки локального экстремума функции:
$z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 9y + 25$.

Вариант 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:
$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в области $D: \{x + y + 1 = 0,\ \ y = 0,\ \ x = -3\}$.

Вариант 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:
$z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$ в области $D: \{x + y = 1,\ \ y = 0,\ \ x = 0\}$.

Вариант 5. Найти точки локального экстремума функции:
$z = x^2 + xy + 6y$.

Вариант 6. Найти точки локального экстремума функции:
$z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$.

Вариант 7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:
$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в области $D: \{x + y = 1,\ \ y = -1,\ \ x = -1\}$.

Вариант 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:
$z = 10 - x^2 + 2xy$ в области $D: \left\{y = 4 - x^2,\ \ y = 0\right\}$.

Вариант 9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:
$z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ в области $D: \{y = x,\ \ y = 0,\ \ x = 1\}$.

Вариант 0. Найти точки локального экстремума функции:
$z = x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 2y$.

Задача 2.8. Найти $grad\ z\big|_A$ и $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}\right|_A$, если известны: функция $z = z(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и направление $\mathbf{l} = \{a, b\}$ (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Вариант	$z=z(x,y)$	$A(x_0,y_0)$	$\mathbf{l}=\{a,b\}$
1	$\ln(2x+3y)$	(1, 3)	$\{-9,-6\}$
2	xe^y	(2, 2)	$\{2,-2\}$
3	$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	(1, –1)	$\{0,\ \ 2\}$
4	$\operatorname{arcctg}(xy)$	(–1, 1)	$\{1,-1\}$
5	$\ln(x^2+3y^2)$	(1, 1)	$\{2,\ \ 2\}$
6	$2x^2+y^2$	(4, 4)	$\{2,\ \ 1\}$
7	x^2+y^2	(5, 8)	$\{12,\ 16\}$
8	x^2+y^2-xy	(3, 1)	$\{4,-3\}$
9	x^2+y^2+xy	(–1, –1)	$\{2,-1\}$
0	$\ln(yx^2+y^2)$	(1, 2)	$\{3,-4\}$

Задача 2.9. Найти неопределенные интегралы.

Вариант 1

а) $\displaystyle\int\frac{2x^3+\sqrt{x}-6x}{x^2}dx$; б) $\displaystyle\int\sin^5 8x\cdot\cos 8x dx$; в) $\displaystyle\int(x+1)\ln(x+1)dx.$

Вариант 2

а) $\displaystyle\int\frac{7x^3+\sqrt{x}-6x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}\cdot x^2}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^8}}dx$; в) $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{arctg}x dx$.

Вариант 3

а) $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{x}+8x^5\right)\left(x\sqrt{x}-2x\right)dx$; б) $\displaystyle\int\cos^5 6x\cdot\sin 6x dx$; в) $\displaystyle\int x^2\cos 3x dx$.

Вариант 4

а) $\displaystyle\int\left(4\sqrt[5]{x}+8x^4\right)\left(x+5\sqrt{x}-2x\right)dx$; б) $\displaystyle\int\frac{\ln 3x}{4x}dx$; в) $\displaystyle\int\ln(2x+4)dx$.

Вариант 5

а) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3(2x)}{1+4x^2} dx$; в) $\int (x+1)3^x dx$.

Вариант 6

а) $\int \left(\sqrt{x}+6x\right)\left(x+\sqrt[3]{x}\right) dx$; б) $\int \sqrt[5]{6-5x} dx$; в) $\int x \arcsin x dx$.

Вариант 7

а) $\int \left(\sqrt[3]{x}+7x^5-4x\right)\left(x\sqrt{x}-7x\right) dx$; б) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$;

в) $\int (3x+1)\cos(3x+1) dx$.

Вариант 8

а) $\int \frac{3x^3+x\sqrt{x}-4x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}\cdot x^2} dx$; б) $\int \frac{\ln^{\frac{1}{5}}(2x-3)}{2x-3} dx$; в) $\int (x-2)\sin x dx$.

Вариант 9

а) $\int \frac{3x^3+e^x x^2-4x^{\frac{1}{3}}}{x^2} dx$; б) $\int \frac{x}{\sqrt{9-2x^2}} dx$; в) $\int (1-x)\cos 7x dx$.

Вариант 0

а) $\int \frac{2x^2+11x\sqrt{x}-9x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}\cdot x} dx$; б) $\int \operatorname{tg}(3x+4) dx$; в) $\int \operatorname{arctg}(x+1) dx$.

Задача 2.10. Найти плоскую меру множества, ограниченного заданными линиями на плоскости Oxy, сделать чертеж (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Вариант	Уравнения линий
1	$x^2+y^2=1,\ x+y=1$, найти меньшую площадь
2	$y=x^2+2x+1,\ x+y=1$
3	$y=\cos x,\ y=\sin x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}$
4	$y^2=3+2x, \quad y=x$
5	$y=\ln x,\ x=1,\ x=3$
6	$y=-x^2+2x-1, \quad y=-x-1$
7	$y=x,\ x+y=6,\ y=0$
8	$y^2=x,\ x+y=2$
9	$y=x^2+2x, \quad y=-x$
0	$y^2=2x-9, \quad y=x-6$

3. Основы комплексного анализа

3.1. Комплексные числа и действия над ними

Определение 3.1. Назовем *комплексным числом* выражение вида $z = x + iy$, где x и y принадлежат множеству вещественных чисел, i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, тогда числа $z = 0 + iy$ называются *чисто мнимыми.* Если $y = 0$, тогда числа $z = x + i0$ отождествляются с действительными числами.

Определение 3.2. Действительные числа x и y называются соответственно *действительной и мнимой частями* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначаются так:

$$x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z.$$

Определение 3.3. *Модулем* комплексного числа z называется неотрицательное число $|z|$, которое находится по формуле:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.1}$$

Определение 3.4. Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если выполняются условия:

$$x_1 = x_2, \ y_1 = y_2$$

или

$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ и } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Определение 3.5. *Сопряженным числом* $\bar{z}$ к числу $z = x + iy$ называется комплексное число $\bar{z} = x - iy$.

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \ \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \ \text{ и } \ |\bar{z}| = |z|.$$

На множестве комплексных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления.

1. Сложение:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \qquad (3.2)$$

т. е. $\operatorname{Re}(z_1+z_2)=\operatorname{Re}z_1+\operatorname{Re}z_2$ и $\operatorname{Im}(z_1+z_2)=\operatorname{Im}z_1+\operatorname{Im}z_2$.

В частности, сумма двух взаимно сопряженных комплексных чисел $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ равна

$$(x+iy)+(x-iy)=2x,$$

т. е. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$.

2. Вычитание:

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2), \qquad (3.3)$$

т. е. $\operatorname{Re}(z_1-z_2)=\operatorname{Re}z_1-\operatorname{Re}z_2$ и $\operatorname{Im}(z_1-z_2)=\operatorname{Im}z_1-\operatorname{Im}z_2$.

3. Умножение:

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1), \qquad (3.4)$$

в частности, получили важное равенство:

$$i^2=(0+i1)(0+i1)=(0-1)+i(0+0)=-1.$$

Кроме того, произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ равно:

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2, \qquad z\bar{z}=|z|^2.$$

4. Деление:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \qquad (3.5)$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат Oxy. На плоскости отметим точку с координатами (x, y) и проведем к ней радиус-вектор, тогда его проекциями на координатные оси являются значения x и y (рис. 3.1).

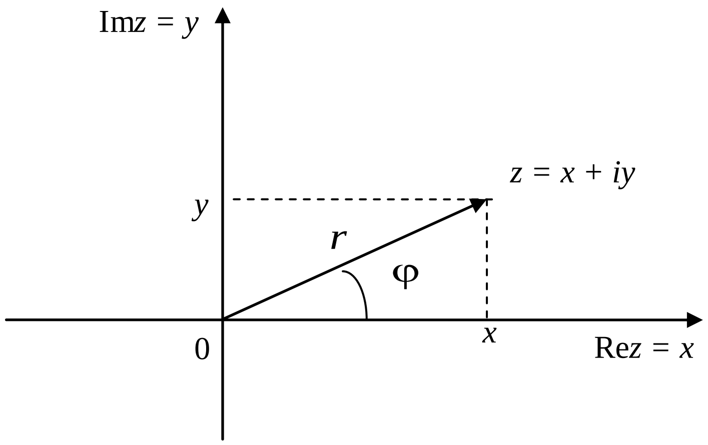

Рис. 3.1

Всякому радиус-вектору плоскости (всякой точке плоскости) соответствует определенное комплексное число $z = x + iy$. *Вещественные числа* x *и* y *равны проекциям рассматриваемого вектора на координатные оси (координатам рассматриваемой точки).*

Плоскость, на которой реализовано это соответствие, называется *комплексной плоскостью.* На оси Ox расположены действительные числа $z = x + i0 = x$, поэтому Ox называется *действительной осью.* На оси Oy расположены чисто *мнимые числа* $z = 0 + iy$, поэтому Oy называется *мнимой осью.*

Обозначим:

1) через r – расстояние от начала координат до точки $z = x + iy$, тогда r будет равно длине радиус-вектора этой точки и соответственно равно $|z|$ – модулю комплексного числа $z = x + iy$.

2) через φ – угол, который составляет радиус-вектор комплексного числа $z = x + iy$ с положительным направлением оси Ox. Угол φ называется *аргументом* $\varphi = \operatorname{Arg} z$ этого комплексного числа. Здесь $-\infty < \operatorname{Arg} z < \infty$. Наименьшее по модулю значение $(\operatorname{Arg} z)$ называется его *главным значением* и обозначается $\arg z$, т. е.

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(x + iy) = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Значения $\arg z$ принадлежат интервалу $(-\pi; \pi]$.

Причем из рис. 3.1 следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Значение аргумента комплексного числа $z = x + iy$ можно найти так:

а) комплексное число лежит в 1-й четверти (см. рис. 3.1), тогда:

$$\arg z = \arg(x + iy) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

где $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$;

б) комплексное число лежит в 4-й четверти (рис. 3.2), тогда:

$$\arg z = \arg(x + iy) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

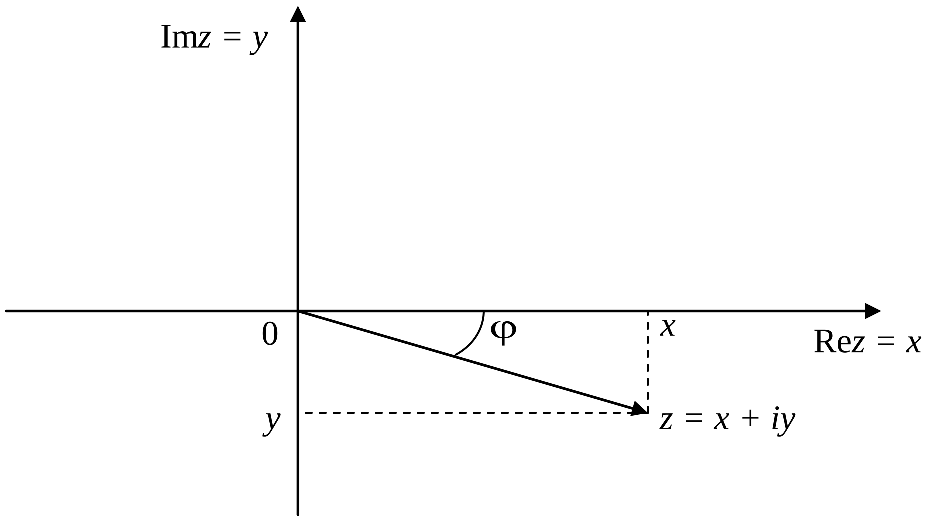

Рис. 3.2

в) комплексное число лежит во 2-й четверти, т. е. $x<0,\ y\geq 0$ (рис. 3.3), тогда:

$$\arg z=\arg\left(x+iy\right)=\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

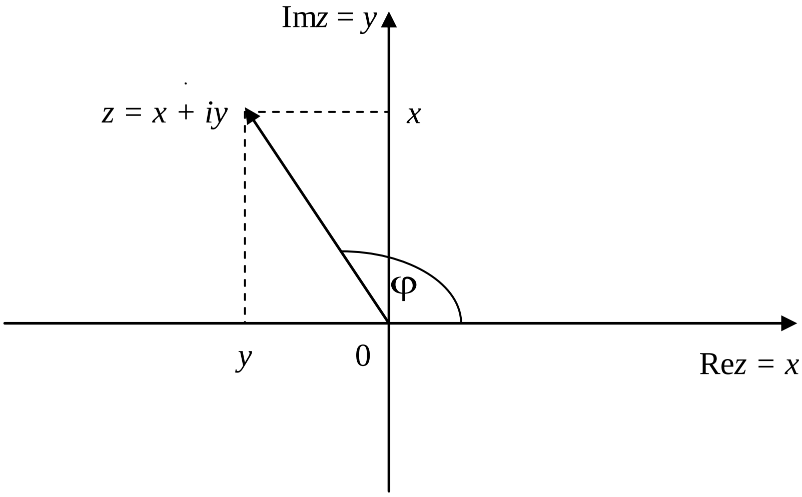

Рис. 3.3

г) комплексное число лежит в 3-й четверти, т. е. $x<0,\ y<0$ (рис. 3.4), тогда:

$$\arg z=\arg\left(x+iy\right)=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

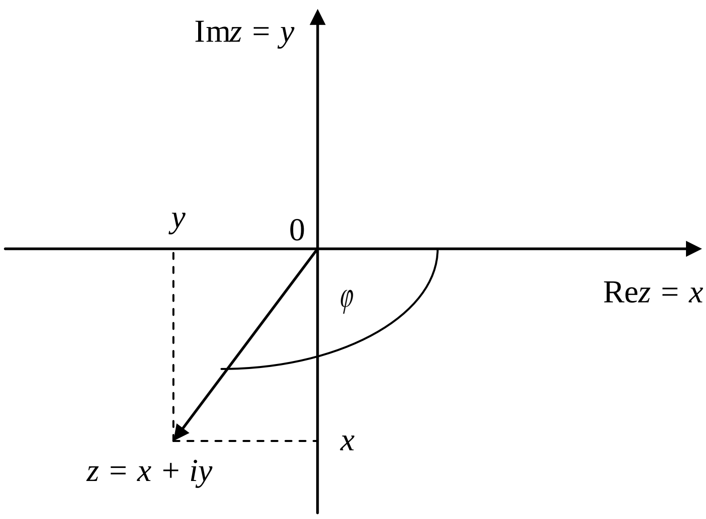

Рис. 3.4

д) комплексное число лежит на оси Oy, при $x = 0,\ y > 0$, тогда справедливо следующее (рис. 3.5):

$$\arg z = \arg(x + iy) = \frac{\pi}{2}.$$

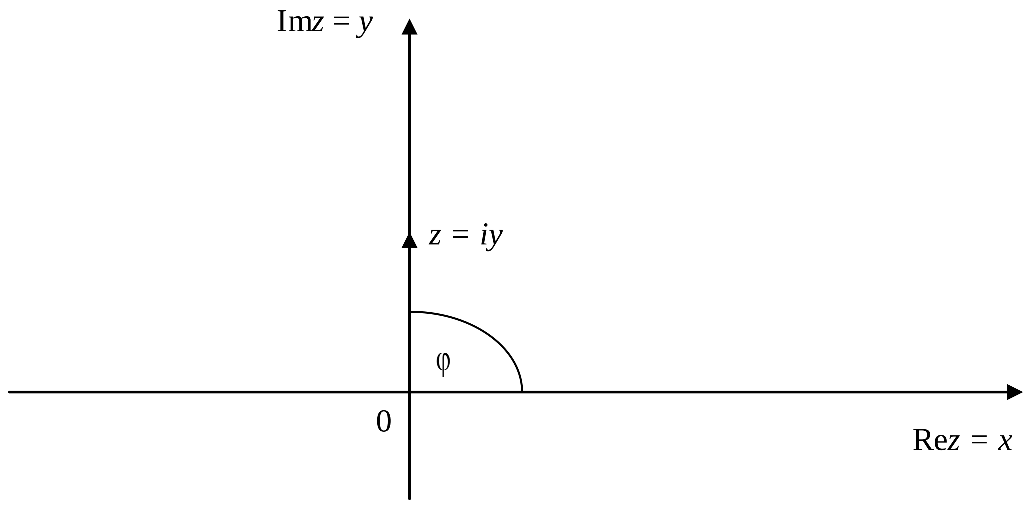

Рис. 3.5

е) комплексное число лежит на оси Oy, при $x = 0,\ y < 0$, тогда справедливо следующее (рис. 3.6):

$$\arg z = \arg(x + iy) = -\frac{\pi}{2}.$$

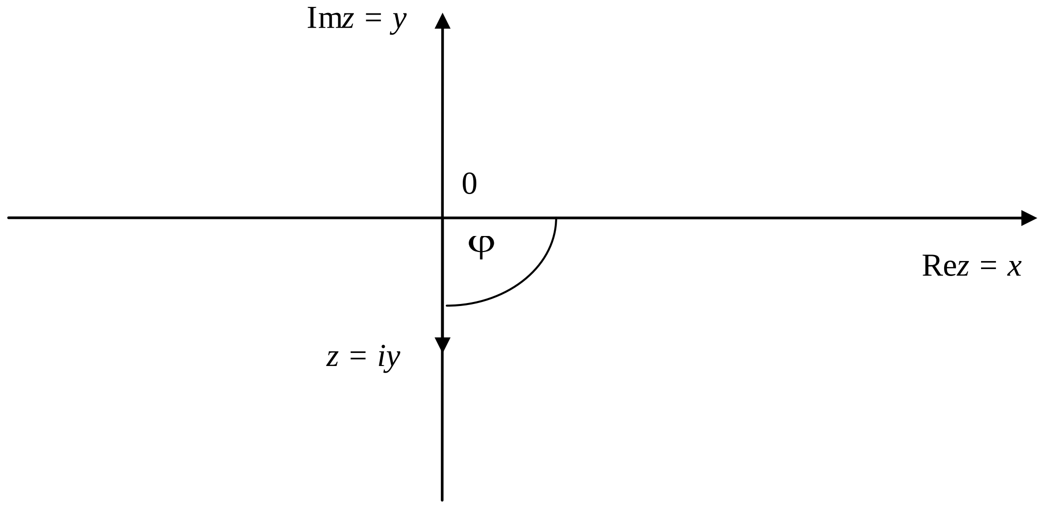

Рис. 3.6

ж) комплексное число лежит на оси Ox, при $x>0,\ y=0$, тогда значение аргумента равно (рис. 3.7):

$$\arg z=\arg(x+iy)=0.$$

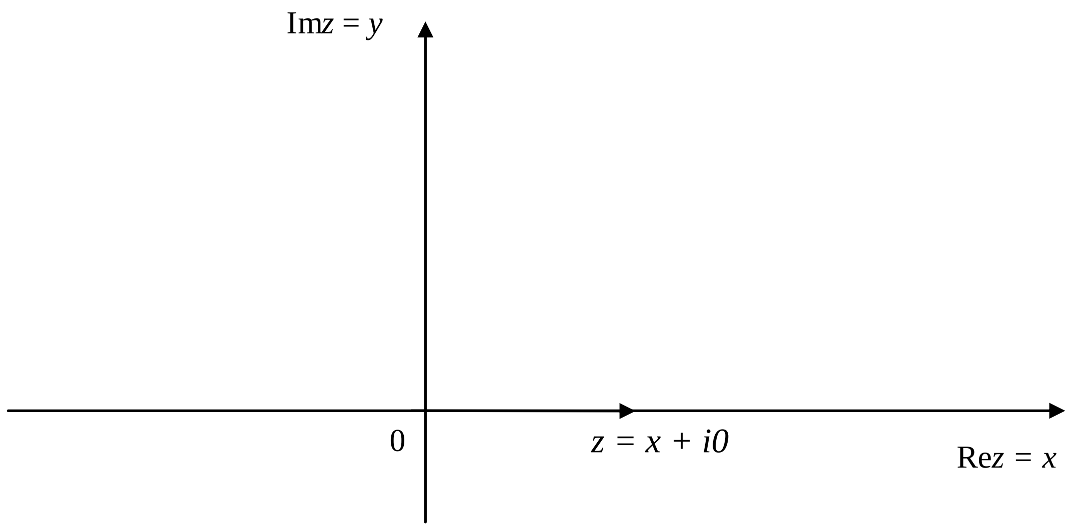

Рис. 3.7

з) комплексное число лежит на оси Ox, при $x<0,\ y=0$, тогда значение аргумента равно (рис. 3.8):

$$\arg z=\arg(x+iy)=\pi.$$

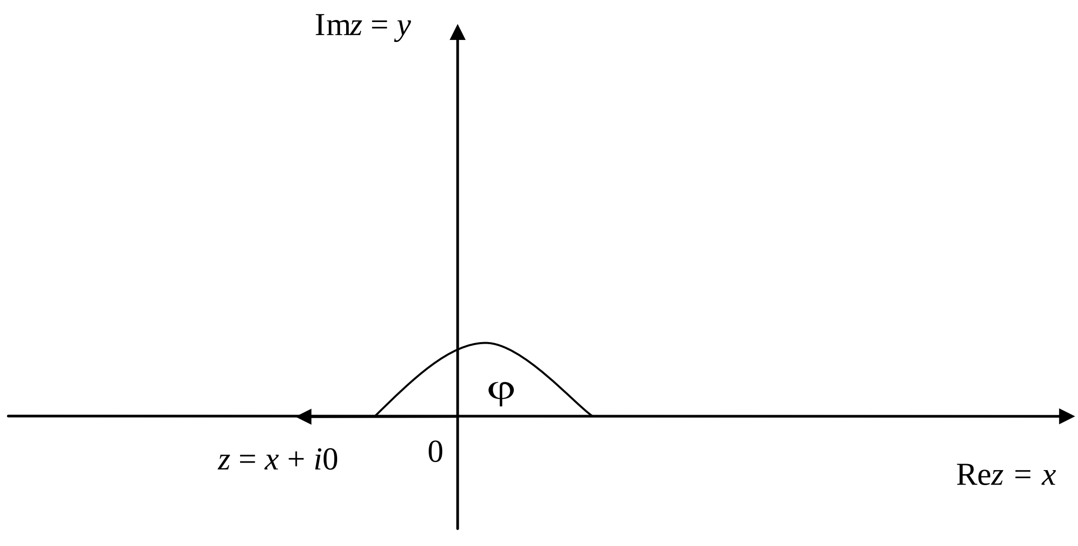

Рис. 3.8

Так как между комплексным числом $z = x + iy$ и точкой комплексной плоскости с координатами (x, y) существует взаимно однозначное соответствие, поэтому длина радиус-вектора этой точки r и угол φ являются полярными координатами точки (x, y).

Тогда имеют место соотношения:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Пользуясь полярными координатами, можем выразить комплексное число $z = x + iy$ через его модуль r и аргумент φ в виде:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.6}$$

В этом случае говорят, что комплексное число записано в *тригонометрической форме* (формула 3.6).

Действия с комплексными числами, записанными в тригонометрической форме

Определение 3.6. *Произведением* двух комплексных чисел является такое *комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей и аргумент – сумме аргументов сомножителей.*

Таким образом, если комплексные числа записаны в тригонометрической форме, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Следствие. Для того, чтобы *возвести комплексное число в целую положительную степень, нужно его модуль возвести в эту степень и аргумент умножить на показатель степени.*

Можем написать так:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3.8)$$

Если в этой формуле положить $r = 1$, получим формулу Муавра:

$$[(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3.9)$$

Справка. Муавр Абрахам (1667–1754), английский математик французского происхождения. Член Лондонского королевского общества (1697), Парижской (1754) и Берлинской (1735) академий.

Определение 3.7. Результатом *деления* двух комплексных чисел является такое *комплексное число, модуль которого равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя.*

Обозначая частное в виде дроби $\frac{z_1}{z_2}$, можем написать:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (3.10)$$

Определение 3.8. Если комплексное число $z = x + iy \neq 0$ и $\arg z = \varphi$, то *корнем n-й степени* из комплексного числа $z = x + iy$ будет *комплексное число, n-я степень которого равна z.*

Все комплексные числа, удовлетворяющие этому условию, находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (3.11)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

Пример 3.1. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + i3$, $z_2 = 9 - i$, $z_3 = -1 + i$. Вычислить, используя алгебраическую форму записи комплексного числа:

1) $(z_1 + i)(1 - z_2)$; 2) $\frac{\overline{z_2}}{z_3}$.

Решение

1. Вычислим выражение (z_1+i). Для этого подставим в него значение $z_1=-1+i3$, получим: $(z_1+i)=-1+i3+i=-1+i4$.

Теперь найдем значение $(1-z_2)$, для этого подставим в него $z_2=9-i$, получим: $(1-z_2)=1-(9-i)=-8+i$.

Тогда по определению (3.2) произведения двух комплексных чисел $(z_1+i)(1-z_2)$ будем иметь:

$$(z_1+i)(1-z_2)=(-1+i4)(-8+i)=8-i-32i-4=4-33i.$$

2. Вычислим выражение $\frac{\overline{z_2}}{z_3}$. Для этого по определению (3.5) сопряженного комплексного числа найдем $\overline{z_2}=9+i$ и $\overline{z_3}=-1-i$, подставим в формулу найденные значения. Будем использовать определение (3.5) операции деления двух комплексных чисел, в результате получим:

$$\frac{\overline{z_2}}{z_3}=\frac{(9+i)}{-1+i}=\frac{\overline{z_2}\ \overline{z_3}}{z_3\overline{z_3}}=\frac{(9+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-9-9i-i+1}{1+1}=\frac{-8-10i}{2}=$$

$$=\frac{-8}{2}+i\frac{-10}{2}=-4-5i.$$

Ответ: 1) $(z_1+i)(1-z_2)=4-33i$; 2) $\frac{\overline{z_2}}{z_3}=-4-5i.$

Пример 3.2. Даны комплексные числа $z_1=9+i3\sqrt{3}$, $z_2=9-i3\sqrt{3}$, $z_3=-1+i$. Записать z_1, z_2, z_3 в тригонометрической форме и выполнить действия:

1) z_1z_2; 2) $\frac{z_1}{\overline{\overline{z_3}}}$; 3) z_1^5; 4) $\sqrt[3]{z_1}$.

Решение

1. Запишем комплексные числа в тригонометрической форме, для этого найдем их модули и аргументы. Изобразим комплексные числа на комплексной плоскости.

Комплексное число $z_1 = 9 + i3\sqrt{3}$ лежит в 1-й четверти (рис. 3.9), тогда для нахождения его аргумента, воспользуемся формулой

$$\arg z = \arg(x + iy) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

в результате получим $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{9} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

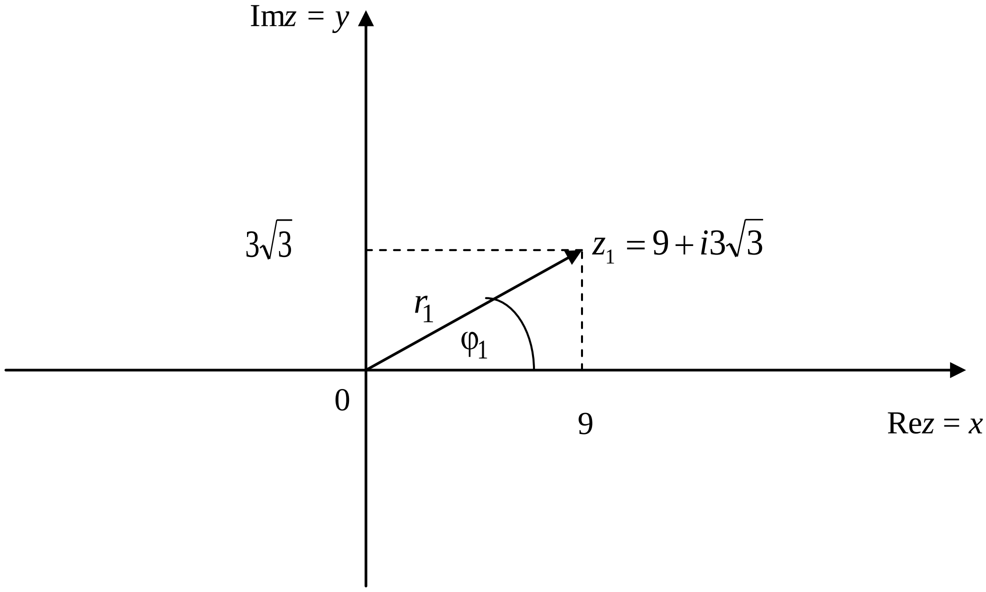

Рис. 3.9

Модуль комплексного числа найдем по формуле (3.1), имеем:

$$r_1 = \sqrt{9^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{81 + 27} = \sqrt{108}.$$

Тогда комплексное число $z_1 = 9 + i3\sqrt{3}$ в тригонометрической форме (см. формулу (3.6)), примет вид:

$$z_1 = 9 + i3\sqrt{3} = \sqrt{108}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Комплексное число $z_2 = 9 - i3\sqrt{3}$ лежит в 4-й четверти (рис. 3.10), тогда для нахождения его аргумента, воспользуемся формулой

$$\arg z = \arg(x + iy) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

в результате получим

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{-3\sqrt{3}}{9} = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Модуль комплексного числа найдем по формуле (3.1), имеем:

$$r_2 = \sqrt{9^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{81+27} = \sqrt{108}.$$

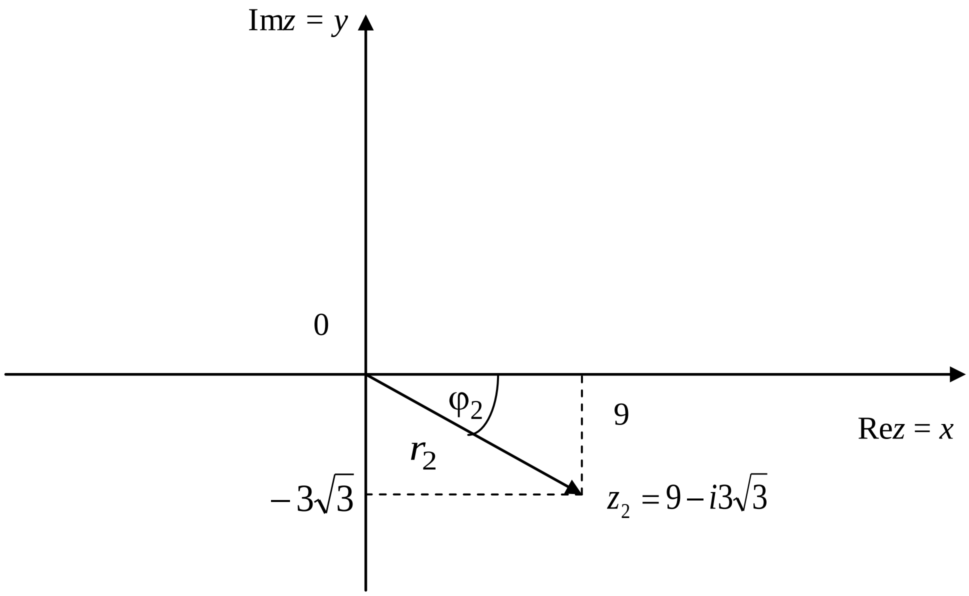

Рис. 3.10

Тогда комплексное число $z_2 = 9 - i3\sqrt{3}$ в тригонометрической форме примет вид:

$$z_2 = 9 - i3\sqrt{3} = \sqrt{108}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Комплексное число $z_3 = -1 + i$ лежит во 2-й четверти ($x < 0$; $y \geq 0$, рис. 3.11), поэтому будем использовать формулу: $\arg z = \arg(x+iy) = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, в результате получим: $\varphi_3 = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Используя формулу (3.1), найдем модуль комплексного числа $z_3=-1+i$, он равен:

$$r_3=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Тогда комплексное число $z_3=-1+i$ в тригонометрической форме, примет вид:

$$z_3=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

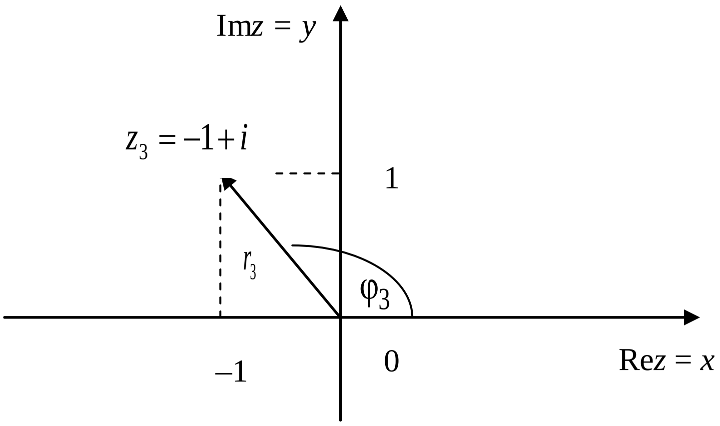

Рис. 3.11

2. Выполним действия, используя тригонометрические формы чисел:

а) найдем z_1z_2, по формуле: $z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$.

Имеем:

$$z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)=\sqrt{108}\cdot\sqrt{108}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=108\left(\cos 0+i\sin 0\right)=108;$$

б) чтобы найти $\dfrac{z_1}{z_3}$, найдем комплексное число $\overline{z_3}$, как сопряженное комплексному числу $z_3=-1+i$. Оно будет равно $\overline{z_3}=-1-i$. Изобразим это комплексное число на комплексной плоскости и запишем его в тригонометрической форме (рис. 3.12).

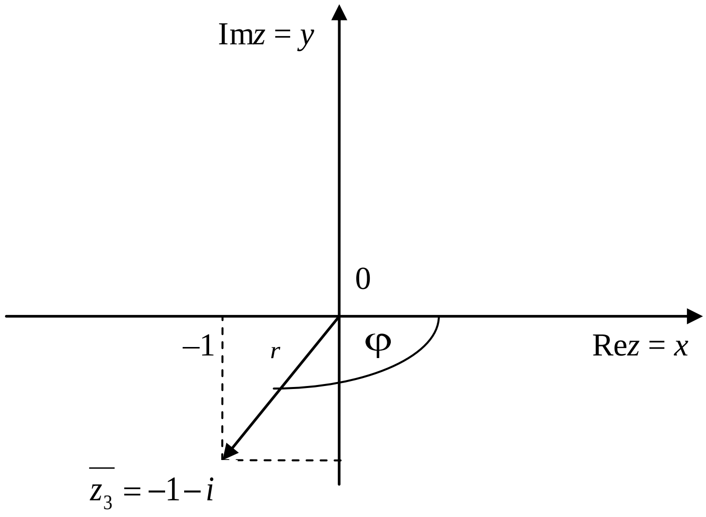

Рис. 3.12

Примечание. Для того, чтобы записать сопряженное комплексное число в тригонометрической форме, достаточно воспользоваться определением взаимно сопряженных комплексных чисел. *Т. е., для двух взаимно сопряженных комплексных чисел* $z = x + iy$ *и* $\bar{z} = x - iy$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im}\bar{z} = -\operatorname{Im} z,\quad |\bar{z}| = |z|.\ \operatorname{Arg}\bar{z} = -\operatorname{Arg} z.$$

Это означает, что

$$|z_3| = |\overline{z_3}| = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Arg}\overline{z_3} = -\operatorname{Arg} z_3.$$

Так как $\operatorname{Arg} z_3 = \varphi_3 = \frac{3\pi}{4} \to \operatorname{Arg}\overline{z_3} = -\frac{3\pi}{4}$, тогда комплексное число $\overline{z_3} = -1 - i$ можно записать в виде:

$$\overline{z_3} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Этот же результат можно получить с помощью непосредственного вычисления аргумента по формулам.

Найдем выражение $\frac{z_1}{\overline{z_3}}$ по формуле (3.10).

Имеем:

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{r_1}{r_3}(\cos(\varphi_1-(-\varphi_3))+i\sin(\varphi_1-(-\varphi_3)))=\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{54}\left(\cos\frac{2\pi+9\pi}{12}+i\sin\frac{2\pi+9\pi}{12}\right)=\sqrt{54}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

в) выражение z_1^5 найдем по формуле (3.8), в нашем случае $n = 5$:

$$z_1^5=\sqrt{(108)^5}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

г) выражение $\sqrt[3]{z_1}$ найдем по формуле (3.11):

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right).$$

Данное уравнение имеет три корня, которые являются комплексными числами.

1-й корень найдем, если $k = 0$ подставим в формулу (3.11), в результате получим:

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2-й корень уравнения найдем, если в формулу (3.11) подставим $k = 1$, в результате получим:

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi+8\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi+8\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

3-й корень уравнения найдем по аналогии, если в формулу (3.11) подставим $k = 2$, в результате получим:

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi+16\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi+16\pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Ответ: 1) $z_1 z_2 = 108$; 2) $\frac{z_1}{z_3} = \sqrt{54}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$;

3) $z_1^5 = \sqrt{(108)^5}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 4) при $k = 0$ $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

при $k = 1$ $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$; при $k = 2$ $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Пример 3.3. Решить систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} (2-i)\,x_1 + (1+3i)\,x_2 = 4i; \\ (4+i)\,x_1 - (i+1)\,x_2 = 4-6i. \end{cases}$$

Решение

Найдем определитель основной матрицы системы Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+3i \\ 4+i & -(i+1) \end{vmatrix} = (2-i)\cdot(-i-1) - (1+3i)(4+i) =$$

$$= -2i - 2 - 1 + i - (4 + i + 12i - 3) = -3 - i - (1+13i) = -4 - 14i.$$

Найдем определители Δ_1, для этого заменим в определителе Δ первый столбец на столбец свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4i & 1+3i \\ 4-6i & -(i+1) \end{vmatrix} = 4i\cdot(-i-1) - (1+3i)\cdot(4-6i) =$$

$$= 4 - 4i - (4 - 6i + 12i + 18) = 4 - 4i - (22 + 6i) = -18 - 10i.$$

По аналогии найдем определитель Δ_2, для этого заменим в определителе Δ второй столбец на столбец свободных членов, в результате получим:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2-i & 4i \\ 4+i & 4-6i \end{vmatrix} = (2-i)\cdot(4-6i) - 4i\cdot(4+i) =$$
$$= 8-12i-4i-6-(16i-4) = 2-16i-16i+4 = 6-32i.$$

Используя формулы Крамера [см. раздел 1.1], найдем неизвестные x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-18-10i}{-4-14i} = \left| \text{по определению операции деления, имеем:} \right| =$$
$$= \frac{(-18-10i)\cdot(-4+14i)}{(-4-14i)\cdot(-4+14i)} = \frac{72-252i+40i+140}{16+196} = \frac{212-212i}{212} = 1-i;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6-32i}{-4-14i} = \left| \text{ по определению операции деления, имеем: } \right| =$$
$$= \frac{(6-32i)\cdot(-4+14i)}{(-4-14i)\cdot(-4+14i)} = \frac{-24+84i+128i+448}{16+196} = \frac{424+212i}{212} = 2+i.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}$.

3.2. Области и линии на комплексной плоскости

Определение 3.9. Множество всех точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству: $|z-a| < \varepsilon$, называется ε – *окрестностью точки a*. Геометрически неравенство $|z-a| < \varepsilon$ задает множество точек комплексной плоскости, лежащих внутри круга радиуса ε с центром в точке a.

Определение 3.10. Множество D точек z комплексной плоскости называют *областью*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) каждая точка множества D есть *внутренняя* точка этого множества, т. е. принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью;

2) любые две точки множества можно соединить непрерывной линией так, чтобы все точки линии принадлежали самому множеству D.

Определение 3.11. Точка τ_0 называется *граничной* для области *D*, если в любой ее окрестности лежат как точки области, так и точки, которые этой области не принадлежат. Множество всех граничных точек области называют *границей* этой области.

Определение 3.12. Область *D* с присоединенной к ней границей называется *замкнутой* областью и обозначается $\overline{D}$.

Определение 3.13. Область *D* называется *ограниченной*, если бесконечно удаленная точка является для нее *внешней* точкой, т. е. она не принадлежит этой области вместе с некоторой своей окрестностью, в противном случае область считается *неограниченной.*

Определение 3.14. Область *D* называется *односвязной*, если любая замкнутая кривая, целиком принадлежащая области, может быть стянута в точку области, не выходя из *D*, в противном случае область считается многосвязной.

Например, односвязной областью будет круг: $|z| < R$, многосвязной областью будет множество точек кольца: $r < |z| < R$.

Пример 3.4. Какая линия в комплексной плоскости определяется следующим условием: $|z-2| = 6$?

Решение

У нас: $z = x + iy$. Найдем: $z - 2 = x + iy - 2$, отдельно выделим действительную и мнимую части, тогда получим: $z - 2 = (x-2) + iy$.

Найдем модуль этого комплексного числа по формуле (3.1), где вместо *x* подставим соответствующую действительную часть $(x-2)$:

$$|z-2| = |(x-2)+iy| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\,.$$

Тогда условие задачи примет вид: $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 6$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $(x-2)^2 + y^2 = 36$.

Получили уравнение окружности с центром в точке $(2, 0)$ и радиусом, равным 6. Изобразим эту линию на комплексной плоскости (рис. 3.13).

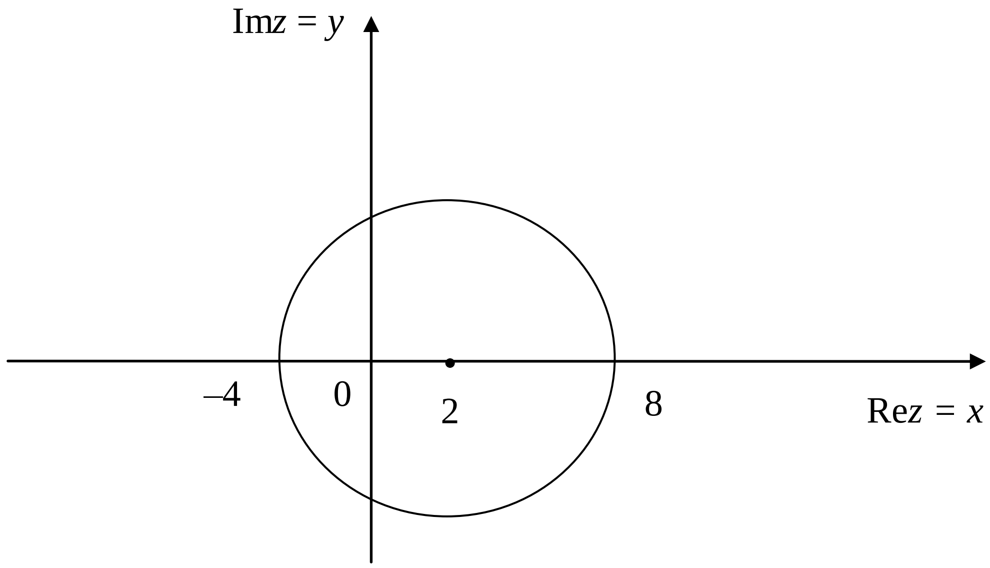

Рис. 3.13

Ответ. Образом линии, которая удовлетворяет данному условию, является окружность с центром в точке $(2, 0)$ и радиусом, равным 6.

Пример 3.5. Какие линии или области в комплексной плоскости определяются следующими условиями:

1. $|z-1| = 2|z-i|$.
2. $|z-4| < |1-4\bar{z}|$.
3. $|z-i| < x+1$.

Решение

1. Полагая $z = x+iy$, перепишем условия задачи. Найдем значения выражений $z-1 = x+iy-1$ и $z-i = x+iy-i$, отдельно выделим действительные и мнимые части этих выражений, получим:

$$z-1 = x+iy-1 = (x-1)+iy, \quad z-i = x+iy-i = x+i(y-1).$$

Найдем модули этих комплексных чисел, для этого используем формулу (3.1). Тогда

$$|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\,.$$

Здесь в формулу вместо x подставим соответствующую действительную часть $(x-1)$. Аналогично поступим при нахождении модуля $z-i=x+i(y-1)$. Здесь в формулу вместо y подставим соответствующую мнимую часть $(y-1)$, получим:

$$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

Подставим найденные значения в уравнение и перепишем условие задачи в виде:

$$|z-1|=2|z-i|\to\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$(x-1)^2+y^2=4\left(x^2+(y-1)^2\right).$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$x^2-2x+1+y^2=4x^2+4y^2-8y+4$$

или

$$-3x^2-2x-3y^2+8y=3.$$

Умножим уравнение на –1, получим:

$$3x^2+2x+3y^2-8y=-3.$$

Выделим полные квадраты по переменным x и y, для этого вынесем коэффициент 3 при x^2 и y^2 за скобки, получим уравнение:

$$3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)+3\left(y^2-\frac{8}{3}y\right)=-3.$$

Далее используем формулы из школьного курса математики:

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2;\qquad c^2+2cd+d^2=(c+d)^2.$$

Поделим коэффициент $\frac{2}{3}$ при x на 2, получим $\frac{1}{3}$, добавим и вычтем в первой скобке квадрат этого числа $\frac{1}{9}$, получим выражение

$$3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+3\left(y^2-\frac{8}{3}y\right)=-3.$$

Аналогично поступим со второй скобкой, поделим коэффициент $\frac{8}{3}$ при y на 2, получим $\frac{4}{3}$, добавим и вычтем во второй скобке квадрат этого числа $\frac{16}{9}$, получим:

$$3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+3\left(y^2-\frac{8}{3}y+\frac{16}{9}-\frac{16}{9}\right)=-3.$$

Преобразуем:

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{и} \quad y^2-\frac{8}{3}y+\frac{16}{9}=\left(y-\frac{4}{3}\right)^2.$$

Упростим полученное уравнение, подставив в него найденные значения, имеем:

$$3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)+3\left(\left(y-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\right)=-3.$$

Раскроем скобки:

$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+3\left(y-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}=-3.$$

Свободные члены переносим в правую часть уравнения и приводим подобные, имеем

$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=-3+\frac{1}{3}+\frac{16}{3},$$

отсюда

$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{-3\cdot 3+17}{3}=\frac{8}{3}.$$

Разделим уравнение на 3, окончательно получим результат:

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}.$$

Образом этой линии на комплексной плоскости является окружность с центром в точке $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ и радиусом, равным $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (рис. 3.14):

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}.$$

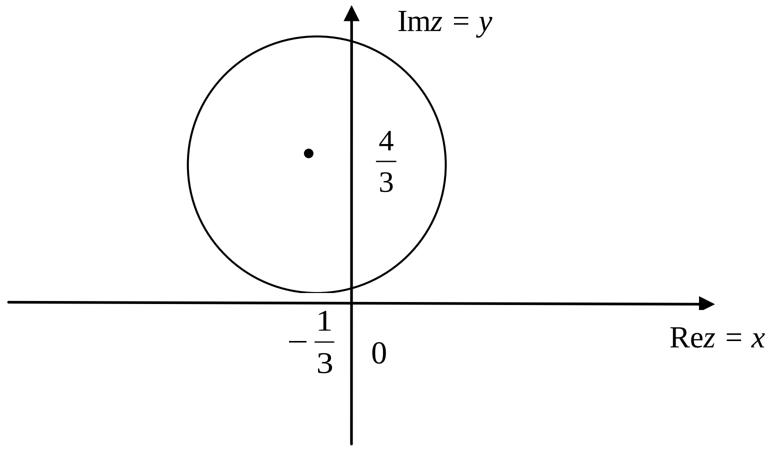

Рис. 3.14

2. Полагая $z=x+iy$, перепишем условия задачи. Найдем значения выражений $z-4=x+iy-4$ и $1-4\bar{z}=1-4(x-iy)=1-4x+iy$, отдельно выделим действительные и мнимые части этих выражений, получим:

$$z-4=x+iy-4=(x-4)+iy \quad \text{и} \quad 1-4\bar{z}=1-4x+iy=(1-4x)+iy.$$

По аналогии с пунктом 1, запишем модули комплексных чисел, используя формулу (3.1):

$$|z-4|=\sqrt{(x-4)^2+y^2} \quad \text{и} \quad |1-4\bar{z}|=\sqrt{(1-4x)^2+y^2}.$$

Подставим найденные значения в неравенство $|z-4|<|1-4\bar{z}|$ и перепишем условие задачи в виде:

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}<\sqrt{(1-4x)^2+16y^2}.$$

Возведем в квадрат обе части неравенства, так как они обе положительные, знак неравенства не меняем. Получили:

$$(x-4)^2+y^2<(1-4x)^2+16y^2.$$

Раскроем скобки:

$$x^2-8x+16+y^2<1-8x+16x^2+16y^2.$$

Квадраты соберем в левой части неравенства, остальные слагаемые в правой части, получим:

$$x^2-16x^2+y^2-16y^2<1-8x+8x-16$$

или

$$(1-16)\left(x^2+y^2\right)<(1-16)\to-15\left(x^2+y^2\right)<-15\to\left(x^2+y^2\right)>1.$$

Последний результат мы получили в результате деления неравенства на отрицательное число –15, поэтому мы поменяли знак неравенства на «>».

Получили неограниченную односвязную область, которая является всей плоскостью с круговым отверстием единичного радиуса (рис. 3.15).

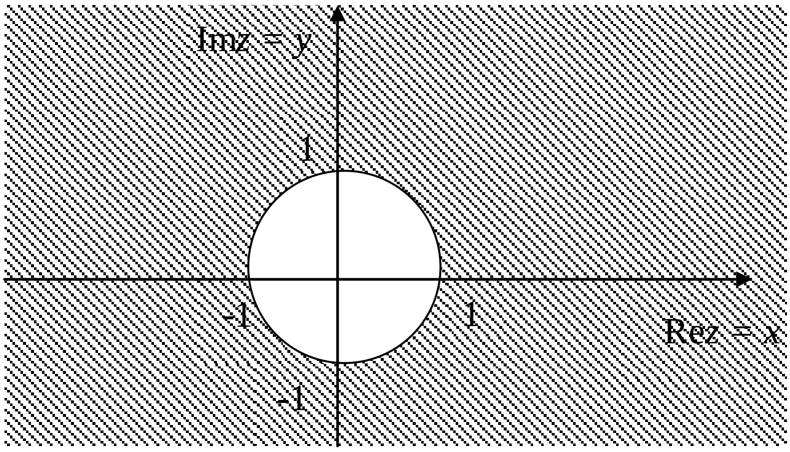

Рис. 3.15

3. Полагая $z=x+iy$, перепишем условия задачи. Найдем значения выражений $z-i=x+iy-i$, отдельно выделим действительную и мнимую части этого выражения, получим: $z-i=x+iy-i=x+i(y-1)$.

Запишем модуль комплексного числа, используя формулу (3.1), здесь в формулу вместо y подставим соответствующую мнимую часть $(y-1)$, получим:

$$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

Подставим найденные значения в неравенство $|z-i|<x+1$ и перепишем условие задачи в виде:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}<x+1.$$

Данное неравенство имеет смысл тогда и только тогда, когда $x+1\geq 0$. Поэтому, при возведении в квадрат обеих частей неравенства, знак неравенства не меняем, так как они обе положительные. Получили систему неравенств:

$$\begin{cases} x+1\geq 0; \\ x^2+(y-1)^2<(x+1)^2. \end{cases}$$

Решаем второе неравенство, для этого раскроем скобку $(x+1)^2$ по формуле $(x+1)^2=x^2+2x+1$, тогда имеем:

$$(y-1)^2<(x+1)^2-x^2 \to (y-1)^2<x^2+2x+1-x^2;$$

$$(y-1)^2<2x+1 \quad \to \quad (y-1)^2<2\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Границей искомой области является парабола $(y-1)^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$, с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2},\, 1\right)$. Сама область расположена внутри параболы (рис. 3.16).

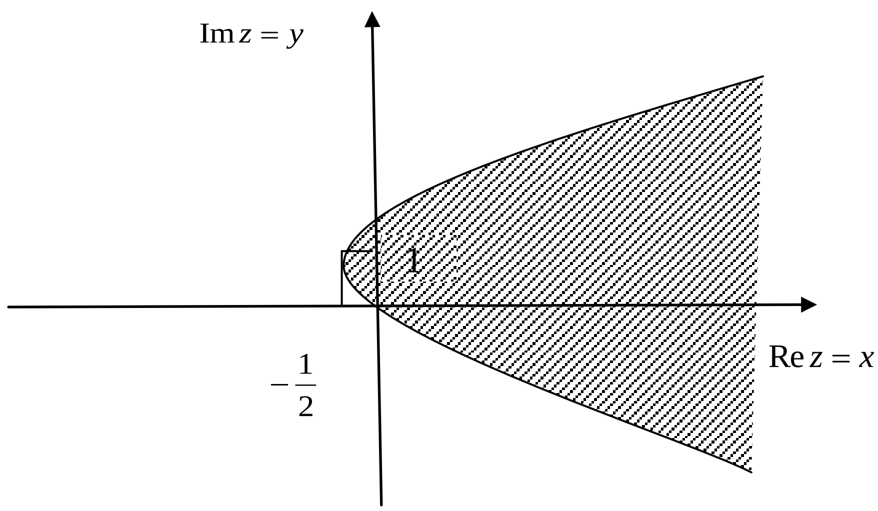

Рис. 3.16

Ответ: 1. Данному условию удовлетворяет множество точек, принадлежащих окружности $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$. 2. Это неравенство описывает неограниченную односвязную область, которая является всей плоскостью с круговым отверстием единичного радиуса. 3. Искомая область расположена внутри параболы, заданной уравнением $(y-1)^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

3.3. Комплексные функции действительного аргумента, функции комплексного переменного

Определение 3.15. Комплексная переменная z называется *комплексной функцией действительного аргумента* t, заданной на интервале (α,β), если каждому значению t из этого интервала поставлено в соответствие комплексное числовое значение z.

Пусть в комплексной плоскости дана некоторая область D и каждой точке z этой области ставится в соответствие комплексное число w, тогда говорят, в области D задана *функция комплексного аргумента* w *от* z, и пишут $w=f(z)$.

Комплексная функция $w=f(z)$, однозначно задается двумя вещественными функциями переменных x и y:

$$u=u(x,y),\ \ v=(x,y)$$

таких, что, если положить $z=x+iy$, то $w=f(z)=u+iv$.

Определение 3.16. Функция $w=f(z)$ называется *однозначной*, если каждому значению z из области определения функции соответствует только одно значение w. В противном случае функция является многозначной.

Определение 3.17. Число A называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется положительное число $\delta=\delta(\varepsilon)$, такое, что для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, будет выполняться условие $|f(z)-A|<\varepsilon$. Обозначение предела функции $f(z)$ в точке z_0:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

Определение 3.18. Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если для каждого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, будет выполняться условие:

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \quad \text{или} \quad f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z).$$

Геометрическая интерпретация непрерывности функции

Функция $f(z)$ является *непрерывной* в точке z_0, если для всех z, лежащих внутри круга $|z-z_0|<\delta$ с центром в точке z_0, достаточно малого радиуса δ, соответствующие значения функции $w=f(z)$ изображаются точками, лежащими внутри круга $|w-w_0|<\varepsilon$ с центром в точке $w_0=f(z_0)$, сколь угодно малого радиуса ε.

Определение 3.19. Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной в области D*, если для всякого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такая, что, для любых двух точек z' и z'', принадлежащих области D и удовлетворяющих условию $|z'-z''|<\delta$ имеет место неравенство:

$$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon.$$

Пример 3.6. Найти действительную и мнимую части функции $f(z)=\dfrac{z-1}{z+2}$.

Решение

Найдем выражения:

$$z-1=x+iy-1=(x-1)+iy \text{ и } z+2=x+iy+2=(x+2)+iy.$$

Полагая $f(z)=u+iv$, подставим эти выражения в уравнение и получим:

$$u+iv=\frac{(x-1)+iy}{(x+2)+iy}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на комплексное число, $\overline{z+2}=(x+2)-iy$, сопряженное с комплексным числом, стоящим в знаменателе. Используя определение деления двух комплексных чисел, имеем:

$$u+iv=\frac{(x-1)+iy}{(x+2)+iy}=\frac{((x-1)+iy)\cdot((x+2)-iy)}{((x+2)+iy)\cdot((x+2)-iy)}=$$

$$=\frac{x^2+2x-ixy-x-2+iy+ixy+i2y+y^2}{(x+2)^2+y^2}.$$

Теперь группируем в числителе отдельно действительные и мнимые слагаемые, почленно делим их на знаменатель дроби, в результате получим:

$$u+iv=\frac{x^2+2x-ixy-x-2+iy+ixy+i2y+y^2}{(x+2)^2+y^2}=\frac{\left(x^2+y^2+x-2\right)+i3y}{x^2+y^2+4x+4}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+x-2}{x^2+y^2+4x+4}+i\frac{3y}{x^2+y^2+4x+4};$$

$$u=\frac{x^2+y^2+x-2}{x^2+y^2+4x+4}; \qquad v=\frac{3y}{x^2+y^2+4x+4}.$$

Ответ. Действительная часть функции $f(z)=\frac{z-1}{z+2}$ равна $u=\frac{x^2+y^2+x-2}{x^2+y^2+4x+4}$, мнимая часть функции $f(z)=\frac{z-1}{z+2}$ равна $v=\frac{3y}{x^2+y^2+4x+4}$.

3.4. Основные элементарные функции комплексного переменного

Рассмотрим примеры некоторых элементарных функций комплексного переменного:

а) целая линейная функция:

$$w = f(z) = az + b;$$

б) дробная линейная функция:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ (ad - bc \neq 0);$$

в) целая рациональная функция:

$$w = f(z) = a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

где n – целое положительное число;

г) дробная рациональная функция:

$$w = f(z) = \frac{a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}{b_1 z^m + b_2 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m},$$

где n и m – целые положительные числа;

д) показательная функция e^z в комплексной области можно определяется с помощью формулы Эйлера $(\cos y + i \sin y) = e^{iy}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot \cos y + ie^x \cdot \sin y;$$

е) логарифмическая функция:

$$w = Ln\, z = \ln z + 2k\pi i = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$
$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots.;$$

ж) степенная функция с произвольным показателем:

$$w = f(z) = z^\alpha = \left(e^{\ln z}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln z}\ (z \neq 0);$$

$$e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha \ln|z|} \cdot (\cos(\alpha \arg z) + i \sin(\alpha \arg z)).$$

3.5. Дифференцирование функций комплексного переменного

Дадим независимому переменному $z = x + iy$ приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и найдем приращение функции Δw однозначной функции $w = f(z)$:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Определение 3.20. Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$, w', $\dfrac{df}{dz}$, или $\dfrac{dw}{dz}$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Как мы могли заметить, определение производной функции комплексного переменного дословно совпадает с определением функции действительного переменного.

Требование существования предела отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ и его независимости от закона стремления Δz к нулю накладывает на функцию $f(z)$ более сильные ограничения, аналогичное требование для функции $y = \varphi(x)$, где x – независимая действительная переменная. Дело в том, что в отличии от существования предела отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, который требует равенства пределов при приближении точки $x + \Delta x$ к точке x всего по двум направлениям: слева (при $\Delta x < 0$) и справа ($\Delta x > 0$), стремление точки $z + \Delta z$ к точке z может идти по любому из бесконечного множества различных путей, причем все эти пределы должны быть равны независимо от пути стремления точки $z + \Delta z$ к точке z.

Пусть $w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$ и $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, тогда приращение функции Δw будет равно:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] +$$
$$+ i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

где $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$; $\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)$.

Тогда производная примет вид:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного: для того, чтобы функция $w = f(z)$ имела производную в точке z (другими словами: была дифференцируема), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла *условиям Коши – Римана:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Определение 3.21. Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется *аналитической в данной точке.*

Определение 3.22. Функция, *аналитическая во всех точках* некоторой области, называется *аналитической* или *голоморфной* в этой области.

Определение 3.23. Точки, в которых функция не является аналитической, называются *особыми.*

Пример 3.7. Вычислить значение производной функции $w = f(z)$ в точке z_0, если $w = f(z) = 2 - z^2 + 3z$ и $z_0 = 2 - i$.

Решение

При решении будем использовать правила дифференцирования функции действительной переменной [см. раздел 2.4], так как они совпадают с правилами дифференцирования функции комплексной переменной, а конкретно воспользуемся формулой дифференцирования степенной функции.

В результате получим:

$$w' = f'(z) = (2 - z^2 + 3z)' = -2z + 3.$$

Чтобы вычислить значение производной функции $w = f(z)$ в точке z_0, подставим точку $z_0 = 2 - i$ в полученное выражение, имеем:

$$f'(z_0) = -2z_0 + 3 = -2(2 - i) + 3 = -4 + 2i + 3 = -1 + 2i.$$

Ответ: $f'(z_0) = -1 + 2i$.

Пример 3.8. Выяснить, является ли функция $w = z^2$ аналитической.

Решение

Воспользуемся формулами $w = u + iv$ и $z = x + iy$, подставим их в уравнение и получим:

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

отсюда $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$. Находим частные производные этих функций по переменным x и y, в результате получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Легко заметить, что условия Коши – Римана выполняются везде, а именно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, функция $w = z^2$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

Ответ. Функция $w = z^2$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

Пример 3.9. Выяснить, является ли функция $w = e^z$ аналитической.

Решение

Если $w = e^z$, то $w = u + iv = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, отсюда $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$. Находим частные производные этих функций по переменным x и y, в результате получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Если подставим найденные производные в условия Коши – Римана, увидим, что они выполняются везде, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ответ. Функция $w = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

3.6. Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Пусть в плоскости z задана точка z_0 и проходящая через нее кривая γ, заданная уравнением $z = z(t)$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$, причем точке z_0 соответствует значение параметра t_0, т. е. $z_0 = z(t_0)$. Предположим, при $t = t_0$ существует не равная нулю производная функции $z(t)$, т. е.

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \neq 0.$$

Из этого условия следует, что хотя бы одна из величин $x'(t_0)$ или $y'(t_0)$ не обращаются в ноль одновременно и, следовательно, в точке z_0 существует касательная к графику функции γ (рис. 3.17), причем вектор с координатами $\{x'(t_0), y'(t_0)\}$ направлен по касательной к этой кривой (этот вектор изображает комплексное число $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$).

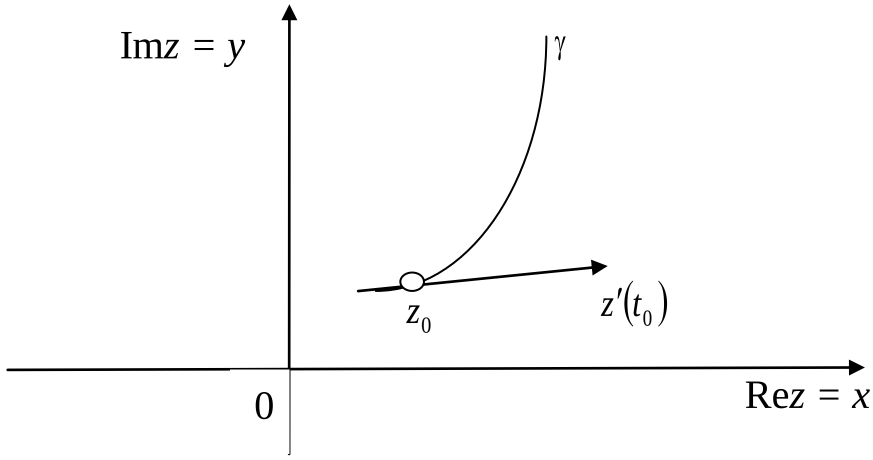

Рис. 3.17

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 и некоторой ее окрестности, кроме того $f'(z_0)\neq 0$. Где функция $f(z)$ является отображением кривой γ в кривую γ', обозначим это отображение через $w=f(z(t))=w(t)$. Пусть $w_0=f[z(t_0)]=w(t_0)$ есть образ точки z_0 при отображении $w=f(z)$. Найдем производную функции $w=f(z)$ по t, используя правило дифференцирования сложной функции. Имеем:

$$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0).$$

Так как $w'(t_0)\neq 0$, следовательно, в точке w_0 существует касательная к кривой γ' (рис. 3.18). Комплексные числа $z'(t_0)$ и $w'(t_0)$ изображаются векторами, направленными по касательным к кривым γ и γ', приложенными соответственно к точкам z_0 и w_0, поэтому если производная аналитической функции $f(z)$ отлична от нуля в точке z_0, то **аргумент ее производной имеет следующий геометрический смысл:**

Аргумент производной аналитической функции $f(z)$ равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой кривой, проходящей через эту точку, чтобы получить направление касательной в соответствующей точке w_0 к образу данной кривой при отображении $w=f(z)$.

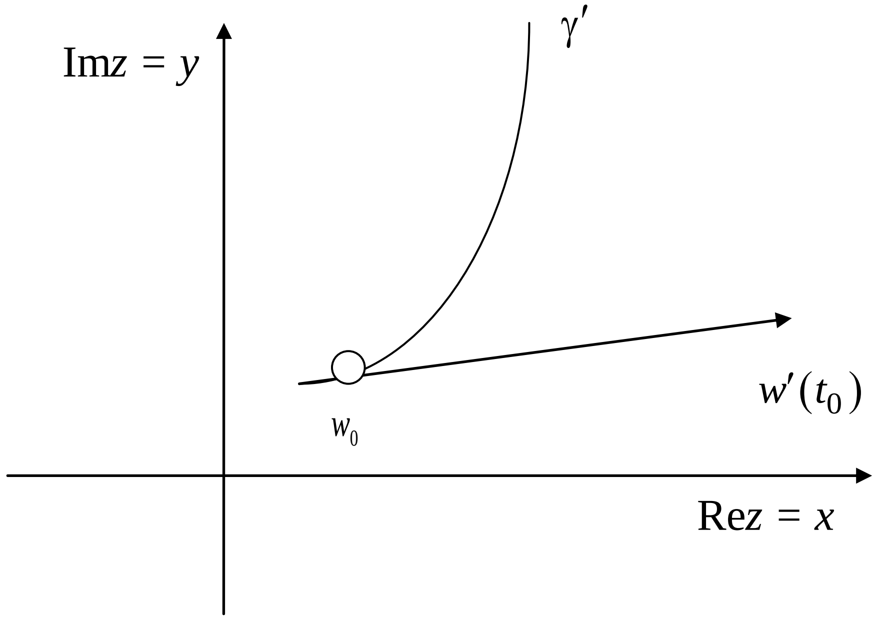

Рис. 3.18

Для выяснения ***геометрического смысла модуля производной*** заметим, что $|\Delta z|$ есть расстояние от точки z_0 до точки $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ – расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Следовательно, величина $\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$ указывает, в каком отношении в результате отображения изменяется расстояние между этими точками. Так как $|f'(z_0)| = \left|\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$, то величину $|f'(z_0)|$ естественно назвать *коэффициентом растяжения* в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояние между точками увеличивается и происходит растяжение: если $|f'(z_0)| < 1$, то отображение в окрестности точки z_0 приводит к сжатию.

Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от того, по какому закону точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0, то коэффициент растяжения в данной точке *постоянен*, т. е. одинаков во всех направлениях; это свойство отображения, осуществляемого с помощью аналитической функции.

3.7. Контрольные задания по теме «Основы комплексного анализа»

Задача 3.1. Выполнить действия с комплексными числами $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ в алгебраической форме. Данные задачи представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
α_1	2	–2	3	–3	4	–4	1	–1	6	–6
α_2	1	2	4	6	–1	–2	–6	8	4	2
α_3	–3	2	4	6	7	8	–9	–4	–5	–7
β_1	–9	–7	–6	–4	–3	–6	8	9	3	2
β_2	4	5	6	8	9	–1	–2	3	4	5
β_3	–4	3	2	1	–6	6	7	5	–9	1

Вычислить:

1) $(z_1 + i)(1 - z_2)$; 2) $\dfrac{\overline{z_2}}{z_3}$.

Задача 3.2. Выполнить действия с комплексными числами $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ в тригонометрической форме (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
α_1	2	–2	3	–3	4	6	1	–9	–3	–6
α_2	1	2	4	6	–1	1	–6	8	4	5
α_3	–3	–3	4	6	6	–6	–7	–4	–5	–1
β_1	–2	2	–3	$-\sqrt{3}$	–4	–6	–1	9	3	6
β_2	–1	2	–4	–6	1	–1	–6	–8	4	5
β_3	3	3	4	6	–6	6	7	4	5	1

Вычислить:

1) $z_1 z_2$; 2) $\dfrac{z_1}{z_3}$; 3) z_1^5; 4) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задача 3.3. Выяснить, какие линии удовлетворяют условию α (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Вариант	1	3	5	7	9
α	$\lvert z-2\rvert=1$	$\lvert z-i\rvert=3$	$\lvert z+4\rvert=1$	$\lvert z-4\rvert=8$	$\lvert z+6\rvert=4$
Вариант	2	4	6	8	0
α	$\lvert z+2\rvert=2$	$\lvert z-3\rvert=4$	$\lvert z+5i\rvert=6$	$\lvert z-2i\rvert=9$	$\lvert z-1\rvert=1$

Задача 3.4. Выяснить, какие области удовлетворяют условию α (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Вариант	1	3	5	7	9
α	$\lvert z-i\rvert<x+2$	$\lvert z+i\rvert<x+3$	$\lvert z+1\rvert<y+1$	$\lvert z+i\rvert<x+4$	$\lvert z-2i\rvert<y+1$
Вариант	2	4	6	8	0
α	$\lvert z+i\rvert<x+1$	$\lvert z-i\rvert<y+1$	$\lvert z+2\rvert<x+2$	$\lvert z-i\rvert<y+4$	$\lvert z-3i\rvert<y+6$

Задача 3.5. Вычислить производную функции $f(z)$ в точке z_0 (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Вари- ант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f(z)$	z^2+z	$1-3z^3$	$1+2z^3$	$z-z^3$	$2z-z^3$	$1-3z^2$	z^3+4	$1+z^2$	$z-z^2$	$1-3z^2$
z_0	$1-i$	$1+i$	$1-2i$	$1+2i$	$2-i$	$2+i$	$1-3i$	$1+3i$	$3+i$	$3-3i$

Задача 3.6. Решить систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами.

Вариант 1

$$\begin{cases}(3-i)x_1+(4+i)x_2=19-11i;\\(1-2i)x_1+(2+3i)x_2=8-10i.\end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases}(i+2)x_1+2i\cdot x_2=4i;\\(2-3i)x_1+3i\cdot x_2=9+4i.\end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases}(4-i)x_1+(2+i)x_2=4+3i;\\(1-i)x_1+(1+3i)x_2=5+3i.\end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases}(3-5i)x_1+(1+i)x_2=11+9i;\\(1-5i)x_1+(1+3i)x_2=9+9i.\end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases}(3+i)x_1+(4-i)x_2=-4+5i;\\(6-2i)x_1+(2+i)x_2=7-16i.\end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases}(10-i)x_1+(4+i)x_2=6-10i;\\(1+8i)x_1+(2+i)x_2=-3-9i.\end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases}(8-i)x_1+(4-i)x_2=39-5i;\\(1-i)x_1+(2+i)x_2=8-8i.\end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases}(7-i)x_1+(2+i)x_2=16+21i;\\(1-8i)x_1+(1+3i)x_2=23-12i.\end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases}(7-i)x_1+(9+i)x_2=8+8i;\\(1-i)x_1+(2+i)x_2=8-i.\end{cases}$$

Вариант 0

$$\begin{cases}(6-i)x_1+(8+i)x_2=34+25i;\\(1-5i)x_1+(1+3i)x_2=19-27i.\end{cases}$$

4. РЯДЫ

4.1. Числовые ряды. Основные понятия

Определение 4.1. Пусть задана числовая последовательность:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_n,...$$

Числовым рядом называется составленный с ее помощью следующий символ:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \tag{4.1}$$

в котором просуммировано бесконечное число заданных слагаемых, одно из них – a_n – задает формулу для нахождения любого слагаемого с любым номером. При этом сами слагаемые $a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_n,...$ называются членами ряда (4.1), а слагаемое a_n – общим членом ряда (4.1). Сокращенно ряд (4.1) записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ . \tag{4.2}$$

Определение 4.2. *Частичной суммой* ряда (4.1) называется сумма S_n первых его n слагаемых:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n\ . \tag{4.3}$$

Определение 4.3. Если существует предел частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - \text{число}$, тогда числовой ряд (4.1) называется *сходящимся*, а число S – называется *суммой ряда* (4.1). Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, либо вообще не существует, то числовой ряд (4.1) называется расходящимся. Факт наличия суммы ряда записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S\ . \tag{4.4}$$

Теорема 4.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если числовой ряд (4.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если необходимый признак сходимости числового ряда не выполняется ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$), то ряд (4.1) расходится.

Замечание 1. Необходимый признак используется только в негативном смысле, т. е. для доказательства расходимости ряда в случае его невыполнения.

Например: рассмотрим числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{11} + \ldots + \frac{2n-1}{3n+2} + \ldots \tag{4.5}$$

и найдем: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3} \neq 0$,

т. е. для ряда (4.5) не выполняется необходимый признак, поэтому ряд (4.5) расходится.

Замечание 2. Необходимый признак не является достаточным, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то из этого факта ничего не следует, тем самым выполнение необходимого признака не обеспечивает сходимости ряда. Пример тому – гармонический ряд.

Примеры числовых рядов

1. Гармонический ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots. \tag{4.6}$$

Докажем, что этот ряд расходится. Имеем:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

Разобьем слагаемые ряда (4.6) на такие группы с количеством слагаемых в каждой группе, равным 2, 2^2, 2^3, 2^4,…, 2^{k-1} соответственно:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right),\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\right),\ldots,$$

$$\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\frac{1}{2^{k-1}+3}+\frac{1}{2^{k-1}+4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right).$$

Затем применим к каждой группе неравенство (4.7):

$$S_n = (\text{при } n=2^k) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\frac{1}{2^{k-1}+3}+\frac{1}{2^{k-1}+4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right) > \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot k = B_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_{2^k} \geq \lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot k\right) = \infty,$$

т. е. частичные суммы гармонического ряда не ограничены и в пределе дают бесконечность, что означает расходимость гармонического ряда. Тем не менее $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Вывод: для гармонического ряда необходимый признак выполняется, но ряд расходится.

2. Ряд геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots,\quad b_1 \neq 0, q \neq 1, q \neq -1. \tag{4.8}$$

Сумма первых n слагаемых геометрической прогрессии находится так: $S_n = \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-q^n\right) = \begin{cases} \infty, \text{ если } |q|>1; \\ \dfrac{b_1}{1-q}, \text{ если } |q|<1. \end{cases}$$

Вывод: ряд геометрической прогрессии (4.8) расходится, если $|q|>1$. Если $|q|<1$, то ряд сходится, причем его сумма: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Замечание. Числовые ряды появились при решении некоторых технических задач. Например, при расчете колебаний опор и перегонов мостов.

Если в расчетах появляются числовые ряды, которые сходятся, то можно оценить изменяющиеся параметры и определить степень износа конструкций.

Если же появляются расходящиеся ряды, то возможны 2 варианта:

1) через некоторое время конструкция разрушится;
2) вы неправильно составили схему исследования.

Поэтому и необходимо отличать сходящиеся ряды от других (расходящихся).

В связи с тем, что необходимый признак не является достаточным для сходимости числового ряда, далее рассмотрим группу достаточных признаков сходимости. Причем рассмотрим достаточные признаки для некоторых классов числовых рядов:

1) знакопостоянные и знакоположительные числовые ряды;
2) знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды.

4.2. Знакопостоянные, знакоположительные числовые ряды

Определение 4.4. Числовой ряд (4.1) называется *знакопостоянным* числовым рядом, если все члены этого ряда имеют одинаковый знак. Числовой ряд, у которого все члены ряда имеют знак «плюс», называется *знакоположительным*.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_n > 0, \ldots \end{array}\right| . \tag{4.9}$$

Существуют и знакоотрицательные числовые ряды, которые вместе со знакоположительными образуют множество знакопостоянных рядов. Однако знакоотрицательные ряды сводятся к знакоположительным, поэтому далее будем изучать только знакоположительные числовые ряды.

Пример. Ряд $-b_1-b_2-b_3-...-b_n-...$, где $b_1>0, b_2>0,...,b_n>0$, легко сводится к знакоположительному ряду:

$$-b_1-b_2-b_3-...-b_n-...=-(b_1+b_2+b_3+...+b_n+...).$$

Свойства знакоположительных числовых рядов

Рассмотрим знакоположительный числовой ряд (4.9) и запишем его частичные суммы:
$S_1=a_1>0$, $S_2=a_1+a_2=S_1+a_2>S_1$, $S_3=(a_1+a_2)+a_3=S_2+a_3>S_2 \Rightarrow ...$
S_n – монотонно возрастающая функция.

В результате для частичных сумм знакоположительного ряда есть только 2 возможности:

1) последовательность S_n монотонно возрастает и ограничена сверху ($S_n<C$, $n \geq 1$), тогда существует предел частичных сумм, и знакоположительный ряд сходится;

2) последовательность S_n монотонно возрастает и не ограничена сверху ($S_n \to +\infty$), следовательно, ряд расходится.

Вывод: для знакоположительных числовых рядов невозможен случай несуществования предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Например: ряд

$$1-1+1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots \tag{4.10}$$

имеет следующие частичные суммы: $S_n=\begin{cases}0, & n-\text{четное};\\ 1, & n-\text{нечетное}\end{cases}$ – данная последовательность не имеет предела (рис. 4.1) на бесконечности, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, и ряд (4.10) расходится по определению, но этот ряд не является знакоположительным, а является знакочередующимся рядом.

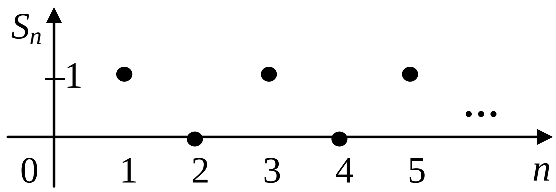

Рис. 4.1

Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

Теорема 4.2 (первый признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных числовых ряда:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots; \tag{4.11}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{4.12}$$

при этом $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2, \ldots$, $a_n < b_n, \ldots$ (в этом случае говорят, что ряд (4.11)) является меньшим по отношению к большему ряду (4.12)).

Первый признак сравнения утверждает, что:

1) если больший ряд сходится, то меньший ряд тоже сходится;
2) если меньший ряд расходится, то больший ряд тоже расходится.

Теорема 4.3 (второй (предельный) признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных числовых ряда (4.11) и (4.12):

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

причем существует предел отношения: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$ где число K таково, что $0 \le K < \infty$. Тогда:

1) при $K \ne 0$ ряды (4.11) и (4.12) сходятся (расходятся) одновременно;
2) при $K = 0$ из сходимости ряда (4.12) вытекает сходимость ряда (4.11).

Теорема 4.4 (третий признак сравнения). Пусть дан знакоположительный числовой ряд (4.11):

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

если выполняются 2 условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак выполнен);

2) $a_n \sim \frac{k}{n^p}$ при $n \to \infty$, $k \neq 0$, p – порядок малости, то при $p > 1$ – ряд (4.11) сходится, при $p \leq 1$ – ряд расходится.

Теорема 4.5 (признак Даламбера). Пусть дан знакоположительный числовой ряд (4.11), у которого существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, тогда возможны три варианта:

1) $q > 1 \Rightarrow$ ряд (4.11) расходится;
2) $0 \leq q < 1 \Rightarrow$ ряд (4.11) сходится;
3) $q = 1 \Rightarrow$ мы пользуемся не тем признаком.

Доказательство основано на сравнении данного ряда (4.11) с рядом геометрической прогрессии (4.8) при $b_1 = 1$, который (как показано выше) при $q > 1$ – расходится, при $0 \leq q < 1$ – сходится.

Справка. Жан Лерон де Аламбер (1717–1783) – французский математик, механик, философ.

Замечание. Признак Даламбера целесообразно использовать в том случае, если у знакоположительного числового ряда формула для a_n содержит либо функцию факториал, либо показательную и степенную функции одновременно.

Пример 4.1. Исследовать числовые ряды (4.13) и (4.14) на сходимость.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n)!} = \frac{2}{3!} + \frac{4}{6!} + \ldots. \tag{4.13}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5n^2+3} = \frac{4}{8} + \frac{16}{23} + \ldots. \tag{4.14}$$

Решение

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n)!} = \frac{2}{3!} + \frac{4}{6!} + \ldots.$$

Дан знакоположительный числовой ряд, у которого a_n содержит функцию факториал:

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(3(n+1))!} = \frac{2^n \cdot 2}{(3n+3)!} = \frac{2^n \cdot 2}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \cdot \frac{(3n)!}{2^n} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \dfrac{2}{\infty} = 0 = q < 1$ – по признаку Даламбера числовой ряд (4.13) сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{5n^2+3} = \dfrac{4}{8} + \dfrac{16}{23} + \ldots.$

Дан знакоположительный числовой ряд, у которого $a_n = \dfrac{4^n}{5n^2+3}$ содержит показательную и степенную функции, поэтому применим признак Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{5(n+1)^2+3} = \frac{4^n \cdot 4}{5(n+1)^2+3};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4}{5(n+1)^2+3} \cdot \frac{5n^2+3}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(5n^2+3\right)}{5(n+1)^2+3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2\left(5+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left[5\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 + \dfrac{3}{n^2}\right]} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{20}{5\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} = 4 = q > 1$ – по признаку Даламбера ряд (4.14) расходится.

Теорема 4.6 (радикальный признак Коши). Пусть дан знакоположительный числовой ряд (4.11), и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда если:

1) $l > 1 \Rightarrow$ ряд (4.11) расходится;
2) $0 \le l < 1 \Rightarrow$ ряд (4.11) сходится;
3) $l = 1 \Rightarrow$ мы пользуемся не тем признаком.

Доказательство аналогично доказательству признака Даламбера.

Замечание. Данный признак целесообразно использовать в том случае, если a_n содержит некоторую общую степень, зависящую от n.

Пример 4.2. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4n+5}=\left(\frac{1}{1}\right)^{9}+\left(\frac{3}{4}\right)^{13}+\ldots. \qquad (4.15)$$

Решение

Дан знакоположительный числовой ряд, у которого $a_n=\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4n+5}$.

Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4n+5}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{\frac{4n+5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4+\frac{5}{n}}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n(2-1/n)}{n(3-2/n)}\right)^{4+\frac{5}{n}}=\left(\frac{2-0}{3-0}\right)^{4+0}=\frac{16}{81}=l<1\Rightarrow$ в соответствии с радикальным признаком Коши ряд (4.15) сходится.

Теорема 4.7 (интегральный признак Маклорена-Коши). Пусть задана функция $f(x)$, $x\geq 1$, которая непрерывна, положительна, монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$. С ее помощью построим числовой ряд (4.11) таким образом: $f(n)=a_n$. Составим несобственный интеграл (см. раздел 2.8 данного пособия или, более подробно, [1, с. 404]) I рода $\int\limits_{A}^{\infty} f(x)\,dx$, где число $A\geq 1$. Тогда этот несобственный интеграл и числовой ряд (4.11) сходятся (расходятся) одновременно.

Замечание. Интегральный признак используют для знакоположительных числовых рядов, у которых соответствующий несобственный интеграл можно вычислить или достаточно легко оценить.

Справка. Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик. Колин Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.

Пример 4.3. Исследовать на сходимость числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Решение

Дан знакоположительный числовой ряд. Восстановим производящую функцию ряда: $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}, x\ge 1$. Проверим выполнение всех свойств теоремы 4.7:

1) функция непрерывна, так как $x = -1 \notin [1, \infty)$;

2) функция положительна: $f(x) > 0$ при $x \ge 1$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\dfrac{1}{\infty}=0$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ монотонно убывает.

Составим несобственный интеграл:

$$I=\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\ln(x+1))^{-2}\,\frac{d\,x}{x+1}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\ln(x+1))^{-2}\,d(\ln(x+1))=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{(\ln(x+1))^{-1}}{-1}\right|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{-1}{\ln(x+1)}\right|_1^b=$$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{\ln(b+1)}+\dfrac{1}{\ln 2}\right)=0+\dfrac{1}{\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2}\Rightarrow$ получилось число, т. е. несобственный интеграл сходится, поэтому в соответствии с интегральным признаком данный в условии числовой ряд тоже сходится.

Замечание. Теорема 4.4 сравнивает ряд (4.11) с обобщенным гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}. \tag{4.16}$$

Исследуем ряд (4.16) на сходимость с помощью интегрального признака.

Производящая функция $f(x)=\dfrac{1}{x^p}, x \ge 1$, непрерывна, положительна, стремится к нулю, монотонно убывая. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{\infty}x^{-p}dx.$$

Возможны варианты:

1) $p=1, I=\int_1^{\infty}x^{-1}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$ – интеграл расходится, поэтому по интегральному признаку при p = 1 расходится и ряд (4.16);

2) $p\ne 1, I=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b$, далее имеем две возможности:

а) $p>1\Rightarrow -p+1<0\Rightarrow I=\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{(-p+1)x^{p-1}}\Bigg|_1^b=\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{1-p}=\dfrac{1}{p-1}$, т. е. получилось число, поэтому интеграл сходится, тогда по интегральному признаку при $p > 1$ ряд (4.16) сходится;

б) $p<1\Rightarrow -p+1>0\Rightarrow I=\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{x^{-p+1}}{(-p+1)}\Bigg|_1^b=\infty$, поэтому интеграл расходится, тогда по интегральному признаку при $p < 1$ ряд (4.13) расходится.

Вывод. При $p \le 1$ обобщенный гармонический ряд (4.16) расходится, а при $p > 1$ ряд (4.16) сходится.

Замечание. Третий признак сравнения целесообразно использовать для таких знакоположительных числовых рядов, у которых a_n содержит только степенные функции относительно n.

Первый признак сравнения целесообразно использовать, если удается сравнить данный ряд с уже известным рядом.

Пример 4.4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=\left(q=\frac{1}{2},b_1=\frac{1}{2}\right)=\frac{b_1}{1-q}=1,$ т. е. ряд геометрической прогрессии (больший ряд) сходится. Следовательно, данный ряд, который является меньшим по отношению к сходящейся геометрической прогрессии, тоже сходится по первому признаку сравнения.

Пример 4.5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^5-n^4+3n^2}=1+\frac{15}{92}+.... \tag{4.17}$$

Решение

Дан знакоположительный числовой ряд, у которого a_n содержит только степенные функции, поэтому целесообразно применить 3-й признак сравнения, у которого два условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^5-n^4+3n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2n^3}=\frac{3}{\infty}=0;$

б) найдем порядок малости (оставив в числителе и знаменателе только «старшие слагаемые»): $a_n=\frac{3n^2+2n-1}{2n^5-n^4+3n^2}\sim\frac{3n^2}{2n^5}=\frac{3}{2n^3}=\frac{1{,}5}{n^3}$ при $n\to\infty$, т. е. порядок малости $p=3>1$, следовательно, по третьему признаку сравнения ряд (4.17) сходится.

4.3. Знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды

Определение 4.5. Рассмотрим числовой ряд (4.1):

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+....$$

Числовой ряд (4.1) называется *знакопеременным* числовым рядом, если члены этого ряда меняют свои знаки по некоторому закону. Числовой ряд, у которого члены ряда меняют свои знаки по закону чередования

(«+», «–», «+»,…, или наоборот: «–», «+», «–», …), называется *знакочередующимся*.

Пример. Ряд: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-...+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+...$ – знакочередующийся, а ряд: $-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-...$ – знакопеременный.

Определение 4.4. Рассмотрим знакопеременный числовой ряд (4.18):

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+..., \tag{4.18}$$

у которого члены ряда меняют свои знаки по некоторому закону. Составим соответствующий ряд из модулей:

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|+.... \tag{4.19}$$

Если сходятся оба ряда (4.18) и (4.19), то знакопеременный ряд (4.18) называется *абсолютно сходящимся*. Если сходится ряд (4.18), а ряд из модулей (4.19) расходится, то знакопеременный ряд (4.18) называется *условно сходящимся*.

Теорема 4.8. Из сходимости ряда (4.19) следует сходимость ряда (4.18).

Следствие. При проверке ряда (4.18) на абсолютную сходимость достаточно доказать сходимость ряда из модулей (4.19).

Далее относительно подробно рассмотрим только частный случай знакопеременных рядов – знакочередующиеся ряды. Общий вид знакочередующихся рядов можно представить в виде ряда (4.20) или ряда (4.21):

$$b_1-b_2+b_3-...+(-1)^{n-1}\cdot b_n+..., \text{ где } b_1>0, b_2>0,..., b_n>0,...; \tag{4.20}$$

$$-b_1+b_2-b_3+...+(-1)^n\cdot b_n+..., \text{ где } b_1>0, b_2>0,..., b_n>0,.... \tag{4.21}$$

Для знакочередующихся рядов справедлива теорема 4.9.

Теорема 4.9 (признак Лейбница). Пусть дан знакочередующийся ряд вида (4.20) или (4.21), у которого:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$; 2) $b_{n+1} < b_n$, при всех $n \geq n_0$, где $n_0 \geq 1$.

Тогда:

1) знакочередующийся ряд сходится;

2) его сумма S такова, что $|\,S\,| < b_1$;

3) $|\,S - S_n\,| < b_{n+1}$, где S_n – частичная сумма знакочередующегося ряда.

Замечание. Утверждение 3 теоремы 4.9 означает, что ошибка при вычислении суммы сходящегося «лейбницевского» ряда меньше модуля первого «отброшенного» слагаемого ряда.

Справка. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) – немецкий математик, физик и философ.

Пример 4.6. Исследовать ряды (4.22)–(4.24) на абсолютную (условную) сходимость:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+2}}{(2n)!} = -\frac{27}{2} + \frac{83}{24} - \frac{243}{720} + \ldots . \tag{4.22}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{4n^2 - n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{4}{13} + \frac{7}{32} - \ldots . \tag{4.23}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2-2}{4n^2 - n + 1} = -\frac{1}{4} + \frac{10}{15} - \frac{25}{34} + \ldots . \tag{4.24}$$

Решение

1. Дан знакочередующийся ряд типа (4.21). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, а для этого составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(2n)!} = \frac{27}{2} + \frac{83}{24} + \frac{243}{720} + \ldots . \tag{4.25}$$

Получился знакоположительный числовой ряд (4.25), у которого a_n содержит функцию факториал, поэтому применим признак Даламбера:

$$a_{n+1}=\frac{3^{n+3}}{(2(n+1))!}=\frac{3^{n+2}\cdot 3}{(2n+2)!}=\frac{3^{n+2}\cdot 3}{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}=\frac{a_n\cdot 3}{(2n+1)(2n+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot 3}{(2n+1)(2n+2)\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{3}{\infty}=0=q<1,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд из модулей (4.25) сходится, поэтому по теореме 4.8 и по определению 4.6 знакочередующийся ряд (4.22) сходится абсолютно.

2. Дан знакочередующийся ряд типа (4.20). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, а для этого составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{4n^2-n-1}=\frac{1}{2}+\frac{4}{13}+\frac{7}{32}+\ldots. \tag{4.26}$$

Получился знакоположительный числовой ряд (4.26), у которого a_n содержит только степенные функции относительно переменной n, поэтому применим третий признак сравнения, у которого два условия:

а) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n^2-n-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4n}=\frac{3}{\infty}=0\Rightarrow$$

величина a_n является бесконечно малой при $n\to\infty$. Определим порядок ее малости при $n\to\infty$ (оставим в числителе и знаменателе только «старшие слагаемые»):

б) $a_n=\dfrac{3n-2}{4n^2-n-1}\sim\dfrac{3n}{4n^2}=\dfrac{0,75}{n^1}$ при $n\to\infty$, поэтому порядок малости $p=1$, а это в соответствии с третьим признаком сравнения означает, что ряд из модулей (4.26) расходится. Следовательно, у ряда (4.23) нет абсолютной сходимости, поэтому его надо исследовать на условную сходимость по признаку Лейбница, у которого два условия:

а) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n^2-n-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4n}=\frac{3}{\infty}=0\Rightarrow$$

величина a_n является бесконечно малой при $n\to\infty$;

б) $a_{n+1}=\dfrac{3n+3-2}{4(n+1)^2-n-1-1}=\dfrac{3n+1}{4n^2+7n+2}$, $a_n=\dfrac{3n-2}{4n^2-n-1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n+1}{4n^2+7n+2}\cdot\frac{4n^2-n-1}{3n-2}=\frac{12n^3+n^2-4n-1}{12n^3+13n^2-8n-4}=$$

$=\dfrac{12n^3+n^2-4n-1}{(12n^3+n^2-4n-1)+12n^2-4n-3}<1$, так как $12n^2-4n-3>0$ при $n\geq 1\Rightarrow$ оба условия признака Лейбница выполнены, поэтому ряд (4.23) сходится условно.

3. Дан знакочередующийся ряд типа (4.21). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, а для этого составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{4n^2-n+1}=\frac{1}{4}+\frac{10}{15}+\frac{25}{34}+\ldots. \tag{4.27}$$

Получился знакоположительный числовой ряд (4.27), у которого a_n содержит только степенные функции относительно переменной n, поэтому применим третий признак сравнения, у которого два условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2}{4n^2-n+1}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{3}{4}\neq 0\Rightarrow$

первое условие третьего признака сравнения не выполнено (а именно, не выполнен необходимый признак сходимости ряда (4.27)), поэтому 3-й признак сравнения не применим, но по невыполнению необходимого признака ряд из модулей (4.27) расходится. Тогда проверим выполнение необходимого признака для самого знакочередующегося ряда (4.24):

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{3n^2-2}{4n^2-n+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2\left(3-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{3}{4}\Rightarrow$$

данный предел не существует (так как выражение $(-1)^n\cdot\dfrac{3}{4}$ принимает только два значения $+\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{4}$, которые не сближаются на бесконечности), т. е. для ряда (4.24) не выполнен необходимый признак сходимости.

Вывод. Ряд (4.24) расходится (и абсолютно, и условно).

4.4. Функциональные ряды, степенные ряды

Определение 4.7. Пусть на области D определена функциональная последовательность:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots. \tag{4.28}$$

Составленный с ее помощью символ:

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \tag{4.29}$$

называется *функциональным рядом.* Ряд (4.29) кратко обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{4.30}$$

Если у ряда (4.29) фиксировать $x \in D$, то функциональный ряд (4.29) превращается в числовой ряд, который либо сходится, либо расходится.

Определение 4.8. Назовем *областью сходимости* функционального ряда (4.29) множество всех тех (и только тех) фиксированных x, при которых числовой ряд (полученный из (4.29) подстановкой конкретного фиксированного x) сходится. Область сходимости ряда (4.29) будем обозначать так: $D_{cx.}$.

Определение 4.9. Возьмем фиксированный $x \in D_{cx.}$, тогда ряд (4.29) становится сходящимся числовым рядом, т. е. имеет некоторую сумму S, соответствующую данному $x \in D_{cx.}$. Этот закон соответствия данному $x \in D_{cx.}$ суммы S ряда (4.29) определяет функцию $S(x)$, $x \in D_{cx.}$, которая называется *суммой функционального ряда* (4.29). А записывается это так:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in D_{cx.}. \tag{4.31}$$

Далее рассмотрим только частный случай функциональных рядов: степенные ряды, образованные функциональными последовательностями из степенных функций.

Степенные ряды

Определение 4.10. Если функциональный ряд (4.29) составлен из степенных функций следующего вида:

$$b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0)^2 + b_3 \cdot (x - x_0)^3 + \ldots + b_n \cdot (x - x_0)^n + \ldots, \tag{4.32}$$

где x_0, b_0, b_1, b_2, $b_3, \ldots,$ $b_n, \ldots$ – заданные числа, то такой ряд (4.32) называется *степенным рядом*. Степенной ряд сокращенно записывается так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n . \tag{4.33}$$

Свойства степенных рядов

1. Область сходимости степенного ряда (4.32) имеет вид:

$$D_{сх.} = (x_0 - R,\ x_0 + R), \text{ либо } D_{сх.} \subset [\, x_0 - R,\ x_0 + R\,], \tag{4.34}$$

где число R, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда (4.32), находится по одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|, \tag{4.35}$$

$$R = \left(\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\, b_n \,|} \right)^{-1} . \tag{4.36}$$

2. Внутри области сходимости (4.34) при каждом фиксированном x ряд (4.32) является абсолютно сходящимся числовым рядом.

3. На границе области сходимости (4.34) (т. е. в точках $x = x_0 \pm R$) требуется дополнительное исследование ряда (4.32) на сходимость.

4. Сумма $S(x)$ степенного ряда (4.32) является непрерывной функцией на области сходимости (4.34).

5. Если x лежит внутри области сходимости (4.34), то производная суммы степенного ряда (4.32) равна сумме сходящегося ряда, составленного из производных каждого слагаемого ряда (4.32):

$$S'(x) = b_1 + 2b_2 \cdot (x - x_0) + 3b_3 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + nb_n \cdot (x - x_0)^{n-1} + \ldots . \quad (4.37)$$

6. Если числа a, b находятся внутри области (4.34), то определенный интеграл от суммы степенного ряда (4.32) равен сумме сходящегося числового ряда, составленного из определенных интегралов от каждого слагаемого ряда (4.32):

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b b_n \cdot (x - x_0)^n\,dx . \quad (4.38)$$

Пример 4.7. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^{n-1} \cdot (2n^2 + 1)} \cdot (x+1)^n . \quad (4.39)$$

Решение

Дан степенной ряд типа (4.33), у которого $x_0 = -1$, $b_n = \dfrac{n+2}{3^{n-1} \cdot (2n^2 + 1)}$.

В соответствии с формулами (4.34) и (4.35) имеем:

$$D_{сх.} = (x_0 - R,\ x_0 + R),\ R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|,\ x_0 = -1,\ b_n = \frac{n+2}{3^{n-1} \cdot (2n^2 + 1)};$$

$$b_{n+1} = \frac{n+3}{3^n \cdot (2(n+1)^2 + 1)} = \frac{n+3}{3^{n-1} \cdot 3 \cdot (2n^2 + 4n + 3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2) \cdot 3^{n-1} \cdot 3 \cdot (2n^2 + 4n + 3)}{3^{n-1} \cdot (2n^2 + 1) \cdot (n+3)} =$$

$$= 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2) \cdot (2n^2 + 4n + 3)}{(2n^2 + 1) \cdot (n+3)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2n^2}{2n^2 \cdot n} = 3 \Rightarrow$$ предварительно

(возможно это неточно) $D_{сх.} = (-1-3,\ -1+3) = (-4,\ 2)$. При этом в соответствии со 2-м свойством степенных рядов: внутри (–4, 2) степенной ряд (4.39) сходится абсолютно. Проведем дополнительное исследование ряда (4.39) на сходимость в точках: $x = 2$ и $x = -4$. Подставляем $x = 2$ в ряд (4.39):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^{n-1} \cdot (2n^2+1)} \cdot (2+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(n+2)}{2n^2+1} = 6+3+\frac{4}{3}+\frac{15}{19}+\dots \qquad (4.40)$$

Получился знакоположительный числовой ряд (4.40), у которого a_n содержит только степенные функции, поэтому применим 3-й признак сравнения, у которого два условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+6}{2n^2+1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1{,}5}{n} = \frac{1{,}5}{\infty} = 0$, т. е. величина a_n является бесконечно малой при $n \to \infty$;

2) определим порядок ее малости: $a_n = \frac{3n+6}{2n^2+1} \sim \frac{3n}{2n^2} = \frac{1{,}5}{n^1} \Rightarrow p = 1 -$ порядок малости при $n \to \infty$, поэтому по 3-му признаку сравнения ряд (4.40) расходится. Следовательно $x = 2$ не включаем в область сходимости.

Подставляем $x = -4$ в степенной ряд (4.39):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^{n-1} \cdot (2n^2+1)} \cdot (-4+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3(n+2)}{2n^2+1} = 6-3+\frac{4}{3}-\frac{15}{19}+\dots \qquad (4.41)$$

Получился знакочередующийся ряд (4.41). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, для чего составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(n+2)}{2n^2+1} = 6+3+\frac{4}{3}+\frac{15}{19}+\dots$$

Получился уже известный ранее знакоположительный ряд (4.40), который, как выяснилось выше, расходится, поэтому у знакочередующегося ряда (4.41) нет абсолютной сходимости.

Проверим ряд (4.41) на условную сходимость по признаку Лейбница, у которого два условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+6}{2n^2+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1,5}{n}=\frac{1,5}{\infty}=0$, т. е. величина a_n является бесконечно малой при $n\to\infty$ (первое условие выполнено);

2) $b_n=\frac{3n+6}{2n^2+1}$, $b_{n+1}=\frac{3n+9}{2(n+1)^2+1}=\frac{3n+9}{2n^2+4n+3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(3n+9)\cdot(2n^2+1)}{(2n^2+4n+3)\cdot(3n+6)}=\frac{2n^3+18n^2+3n+9}{6n^3+24n^2+33n+18}<1\Rightarrow b_{n+1}<b_n$ при всех $n\geq 0$ (так как каждое слагаемое числителя меньше соответствующего слагаемого знаменателя при $n\geq 1$, а при $n=0$ эта дробь равна 0,5 и меньше единицы тоже). Поэтому оба условия признака Лейбница выполнены, следовательно, знакочередующийся ряд (4.41) сходится условно, т. е. степенной ряд (4.39) при $x=-4$ условно сходится.

Ответ. $D_{сх.}=[-4,\ 2)$, причем при $x=-4$ ряд сходится условно.

Степенные ряды Тейлора, Маклорена

Теорема 4.10. Пусть задана функция $f(x)$, $x\in[a,b]$; $x_0\in(a,b)$. В некоторой δ-окрестности точки x_0 $f(x)$ имеет: первую производную, вторую, …, производную любого порядка.

Тогда для функции $f(x)$ имеет место следующее представление (в этой δ-окрестности точки x_0) в виде суммы сходящегося на этой δ-окрестности степенного *ряда Тейлора*:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (4.42)$$

Замечание. При $x_0=0$ ряд (4.42) носит название *ряда Маклорена* (ряд Маклорена – это частный случай ряда Тейлора).

Справка. Брук Тейлор (1685–1731) – английский математик. Колин Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

Положим $x_0 = 0$, тогда по аналогии с формулой Маклорена для некоторых элементарных функций выводятся следующие разложения в ряд Маклорена:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, x \in (-\infty, \infty)$. (4.43)

2. $\sin x = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, x \in (-\infty, \infty)$. (4.44)

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, x \in (-\infty, \infty)$. (4.45)

4. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n + \ldots, x \in (-1, 1]$. (4.46)

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{3!} \cdot x^3 + \ldots +$

$+ \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))}{n!} \cdot x^n + \ldots, x \in (-1, 1)$. (4.47)

6. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{5} \cdot x^5 + \ldots + \frac{2}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + \ldots, x \in (-1, 1)$. (4.48)

7. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots, x \in (-1, 1]$. (4.49)

Замечание. Представленные ряды Маклорена для элементарных функций используется, например, при вычислении приближенных значений элементарных функций с помощью микрокалькулятора по заложенной в нем программе, а также для приближенного вычисления определенных интегралов, для которых не удается найти первообразную в виде элементарной функции.

Пример 4.8. Вычислить приближенно с точностью 10^{-3} определенные интегралы, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд:

$$1)\ \int_0^1 \frac{\sin\left(x^3\right)}{x}\,dx; \quad 2)\ \int_0^{0,5} x^2 \cdot e^{x^2}\,dx.$$

Решение

1. Подынтегральная функция $f(x)$ имеет точку устранимого разрыва I рода $x = 0,$ так как в силу первого замечательного предела:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x^3} = 0\cdot 1 = 0$ – предел существует, тем самым можно доопределить функцию при $x = 0$: $f(0) = 0$.

Следовательно, нам дан собственный определенный интеграл от доопределенной непрерывной функции на $[0, 1]$. Используем стандартное разложение (4.44), заменив в нем x на x^3:

$$\sin\left(x^3\right) = x^3 - \frac{1}{3!}\cdot x^9 + \frac{1}{5!}\cdot x^{15} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{6k+3}}{(2k+1)!} + \ldots,\ x\in(-\infty, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} = x^2 - \frac{1}{3!}\cdot x^8 + \frac{1}{5!}\cdot x^{14} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{6k+2}}{(2k+1)!} + \ldots, \text{ при } x \neq 0. \quad (4.50)$$

Однако при $x = 0$ степенной ряд (4.50) сходится и имеет сумму, равную нулю, что совпадает со значением исправленной подынтегральной функции в нуле, поэтому можно считать, что равенство (4.50) справедливо при любом x. По 6-му свойству степенных рядов: определенный интеграл от суммы сходящегося степенного ряда (4.50) равен сумме сходящегося числового ряда, составленного из определенных интегралов от каждого слагаемого ряда (4.50):

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} d\,x = \int_0^1 x^2 d\,x - \frac{1}{3!} \cdot \int_0^1 x^8\, d\,x + ... + (-1)^k \cdot \int_0^1 \frac{x^{6k+2}}{(2k+1)!} d\,x + ... =$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{x^9}{6\cdot 9}\bigg|_0^1 + \frac{x^{15}}{120\cdot 15}\bigg|_0^1 - ... + (-1)^k \cdot \frac{x^{6k+3}}{(2k+1)!\cdot(6k+3)}\bigg|_0^1 + ... =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{54} + \frac{1}{1800} - .... + (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)!\cdot(6k+3)} + ... \qquad (4.51)$$

Получился сходящийся знакочередующийся числовой ряд (4.51). В соответствии с признаком Лейбница: ошибка при вычислении суммы сходящегося знакочередующегося числового ряда не превосходит модуля первого отброшенного слагаемого, каковым для точности 10^{-3} является третье слагаемое в (4.51).

Тем самым: $\int_0^1 \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} d\,x = \frac{1}{3} - \frac{1}{54} \pm 10^{-3} = \frac{17}{54} \pm 10^{-3} = 0,315 \pm 10^{-3}$.

Ответ: $\int_0^1 \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} d\,x = 0,315 \pm 10^{-3}$.

2. Подынтегральная функция не имеет точек разрыва, поэтому нам дан собственный определенный интеграл от непрерывной функции. Используем стандартное разложение (4.43), заменив в нем x на x^2:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!} + ..., x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot e^{x^2} = x^2 + x^4 + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^8}{3!} + ... + \frac{x^{2n+2}}{n!} + ..., x \in (-\infty, \infty). \qquad (4.52)$$

По 6-му свойству степенных рядов: определенный интеграл от суммы степенного ряда (4.52) равен сумме сходящегося числового ряда, составленного из определенных интегралов от каждого слагаемого ряда (4.52):

$$\int_0^{0,5} x^2 \cdot e^{x^2}\,dx = \int_0^{0,5} x^2 dx + \int_0^{0,5} x^4 dx + \int_0^{0,5} \frac{x^6}{2!}dx + \ldots + \int_0^{0,5} \frac{x^{2n+2}}{n!}dx + \ldots =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,5} + \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^{0,5} + \frac{x^7}{14}\Bigg|_0^{0,5} + \frac{x^9}{54}\Bigg|_0^{0,5} + \ldots + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)\cdot n!}\Bigg|_0^{0,5} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{1792} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!} + \frac{1}{2^{2n+5}\cdot(2n+5)\cdot(n+1)!} + \ldots \quad (4.52)$$

Получился знакоположительный ряд (4.52), к которому не применим признак Лейбница, поэтому оценка точности разложения (4.52) проводится по-другому. Исследуем остаток ряда (4.52):

$$R_n = \frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!} + \frac{1}{2^{2n+5}\cdot(2n+5)\cdot(n+1)!} + \frac{1}{2^{2n+7}\cdot(2n+7)\cdot(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}\cdot\left(1 + \frac{2n+3}{2^2\cdot(2n+5)\cdot(n+1)} + \frac{2n+3}{2^4\cdot(2n+7)\cdot(n+1)(n+2)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}\cdot\left(1 + \frac{1}{4\cdot(n+1)} + \left(\frac{1}{4\cdot(n+1)}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\cdot(n+1)}\right)^3 + \ldots\right) -$$

внутри скобок получилась бесконечно убывающая прогрессия, сумма которой равна: $P = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4n+4}} = \dfrac{4n+4}{4n+3}$, поэтому остаток ряда (4.52) оценивается так:

$$R_n < \frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}\cdot\frac{4n+4}{4n+3} \Rightarrow R_2 < \frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 2}\cdot\frac{12}{11} = \frac{12}{11\cdot 1792} < 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{0,5} x^2 \cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{24} + \frac{1}{160} \pm 10^{-3} = 0,048 \pm 10^{-3}.$$

Ответ: $\int_0^{0,5} x^2 \cdot e^{x^2}\,dx = 0,048 \pm 10^{-3}$.

4.5. Тригонометрический ряд Фурье

Справка. Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) – французский математик и физик.

Еще одним примером функциональных рядов является тригонометрический ряд Фурье, образованный функциональной последовательностью из тригонометрических функций, заданных на отрезке $[a, b]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4.53}$$

где $l = (b - a)/2$.

Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, $x \in [a, b]$ имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{4.54}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \ n \geq 1; \tag{4.55}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \ n \geq 1. \tag{4.56}$$

Теорема 4.11 (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ ограничена и, кроме того, кусочно монотонна и кусочно непрерывна. Тогда ряд Фурье (6.54), построенный для этой функции по функциональной последовательности (6.53), сходится при всех x. При этом его сумма $S(x)$:

1) периодична с периодом $T = 2l$;

2) если $x_0 \in (a, b)$ – точка непрерывности функции $f(x)$, то $S(x_0) = f(x_0)$;

3) если $x_0 \in (a, b)$ – точка разрыва I рода функции $f(x)$ (а точек разрыва II рода у функции не может быть по условию теоремы), то

$$S(x_0) = 0{,}5\,[\,f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)];$$

4) $S(a) = S(b) = 0{,}5 \cdot \left[f\left(b-0\right) + f\left(a+0\right) \right]$.

Без доказательства.

Справка. Петер Густав Дирихле (1805–1859) – немецкий математик и физик.

Свойства коэффициентов ряда Фурье

1. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ является четной, тогда коэффициенты ее ряда Фурье обладают свойствами:

$$b_n = 0,\ n \ge 1,\ a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi n x}{l} \right) dx,\ n \ge 0. \qquad (4.57)$$

2. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ является нечетной, тогда коэффициенты ее ряда Фурье обладают свойствами:

$$a_n = 0,\ n \ge 0,\ b_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l} \right) dx,\ n \ge 1. \qquad (4.58)$$

Данные свойства коэффициентов ряда Фурье следуют из соответствующих свойств определенного интеграла для четной функции и для нечетной функций.

Примеры

1. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x \cdot (x+\pi), & -\pi \le x \le 0; \\ x \cdot (\pi - x), & 0 < x \le \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье. Используя это разложение, найти сумму числового ряда $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{(2k-1)^3}$.

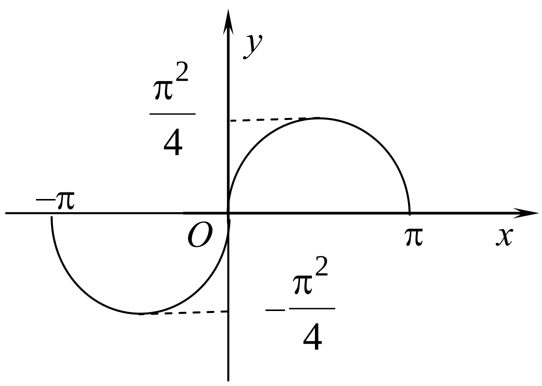

Рис. 4.2

Решение

Данная функция (рис. 4.2) является нечетной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поэтому в силу формул (4.58) ее ряд Фурье имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$, где в силу формул (4.58):

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \text{(по частям)} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \cdot \left(-x(\pi - x) \cdot \cos(nx) + \frac{1}{n} \cdot (\pi - 2x) \cdot \sin(nx) - \frac{2}{n^2} \cos(nx) \right) \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{4}{\pi n^3} \cdot \left((-1)^n - 1 \right) = \frac{4}{\pi n^3} \cdot (1 - (-1)^n).$$

Следовательно, ряд Фурье:

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot (1 - (-1)^n) \cdot \sin(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}.$$

Из графика данной функции (см. рис. 4.2) видно, что она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Поэтому, полагая $x = \frac{\pi}{2}$, получим, согласно теореме 4.11:

$$\frac{\pi^2}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1) \cdot \pi / 2)}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi - \pi / 2)}{(2k-1)^3} =$$

$$= \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi} \cdot A = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow A = \frac{\pi^3}{32}.$$

2. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [-3/2, \ -1); \\ -x, x \in [-1, \ 0); \\ x, x \in [0, \ 1); \\ 0, x \in (1, \ 3/2] \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье. Обозначив через $S(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, сумму ее ряда Фурье, найти $S(0{,}5)$, $S(1)$, $S(3/2)$, $S(2)$, $S(31{,}5)$.

Решение

Функция $f(x)$ является четной. Для нее $l = 3/2$. Поэтому в силу формул (4.57) ее ряд Фурье: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n x/3)$, где в силу формул (4.57):

$$a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^{3/2} f(x)\,dx=\frac{2}{3}\cdot 2\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\cdot\int\limits_0^l f(x)\cdot\cos(2\pi n x/3)\,dx=\frac{4}{3}\cdot\int\limits_0^1 x\cos(2\pi n x/3)\,dx= \text{(по частям)} =$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2\pi n}\left(x\cdot\sin\left(\frac{2\pi n x}{3}\right)+\frac{3}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n x}{3}\right)\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi n}\cdot\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2\pi n}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-1\right)\right)=\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

Таким образом, ряд Фурье имеет вид:

$$1/3+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi n x}{3}\right).$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Найдем значения суммы ряда $S(x)$ в заданных точках. Точка $x = 0{,}5$ является точкой непрерывности функции $f(x)$, поэтому в силу теоремы Дирихле $S(0{,}5) = f(0{,}5) = 0{,}5$. Точка $x = 1$ является точкой разрыва функции $f(x)$, поэтому $S(1) = 0{,}5\,(f(1-0) + f(1+0)) = 0{,}5\,(1+0) = 0{,}5$.

Точка $x = 3/2$ является граничной точкой отрезка $[-3/2,\ 3/2]$, поэтому по теореме Дирихле:

$S(3/2) = 0{,}5(f(3/2-0) + f(-3/2+0)) = 0$.

Учитывая периодичность $S(x)$ с периодом $T = 2l = 3$, находим:

$S(2) = S(2-3) = S(-1) = f(-1) = 1$, $\quad S(31{,}5) = S(31{,}5-30) = S(3/2) = 0$.

3. Разложить $f(x) = x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$ в тригонометрический ряд Фурье.

Решение

Данная функция не является ни четной, ни нечетной (так как область ее определения не симметрична относительно нуля), поэтому применяем общие формулы (4.54)–(4.56), в которых: $a = 0$, $b = 2\pi$, $l = (3\,\pi/2 + \pi/2)/2 = \pi$.

Поэтому

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2} = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\cdot\cos(nx)\,dx = (\text{по частям}) = \frac{1}{\pi n}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\cdot d(\sin(nx)) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\cdot\left(x\sin(nx)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\sin(nx)\,dx \right) = \frac{1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\cos(nx)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}\right) = \frac{1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\sin\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{n}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-2\pi\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{n}\cdot\left(\cos\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-2\pi\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{n}\cdot 0\right) = \frac{-2}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ n \ge 1;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\cdot\sin(nx)\,dx = (\text{по частям}) = \frac{-1}{\pi n}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\cdot d(\cos(nx)) =$$

$$= \frac{-1}{\pi n}\cdot\left(x\cos(nx)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos(nx)\,dx \right) = \frac{-1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\cdot\sin(nx)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}\right) = \frac{-1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\cos\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{n}\cdot\left(\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. +\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right) = \frac{-1}{\pi n}\cdot\left(2\pi\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{n}\cdot\left(\sin\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{-1}{\pi n}\cdot\left(2\pi\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{n}\cdot 0\right) = \frac{-2}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ n \ge 1.$$

Следовательно, в соответствии с (4.54) ряд Фурье примет вид:

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos(nx) + \frac{2}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin(nx)\right).$$

4.6. Контрольные задания по теме «Ряды»

Задача 4.1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Вариант	a_n	Вариант	a_n
1	$\dfrac{25^n}{3^n\cdot(2n^4+1)}$	6	$\dfrac{4^n}{(2n+1)^2-1}$
2	$\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$	7	$\left(\dfrac{8n-1}{5n+2}\right)^{2n-1}$
3	$\dfrac{n^4+3n}{n^3+21}$	8	$\dfrac{4n+3}{5n^3+2n-1}$
4	$\dfrac{n^3\cdot 4^n}{(2n)!}$	9	$\dfrac{5n^2+3n-1}{n^3+2}$
5	$\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}$	0	$\dfrac{3^n\cdot n^4}{n!}$

Задача 4.2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\cdot x^n$ (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Вариант	b_n	Вариант	b_n
1	$\dfrac{n^3}{3n!}$	6	$\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(3n)!}$
2	$\dfrac{n^2+1}{n^3\cdot(2n+3)}$	7	$\dfrac{n^3+4}{2^n\cdot(n^2+1)}$
3	$\dfrac{n+1}{2^n\cdot\left(n^2+1\right)}$	8	$\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$
4	$\dfrac{3^n}{\sqrt[4]{n^3}}$	9	$\dfrac{5^n}{\sqrt[4]{n}}$
5	$\dfrac{5^n}{n^5}$	0	$\dfrac{n^2+1}{n^3\cdot(2n+3)}$

Задача 4.3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^b f(x)\,dx$ с точностью до 0,0001. Для этого подынтегральную функцию разложить в степенной ряд (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Вариант	1	2	3	4	5
B	0,4	1	0,3	0,5	1
$f(x)$	$x^3 \cdot \operatorname{arctg} x$	$e^{-0,2x^2}$	$\sin(x^2)$	$x \cdot \ln(x^4)$	$\cos \sqrt[3]{x}$
Вариант	6	7	8	9	0
B	0,3	0,6	1	0,7	0,4
$f(x)$	$x^2 \cdot e^{-x^3}$	$\operatorname{arctg}(x^3)$	$x \cdot \sin(x^3)$	$\cos(x^2)$	$x \cdot \cos(x^3)$

Задача 4.4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале (a, b) (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Вариант	$f(x)$	a	b	Вариант	$f(x)$	a	b
1	$2x - 3$	–2	2	6	$2x + 3$	–4	4
2	$3 - 5x$	$-\pi$	π	7	$1 + 3x$	$-\pi$	π
3	$2 + x$	–1	1	8	$1 + x$	–1	1
4	$3x + 1$	$-\pi$	π	9	$(\pi - x)/2$	$-\pi$	π
5	$\pi - x/2$	$-\pi$	π	0	$-2 + 3x$	–2	2

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Введение

Дифференциальные уравнения используются во многих науках (например, в механике, теории упругости, высшей геодезии, инженерной геодезии) для описания движения некоторых объектов в системе координат (движение материальной точки, движение космических тел относительно Земли – как космического тела, движение планет относительно Солнца, перемещение зданий и сооружений – под воздействием землетрясений, ураганов и т. д.). А так же в оптике для изучения движения света в различных средах. Поэтому необходимо знать методы решения хотя бы простейших дифференциальных уравнений. Простейшим дифференциальным уравнением является второй закон Ньютона:

$$m\overline{a} = \overline{F}\,, \tag{5.1}$$

где $\overline{a} = \dfrac{d^2\overline{S}}{dt^2}$, $\overline{F} = \overline{F}\left(\overline{S}, \dfrac{d\overline{S}}{dt}, t\right)$.

5.2. Основные понятия и определения

Определение 5.1. Уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{5.2}$$

где $y = y(x)$, $x \in D$ – неизвестная функция, называется дифференциальным уравнением порядка n.

Замечание. Порядок n дифференциального уравнения совпадает с порядком старшей производной функции $y(x)$, которая присутствует в уравнении (5.2).

Пример 5.1. Уравнение: $x^2 + 2xy' + \sqrt{y''} - 5 = 0$ – является дифференциальным уравнение второго порядка.

Определение 5.2. Решением дифференциального уравнения (5.2) называется такая функция $y(x)$, которая, будучи подставленной вместе со своими производными в уравнение (5.2), обращает его в тождество по $x \in D$.

Определение 5.3. Общим решением дифференциального уравнения (5.2) называется множество всех решений этого уравнения.

Определение 5.5. «Решить дифференциальное уравнение» – означает найти его общее решение, или доказать, что данное уравнение не имеет ни одного решения.

Пример 5.2. Уравнение: $x^2 + y^2 + (y')^2 + 2 = 0$ – не имеет решений, так как его левая часть всегда не меньше 2.

Теорема 5.1. Пусть дано дифференциальное уравнение (5.2), тогда при некоторых условиях (рассмотрение которых выходит за рамки данного пособия, но во всех примерах и задачах этого пособия эти условия выполняются) данное уравнение имеет решение, при этом его общее решение имеет вид: $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), x \in D,$ где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные (их количество совпадает с порядком дифференциального уравнения).

Без доказательства.

В результате: общее решение дифференциального уравнения зависит от n произвольных постоянных. Для того, чтобы решение найти единственным образом, необходимо знать значения этих постоянных. Значения постоянных находятся единственным образом, если для дифференциального уравнения (5.2) – сформулирована задача Коши.

Задача Коши для дифференциального уравнения (5.2) заключается в следующем: найти такое решение уравнения (5.2), которое удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$
\left.\begin{array}{l}
y(x_0) = y_0; \\
y'(x_0) = y_1; \\
y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}; \\
x_0 \in D,
\end{array}\right| \qquad (5.3)
$$

где $x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ – заданные числа.

Условия (5.3) представляют собой начальные условия для уравнения (5.2), позволяющие при некоторых условиях (рассмотрение этих условий выходит за рамки данного пособия) найти единственное решение задачи Коши.

Пример 5.3. Задача Коши для второго закона Ньютона:

$$
\left.\begin{cases}
m\dfrac{d^2\overline{S}}{dt^2} = \overline{F}; \\
\overline{S}(t_0) = \overline{S}_0 \text{ (начальное местоположение);} \\
\left.\dfrac{d\overline{S}}{dt}\right|_{t=t_0} = \overline{S}_1 \text{ (начальная скорость)}
\end{cases}\right|
$$

имеет единственное решение (известно из курса физики).

Далее более подробно будут изучены дифференциальные уравнения первого, второго порядков и методы их решения.

5.3. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общий вид:

$$
F(x, y, y') = 0, \qquad (5.4)
$$

где $y(x), x \in D$ – неизвестная функция.

Общее решение: $y = y(x, C_1)$, $x \in D$ – это следует из теоремы 5.1.

Задача Коши:

$$
\left.\begin{cases}
F(x, y, y') = 0; \\
y(x_0) = y_0, \ x_0 \in D
\end{cases}\right| \qquad (5.5)
$$

имеет единственное решение (при некоторых условиях, которые для наших задач всегда выполняются; это без доказательства).

Дифференциальных уравнений первого порядка очень много, а мы изучим лишь часть из них:

1) дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;
2) однородные дифференциальные уравнения I порядка;
3) линейные дифференциальные уравнения I порядка;
4) дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Быстрее всех из них решаются уравнения с разделяющимися переменными. Большинство из остальных перечисленных выше уравнений сводятся различными способами к уравнениям с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение (5.4). Если данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{5.6}$$

то уравнение (5.6) будет уравнением с разделяющимися переменными. Метод его решения – разделение переменных по плану:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow dy = f(x)g(y)dx,\ \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{5.7}$$

В уравнении (5.7) переменные разделились: в левой части находится только переменная y, в правой части – только переменная x. После разделения переменных, производим интегрирование левой и правой частей. При этом получим:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C_1. \tag{5.8}$$

Если после интегрирования из уравнения (5.8) удается выразить y через x, то получится ответ в виде общего решения в явной форме. Если же после интегрирования из уравнения (5.8) никак не удается выразить y через x, то получается ответ в неявной форме.

Пример 5.5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$e^{2x} \cdot y' = (4 + y^2)\,. \tag{5.9}$$

Решение

Преобразуем уравнение:

$$y' = \left(4 + y^2\right) \cdot e^{-2x} \Rightarrow y' = g(y) \cdot f(x)\,,$$

т. е. нам дано дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{dx} = \left(4 + y^2\right) \cdot e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy}{4 + y^2} = e^{-2x} dx$ – переменные разделились.

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dt}{2^2 + y^2} = \int e^{-2x} dx + C \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) = -e^{-2x} + 2C \Rightarrow \frac{y}{2} = \operatorname{tg}\left(2C - e^{-2x}\right),\ \text{если } 2C = C_1 \Rightarrow y = 2\operatorname{tg}\left(C_1 - e^{-2x}\right) -$$

получено общее решение дифференциального уравнения (5.9).

Пример 5.5. Решить уравнение:

$$(9 + x^2) y' = e^{3y}\,. \tag{5.10}$$

Решение

$$y' = \frac{e^{3y}}{9 + x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{3y}}{9 + x^2} \Rightarrow dy = \frac{e^{3y}}{9 + x^2} dx \Rightarrow \frac{dy}{e^{3y}} = \frac{dx}{9 + x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{-3y} dy = \int \frac{dx}{9 + x^2} + C \Rightarrow -\frac{1}{3} e^{-3y} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C \Rightarrow e^{-3y} = -3C - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y = \ln\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) - 3C\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \ln\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C_1\right) \text{ (где } C_1 = -3C).$$

Т. е., получено общее решение уравнения (5.10).

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим уравнение (5.4). Если оно преобразуется к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5.11}$$

то говорят, что дано однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Метод его решения – замена переменной:

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux,\ y' = 1 \cdot u + x \cdot u' = u + x \cdot u',$$

после которой уравнение примет вид:

$$u + x \cdot u' = f(u) \Rightarrow x \cdot u' = f(u) - u \Rightarrow u' = \frac{f(u) - u}{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \cdot \left(f(u) - u \right). \tag{5.12}$$

Уравнение (5.12) – с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, находим его общее решение: $u = u(x, C)$, тогда первоначальная функция: $y = x \cdot u(x, C)$ является общим решением уравнения (5.11).

Пример 5.6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = 4 + \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2. \tag{5.13}$$

Решение

Производим замену переменной: $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u + xu$.

Тогда уравнение (5.13) преобразуется так:

$$u + xu' = 4 + u - u^2 \Rightarrow xu' = 4 - u^2 \Rightarrow u' = \frac{1}{x}\left(4 - u^2\right).$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{u'}{4 - u^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{4 - u^2} = \frac{dx}{x}$$ – переменные разделились.

Далее интегрируем:

$$\int \frac{du}{2^2-u^2}=\int \frac{dx}{x}+C \Rightarrow -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-u}{2+u}\right|=\ln|x|+C \Rightarrow \ln\left|\frac{2-u}{2+u}\right|=-4\ln|x|-4C,$$

обозначим $\ln C_1=-4C \Rightarrow \ln\left|\frac{2-u}{2+u}\right|=\ln\left|\frac{1}{x^4}\right|+\ln C_1 \Rightarrow \frac{2-u}{2+u}=\frac{C_1}{x^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{(u+2)-4}{u+2}=\frac{C_1}{x^4} \Rightarrow -1+\frac{4}{u+2}=\frac{C_1}{x^4} \Rightarrow \frac{u+2}{4}=\left(1+\frac{C_1}{x^4}\right)^{-1} \Rightarrow u=4\frac{x^4}{x^4+C_1}-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=\frac{2x^4-2C_1}{x^4+C_1}.$$

Так как $y=x\cdot u \Rightarrow y=2x\cdot\frac{x^4-C_1}{x^4+C_1}$.

Ответ. Общее решение уравнения (5.13): $y=2x\cdot\frac{x^4-C_1}{x^4+C_1}$.

Пример 5.7. Найти общее решение уравнения:

$$y'=\frac{2x+y}{3x-2y}. \qquad (5.14)$$

Решение

Преобразуем данное уравнение: $y'=\dfrac{x\left(2+\dfrac{y}{x}\right)}{x\left(3-\dfrac{2y}{x}\right)} \Rightarrow y'=\dfrac{2+\dfrac{y}{x}}{3-2\dfrac{y}{x}}$ – получено однородное дифференциальное уравнение вида (5.11). Имеем:

$$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux,\ y'=1\cdot u+x\cdot u' \Rightarrow u+x\cdot u'=\frac{2+u}{3-2u} \Rightarrow x\cdot u'=-u-\frac{u+2}{2u-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot u'=\frac{-u-2-2u^2+3u}{2u-3} \Rightarrow x\cdot u'=\frac{-2u^2+2u-2}{2u-3} \Rightarrow xu'=\frac{-u^2+u-1}{u-1{,}5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u'=-\frac{1}{x}\cdot\frac{u^2-u+1}{u-1{,}5} \Rightarrow \frac{(u-1{,}5)du}{u^2-u+1}=-\frac{dx}{x}$, т. е. переменные разделились, поэтому можно интегрировать:

$$\int \frac{(u-1{,}5)}{u^2-u+1}du=-\int \frac{dx}{x}+C \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{(2u-3)}{u^2-u+1}du=-\ln|x|+\ln C_1 \text{(здесь } C=\ln C_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{(2u-1)\,d\,u}{u^2-u+1}+\frac{1}{2}\int \frac{-2du}{u^2-u+1}=\ln\frac{C_1}{|x|} \Rightarrow \text{так как} \left(u^2-u+1\right)'=2u-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int \frac{d\left(u^2-u+1\right)}{u^2-u+1}-\int \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\ln\frac{C_1}{|x|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(u^2-u+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)=\ln\frac{C_1}{|x|}.$$

После замены: $u=\frac{y}{x}$ получаем общее решение (5.14) в неявном виде:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{y}{x}-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)=\ln\frac{C_1}{|x|}.$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Общий вид:

$$y'+p(x)\cdot y=q(x). \tag{5.15}$$

Метод решения – метод Эйлера-Бернулли, который заключается в следующем: вместо отыскания общего решения «сложного» уравнения (5.15) с помощью замены:

$$y=u(x)\cdot v(x),\; y'=u'\cdot v+u\cdot v' \tag{5.16}$$

ищем общие решения двух «более простых» дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными для вспомогательных функций $u\,(x)$ и $v\,(x)$:

$$u'\cdot v+u\cdot v'+p(x)\cdot u\cdot v=q(x). \tag{5.17}$$

С целью упрощения уравнения (5.17) подберем функцию $u(x)$ так, чтобы: $u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = 0$, т. е. $u('v + p(x) \cdot v) = 0 \Rightarrow v' + p(x) \cdot v = 0$, следовательно:

$$v' = -p(x) \cdot v. \tag{5.18}$$

Получено дифференциальное уравнение (5.18) с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v \Rightarrow dv = -p(x) \cdot v dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x) dx.$$

Переменные разделились, поэтому можно интегрировать:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x) dx + C.$$

Пусть $C = 0$, тогда $\ln|v| = -\int p(x)\, d\, x$, следовательно:

$$v = e^{-\int p(x)\, d\, x}. \tag{5.19}$$

В итоге мы подобрали функцию (5.19) так, чтобы уравнение (5.17) упростилось:

$$u' \cdot v + 0 = q(x) \Rightarrow u' \cdot v(x) = q(x) \Rightarrow u' = \frac{q(x)}{v(x)} \Rightarrow \frac{d\, u}{d\, x} = \frac{q(x)}{v(x)} \Rightarrow d\, u = \frac{q(x)}{v(x)} d\, x.$$

Переменные разделились, поэтому:

$$\int d\, u = \int \frac{q(x)}{v(x)} d\, x + C_1 \Rightarrow u = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx + C_1. \tag{5.20}$$

Тогда

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = \left(\int \frac{q(x)}{v(x)} d\, x + C_1 \right) \cdot e^{-\int p(x)\, d\, x}, \tag{5.21}$$

тем самым получено общее решение линейного дифференциального уравнения (5.15) первого порядка.

Справка. Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский математик, механик, физик и астроном. Даниил Бернулли (1700–1782) – швейцарский математик и механик.

Уравнения Бернулли

Общий вид:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^n\,,\ n\neq 0,\ n\neq 1. \qquad (5.21.а)$$

Метод решения: с помощью замены $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Пример 5.8. Решить задачу Коши.

$$y' - y\cdot \mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 0. \qquad (5.22)$$

Решение

Дано линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Применим метод Эйлера-Бернулли. Замена: $y = u(x)\cdot v(x)$, $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$, отсюда

$$u'\cdot v + (u\cdot v' - u\cdot v\cdot \mathrm{tg}x) = \frac{1}{\cos x}. \qquad (5.23)$$

Пусть $u\cdot v' - u\cdot v\cdot \mathrm{tg}x = 0 \Rightarrow u\cdot(v' - v\cdot \mathrm{tg}x) = 0 \Rightarrow v' - v\cdot \mathrm{tg}x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow v' = v\cdot \mathrm{tg}x$ – получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, разделим переменные:

$$\frac{dv}{dx} = v\cdot \mathrm{tg}x \Rightarrow dv = v\cdot \mathrm{tg}x\cdot dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = \mathrm{tg}x dx.$$

Переменные разделились, поэтому интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \mathrm{tg}\,x\,d\,x + C,$$

пусть $C = 0$, тогда $\ln|v| = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \Rightarrow \ln|v| = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|\cos x| \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln|v| = \ln\left|(\cos x)^{-1}\right|$, следовательно:

$$v = \frac{1}{\cos x}. \qquad (5.24)$$

В результате мы подобрали функцию $v(x)$ так, чтобы уравнение (5.23) значительно упростилось:

$$u'\cdot v=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow u'\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow u'=1\Rightarrow u=x+C_1. \qquad (5.25)$$

Используя (5.24) и (5.25), получаем:

$$y=u\cdot v=\frac{1}{\cos x}\cdot(x+C_1). \qquad (5.26)$$

Постоянную C_1 найдем с помощью начального условия: $y(0)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow C_1=0.$

Ответ: $y=\dfrac{x}{\cos x}$ – решение задачи Коши.

Пример 5.9. Решить уравнение:

$$x\cdot y'+y=y^2\cdot\ln x. \qquad (5.27)$$

Решение

Нам дано уравнение Бернулли при $n=2$, поэтому делаем замену:

$$z=y^{1-2}=y^{-1}=\frac{1}{y}=z\Rightarrow y=\frac{1}{z}=z^{-1}\Rightarrow y'=(z^{-1})'=-1z^{-2}\cdot z'=-\frac{z'}{z^2}.$$

Подставляем в уравнение (5.27):

$$-x\cdot\frac{z'}{z^2}+\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}\cdot\ln x\Rightarrow -x\cdot z'+z=\ln x\Rightarrow z'-\frac{1}{x}\cdot z=-\frac{1}{x}\cdot\ln x. \qquad (5.28)$$

В результате получилось линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида (5.15) для вспомогательной функции $z\,(x)$. Решаем его методом Эйлера-Бернулли, т. е. делаем замену:

$$z=u(x)\cdot v(x),\ z'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

После этой замены уравнение (5.28) примет вид:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{1}{x}\cdot u\cdot v=-\frac{1}{x}\cdot\ln x. \qquad (5.29)$$

С целью упрощения последнего уравнения положим:

$$u\cdot v' - \frac{1}{x}\cdot u\cdot v = 0 \;\Rightarrow\; v' - \frac{1}{x}\cdot v = 0 \;\Rightarrow\; v' = \frac{1}{x}\cdot v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\cdot v \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; dv = \dfrac{1}{x}\cdot v\cdot dx \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x}$ – разделение переменных $\Rightarrow$ интегрируем:

$\displaystyle\int \frac{dv}{dv} = \int \frac{dx}{x} + C \;\Rightarrow\; \ln|v| = \ln|x| + C$, пусть $C = 0 \;\Rightarrow\; \ln|v| = \ln|x| \;\Rightarrow\; v = x.$

Тем самым мы нашли такую функцию $v = x$, чтобы уравнение (5.29) стало проще:

$$u'\cdot x + 0 = -\frac{1}{x}\cdot \ln x \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln x \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad du = -\dfrac{1}{x^2}\cdot \ln x\cdot dx$ – переменные разделились $\Rightarrow$ интегрируем:

$\displaystyle\int du = -\int \frac{1}{x^2}\cdot \ln x\cdot dx + C_1$ (так как $-\dfrac{1}{x^2}\cdot dx = \left(\dfrac{1}{x}\right)'\cdot dx = d\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \displaystyle\int \ln x\cdot d\left(\frac{1}{x}\right) + C_1 =$ (применим формулу интегрирования по частям)=

$$= u = \frac{1}{x}\cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot d(\ln x) + C_1 = \frac{1}{x}\cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot (\ln x)'\, dx + C_1 =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx + C_1 = \frac{1}{x}\cdot \ln x - \int x^{-2}\,dx + C_1 = \frac{1}{x}\cdot \ln x - \frac{x^{-1}}{-1} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot \ln x + \frac{1}{x} + C_1 = u \Rightarrow z = u\cdot v = \left(\frac{1}{x}\cdot \ln x + \frac{1}{x} + C_1\right)\cdot x = \ln x + 1 + C_1\cdot x = z.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной $y = z^{-1}$, получаем общее решение исходного уравнения (5.27).

Ответ: $y = (\ln x + 1 + C_1\cdot x)^{-1}.$

Уравнения в полных дифференциалах

Общий вид:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \text{ при условии } P'_y = Q'_x. \qquad (5.30)$$

Общее решение:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,d\,x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,d\,y = C\,, \tag{5.31}$$

где x_0 и y_0 подбираются так, чтобы в точке $M_0(x_0, y_0)$ были определены обе функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Пояснения. Выражение $P(x,y)\,d\,x + Q(x,y)\,d\,y$, при условии $P'_y = Q'_x$ является полным дифференциалом некоторой функции $U\,(x,\ y)$, которая находится по формуле [2, с. 229]:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,d\,x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,d\,y = U\,(x,y)\,, \tag{5.32}$$

при этом (5.30) примет вид:

$$d\,U = 0 \Leftrightarrow U\,(x,\ y) = C\,,$$

что совместно с (5.32) и дает общее решения уравнения в полных дифференциалах в неявном виде (5.31).

Пример 5.10. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(x^2 y - 2x^3)\,d\,x + \left(\frac{x^3}{3} + 5e^{2y}\right)d\,y = 0\,. \tag{5.33}$$

Решение

Дано уравнение в дифференциалах, у которого

$$P = x^2 y - 2x^3\,,\ Q = \frac{x^3}{3} + 5e^{2y}\,.$$

Проверим выполнение условия независимости: $P'_y = x^2 = Q'_x = x^2$, тем самым нам дано уравнение в полных дифференциалах. Воспользуемся формулой (5.31) и возьмем: $x_0 = 0 = y_0$, тогда

$$\int_0^x (x^2 y - 2x^3)\,dx + \int_0^y \left(\frac{x^3}{3} + 5e^{2y}\right)\Bigg|_{x=0} \cdot dy = C \Rightarrow \left(\frac{x^3}{3}\cdot y - \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=x} + 5\int_0^y e^{2y} dy = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}\cdot y - \frac{x^4}{2} + \frac{5}{2}e^{2y} - \frac{5}{2} = C.$$

Ответ. Общее решение уравнения (5.33) в неявном виде:

$$\frac{x^3}{3}\cdot y - \frac{x^4}{2} + \frac{5}{2}e^{2y} = C_1, \quad \text{т. е. } U(x,\, y) = C_1, \quad \text{где } C_1 = C + \frac{5}{2}.$$

Замечание. Проверка правильности решения уравнений в полных дифференциалах делается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} U'_x = x^2 \cdot y - 2x^3 = P(x,y) \\ U'_y = \dfrac{x^3}{3} + 5e^{2y} = Q(x,y) \end{array}\right| - \text{верно.}$$

5.4. Дифференциальные уравнения второго порядка

Основные понятия

Общий вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{5.34}$$

Общее решение:

$$y = y(x,\, C_1,\, C_2). \tag{5.35}$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y''); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{5.36}$$

Далее рассмотрим только несколько частных случаев дифференциальных уравнений второго порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение своего порядка

Рассмотрим два варианта.

1 вариант.

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{5.37}$$

т. е. в дифференциальном уравнении отсутствует функция y без производных.

Такое уравнение с помощью замены: $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ преобразуется сначала в дифференциальное уравнение первого порядка для вспомогательной функции $z(x)$:

$$F(x, z, z') = 0. \tag{5.38}$$

Решая уравнение (5.38), получаем его общее решение $z = z(x, C_1)$, после чего делаем обратную замену и получаем еще одно дифференциальное уравнение первого порядка (теперь уже для функции y (x)):

$$y' = z(x, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z(x, C_1) \Rightarrow dy = z(x, C_1)dx \Rightarrow y = \int z(x, C_1)dx + C_2. \tag{5.39}$$

Пример 5.11. Найти общее решение уравнения:

$$xy'' = y'. \tag{5.40}$$

Решение

Дано дифференциальное уравнение второго порядка типа (5.37), не содержащее y без производных, поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. Подставляем в уравнение (5.40) и получаем:

$$x \cdot z' = z \Rightarrow z' = \frac{1}{x} \cdot z. \tag{5.41}$$

Видно, что получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot z \Rightarrow dz = z \cdot \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + C.$$

Обозначим: $C = \ln C_1 \Rightarrow \ln|z| = \ln(C_1 \cdot |x|) \Rightarrow z = C_1 x$ – найдено общее решение вспомогательного уравнения (5.41).

Далее сделаем обратную замену:

$$z = y' \Rightarrow y' = C_1 x \Rightarrow dy = C_1 x dx \Rightarrow y = \int C_1 x\, d\, x + C_2 \Rightarrow y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 .$$

Ответ: $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ – общее решение уравнения (5.40).

2 вариант.

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{5.42}$$

т. е. дифференциальное уравнение второго порядка явным образом не содержит независимую переменную x, но неявно она присутствует в производных, так как

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

В этом случае делается замена:

$$y' = p(y),\ y'' = \frac{d(p(y))}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p \ ,$$

с помощью которой уравнение (5.42) трансформируется в дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции $p(y)$, решая которое находим его общее решение: $p = p(y, C_1)$, а затем делаем обратную замену: $p = y' \Rightarrow \frac{d\, y}{d\, x} = p(y,\, C_1) \Rightarrow \frac{d\, y}{p(y,\, C_1)} = d\, x$ – переменные разделились, поэтому можно интегрировать обе части:

$$\int \frac{dy}{p(y,\, C_1)} = \int dx + C_2 \Rightarrow x = \int \frac{dy}{p(y,\, C_1)} - C_2 .$$

Ответ: $x = x(y,\, C_1,\, C_2)$ – общее решение уравнения (5.42).

Пример 5.12. Найти общее решение уравнения:

$$(y'')^2 = y'. \tag{5.43}$$

Решение

Дано дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее x в явном виде, поэтому для понижения его порядка сделаем замену:

$$y' = p(y),\ y'' = \frac{d\big(p(y)\big)}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot y' = p'\cdot p\,,$$

после которой уравнение (5.43) преобразуется:

$$(p'\cdot p)^2 - p = 0 \Rightarrow p\cdot(p\cdot(p')^2 - 1) = 0.$$

Следовательно, имеем два варианта:

а) $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$ получим первое решение: $y = C$ – постоянное;

б) $p\cdot(p')^2 = 1 \Rightarrow p' = \pm\frac{1}{\sqrt{p}}$. (5.44)

Получено дифференциальное уравнение 1 порядка, в котором можно разделить переменные:

$$\frac{dp}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{p}} \Rightarrow \sqrt{p}dp = \pm dy\,.$$

Переменные разделились. Интегрируем:

$$\int\sqrt{p}dp = \pm\int dy + C_1 \Rightarrow \frac{2}{3}p^{1,5} = \pm y + C_1 \Rightarrow p^{1,5} = \pm\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}C_1.$$

Следовательно, если для упрощения обозначить $\frac{3}{2}C_1 = C_2$, то получим:

$$p = \left(C_2 \pm \frac{3}{2}y\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(C_2 \pm \frac{3}{2}y\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}y \pm C_2\right)^2} = (\pm C_2 = C_3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow p = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}y + C_3\right)^2}$ – общее решение вспомогательного дифференциального уравнения (5.44). После этого делается обратная замена:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}y + C_3\right)^2} \Rightarrow \int\left(\frac{3}{2}y + C_3\right)^{-2/3}d\,y = \int d\,x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\int\left(\frac{3}{2}y + C_3\right)^{-2/3}d\left(\frac{3}{2}y + C_3\right) = x + C_4 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot 3\left(\frac{3}{2}y + C_3\right)^{1/3} = x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{2}y+C_3}=\frac{1}{2}(x+C_4)\Rightarrow \frac{3}{2}y+C_3=\frac{1}{8}(x+C_4)^3\Rightarrow y=\frac{1}{12}(x+C_4)^3-\frac{2}{3}C_3,$$

если обозначить: $-\frac{2}{3}C_3=C_5$, то получаем ответ.

Ответ. Два общих решения уравнения (5.43): $y_1=C,\ y_2=\frac{1}{12}(x+C_4)^3+C_5.$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части

Общий вид:

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=f(x), \tag{5.45}$$

где $p,\ q$ – заданные числа; $f(x)$ – заданная функция.

Если $f(x)=0$, то из уравнения (5.45) получается линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=0. \tag{5.46}$$

Теорема 5.2. Общее решение дифференциального уравнения (5.45) имеет следующий вид:

$$y=\bar{y}+y_*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (5.46); y_* – некоторое частное решение неоднородного уравнения (5.45), которое удалось найти тем или иным способом.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение (5.46) и попробуем искать его решение в виде: $y=e^{\lambda x},\ y'=\lambda\cdot e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2\cdot e^{\lambda x}$, тогда, подставляя в уравнение (5.46), получаем: $\lambda^2\cdot e^{\lambda x}+p\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x}+q\cdot e^{\lambda x}=0\Rightarrow e^{\lambda x}\cdot\left(\lambda^2+p\cdot\lambda+q\right)=0.$

Следовательно,

$$\lambda^2 + p\cdot\lambda + q = 0. \tag{5.47}$$

Полученное уравнение (5.47) называется *характеристическим уравнением* для нахождения *собственных значений* λ_1 *и* λ_2 дифференциальных уравнений (5.45) и (5.46).

Имеет место следующая теорема 5.3.

Теорема 5.3.

1. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то квадратное уравнение (5.47) имеет два различных вещественных корня: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$, а общее решение линейного однородного уравнения (5.46) имеет вид:

$$\bar{y} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}, \tag{5.48}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2. Если $D = 0$, то квадратное уравнение (5.47) имеет два одинаковых вещественных корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$, а общее решение линейного однородного уравнения (5.46) имеет вид:

$$\bar{y} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x}. \tag{5.49}$$

3. Если $D < 0$, то квадратное уравнение (5.47) имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{-D} \cdot i = \alpha + \beta \cdot i$, а общее решение линейного однородного уравнения (5.46) имеет вид:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)\right). \tag{5.50}$$

Пример 5.12. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Решение

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид: $y=\bar{y}$, чтобы найти $\bar{y}$ составим характеристическое уравнение (5.47):

$$\lambda^2+4\lambda+5=0,\ D=16-20=-4<0,$$

т. е. данное квадратное уравнение имеет комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm 2\cdot i}{2}=-2\pm 1\cdot i,\ \alpha=-2,\ \beta=1.$$

В соответствии с теоремой 5.3 общее решение имеет вид:

$$\bar{y}=e^{\alpha x}\cdot\left(C_1\cdot\cos(\beta x)+C_2\cdot\sin(\beta x)\right).$$

Ответ. Общее решение имеет вид: $\bar{y}=e^{-2x}\cdot\left(C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x\right)$.

Пример 5.13. Решить задачу Коши: $y''+6y'+9y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=1$.

Решение

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид: $y=\bar{y}$, чтобы найти $\bar{y}$ составим характеристическое уравнение (5.47):

$$\lambda^2+6\lambda+9=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-3.$$

В соответствии с теоремой 5.3 имеем:

$$y=\bar{y}=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot x\cdot e^{-3x}.$$

Чтобы найти значения постоянных C_1 и C_2, используем начальные условия:

$$y(0)=6,\ y'(0)=1,\ y=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot x\cdot e^{-3x},\ \ y(0)=C_1,$$

$$y'(x)=-3\cdot C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{-3x}-3\cdot C_2\cdot x\cdot e^{-3x},\ \ y'(0)=-3C_1+C_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} y(0)=6 \\ y'(0)=1 \end{cases}\left|\begin{array}{l} C_1=6 \\ -3C_1+C_2=1 \end{array}\right|\begin{array}{l} C_1=6; \\ C_2=19. \end{array}$$

Ответ. Решение задачи Коши имеет вид: $y=6\cdot e^{-3x}+19x\cdot e^{-3x}$.

Метод подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение (5.45): $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$.

Для некоторых специальных видов правой части $f(x)$ удается подобрать частное решение y_*, поэтому и рассмотрим только эти некоторые (наиболее простые) виды правой части $f(x)$.

Случай 1. Если $f(x) = A$, $A \neq 0$ – число, то такой правой части $f(x)$ соответствует характеристика $\lambda_* = 0$ (0 говорит о том, что в правой части нет экспоненты). Далее имеем два варианта:

а) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы: $\lambda_1 \neq \lambda_* = 0$ и $\lambda_2 \neq \lambda_* = 0$, тогда подбираем y_* в виде другой постоянной: $y_* = B$:

$$y_* = B,\ y'_* = 0,\ y''_* = 0 \Rightarrow \text{из } (5.45) \Rightarrow q \cdot B = A \Rightarrow y_* = B = A / q - \text{найдено};$$

б) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что либо $\lambda_1 = \lambda_* = 0$, либо $\lambda_2 = \lambda_* = 0$ (эти два варианта возможны только при $q = 0$), тогда ищем:

$$y_* = B \cdot x,\ y'_* = B,\ y''_* = 0 \Rightarrow \text{из } (5.45) \Rightarrow p \cdot B = A \Rightarrow y_* = Bx = Ax / P - \text{найдено}.$$

Пример 5.14. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y'' - 3y' + 2y = 8. \tag{5.51}$$

Решение

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части $f(x) = 8$ – число. Его общее решение имеет вид: $y = \bar{y} + y_*$.

а) чтобы найти $\bar{y}$ составим характеристическое уравнение (5.47):

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,$$

поэтому в соответствии с теоремой 5.3: $\bar{y} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$;

б) чтобы найти y_*, используем метод подбора частного решения по виду правой части:

$$f(x)=8 \text{ – число, } \lambda_*=0\neq\lambda_1=1 \text{ и } \lambda_*=0\neq\lambda_2=2\Rightarrow \text{ищем:}$$

$$y_*=B,\ y'_*=0,\ y''_*=0\Rightarrow \text{из уравнения (5.51)}\Rightarrow 0-3\cdot 0+2B=8,\ B=4=y_*.$$

Ответ. Общее решение дифференциального уравнения (5.51) имеет вид: $y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{2x}+4$.

Случай 2. Если $f(x)=Ax+E$ – линейная функция, то ей соответствует характеристика $\lambda_*=0$ (0 говорит о том, что в правой части нет экспоненты). Далее имеем два варианта:

а) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что $\lambda_1\neq\lambda_*=0$ и $\lambda_2\neq\lambda_*=0$, тогда подбираем y_* в виде другой линейной функции: $y_*=kx+b,\ y'_*=k,\ y''_*=0\Rightarrow$ из уравнения (5.45), следовательно $q\cdot kx+(p\cdot k+q\cdot b)=Ax+E.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x*, получаем:

$$\underline{q\cdot kx}+\underline{\underline{p\cdot k+q\cdot b}}=\underline{Ax}+\underline{\underline{E}}\Rightarrow k=A/q,\ b=E/q-pA/q^2\Rightarrow y_*=kx+b-\text{найдено}.$$

б) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что либо $\lambda_1=\lambda_*=0$, либо $\lambda_2=\lambda_*=0$ (эти два варианта возможны только при $q=0$), тогда ищем:

$$y_*=x\cdot(kx+b)=kx^2+bx,\ y'_*=2kx+b,\ y''_*=2k.$$

Далее из уравнения (5.45) находим k и b:

$$\underline{2p\cdot kx}+\underline{\underline{2\cdot k+p\cdot b}}=\underline{Ax}+\underline{\underline{E}}\Rightarrow k=0{,}5A/p,\ b=E/p-A/p^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_*=kx^2+bx-\text{найдено}.$$

Пример 5.15. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''-7y'+6y=3x+2. \qquad (5.52)$$

Решение

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части: $f(x)=3x+2$ – линейная функция. Его общее решение имеет вид: $y=\bar{y}+y_*$.

а) чтобы найти $\bar{y}$ составим характеристическое уравнение (5.47):

$$\lambda^2-7\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=6 \Rightarrow \bar{y}=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{6x}.$$

б) правая часть $f(x)$ – линейная функция, поэтому $\lambda_*=0$, $\lambda_1\neq\lambda_*$, $\lambda_2\neq\lambda_*$, следовательно, ищем:

$y_*=kx+b$, $y'_*=k$, $y_*=0\Rightarrow$ из уравнения (5.52)$\Rightarrow 0+\underline{6kx}+\underline{\underline{6b-7k}}=\underline{3x}+\underline{\underline{2}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}6k=3\\ 6b-7k=2\end{cases}\left|\begin{matrix}k=1/2\\ b=11/12\end{matrix}\right|\Rightarrow y_*=\frac{1}{2}x+\frac{11}{12}.$$

Ответ. Общее решение дифференциального уравнения (5.52) имеет вид: $y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{6x}+\frac{1}{2}x+\frac{11}{12}$.

Случай 3. Если $f(x)=Ax^2+Bx+E$ – квадратичная функция, то ей соответствует характеристика $\lambda_*=0$ (0 говорит о том, что в правой части нет экспоненты). Далее имеем два варианта:

а) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что $\lambda_1\neq\lambda_*=0$ и $\lambda_2\neq\lambda_*=0$, тогда подбираем y_* в виде другой квадратичной функции:

$$y_*=ax^2+bx+m,\ y'_*=2ax+b,\ y''_*=2a\Rightarrow \text{из уравнения (5.45)}\Rightarrow$$

$$qax^2+(q\cdot b+2ap)\cdot x+(q\cdot m+bp+2a)=Ax^2+Bx+E.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x*, получаем требуемые значения коэффициентов *a*, *b*, *m* и находим $y_*=ax^2+bx+m$;

б) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что либо $\lambda_1 = \lambda_* = 0$, либо $\lambda_2 = \lambda_* = 0$ (эти два варианта возможны только при $q = 0$), тогда ищем:

$$y_* = x \cdot \left(ax^2 + bx + m\right) = ax^3 + bx^2 + mx,\ y'_* = 3ax^2 + 2bx + m,\ y''_* = 6ax + 2b.$$

Далее из уравнения (5.45) получаем:

$$3pax^2 + (6a + 2bp) \cdot x + (p \cdot m + 2b) = Ax^2 + Bx + E.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем требуемые значения коэффициентов a, b, m и находим $y_* = ax^3 + bx^2 + mx.$

Пример 5.16. Найти общее решение уравнения:

$$2y'' - 6y' = x^2. \tag{5.53}$$

Решение

Преобразуем (5.53) к стандартной форме (5.45): $y'' - 3y' = 0{,}5x^2$.

Кратко опишем ход мыслей:

$$y = \bar{y} + y_*,\ \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow \bar{y} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x}.$$

$f(x) = 0{,}5x^2 + 0x + 0$ – квадратичная функция, то ей соответствует характеристика $\lambda_* = 0$, причем $\lambda_1 = \lambda_* = 0$, $\lambda_2 = 3 \neq \lambda_*$, поэтому ищем:

$$y_* = x \cdot \left(ax^2 + bx + m\right) = ax^3 + bx^2 + mx,\ y'_* = 3ax^2 + 2bx + m,\ y''_* = 6ax + 2b.$$

Далее подставляем в уравнение (5.53):

$$-9ax^2 + (6a - 6b) \cdot x + (2b - 3m) = 0{,}5x^2 + 0x + 0 \Rightarrow a = b = -1/18, m = -1/27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_* = -\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x = -(3x^3 + 3x^2 + 2x)/54 \Rightarrow y = \bar{y} + y_* \Rightarrow$$

Ответ. Общее решение уравнения (5.53):

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} - (3x^3 + 3x^2 + 2x)/54.$$

Случай 4. Если правая часть $f(x) = A \cdot e^{\lambda_* x}$ содержит экспоненту, то ей соответствует характеристика $\lambda_* \neq 0$ (что говорит о том, что в правой части есть экспонента). Далее имеем три варианта:

а) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что $\lambda_1 \neq \lambda_*$ и $\lambda_2 \neq \lambda_*$, тогда подбираем y_* в виде такой функции:

$$y_* = B \cdot e^{\lambda_* x}, y'_* = B \cdot \lambda_* e^{\lambda_* x}, y''_* = B \cdot \lambda_*^2 e^{\lambda_* x} \Rightarrow \text{ из уравнения (5.45) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot \lambda_*^2 e^{\lambda_* x} + pB \cdot \lambda_* e^{\lambda_* x} + qB \cdot e^{\lambda_* x} = A \cdot e^{\lambda_* x} \Rightarrow B = A / (\lambda_*^2 + p \cdot \lambda_* + q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_* = B \cdot e^{\lambda_* x} = f(x) / (\lambda_*^2 + p \cdot \lambda_* + q) \text{ -- найдено;}$$

б) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что либо $\lambda_1 = \lambda_*$, либо $\lambda_2 = \lambda_*$, тогда подбираем y_* в виде такой функции:

$$y_* = B \cdot x \cdot e^{\lambda_* x}, y'_* = B \cdot e^{\lambda_* x} + B \cdot x\lambda_* e^{\lambda_* x}, y''_* = 2B\lambda_* \cdot e^{\lambda_* x} + B \cdot x\lambda_*^2 e^{\lambda_* x} \Rightarrow$$

из уравнения (5.45) находим значение величины *B*, а затем и $y_* = B \cdot e^{\lambda_* x}$;

в) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_*$, тогда подбираем y_* в виде такой функции: $y_* = B \cdot x^2 \cdot e^{\lambda_* x}$.

Далее аналогично варианту б) находим первую и вторую производную, подставляем все в уравнение (5.45) и находим величину *B*, а затем и $y_* = B \cdot x^2 \cdot e^{\lambda_* x}$.

Случай 5. Если $f(x) = (Ax + E) \cdot e^{\lambda_* x}$ содержит экспоненту, то ей соответствует характеристика $\lambda_* \neq 0$ (что говорит о том, что в правой части есть экспонента). Далее имеем три варианта:

а) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что $\lambda_1 \neq \lambda_*$ и $\lambda_2 \neq \lambda_*$, тогда подбираем y_* в виде такой функции: $y_* = (kx + b) \cdot e^{\lambda_* x}$, далее находим первую и вторую производную, подставляем все в уравнение (5.45) и находим величины *k* и *b*, а затем и $y_* = (kx + b) \cdot e^{\lambda_* x}$;

б) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что либо $\lambda_1 = \lambda_*$, либо $\lambda_2 = \lambda_*$, тогда подбираем y_* в виде такой функции: $y_* = (kx+b)\cdot x\cdot e^{\lambda_* x}$, затем находим первую и вторую производную, подставляем все в уравнение (5.45) и определяем величины *k*, *b*, а затем и $y_* = (kx+b)\cdot x\cdot e^{\lambda_* x}$;

в) если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_*$, тогда подбираем y_* в виде такой функции: $y_* = (kx+b)\cdot x^2\cdot e^{\lambda_* x}$, после чего находим первую и вторую производную, подставляем все в уравнение (5.45) и определяем величины *k*, *b*, а затем и $y_* = (kx+b)\cdot x^2\cdot e^{\lambda_* x}$.

Пример 5.17. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = -15\cdot e^{-4x}; \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 0. \end{cases} \tag{5.54}$$

Решение

Кратко опишем ход мыслей:

$y = \overline{y} + y_*$, $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow \overline{y} = C_1\cdot e^{-2x} + C_2\cdot e^{-x}$.

$f(x) = -15\cdot e^{-4x}$ – содержит экспоненту, то ей соответствует характеристика $\lambda_* = -4$, причем $\lambda_1 \neq \lambda_*$, $\lambda_2 \neq \lambda_*$, поэтому ищем:

$$y_* = A\cdot e^{-4x} \Rightarrow y'_* = -4A\cdot e^{-4x}, (y'_*)' = -4\cdot(-4)A\cdot e^{-4x} \Rightarrow y''_* = 16A\cdot e^{-4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{из уравнения (5.54)} \Rightarrow\ 16A\cdot e^{-4x} + 3\cdot(-4)A\cdot e^{-4x} + 2\cdot A\cdot e^{-4x} = -15\cdot e^{-4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6A\cdot e^{-4x} = -15\cdot e^{-4x} \Rightarrow\ A = -2{,}5 \Rightarrow y_* = -2{,}5\cdot e^{-4x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y(x) = \overline{y} + y_* = C_1\cdot e^{-2x} + C_2\cdot e^{-x} - 2{,}5\cdot e^{-4x}$ – найдено общее решение уравнения (5.54).

Значения постоянных C_1 и C_2 найдем из начальных условий: $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Имеем: $0 = y(0) = C_1 + C_2 - 2{,}5$.

Далее:

$$y'(x) = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - 2{,}5e^{-4x})' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} - 2{,}5 \cdot (-4) \cdot e^{-4x} =$$

$$= -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} + 10 \cdot e^{-4x}, \quad \text{поэтому } y'(0) = -2C_1 - C_2 + 10.$$

Подставляя в начальные условия $y(0)=0, y'(0)=0$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2{,}5 = 0 \\ -2C_1 - C_2 + 10 = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} C_1 = 2{,}5 - C_2 \\ -5 + C_2 + 10 = 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} C_1 = 7{,}5; \\ C_2 = -5. \end{matrix}$$

Ответ. Решение задачи Коши: $y = 7{,}5e^{-2x} - 5\,e^{-x} - 2{,}5 \cdot e^{-4x}$.

Случай 6. Если $f(x) = e^{\alpha_* x} \cdot (A\cos(\beta_* x) + B\sin(\beta_* x))$ содержит синусы и (или) косинусы, то ей соответствует комплекснозначная характеристика $\lambda_* = \alpha_* + \beta_* \cdot i$. Далее рассмотрим только 1-й вариант.

Если корни характеристического уравнения (5.47) таковы, что $\lambda_1 \ne \lambda_*$ и $\lambda_2 \ne \lambda_*$, тогда подбираем y_* в виде такой функции:

$$y_* = e^{\alpha_* x} \cdot (M\cos(\beta_* x) + N\sin(\beta_* x)).$$

Далее находим первую и вторую производную, подставляем все в уравнение (5.45) и находим величины *M* и *N*, а затем и $y_* = e^{\alpha_* x} \cdot (M\cos(\beta_* x) + N\sin(\beta_* x))$.

Пример 5.18. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 4y = 2\cos(3x). \tag{5.55}$$

Краткое решение

$$y = \bar{y} + y_*,\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 = \lambda_2 \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot xe^{2x}.$$

Далее:

$$f(x) = e^{0 \cdot x} \cdot (2\cos(3x) + 0\sin(3x)) \quad \Rightarrow \quad \lambda_* = 0 + 3 \cdot i \ne \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_* \ne \lambda_2,$$

поэтому $y_* = M\cos(3x) + N\sin(3x) \Rightarrow y_*' = 3N\cos(3x) - 3M\sin(3x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_*'' = -9M\cos(3x) - 9N\sin(3x) \Rightarrow \text{из уравнения } (5.55) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-9M - 12N + 4M)\cdot\cos(3x) + (-9N + 12M + 4N)\cdot\sin(3x) = 2\cos(3x) + 0\sin(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5M - 12N = 2 \\ -5N + 12M = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 25M + 60N = -10 \\ N = 2{,}4M \end{array} \right| \begin{array}{l} 25M + 60\cdot 2{,}4M = -10 \\ N = 2{,}4M \end{array} \left| \begin{array}{l} 169M = -10 \\ N = 2{,}4M \end{array} \right| \begin{array}{l} M = -10/169; \\ N = -24/169. \end{array}$$

В результате получаем ответ.

Ответ. Общее решение уравнения (5.55) имеет вид:

$$y = C_1\cdot e^{2x} + C_2\cdot xe^{2x} - (10\cos(3x) + 24\sin(3x))/169.$$

5.5. Нахождение приближенного решения дифференциальных уравнений первого порядка при помощи степенных рядов

Некоторые дифференциальные уравнения первого порядка решаются только приближенными методами. В четвертой главе «Ряды» была сформулирована теорема 4.10 о разложении функции в степенной ряд Тейлора – Маклорена, которая позволяет решить эти дифференциальные уравнения приближенными методами. Далее будет изложен один из таких методов решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с использованием степенных рядов Маклорена.

Пример 5.19. Найти три первых отличных от нуля слагаемых в разложении решения задачи Коши в степенной ряд Маклорена:

$$y' = x + e^{y^2} + \cos(3x),\ y(0) = 0. \tag{5.56}$$

Решение

Будем искать решение этой задачи Коши в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2 + + \frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \dots.$$

По условию $y(0) = 0$. Далее из уравнения (5.56):

1) $y' = x + e^{y^2} + \cos(3x) \Rightarrow y'(0) = 0 + e^{y^2(0)} + \cos(3\cdot 0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2;$

2) $y' = x + e^{y^2} + \cos(3x) \Rightarrow y'' = \left(x + e^{y^2} + \cos(3x) \right)' = 1 + 2y \cdot e^{y^2} - 3\sin(3x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y''(0) = 1 + 2y(0) \cdot e^{y^2(0)} - 3\sin(3 \cdot 0) = 1 + 2 \cdot 0 \cdot e^0 - 0 = 1;$

3) еще раз дифференцируем уравнение (5.56) из условия:

$$y''' = \left(x + e^{y^2} + \cos(3x) \right)'' = \left(1 + 2y \cdot e^{y^2} - 3\sin(3x) \right)' =$$

$$= 0 + 2y' \cdot e^{y^2} + 2y \cdot e^{y^2} \cdot 2y - 3\cos(3x) \cdot 3 = 2y' \cdot e^{y^2} + 4y^2 \cdot e^{y^2} - 9\cos(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'''(0) = 2y'(0) \cdot e^{y^2(0)} + 4y^2(0) \cdot e^{y^2(0)} - 9\cos(3 \cdot 0) = 2 \cdot 2 \cdot e^0 + 0 - 9 = -5.$$

Тем самым мы нашли:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = -5.$$

Подставляя в ряд Маклорена, получаем

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots = 0 + 2x + 0,5x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \ldots .$$

Ответ. В окрестности точки $x_0 = 0$ дифференциальное уравнение имеет решение задачи Коши в виде степенного ряда:

$$y(x) = 0 + 2x + 0,5x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \ldots .$$

5.6. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Общий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y; \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{5.57}$$

Матричная запись:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{5.58}$$

где матрицы X и A задаются так:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5.59}$$

Определение 5.6. Решением системы (5.58) называется матрица $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, которая обращает систему (5.58) в тождество по t.

Определение 5.7. Общим решением системы (5.58) называется совокупность всех решений этой системы.

Теорема 5.4. Общее решение системы (5.58) имеет вид:

$$X=X(t;C_1;C_2)=\begin{pmatrix} x(t;C_1;C_2) \\ y(t;C_1;C_2) \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Существуют такие методы решения системы (5.58): метод исключения и метод собственных значений (второй метод в данном пособии не рассматривается).

Метод исключения заключается в следующем: из второго уравнения системы (5.57) выражаем x через y и $\frac{dy}{dt}$, в результате чего для y получается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами типа (5.45), решая которое изученными ранее методами, находим $y=y(t;C_1;C_2)$, после чего находим и $x=x(t;C_1;C_2)$.

Пример 5.20. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+8y; \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y. \end{cases} \tag{5.60}$$

Решение

Нам дана линейная однородная система двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами типа (5.57).

Из второго уравнения этой системы находим:

$$x = -\frac{dy}{dt} - 3y \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt}. \tag{5.61}$$

Далее все это подставляем в первое уравнение системы (5.60):

$$-\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 3\cdot\left(-\frac{dy}{dt} - 3y\right) + 8y \;\Rightarrow\; -\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 9y - 8y = 0.$$

Следовательно:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0. \tag{5.62}$$

Получилось линейное дифференциальное уравнение типа (5.45) для функции $y\,(t)$, которое решается с помощью характеристического уравнения: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_1 = 1 \Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t$.

Теперь найдем $x\,(t)$ при помощи соотношения (5.61):

$$x = -\frac{dy}{dt} - 3y = -\left(C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t\right)' - 3\left(C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = -C_1 \cdot (-1)e^{-t} - C_2 \cdot e^t \cdot 1 - 3C_1 \cdot e^{-t} - 3\,C_2 \cdot e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = -2C_1 \cdot e^{-t} - 4 \cdot C_2 \cdot e^t.$$

В итоге общее решение системы (5.60) имеет вид:

$$\begin{cases} x = -2C_1 \cdot e^{-t} - 4 \cdot C_2 \cdot e^t; \\ y = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -2C_1 \cdot e^{-t} - 4 \cdot C_2 \cdot e^t; \\ y = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t. \end{cases}$

5.7. Контрольные задания по теме «Дифференциальные уравнения»

Задача 5.1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения: $y''+p\cdot y'+q\cdot y=f(x)$ с начальными условиями: $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$ (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Вариант	p	q	$f(x)$	y_0	y_1
1	–6	5	e^{-3x}	1	0
2	3	2	x	0	0
3	–4	3	$x+1$	0	2
4	–5	4	$1+2x$	0	–1
5	–6	5	$4e^{-x}$	1	0
6	–2	1	$2-4x$	3	2
7	2	–3	$3x$	1	0
8	–1	0	$-5e^{-2x}$	0	5
9	8	7	$4x+1$	0	–2
0	–9	8	$-3e^{2x}$	–1	0

Задача 5.2. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка (по вариантам):

1. $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\cdot\sin x$.

2. $y'\cdot e^{5x}=y^2+9$.

3. $y'=16+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

4. $y'\cdot y=x^2+x+3$.

5. $(x^3+y^2)\,dx+2xy\,dy=0$.

6. $y'-\frac{2}{x}y=-x^2\cdot e^{4x}$.

7. $y'=25+\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

8. $y'\cdot y^2=e^{-5x}+2x+1$.

9. $y'-\frac{1}{x}y=x\cdot\cos(2x)$.

0. $(x^4+y^3)\,dx+3xy^2\,dy=0$.

Задача 5.3. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка (по вариантам):

1. $(y')^2=y\,y''$.

2. $y''-\frac{1}{x}y'=x\,e^{2x}$.

3. $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.

4. $y'' x \ln x = y'$.

5. $y'' = y' + x$.

6. $y'' = x \cdot \sin x$.

7. $y'' = 3y' + 5x - 2$.

8. $4y'' = y$.

9. $y'' = y' + x$.

0. $y'' = 3y' - 2y + x + 3$.

Задача 5.4. Найти три первых, отличных от нуля, слагаемых в разложении по формуле Маклорена решения задачи Коши: $y' = f(x, y), y(0) = y_0$ (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Вариант	$f(x, y)$	y_0	Вариант	$f(x, y)$	y_0
1	$2e^y - xy$	0	6	$\cos x - y^2$	1
2	$y + y^2$	3	7	$y + 2y^2$	0
3	$\cos x + y^2$	1	8	$e^y + 2xy$	1
4	$e^x + y^2$	0	9	$y - y^2$	3
5	$\sin x + y^2$	1	0	$e^{2x} + y^2$	0

Задача 5.5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y; \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
1	0	1	1	0	6	0	1	1	0
2	–3	–4	–2	–5	7	–5	–2	–4	–3
3	2	1	–1	4	8	4	–1	1	2
4	–1	8	1	1	9	1	1	8	–1
5	1	1	–2	4	0	4	–2	1	1

6. Введение в дискретную математику

6.1. Множества и операции над ними

Понятие множества относится к основным понятиям математики, наряду с натуральными числами, точкой, прямой и т. д. Для множества можно ввести синонимы: совокупность предметов, объединенных по какому-либо признаку, или группа предметов. Создатель теории множеств – немецкий математик Г. Кантор (1845–1918).

Он сформулировал принцип объемности: два множества A и B равны тогда и только тогда, если они состоят из одних и тех же элементов.

Если x – элемент из множества A, то записывают: $x \in A$.

Принцип объемности: $A = B \Leftrightarrow \forall x$: $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Например: $A = \{1, 1, 2, 2\}$, $B = \{1, 2\} \Leftrightarrow A = B$. Повторения не учитываются!

Как же можно определить множество? Если множество конечное, то записывают все его элементы: $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

Если множество бесконечно, то указывают то общее свойство, которым обладают его элементы.

Например: $A = \{x \mid P(x)\}$= {все элементы x, обладающие свойством P и только они}.

Из школьной программы известны, например, следующие множества:

1) $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

2) $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots\}$ – множество целых чисел;

3) $Q = \left\{ x \mid \ x = \dfrac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$ – множество рациональных чисел;

4) $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ – пустое множество, не содержащее ни одного элемента.

Подмножества

Пусть A и B – некоторые множества. Говорят, что A есть подмножество множества B, если $\forall\ x: x \in A \Rightarrow x \in B$. А обозначается это так: $A \subseteq B$.

Замечание. По определению пустое множество принадлежит любому множеству B: $\varnothing \subseteq B$.

Обозначим через U – множество всех рассматриваемых множеств (и назовем его универсальным множеством).

Операции над множествами

1. Объединением двух множеств A и B назовем такое множество $A \cup B$, которое состоит либо из элементов множества A, либо из элементов множества B, либо из их общих элементов (рис. 6.1).

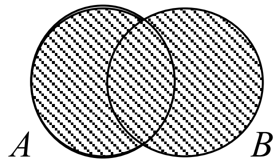

Рис. 6.1

Или короче: $A \cup B = \{\ x,\ x \in A$ или $x \in B\}$.

2. Пересечением двух множеств A и B назовем такое множество $A \cap B$, которое состоит только из их общих элементов (рис. 6.2).

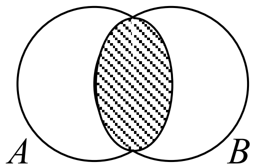

Рис. 6.2

Или короче: $A \cap B = \{\ x \,|\, x \in A$ и $x \in B\}$.

3. Разностью двух множеств A и B назовем такое множество $A - B$, которое состоит только из тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B (рис. 6.3).

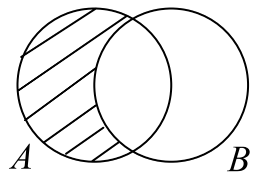

Рис. 6.3

Или короче: $A - B = \{\ x \,|\, x \in A\ \text{и}\ x \notin B\ \}$.

Замечание. Разность двух множеств $A - B$ иногда обозначают и по-другому: $A \setminus B$.

4. Дополнением множества A (относительно универсального множества U) назовем такое множество $\overline{A}$, которое состоит из таких элементов множества U, которые не содержатся в множестве A (рис. 6.4).

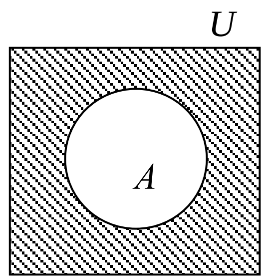

Рис. 6.4

Или короче: $\overline{A} = U \setminus A$.

5. Прямым декартовым произведением двух множеств A и B назовем такое множество $A\times B$, которое состоит из всевозможных упорядоченных пар $(x; y)$, где левый элемент $x \in A$, а правый элемент упорядоченной пары $y \in B$.

Или короче: $A\times B=\{\,(x;y)\,|\,x\in A,\ y\in B\,\}$.

Основные тождества теории множеств

1. $A\cup B = B\cup A$ – коммутативность операции объединения.

2. $A \cap B = B\cap A$ – коммутативность пересечения.

3. $(A\cup B) \cup C = A\cup(B\cup C)$ – ассоциативность объединения.

4. $(A\cap B) \cap C = A\cap(B\cap C)$ – ассоциативность пересечения.

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ – дистрибутивность объединения, относительность пересечения.

6. $A\cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ – дистрибутивность пересечения, относительность объединения.

7. $A\cup\varnothing = A$. 8. $A\cap\varnothing = \varnothing$. 9. $A \cup \overline{A} = U$. 10. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

11. $A \cup A = A$. 12. $A \cap A = A$. 13. $A \cup U = U$. 14. $A \cap U = A$.

$$\left.\begin{array}{l} 15.\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ 16.\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}\right\}\text{законы Де Моргана.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 17.\ A \cup (A \cap B) = A \\ 18.\ A \cap (A \cup B) = A \end{array}\right\}\text{законы поглощения.}$$

Пример 6.1. Заданы множества: $A=\{\,x|\,x=2k-3,\,k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5\,\}$, $B=\{\,x|\,x=2m+1,\,m=1,\,3,\,5,\,7\,\}$, $C=\{\,x|\,x=3p-3,\,p=0,\,1,\,2,3,\,4\}$ и универсальное множество $U = Z$ (множество целых чисел). Требуется найти следующие множества: $A\cup B$, $A\cap B$, $A - C$, дополнение $\overline{A}$ относительно универсального множества $U = Z$, $A\times B$.

Решение

Запишем подробно все элементы множеств *A*, *B*, *C*. Имеем:

$$A = \{-3;\ -1;\ 1;3;\ 5;\ 7\};\quad B = \{3;\ 7;\ 11;\ 15\};\quad C = \{-3;\ 0;\ 3;\ 6;\ 9\}.$$

Находим объединение $A \cup B = \{-3;\ -1;\ 1;3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 15\}$.

Далее находим пересечение $A \cap B = \{3;\ 7\}$ – оно составлено только из общих элементов этих множеств.

Чтобы найти разность *A* – *C*, необходимо из множества *A* удалить те элементы, которые одновременно принадлежат и множеству *C* (это будут числа: –3 и 3).

Следовательно, $A - C = \{-1;\ 1;\ 5;\ 7\}$.

Для того, чтобы найти дополнение $\overline{A}$, необходимо из множества *U* = *Z* удалить все элементы множества *A*:

$$\overline{A} = \{x \in Z \mid\ x \neq -3;\ x \neq -1;\ x \neq 1; x \neq 3;\ x \neq 5;\ x \neq 7\}.$$

Прямое декартовое произведение *A*×*B* будет составлено из всевозможных упорядоченных пар (*x*; *y*), где левый элемент $x \in A$, а правый элемент упорядоченной пары $y \in B$.

Поэтому:

$$A \times B = \{(-3;\ 3), (-3;\ 7), (-3;\ 11), (-3;\ 15), (-1;\ 3), (-1;\ 7), (-1;\ 11), (-1;\ 15),$$
$$(1;\ 3), (1;\ 7), (1;\ 11), (1;\ 15), (3;\ 3), (3;\ 7), (3;\ 11), (3;\ 15),$$
$$(5;\ 3), (5;\ 7), (5;\ 11), (5;\ 15), (7;\ 3), (7;\ 7), (7;\ 11), (7;\ 15)\}.$$

6.2. Элементы математической логики

Рассмотрим наиболее элементарный раздел математической логики, который носит название *алгебра логики.* Если у нас имеется несколько высказываний, то при помощи логических связок и отрицаний из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания принято называть *простыми*, а вновь образованные высказывания – *сложными.* Рассмотрим примеры.

Пусть имеются высказывания: «На улице светит солнце», «В классе идут занятия». Из этих простых высказываний можно различными способами построить сложные высказывания:

1. На улице светит солнце, и в классе идут занятия.
2. На улице не светит солнце.
3. На улице светит солнце, однако в классе идут занятия.
4. В классе идут занятия, а на улице светит солнце.
5. На улице светит солнце, или в классе идут занятия.
6. Или на улице светит солнце, или в классе идут занятия.
7. Если на улице светит солнце, то в классе идут занятия.
8. Если в классе идут занятия, то на улице светит солнце.
9. На улице не светит солнце, или в классе идут занятия.
10. На улице светит солнце тогда и только тогда, когда в классе идут занятия.

В алгебре высказываний допускаются любые грамматически правильные способы образования сложных высказываний, и совершенно игнорируется смысловая характеристика получившегося предложения. Любое из приведенных десяти сложных предложений допустимо с точки зрения алгебры высказываний.

В алгебре высказываний интересуются лишь истинностью или ложностью (истинностным значением) высказываний. Более точно: в ней исследуется вопрос об истинности сложного высказывания в зависимости от истинности входящих в него простых высказываний и с этой точки зрения исследуются различные логические связки.

Примеры логических связок (операций)

1. Логическая связка, соответствующая союзу «и», называется *конъюнкцией* и обозначается знаком &.

Высказывание A & B, называемое конъюнкцией A и B, истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B. Это обстоятельство можно выразить с помощью так называемой *таблицы истинности* для конъюнкции (табл. 6.1).

Таблица 6.1

A	B	A & B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

В этой таблице символом И обозначается истинное высказывание, символом Л – ложное. В ней перечислены всевозможные *истинностные значения* (И и Л) высказываний А и В и соответствующие им истинностные значения высказывания А & В. С точки зрения алгебры высказываний логическая связка (операция) конъюнкция полностью определяется приведенной табл. 6.1. Высказывание А & В абсолютно истинно тогда и только тогда, когда абсолютно истинны оба высказывания А и В.

2. *Отрицание* ($\overline{A}$) высказывания А задается табл. 6.2 истинности.

Эта операция *одноместна* – в том смысле, что из одного данного простого высказывания А строится новое высказывание $\overline{A}$. В то же время конъюнкция А & В – двуместная операция: сложное высказывание строится из двух простых. Отрицание абсолютно истинного высказывания абсолютно ложно и наоборот.

Таблица 6.2

А	$\overline{А}$
И	Л
Л	И

3. Двуместная логическая операция, соответствующая союзу «или» называется *дизъюнкцией* (она обозначается знаком ∨). Надо иметь в виду, что в обычной речи союз «или» употребляется по крайней мере в двух различных смыслах: неальтернативное (неисключающее) «или» и альтернативное (исключающее) «или».

Дизъюнкция соответствует неальтернативному «или»; она задается следующей табл. 6.3 истинности.

Таблица 6.3

А	В	А∨В
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Абсолютная истинность А∨В означает, что в каждой ситуации хотя бы одно из высказываний А, В истинно.

Замечание. Часто, вместо & употребляется *знак* ^. Отметим также, что конъюнкцию иногда называют логическим умножением. Дизъюнкцию иногда называют логическим сложением.

4. Двуместная логическая операция, соответствующая обороту «если…, то…», посредством которого образуются условные предложения, называется *импликацией.* При этом сложное высказывание «если А, то В» записывается в виде А→В. Простое высказывание А называется *посылкой* импликации, В – *ее заключением.* Приводим табл. 6.4 истинности для импликации.

Таблица 6.4

A	B	A→B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

5. В качестве последнего примера логической операции рассмотрим связку, которую называют *эквивалентностью* (обозначение: ~). Она соответствует оборотам типа «тогда и только тогда, когда», «для того чтобы, необходимо и достаточно» и др. Приводим табл. 6.5 истинности для эквивалентности.

Таблица 6.5

A	B	A~B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Теперь у нас имеется некоторое количество «основных» логических операций (отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность), позволяющих получать из простых высказываний сложные высказывания. При этом вместо простых высказываний можно брать уже построенные сложные высказывания. В результате появляется возможность применять при построении сложных высказываний многоступенчатые конструкции, многократно использующие введенные логические операции. Назовем ***формулами*** логические операции, которые получаются комбинированием конечного числа указанных выше основных логических операций. Для всякой формулы можно построить истинностную таблицу, последовательно используя истинностные таблицы для основных операций.

Для всякой формулы можно построить таблицу истинности для основных операций. Естественно считать равносильными формулы, которым соответствуют одинаковые таблицы истинности. Дадим точное определение.

Определение 6.1. Пусть U и W – две формулы алгебры высказываний, а $A_1, \ldots, A_n$ – набор простых высказываний, входящих по крайней мере в одну из формул U, W. Формулы U и W называются *равносильными*, если при всех значениях истинности $A_1, \ldots, A_n$ значения истинности U и W совпадают. Равносильность U и W обозначается посредством обычного знака равенства: U = W.

Далее рассмотрим примеры, в которых будут даны образцы решения типовых задач по теме «Элементы математической логики».

Пример 6.2. Дана формула алгебры логики:

$$\alpha = \left[\left(A \to \overline{C} \right) \vee \overline{B} \right] \vee \left[\left(\overline{A} \sim B \right) \& C \right].$$

Требуется записать для нее таблицу истинности.

Решение

Данная формула алгебры логики основана на трех простых высказываниях: A, B и C (они будут занимать первые три столбца таблицы истинности (табл. 6.6), эти первые три столбца лучше всегда заполнять так, как в этом образце – для быстроты проверки вашего решения).

Таблица 6.6

№	A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	β_1	β_2	β_3	β_4	α
1	И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
2	И	И	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И
3	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И	И	И	И
4	Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И
5	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л	И
6	Л	И	Л	И	Л	И	И	И	И	Л	И
7	Л	Л	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И
8	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л	Л	И
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Пояснения. Для заполнения столбца № 7 для $\beta_1 = A \to \overline{C}$ используем столбец № 1 для A, столбец № 6 для $\overline{C}$ и табл. 6.4 для импликации. Например, на пересечении столбца № 7 и строки № 1 (табл. 6.6) поставлено Л потому, что у высказывания A в строке № 1 стоит И, у высказывания $\overline{C}$ в строке № 1 стоит Л, а по табл. 6.4 для импликации имеем $И \to Л = Л$. Аналогично заполняются все остальные строки столбца № 7 и столбцов № 8–11.

В записи формулы участвуют $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ (они будут занимать столбцы № 4, 5 и 6 – эти столбцы заполняем истинностными значениями с помощью табл. 6.2 для отрицания).

Далее внимательно изучаем формулу α слева направо. Следующие ее составляющие таковы: $\beta_1 = A \to \overline{C}$, $\beta_2 = \beta_1 \vee \overline{B}$, $\beta_3 = \overline{A} \sim B$, $\beta_4 = \beta_3 \& C$,

$\alpha = \beta_2 \vee \beta_4$. Они будут занимать столбцы № 7–11. При заполнении столбцов № 7–11 истинностными значениями мы будем использовать табл. 6.1–6.5 для основных логических операций.

Пример 6.3. Дана табл. 6.7 для формулы α алгебры логики. Требуется восстановить равносильную α формулу, составить для восстановленной формулы таблицу истинности (табл. 6.8) и сравнить ее с исходной табл. 6.7.

Решение

Таблица 6.7

№	A	B	C	α
1	И	И	И	Л
2	**И**	**И**	**Л**	**И**
3	И	Л	И	Л
4	Л	И	И	Л
5	И	Л	Л	Л
6	Л	И	Л	Л
7	**Л**	**Л**	**И**	**И**
8	Л	Л	Л	Л
№	1	2	3	4

Сначала в последнем столбце (в этой задаче это столбец № 4 табл. 6.7) находим буквы И (у нас это строки № 2 и 7, поэтому восстановленная формула будет состоять из двух вариантов, соединенных дизъюнкцией (союзом «или»).

Каждый из этих двух вариантов формируется с помощью соответствующей строки (№ 2 и 7) следующим образом:

а) берем строку № 2 – в ней у высказываний A, B и C истинностные значения таковы: И, И, Л, поэтому первый вариант $\beta_1 = A \& B \& \overline{C}$;

б) берем строку № 7 – в ней у высказываний A, B и C истинностные значения таковы: Л, Л, И, поэтому второй вариант $\beta_2 = \overline{A} \& \overline{B} \& C$.

Восстановленная формула имеет вид:

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 = \left(A \& B \& \overline{C} \right) \vee \left(\overline{A} \& \overline{B} \& C \right).$$

Для проверки правильности восстановления этой формулы составим для нее таблицу истинности (табл. 6.8). Рассмотрим восстановленную формулу более подробно:

$$\omega_1 = A \& B,\ \beta_1 = \omega_1 \& \overline{C},\ \omega_2 = \overline{A} \& \overline{B},\ \beta_2 = \omega_2 \& C,\ \alpha = \beta_1 \vee \beta_2.$$

Затем заполняем табл. 6.8 так же, как и в примере 6.2.

Таблица 6.8

№	A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	ω_1	β_1	ω_2	β_2	α
1	И	И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
2	И	И	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И
3	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л
4	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
5	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	Л
6	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
7	Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л	И	И	И
8	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	Л	Л
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Замечание. Если сравнить последний столбец табл. 6.8 (здесь это столбец № 11) с последним столбцом табл. 6.7 из условия примера 6.3, то можно увидеть их полное совпадение. Следовательно, мы восстановили формулу правильно.

6.3. Элементы теории графов

Определение 6.2. Графом назовем геометрическую структуру, составленную из вершин графа и дуг графа. Вершины графа будем обозначать точками с надписями в виде цифр, или букв, или, даже, слов. Вершины графа, как бы, обозначают станции назначения нашего сложного маршрута движения. Дуги графа будем обозначать линиями, соединяющими две вершины графа. Эти линии могут быть со стрелками или без них. Стрелка показывает направление разрешенного движения по данной дуге графа (как улица с односторонним движением). Если же на дуге графа нет стрелки, то это означает, что движение по этой дуге графа разрешено в обе стороны. Графы будем обозначать буквами G_1, G_2, ….

Пример графа дан на рис. 6.5. У этого графа, в частности, на вершине 3 указана так называемая петля, которая соответствует кольцевой дороге через 3 вершину.

Определение 6.3. Пусть задан граф, у которого количество всех вершин равно *n*. Назовем матрицей смежности этого графа матрицу A_G раз-

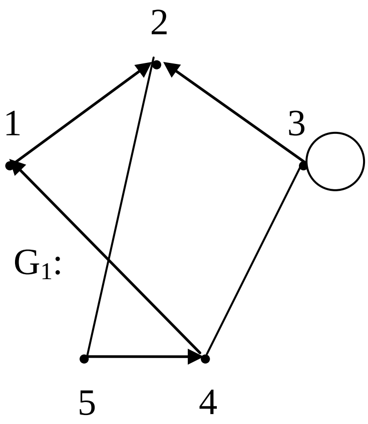

Рис. 6.5

мера $n \times n$, которая составлена только из чисел 0 и 1. Причем элемент a_{ij} этой матрицы A_G равен 0, если нет разрешенного движения по дуге графа из вершины № i в вершину № j. И элемент a_{ij} этой матрицы A_G равен 1, если есть разрешенное движение по дуге графа из вершины № i в вершину № j.

Например, для графа G_1 на рис. 6.5 матрица смежности выглядит так: $A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, при этом $a_{33} = 1$ потому, что петля есть только на 3 вершине графа.

Замечание. Матрица смежности полностью определяет свой граф.

Определение 6.4. Пусть задан граф G, у которого количество всех вершин равно n. Составим для него матрицу смежности A_G, размер которой – $n \times n$. Назовем дополнением к графу G такой граф $\overline{G}$, у которого вершины – точно такие же, что и у графа G, а дуги построены в соответствии с матрицей смежности $A_{\overline{G}}$, у которой 1 стоят на тех местах, где в исходной матрице A_G стоят 0, и наоборот.

Пример 6.4. Матрица смежности для дополнения к графу G_1 (см. рис. 6.5) имеет вид: $A_{\overline{G_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Построение дополнения к заданному графу (см. рис. 6.5) проводится так: берем те же самые вершины, затем рисуем петли только возле тех вершин, у которых их не было на исходном графе (на рис. 6.5 – это вершины 1, 2, 4 и 5). Разные вершины графа соединяем дугами, которых не было в исходном графе. В итоге получаем рис. 6.6.

Определение 6.5. Пусть заданы графы G_1 и G_2. Пересечением этих графов назовем новый граф $G_1 \cap G_2$, который имеет только общие вершины этих двух графов и только общие дуги этих двух графов.

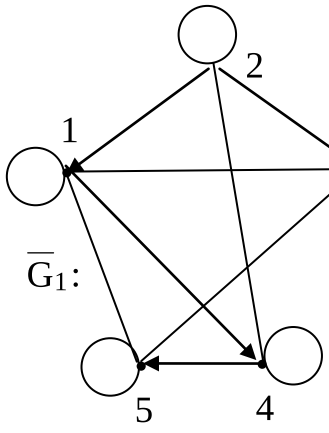

Рис. 6.6

Пример 6.5. Построить пересечение двух графов G_1 (см. рис. 6.5) и G_2 (рис. 6.7).

Решение

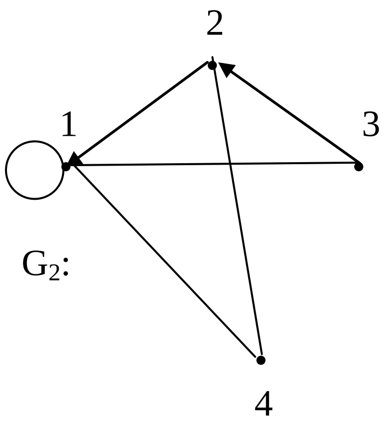

Рис. 6.7

Общие вершины этих двух графов: 1, 2, 3 и 4.

Далее берем вершину 1. Сначала проверяем путь 1→2 на общность в двух графах: у графа G_1 есть путь 1→2, а у графа G_2 есть путь 2→1. Поэтому в пересечении вершины 1 и 2 не будут соединяться. Далее проверяем пути: 1→3, 1→4, 2→3, 2→4, 3→4. В частности, у графа G_2 есть путь 1—4 в обе стороны, а у графа G_1 есть путь 4→1. Поэтому в пересечении вершины 1 и 4 будут соединяться так 4→1. Общих петель у этих графов тоже нет. В результате получаем рис. 6.8.

Определение 6.6. Пусть заданы графы G_1 и G_2. Объединением этих графов назовем новый граф $G_1 \cup G_2$, который имеет вершины, принадлежащие хотя бы одному из этих двух графов, и имеет дуги, которые принадлежат хотя бы одному из этих двух графов.

Пример 6.6. Построить объединение двух графов G_1 (см. рис. 6.5) и G_2 (см. рис. 6.9).

Решение

В «большой куче», куда можно «свалить» вершины этих двух графов разных вершин будет пять: 1, 2, 3, 4 и 5.

Это и будут вершины графа $G_1 \cup G_2$.

Точно также можно «свалить в общую кучу» и дуги обоих графов. В результате у графа $G_1 \cup G_2$ дуги будут такие: 1—2, 1—3, 1—4, 2←3, 2—4, 2—5, 3—4, 4←5, плюс петли возле вершин 1 и 3. Результат на рис. 6.9.

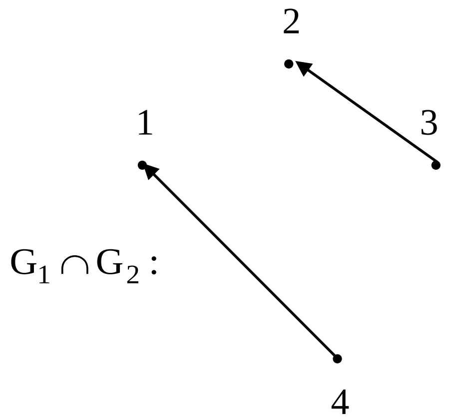

Рис. 6.8

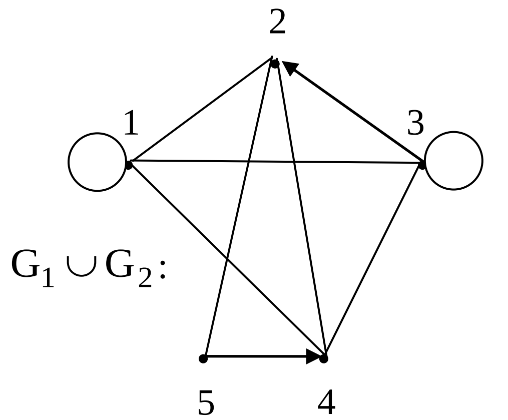

Рис. 6.9

6.4. Контрольные задания по теме «Введение в дискретную математику»

Задача 6.1. Заданы множества: $A = \{\, x \,|\, x = 2k+5,\ k = -3, -2, -1, 0, 1 \,\}$, $B = \{\, x \,|\, x = 3m-4,\ m = -1, 0, 1, 2, 3 \,\}$, $C = \{\, x \,|\, x = 4p+1,\ p = -1, 0, 1, 2, 3 \,\}$, $D = \{\, x \,|\, x = 2n-7,\ n = 1, 2, 3, 4, 5 \,\}$, $E = \{\, x \,|\, x = 3t+5,\ t = -2, -1, 0, 1, 2 \,\}$.

Требуется найти объединение, пересечение, разность и прямое декартовое произведение следующих множеств (по вариантам):

1. A и B. 2. A и C. 3. A и D. 4. A и E. 5. B и C.

6. B и D. 7. B и E. 8. C и D. 9. C и E. 0. D и E.

Задача 6.2. Для данной формулы α алгебры логики записать таблицу истинности. Формула α задана по вариантам:

1. $\alpha = \left[\left(A \sim \overline{C}\right) \vee \overline{B}\right] \vee \left[\left(\overline{A} \to B\right) \& C\right]$. 2. $\alpha = \left[\left(\overline{A} \sim \overline{C}\right) \& \overline{B}\right] \vee \left[\left(\overline{A} \to B\right) \vee C\right]$.

3. $\alpha = \left[\left(B \sim \overline{C}\right) \vee \overline{B}\right] \& \left[\left(\overline{A} \to \overline{B}\right) \& C\right]$. 4. $\alpha = \left[\left(\overline{A} \vee \overline{C}\right) \& \overline{B}\right] \vee \left[\left(\overline{A} \to B\right) \sim C\right]$.

5. $\alpha = \left[\left(A \& \overline{C}\right) \vee \overline{B}\right] \vee \left[\left(\overline{A} \to B\right) \sim C\right]$. 6. $\alpha = \left[\left(\overline{A} \& \overline{C}\right) \sim \overline{B}\right] \vee \left[\left(\overline{A} \to \overline{B}\right) \vee \overline{C}\right]$.

7. $\alpha=\left[\left(B\sim\overline{C}\right)\vee\overline{B}\right]\&\left[\left(\overline{A}\to\overline{B}\right)\&C\right]$. 8. $\alpha=\left[\left(A\vee\overline{C}\right)\&\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\to B\right)\sim\overline{C}\right]$.

9. $\alpha=\left[\left(A\&C\right)\vee\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\sim\overline{B}\right)\to C\right]$. 0. $\alpha=\left[\left(\overline{A}\&\overline{C}\right)\sim B\right]\to\left[\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\vee\overline{C}\right]$.

Задача 6.3. Дана табл. 6.9 (по вариантам) для формулы α алгебры логики. Требуется восстановить равносильную α формулу, составить для восстановленной формулы таблицу истинности и сравнить ее с исходной табл. 6.9 (по своему варианту).

Таблица 6.9

Вариант			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	B	C	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
И	И	И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	И	Л	И
И	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	И	И	Л	Л	Л

Задача 6.4. Даны графы (рис. 6.7 и 6.10). Требуется построить пересечение следующих графов (по вариантам):

1. $\overline{G}_2\cap G_5$. 2. $G_3\cap G_4$. 3. $G_3\cap G_5$. 4. $G_4\cap G_5$. 5. $\overline{G}_3\cap G_4$.

6. $G_3\cap\overline{G}_4$. 7. $\overline{G}_3\cap G_5$. 8. $\overline{G}_5\cap G_3$. 9. $\overline{G}_4\cap G_5$. 0. $\overline{G}_5\cap G_4$.

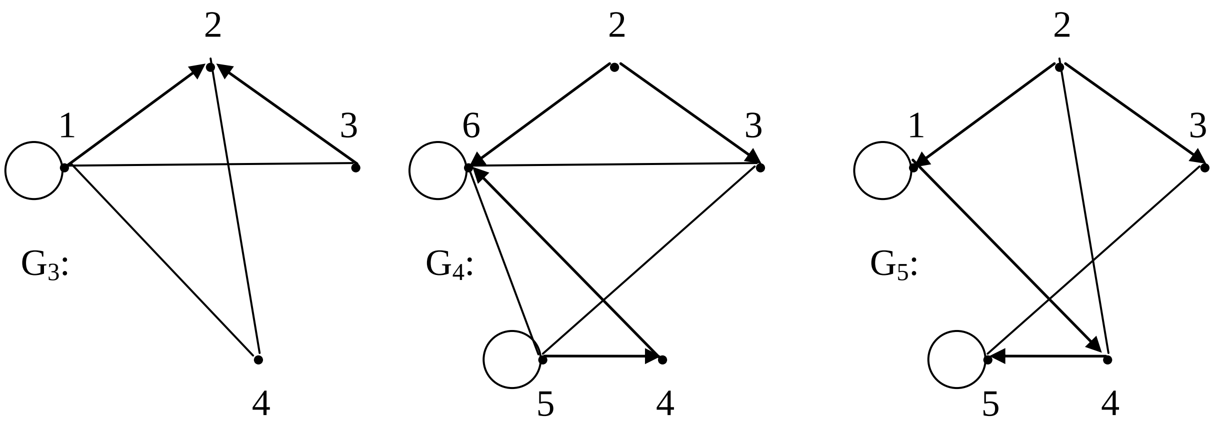

Рис. 6.10

Задача 6.5. Даны графы (рис. 6.7 и 6.10). Требуется построить объединение следующих графов (по вариантам):

1. $\overline{G}_2 \cup G_5$. 2. $G_3 \cup G_4$. 3. $G_3 \cup G_5$. 4. $G_4 \cup G_5$. 5. $\overline{G}_3 \cup G_4$.

6. $G_3 \cup \overline{G}_4$. 7. $\overline{G}_3 \cup G_5$. 8. $\overline{G}_5 \cup G_3$. 9. $\overline{G}_4 \cup G_5$. 0. $\overline{G}_5 \cup G_4$.

Задача 6.6. Даны графы (рис. 6.7 и 6.10). Требуется построить дополнение к следующим графам и записать матрицу смежности для исходного графа и его дополнения (по вариантам):

1. $\overline{G}_5 = ?$ 2. $\overline{G}_4 = ?$ 3. $\overline{G}_3 = ?$ 4. $\overline{G}_2 = ?$

5. $\overline{G}_6 = ?$, если $G_6 = \overline{G}_4 \cup G_3$. 6. $\overline{G}_7 = ?$, если $G_7 = \overline{G}_3 \cup G_5$.

7. $\overline{G}_8 = ?$, если $G_8 = \overline{G}_5 \cup G_3$. 8. $\overline{G}_9 = ?$, если $G_9 = \overline{G}_4 \cup G_5$.

9. $\overline{G}_{10} = ?$, если $G_{10} = \overline{G}_5 \cup G_4$. 0. $\overline{G}_{11} = ?$, если $G_{11} = \overline{G}_2 \cup G_5$.

7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

7.1. Основные понятия и определения теории вероятностей

Определение 7.1. Событие называется *случайным*, если при соблюдении некоторой совокупности условий, оно может произойти или не произойти. Данную совокупность условий будем называть *испытанием* или *экспериментом*. Поэтому случайное событие есть результат испытания.

Определение 7.2. 1. Событие называется *достоверным*, если в условиях данного эксперимента оно всегда произойдет. 2. Событие называется *невозможным*, если в условиях данного эксперимента оно произойти не может.

Определение 7.3. *Суммой событий A и B* называется событие $A+B$ (другое обозначение: $A \cup B$), состоящее в появлении события A или в появлении события B, или в их совместном появлении.

Определение 7.4. *Произведением событий A и B* называется событие AB (другое обозначение: $A \cap B$), состоящее в их совместном появлении.

Определение 7.5. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно несовместными*, если появление в данном испытании одного из них исключает появление остальных в этом же испытании.

Определение 7.6. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно независимыми*, если появление в испытании одного из них не влияет на степень возможности появления остальных событий, в противном случае эти события называются *попарно зависимыми.*

Определение 7.7. События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу попарно несовместных* событий, если в результате испытания только одно из них всегда произойдет.

Отсюда вывод: сумма событий полной группы, есть достоверное событие.

Определение 7.8. Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Они обозначаются A и $\overline{A}$.

Отсюда вывод: Сумма противоположных событий, есть достоверное событие.

Определение 7.9. События называются *равновозможными*, если нет основания предполагать, что в данном испытании появление какого-либо из них наиболее возможно.

Определение 7.10. Каждый из равновозможных результатов испытания называется *элементарным исходом.* Элементарный исход рассматривается либо как самостоятельное событие, либо как составляющая более сложного события.

Элементарный исход называется *благоприятствующим* данному событию A, если его появление влечет за собой появление этого события A.

Множество всех элементарных исходов Ω называется *пространством элементарных исходов.*

Пространство элементарных исходов образует *полную группу попарно несовместных событий*.

Определение 7.11. *Вероятностью* события называется число, выражающее степень возможности его появления. Обозначение вероятности события $P(A)$.

Определение 7.12 *(классической вероятности). Вероятностью* события A называют отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу n всех возможных элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \quad 0\le P(A)\le 1.$$

Свойства вероятности

1. Вероятность случайного события: $0<P(A)<1$, так как $0<m<n$.
2. Вероятность достоверного события: $P(\Omega)=1$, так как $m=n$.

3. Вероятность невозможного события: $P(\text{O})=0$, так как $m=0$.

Для вычисления числа элементарных исходов часто используют формулы комбинаторики.

Пусть составляются комбинации из n элементов и они отличаются только порядком следования элементов, тогда такие комбинации называются *перестановками.* Число перестановок находится по формуле:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Если составляются комбинации из n элементов по m, отличающиеся составом элементов и порядком их следования, то они называются *размещениями.* Число размещений находится по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad 0 \le m \le n.$$

Если составляются комбинации из n элементов по m, которые отличаются друг от друга только составом элементов, то они называются *сочетаниями*. Число сочетаний из n элементов по m определяется формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad 0 \le m \le n.$$

Теорема 7.1 ***(сложения вероятностей несовместных событий).***

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Условной вероятностью события B относительно события A называется вероятность события B, вычисленная при условии, что произошло событие A. Условную вероятность обозначают: $P(B/A)$.

Теорема 7.2 ***(умножения вероятностей двух зависимых событий).***

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго относительно первого:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Эту теорему можно обобщить на любое конечное число событий.

Если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого, то такие события называются *независимыми.*

Теорема 7.3 *(умножения вероятностей двух независимых событий)*. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

События называются *совместными*, если они могут появиться одновременно в одном испытании.

Теорема 7.4 *(сложения вероятностей двух совместных событий)*. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствия

1. Вероятность суммы попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна 1:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

2. Вероятность суммы противоположных событий равна 1:

$$P\left(A+\overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1 \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Пример 7.1. Два независимых устройства соединены в электрической цепи параллельно. Вероятность того, что первое устройство выйдет из строя равна 0,25, а вероятность неисправности второго равна 0,01. Найти вероятность того, что:

а) тока в цепи не будет;   б) ток будет в цепи.

Решение

а) Рассмотрим событие $A = \{\textit{тока в цепи нет}\}$. Так как устройства соединены параллельно, следовательно, тока не будет только в том случае, если оба устройства выйдут одновременно из строя, т. е. событие A будет равно произведению 2 независимых событий $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$, где $\overline{A_1} = \{1\text{-}е\ устройство\ вышло\ из\ строя\}$ и $\overline{A_2} = \{2\text{-}е\ устройство\ вышло\ из\ строя\}$.

Тогда по теореме умножения вероятностей независимых событий имеем:

$$p(A) = p\left(\overline{A_1}\right) \cdot p\left(\overline{A_2}\right) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}025.$$

б) Рассмотрим событие $A = \{ток\ в\ цепи\ есть\}$. Ток будет в цепи, если хотя бы одно из устройств не выйдет из строя. Тогда событие A и событие $\overline{A} = \{оба\ устройства\ выйдут\ из\ строя\}$ будут противоположными, следовательно $p(A) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975.$

Ответ: а) $p(A) = 0{,}025$; б) $p(A) = 0{,}975.$

7.2. Формула полной вероятности, формулы Байеса

Терема 7.5 *(формула полной вероятности).*

Если некоторое событие B совершается с одним из n несовместных событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, образующих полную группу событий, то для определения вероятности события B используют *формулу полной вероятности*:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

Сами события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются гипотезами, так как мы заранее не знаем, вследствие какого из этих событий появится событие B.

Теорема 7.6 *(формулы Байеса).*

Предположим, что в результате испытания событие B уже произошло. Требуется выяснить, вследствие какой гипотезы вероятнее всего оно произошло. Для этого переоценим вероятности гипотез по *формулам Байеса*:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)},\ i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Справка. Байес Томас (1702–1761). Английский математик и пресвитерианский священник, член Лондонского королевского общества.

Пример 7.2. В ящике на складе находится 15 деталей, из них 6 изготовлены цехом № 1; 5 деталей изготовлены цехом № 2 и 4 детали изготовлены в цехе № 3. Вероятность того, что деталь окажется бракованной для цеха № 1 равна 0,1, для цеха № 2 – 0,05, а цех № 3 производит 15 % брака. Наудачу ОТК отбирает на проверку деталь из этого ящика. Найти вероятность того, что она окажется стандартной.

Решение

1. Рассмотрим событие

$$B=\{\textit{отобранная наудачу деталь оказалась стандартной}\}$$

2. Обозначим через A_1 гипотезу, состоящую в том, что эта деталь изготовлена цехом № 1, через A_2 гипотезу, состоящую в том, что деталь изготовлена цехом № 2, через A_3 гипотезу, состоящую в том, что деталь изготовлена цехом № 3. Тогда вероятности гипотез будут равны:

$$P(A_1)=\frac{6}{15};\quad P(A_2)=\frac{5}{15};\quad P(A_3)=\frac{4}{15}.$$

Используем формулу полной вероятности:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3).$$

Найдем условные вероятности события B, состоящего в том, что извлеченная деталь окажется стандартной. По условию задачи они равны

$$P(B/A_1)=1-0{,}1=0{,}9;\; P(B/A_2)=1-0{,}05=0{,}95;\; P(B/A_3)=1-0{,}15=0{,}85,$$

где $P(B/A_1)$ – вероятность того, что деталь, изготовленная цехом № 1, окажется стандартной;

$P(B/A_2)$ – вероятность того, что деталь, изготовленная цехом № 2, окажется стандартной;

$P(B/A_3)$ – вероятность того, что деталь, изготовленная цехом № 3, окажется стандартной.

Подставим найденные значения в формулу полной вероятности:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)=$$

$$=\frac{6}{15}\cdot 0,9+\frac{5}{15}\cdot 0,95+\frac{4}{15}\cdot 0,85=0,36+0,32+0,23=0,91.$$

Ответ: $P(B)=0,91$.

7.3. Формула Бернулли и формула Пуассона

Определение 7.13. Если при проведении испытаний вероятность появления события A не зависит от результатов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми.*

Пусть было произведено n независимых испытаний, вероятность появления события A в каждом из них одинакова и равна p. Тогда вероятность появления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний и находится по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$, $q=1-p$, $0\le m\le n$.

В тех случаях, когда требуется определить вероятности появления события A менее m раз $(X<m)$, более m раз $(X>m)$, не более m раз $(X\le m)$, не менее m раз $(X\ge m)$ можно использовать формулы:

$$P(X<m)=P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+\ldots+P_n(m-1);$$

$$P(X>m)=P_n(m+1)+P_n(m+2)+P_n(m+3)+\ldots+P_n(n);$$

$$P(X\ge m)=P_n(m)+P_n(m+1)+P_n(m+2)+\ldots+P_n(n);$$

$$P(X\le m)=P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+\ldots+P_n(m).$$

Примечание: формула Бернулли используется только в том случае, если число испытаний n невелико.

Если число испытаний n велико, а вероятность p – мала, то вычисления по формуле Бернулли затруднительны.

В этих случаях применяют приближенную *формулу Пуассона:*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$, $0 < \lambda \leq 10$.

Справка. Бернулли Даниил (1700–1782) – швейцарский физик-универсал, математик, сын известного физика-математика Иоганна Бернулли.

Пуассон Симеон Дени (1781–1840) – французский физик-математик, член Пражской АН (1812 г.), член Петербургской АН (1826 г.).

7.4. Формула гипергеометрической вероятности

Предположим, что в ящике находится N деталей, все детали одинаковы и имеют равные возможности быть извлеченными, M из них с браком. Наудачу вынимают n деталей. Найти вероятность того, что ровно k из них будут стандартными. Для нахождения искомой вероятности используется формула:

$$P_n(k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Пример 7.3. В урне находится 12 шаров, из них 5 белых, 3 красных и 4 черных. Наудачу вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что из них:

а) 2 белых; б) все красные.

Решение

Для нахождения вероятностей воспользуемся формулой гипергеометрической вероятности

$$P_n(k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

а) Рассмотрим событие

$$A = \{\text{среди 3 отобранных шаров будут 2 белых и 1 не белый}\}.$$

Найдем число элементарных исходов, благоприятствующих этому событию. Число способов, которыми можно отобрать 2 белых шара из 5 белых будет равно числу сочетаний C_5^2 и число способов, которыми можно отобрать 1 не белый из 7 не белых равно числу сочетаний C_7^1, тогда искомое число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A будет равно произведению сочетаний $C_5^2 \cdot C_7^1$. В то же время общее число элементарных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 шара из 12, т. е. числу сочетаний C_{12}^3. Тогда по формуле имеем:

$$P(A) = P_3(2) = \frac{C_5^2 \cdot C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{10 \cdot 7}{220} = \frac{7}{22}.$$

Найдем отдельно все сочетания и подставим их в формулу.

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10; \quad C_7^1 = \frac{7!}{1! \cdot 6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7;$$

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 220.$$

б) Рассмотрим событие

$$A = \{\text{среди 3 отобранных шаров будут все красные}\}.$$

Аналогично решаем и этот пункт, только теперь число элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, будет равно числу способов, которыми можно отобрать 3 красных шара из 3 красных, т. е. числу сочетаний C_3^3. По формуле имеем:

$$P(A) = P_3(3) = \frac{C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{220},$$

где $C_3^3 = \dfrac{3!}{0! \cdot 3!} = 1,$ так как по определению $0! = 1;$

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=220.$$

Ответ: а) $P(A)=P_3(2)=\frac{7}{22}$; б) $P(A)=P_3(3)=\frac{1}{220}$.

7.5. Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Определение 7.14. *Случайной* называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное числовое значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Определение 7.15. *Дискретной* называют *случайную* величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной величины может быть конечным или бесконечным.

Для описания поведения дискретной случайной величины X задают все возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ (где n – число возможных значений случайной величины), которые она может принять, и вероятности появления этих значений $p_1, p_2, ..., p_n$.

Определение 7.16. *Законом распределения вероятностей* (рядом распределения) дискретной случайной величины называется последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Ряд распределения можно задать графически, откладывая на оси абсцисс возможные значения X, а на оси ординат – соответствующие значения вероятностей и соединяя их отрезками прямых. Полученную фигуру (рис. 7.1, при $n = 5$) называют *многоугольником распределения* (или *полигоном распределения*).

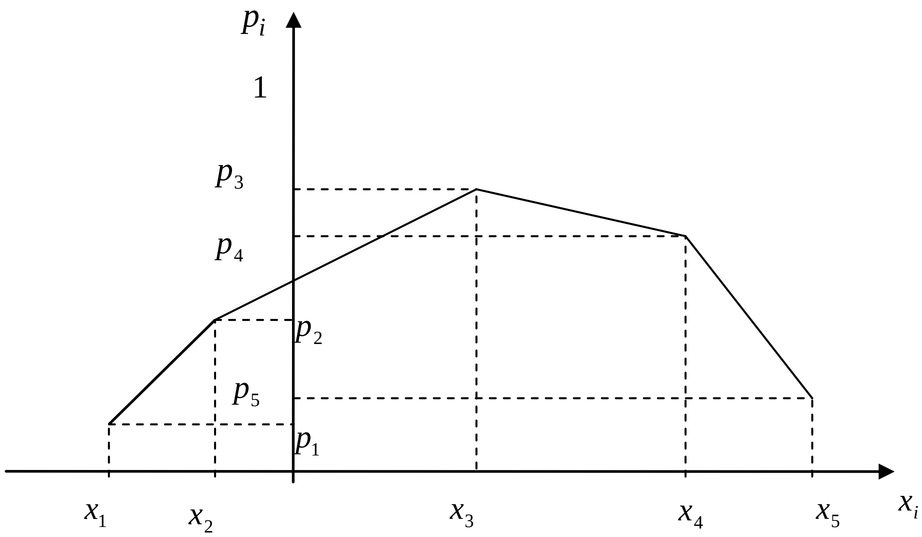

Рис. 7.1

Для дискретной случайной величины можно ввести понятие *функции распределения* $F(x)$, которая равна вероятности случайного события, состоящего в том, что дискретная случайная величина X примет одно из возможных значений, меньших некоторого значения x, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Если возможные значения дискретной случайной величины расположены в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < .. < x_n$, то $F(x)$ можно задать так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le x_1; \\ p_1, \text{ при } x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, \text{ при } x_2 < x \le x_3; \\ \text{...} \\ p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}, \text{ при } x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1, \text{ при } x > x_n. \end{cases}$$

Графически функция распределения представляется в виде ступенчатой функции (например, при $n = 5$, получаем рис. 7.2).

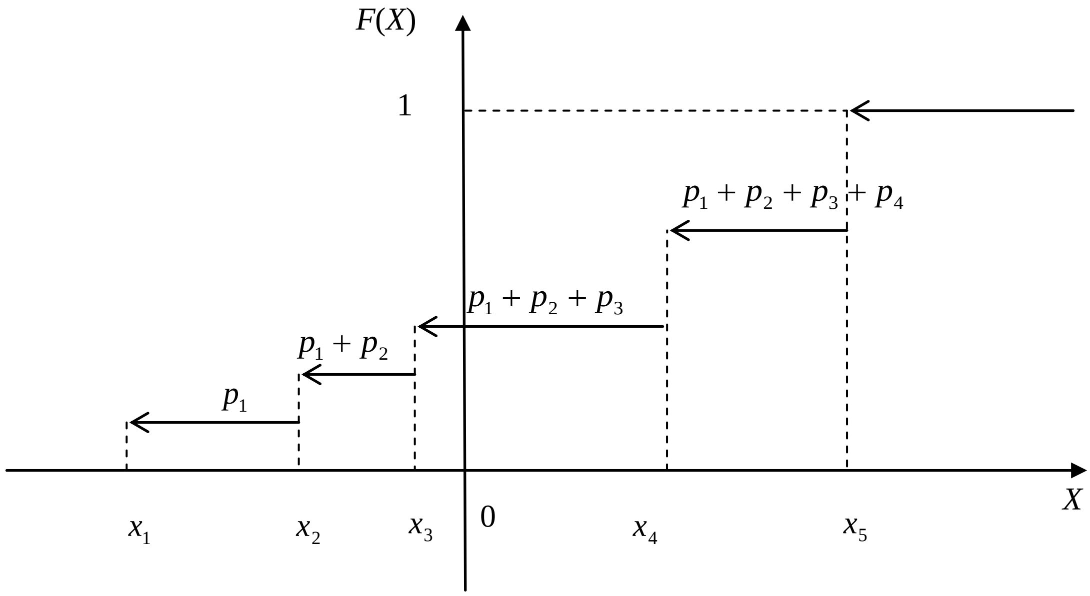

Рис. 7.2

Определение 7.17. *Биномиальным* называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p; а вероятность возможного значения $X = k$ (где k – число появления события) вычисляют по формуле Бернулли.

Определение 7.18. Случайная величина называется *распределенной по закону Пуассона*, если число испытаний n – велико, а вероятность появления события в каждом испытании очень мала. Вероятность возможного значения $X = k$ (где k – число появления события) вычисляют по формуле Пуассона.

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Определение 7.19. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называется число $M(X)$, равное алгебраической сумме произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

где x_i – возможные значения дискретной случайной величины; p_i – вероятность появления значения x_i.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания

1. $M(CX)=CM(X)$; $M(C)=C$, где C – произвольная постоянная.

2. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot ... \cdot M(X_n)$, если $X_1, X_2, ..., X_n$ – взаимно независимые случайные величины.

3. $M(X_1+X_2+...+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)$.

4. $M(X)=np$, где X – дискретная случайная величина (число появления события в n испытаниях); n – число испытаний в биномиальном законе распределения или в законе Пуассона; p – вероятность появления события в одном испытании.

Определение 7.20. *Дисперсией* дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Дисперсию можно вычислять так же по формуле:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2.$$

Свойства дисперсии

1. $D(C)=0$; $D(CX)=C^2D(X)$, где C – произвольная постоянная.

2. $D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)$, где $X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые случайные величины.

3. $D(X)=npq$, где X – дискретная случайная величина – число появлений события в n испытаниях, например, с биномиальным законом распределения или с законом Пуассона; n – число испытаний; p – вероят-

ность появления события в одном испытании; q – вероятность непоявления события в одном испытании.

4. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$, где $\sigma(X)$ – среднеквадратическое отклонение.

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение характеризуют рассеяние случайной величины около среднего значения.

Определение 7.21. *Начальным теоретическим моментом порядка k* случайной величины X называется число ν_k, равное математическому ожиданию величины X^k: $\nu_k = M\left(X^k\right)$.

Определение 7.22. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется число μ_k, равное математическому ожиданию величины $[X-M(X)]^k$: $\mu_k = M[X-M(X)]^k$.

7.6. Непрерывная случайная величина

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Определение 7.23. *Функцией распределения вероятностей* случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е. $F(x)=P(X<x)$.

Свойства функции распределения вероятностей

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;\ 1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения есть неубывающая функция: $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x)=0$ при $x \le a$; $F(x)=1$ при $x \ge b$.

Следствие. Справедливы следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

4. Функция распределения непрерывна слева: $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0)$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, например x_1, равна нулю: $P(X=x_1)=0$.

Определение 7.24. Производная от функции распределения вероятностей называется *функцией плотности распределения вероятностей* или *плотностью вероятности*: $f(x)=F'(x)$. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательна, т. е. $f(x)\ge 0$.

2. Несобственный интеграл [1, с. 404] от плотности распределения равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение 7.25. *Средним значением* или *математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X называется число $M(X)$, которое находится так:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины X.

Определение 7.26. *Дисперсией* непрерывной случайной величины X называется число $D(X)$, которое находится так:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Для определения дисперсии может быть использована и другая формула:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Определение 7.27. *Модой* непрерывной случайной величины X называется такое значение этой величины, плотность вероятности которой максимальна. Мода обозначается $Mo(X)$.

Определение 7.28. *Медианой* $Me(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, при котором выполняется равенство: $P(X<Me)=P(X>Me)$.

Законы распределения непрерывной случайной величины

Определение 7.29. Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a;b]$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a<x\le b;\\ 0, & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины находятся по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 7.3.

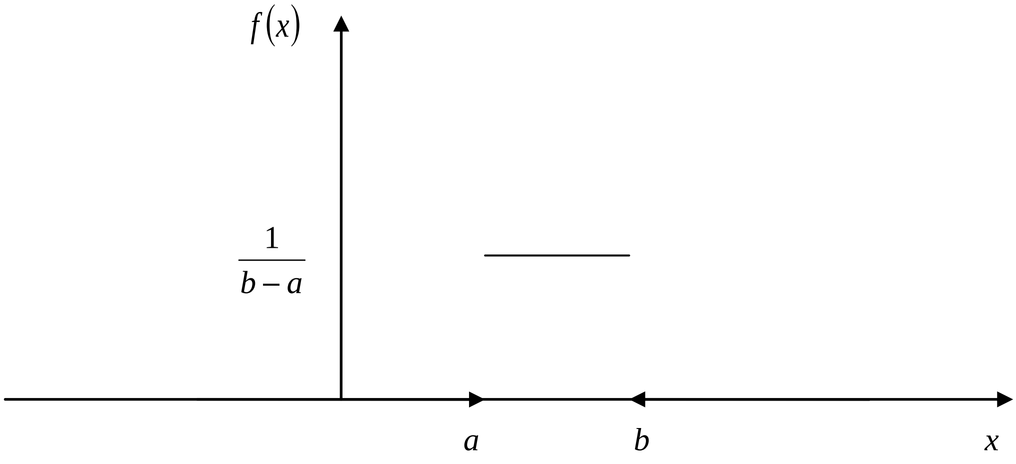

Рис.7.3

Определение 7.30. Случайная величина X распределена по *нормальному закону*, если ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-a)^2/\left(2\sigma^2\right)}.$$

где a – математическое ожидание; σ – среднеквадратическое отклонение.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $(a;b)$ находится по формуле:

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-M(X)}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-M(X)}{\sigma}\right)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1),$$

где $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-t^2/2}\,dt$ – функция Лапласа.

Значения функции Лапласа $\Phi(z)$ для различных значений z приведены в таблице прил. 2.

График плотности нормального распределения изображен на рис. 7.4.

Справка. Лаплас Пьер Симон (1749–1827) – французский астроном, математик, физик, иностранный член Петербургской АН (1802 г.).

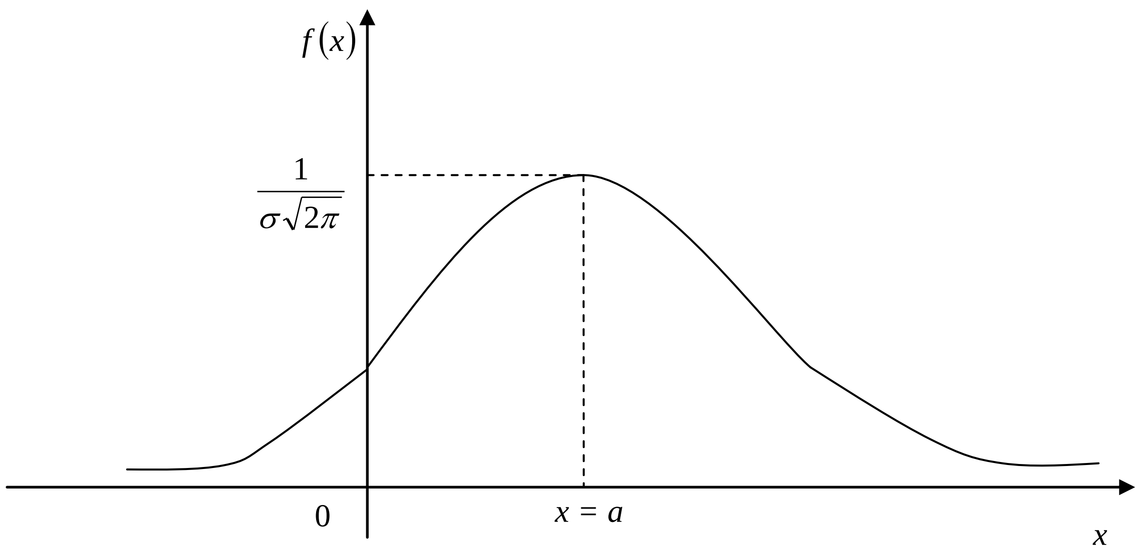

Рис. 7.4

Определение 7.31. Случайная величина X распределена по *показательному закону распределения*, если плотность вероятности этой величины описывается функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x>0,\end{cases}$$

где λ – положительное число.

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал $(a;b)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону $P(a<x<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение показательного распределения находятся по формулам: $M(X)=\frac{1}{\lambda}$; $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$.

График плотности показательного распределения изображен на рис. 7.5.

Рис. 7.5

7.7. Основные понятия математической статистики

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого *качественного* или *количественного* признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность деталей, а количественным – контролируемый размер детали.

Иногда проводят *сплошное* обследование, т. е. обследуют *каждый* из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование не имеет смысла. В таких случаях из всей совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их изучению. Такой метод называют *выборочным.*

Определение 7.32. Множество всех возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения, называется *генеральной совокупностью.*

Определение 7.33. Отобранные из генеральной совокупности объекты называются *выборочной совокупностью* или *выборкой.*

Для того, чтобы выборка правильно представляла генеральную совокупность, она должна быть *репрезентативной*, т. е. все объекты должны быть отобраны случайно, и кроме того они должны иметь равные возможности быть отобранными.

Определение 7.34. Число N элементов генеральной совокупности и число n элементов выборочной совокупности называются *объемами* генеральной и выборочной совокупностей соответственно.

Обозначим через X – признак, относительно которого обследуется генеральная совокупность.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, $(x_2 - n_2)$ раз, $(x_k - n_k)$ раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в порядке возрастания – *вариационным рядом*, n_i – *частотами*, а $\frac{n_i}{n} = w_i$ – *относительными частотами.*

Определение 7.35. *Статистическим распределением выборки* называется ранжированная (упорядоченная) совокупность вариант x_i с соответствующими им частотами или относительными частотами.

Если наблюдаемая случайная величина непрерывна или дискретная величина такова, что число ее возможных значений велико, то для построения вариационного ряда используют интервальный ряд распределения. В этом случае весь возможный интервал варьирования разбивают на конечное число частичных интервалов и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Определение 7.36. *Интервальным вариационным рядом* называется упорядоченная последовательность интервалов варьирования признака с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из этих интервалов значений признака.

Определение 7.37. *Эмпирической функцией распределения* называется функция $F^*(x)$, задающая для каждого значения x относительную частоту события $\{X < x\}$. Следовательно, $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число выборочных значений величины X, меньших x, а n – объем выборки.

Полигон и гистограмма

Пусть задан вариационный ряд дискретной случайной величины:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_k

Представим его графически в виде ломаной линии, связывающей на плоскости точки с координатами (x_i, n_i). Полученный график называется *полигоном частот.*

Можно построить полигон относительных частот, где точками являются пары чисел (x_i, w_i).

Интервальный вариационный ряд графически изображается с помощью гистограммы. Для ее построения в прямоугольной системе координат на оси OX откладывают отрезки частичных интервалов варьирования и на этих отрезках как на основаниях строят прямоугольники с высотами, равными частотам или относительным частотам соответствующих интервалов.

Графическое изображение вариационных рядов в виде полигона и гистограммы позволяет получить первоначальное представление о закономерностях, имеющих место в совокупности наблюдений.

Числовые характеристики выборки

Определение 7.38. *Выборочное среднее* $\overline{x}_в$ есть среднее взвешенное значение признака в выборке, оно вычисляется по формуле:

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{1}{n}\left(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k\right).$$

Определение 7.39. *Выборочной дисперсией* $D_в$ называется среднее взвешенное квадратов отклонений значений признака от $\overline{x}_в$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 n_i = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \overline{x_в}\right)^2 n_1 + \left(x_2 - \overline{x_в}\right)^2 n_2 + \ldots + \left(x_k - \overline{x_в}\right)^2 n_k\right].$$

Выборочная дисперсия характеризует разброс (рассеяние) значений вариант x_i признака от выборочного среднего $\overline{x_в}$. Дисперсия измеряется в квадратных единицах признака X.

Для вычисления дисперсии используется также другая, часто более удобная формула:

$$D_в = \overline{x_в^2} - (\overline{x_в})^2,$$

где $\overline{x_в^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i$; $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$.

Определение 7.40. *Среднеквадратическое отклонение* $\sigma_в$ выборки есть квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

Среднеквадратическое отклонение характеризует рассеяние значений признака в выборке от среднего выборочного в единицах признака X.

7.8. Статистическое оценивание параметров распределения

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Предположим, что по теоретическим соображениям мы установили, какое именно распределение имеет интересующий нас признак. Теперь нам требуется оценить параметры распределения, которыми оно определяется. Например, если изучаемый признак в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, тогда требуется изучить два параметра: математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение, чтобы полностью определить распределение Пуассона необходимо оценить параметр λ. Виды распределений рассмотрены выше.

Итак, предположим, что истинное значение, интересующего нас параметра θ неизвестно. Попытаемся оценить его, используя точечную оценку.

Для этого будем производить из генеральной совокупности n выборок и находить числовые характеристики, необходимые для оценивания. В результате получим набор значений $\theta^* = \theta^*(x_1,...,x_n)$ от элементов выборки. Эта функция называется *статистикой.*

Для того, чтобы оценка была наилучшей, она должна обладать свойствами: несмещенность, эффективность, состоятельность.

Определение 7.41. Статистика $\theta^* = \theta^*(x_1,...,x_n)$ называется *несмещенной оценкой* параметра θ, если выполняется равенство $M(\theta^*) = \theta$, т. е. математическое ожидание всех числовых характеристик, полученных по выборкам должно быть равно оцениваемому параметру распределения.

Для выборок большого объема к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Определение 7.42. Статистика $\theta^* = \theta^*(x_1,...,x_n)$ называется *состоятельной оценкой* параметра θ, если имеет место сходимость по вероятности $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$ при $n \to \infty$, т. е. при увеличении объема выборок, вероятность того, что статистическая оценка будет равна оцениваемому параметру, стремится к 1.

Несмещенность – свойство оценок при фиксированном n. Означает это свойство отсутствие ошибки «в среднем», т. е. при систематическом использовании данной оценки.

Свойство состоятельности означает, что последовательность оценок приближается к неизвестному параметру при увеличении количества данных.

В классе одинаково смещенных оценок *эффективной* будем называть оценку с *наименьшей дисперсией.*

Пусть дана выборка объема n из неизвестного распределения с функцией распределения $F(x)$. Пусть $F_n^*(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по этой выборке. Тогда $F_n^*(x)$ есть несмещенная и состоятельная оценка для $F(x)$.

Выборочное среднее является несмещенной и состоятельной оценкой для математического ожидания (генеральной средней), т. е.

$$M\left(\overline{x}\right)=M(x)=a,\overline{x}\xrightarrow{p}M(x)=a \text{ при } n\to\infty.$$

Выборочные дисперсии $D_в$ и S^2 являются состоятельными оценками для генеральной дисперсии (теоретической дисперсии):

$$D_в\xrightarrow{p}D_Г(x)=\sigma^2;\ S^2\xrightarrow{p}D_Г(x)=\sigma^2.$$

Причем $D_в$ – смещенная, а S^2 – несмещенная оценка генеральной дисперсии, которая находится по формуле:

$$S^2=\frac{n}{n-1}D_в=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\overline{x_в}\right)^2.$$

Для оценки $\sigma_Г$ используют S – несмещенное среднеквадратическое отклонение:

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\overline{x_в}\right)^2}.$$

Для оценки теоретических моментов k-ого порядка используют соответствующие эмпирические моменты:

$$\nu_k^*=\frac{1}{n}\sum n_i x_i^k.$$

Вывод. Для оценки математического ожидания $M(X)$ будем использовать выборочное среднее $\overline{x_в}$, так как оно является несмещенной и состоятельной оценкой для $M(X)$.

Для оценки дисперсии $D(X)$ и среднеквадратического отклонения $\sigma(X)$ используют соответственно «исправленную» выборочную дисперсию S^2 и выборочное среднеквадратическое отклонение S, так как они являются несмещенными и состоятельными оценками для них.

Для оценки функции распределения $F(X)$ используют эмпирическую функцию распределения $F_n^*(x)$.

Интервальное оценивание

При малом объеме выборки точечная оценка не дает хорошего приближения оцениваемого параметра, по этой причине при небольшом объеме выборки используют интервальные оценки.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика θ^* служит точечной оценкой неизвестного параметра θ. Ясно, что чем меньше между ними разность, тем лучше оценка. Обозначим их разность через δ, где $\delta > 0$. Таким образом, требуется найти такую интервальную оценку при которой по заданной *доверительной вероятности* γ будет выполняться условие $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$.

Обычно в качестве γ принимают число, близкое к 1, конкретно 0,95; 0,99; 0,999.

Пусть вероятность того, что $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$ равна γ, т. е. $P\left(\left|\theta-\theta^*\right|<\delta\right)=\gamma$.

Заменив неравенство с модулем на равносильное двойное неравенство, получим: $P\left(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right)=\gamma$.

Это условие означает: вероятность того, что интервал $\left(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right)$ накроет неизвестный параметр θ, равна γ.

Определение 7.43. *Доверительным* называют интервал $\left(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right)$, который накроет неизвестный параметр θ с заданной надежностью (доверительной вероятностью) γ.

Так, например, если генеральная совокупность распределена по нормальному закону с параметрами (a,σ), тогда доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ имеет вид:

$$\overline{x_в}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x_в}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где число t – аргумент функции $\Phi(t)$ Лапласа, при котором она принимает значение, равное $\frac{\gamma}{2}$. Значения функции $\Phi(t)$ находятся по таблице прил. 2; σ – среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности; n – объем выборки.

Если среднеквадратическое отклонение σ распределения генеральной совокупности неизвестно, то мы не можем быть уверены, что $\overline{x}$ будет распределена по нормальному закону распределения, поэтому для построения доверительного интервала применяют распределение Стьюдента с (n – 1) степенями свободы [9, с. 146], а в качестве неизвестного σ берут несмещенную оценку S, полученную по данным выборки.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения при неизвестном σ имеет вид:

$$\overline{x_в} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}},$$

где S^2 – несмещенная выборочная дисперсия; t_γ находится по таблице прил. 3 по данным n и γ.

Доверительный интервал для оценки σ нормального распределения:

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q),$$

где S^2 – несмещенная выборочная дисперсия; q находится по таблице прил. 4 по заданным n и γ.

Оценка вероятности (биноминального распределения) по относительной частоте:

$$w - t\sqrt{w(1-w)/n} < p < w + t\sqrt{w(1-w)/n},$$

где w – относительная частота; t – значение функции стандартного нормального распределения, при котором она принимает значение равное $\frac{\gamma}{2}$, т. е. $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, значение t находится по таблице прил. 2.

Справка. Госсет Уильям Сили (псевдоним Стьюдент) (1876–1937) – английский математик-статист.

Пример 7.4. Построить доверительный интервал с надежностью $\gamma = 0{,}9$ для оценки неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если $\sigma = 3$; $\overline{x_в} = 10$; $n = 25$, где σ – среднеквадратическое отклонение; $\overline{x_в}$ – выборочная средняя; n – объем выборки.

Решение

Так как признак X в генеральной совокупности распределен по нормальному закону и σ известно, применим формулу для доверительного интервала:

$$\overline{x_в} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$. По прил. 2 находим значение функции Лапласа $\Phi(t)$ и соответствующее ему значение $t = 1{,}65$. Подставив найденное значение t и данные σ, $\overline{x_в}$ и n в границы доверительного интервала, получим:

$$10 - 1{,}65\frac{3}{5} < a < 10 + 1{,}65\frac{3}{5}, \text{ или } 10 - 0{,}99 < a < 10 + 0{,}99.$$

Окончательно получим искомый, доверительный интервал:

$$9{,}01 < a < 10{,}99.$$

Ответ. Мы можем быть уверены, что в 90 % (так как $\gamma = 0{,}9$) случаев из 100, построенный доверительный интервал $9{,}01 < a < 10{,}99$ накроет неизвестный параметр a.

Пример 7.5. Для выборки:

$\{\, 36, 47, 57, 39, 15, 18, 36, 47, 69, 48, 36, 26, 57, 59, 58, 39, 21, 29, 56, 27, 58, 58 \,\}$.

Определить среднее выборочное, выборочную дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию. Построить таблицу, содержащую интервальный вариационный ряд. Построить гистограмму, график функции распределения частот.

Решение

Вначале составим ранжированный ряд:

$\{$ 15, 18, 21, 26, 27, 29, 36, 36, 36, 39, 39, 47, 47, 48, 56, 57, 57, 58, 58, 58, 59, 69 $\}$,

т. е. расположим все выборочные значения в порядке возрастания. Получено 15 групп, т. е. 15 различных значений случайной величины. Для каждой группы подсчитаем частоту значений варианты.

Результаты представим в таблице, которая будет представлять вариационный ряд:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	15	18	21	26	27	29	36	39	47	48	56	57	58	59	69
n_i	1	1	1	1	1	1	3	2	2	1	1	2	3	1	1

Найдем выборочную среднюю по формуле (в ней n = 22, так как в условии задано 22 числа в выборке):

$$\overline{x_в} = \frac{1}{22}(15+18+21+26+27+29+36\cdot 3+39\cdot 2+47\cdot 2+48+56+57\cdot 2+$$

$$+58\cdot 3+59+69) = \frac{1}{22}\cdot 936 \approx 42,545.$$

Для вычисления выборочной дисперсии используем формулу $D_в = \overline{x^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2$:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{22}(15^2+18^2+21^2+26^2+27^2+29^2+36^2\cdot 3+39^2\cdot 2+47^2\cdot 2+$$

$$+48^2+56^2+57^2\cdot 2+58^2\cdot 3+59^2+69^2) = \frac{1}{22}44\,856 \approx 2\,038,91;$$

$$D_в \approx 2\,038,91-(42,545)^2 = 228,8, \text{ тогда } s^2 \approx \frac{22}{21}\cdot 228,8 = 239,7.$$

Составим интервальный вариационный ряд, т. е. разобьем выборку на 6 интервалов с длиной равной 10, посчитаем число вариант (значений признака X), которые попадают в данный интервал и запишем эти данные в виде таблицы, в этой же таблице так же запишем относительные частоты значений признака X, которые найдем по формуле $\frac{n_i}{n} = w_i$, получим:

Индекс интервала i	1	2	3	4	5	6
Интервалы $x_i < X \le x_{i+1}$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
Частота n_i	2	4	5	3	7	1
Относительная частота w_i	$\frac{2}{22}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

Строим гистограмму (рис. 7.6) относительных частот с шагом $h = 10$. Для этого на оси x_i отложим отрезки от значения $x = 10$ до значения $x = 70$ с длинной равной 10. На оси $\frac{w_i}{h}$ будем откладывать значения, которые соответствуют данному интервалу и строить прямоугольники с длинной равной 10 и высотой равной соответствующему значению $\frac{w_i}{h}$.

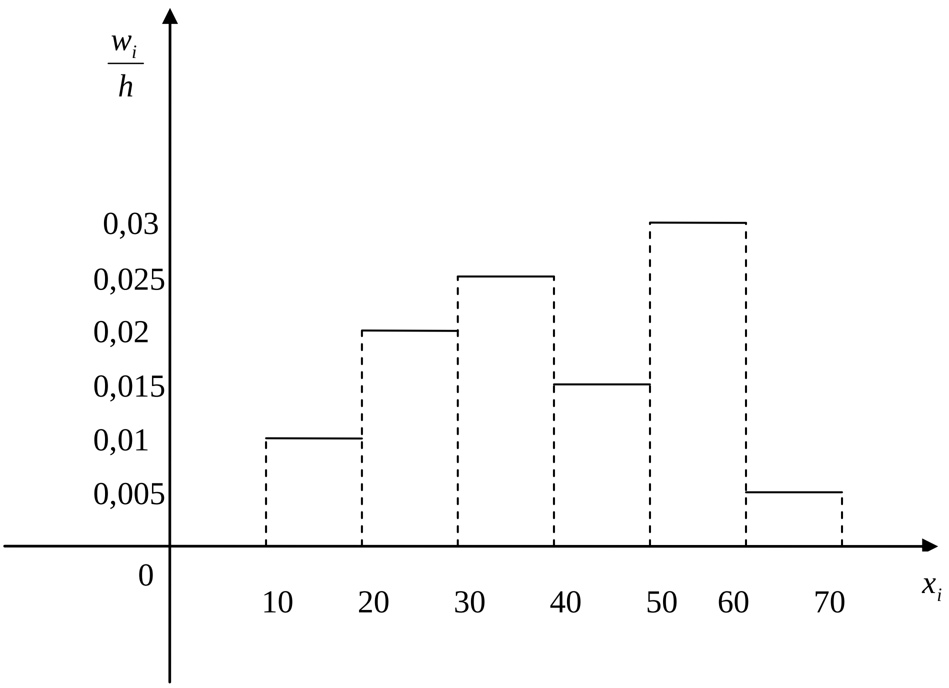

Рис. 7.6

Выборочную функцию распределения частот запишем в виде таблицы:

X	$F^*(x)$
$x \le 10$	0
$10 < x \le 20$	$w_1 = \dfrac{2}{22}$
$20 < x \le 30$	$w_1 + w_2 = \dfrac{6}{22}$
$30 < x \le 40$	$w_1 + w_2 + w_3 = \dfrac{11}{22}$
$40 < x \le 50$	$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = \dfrac{14}{22}$
$50 < x \le 60$	$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \dfrac{21}{22}$
$x > 60$	$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = \dfrac{22}{22}$

Построим график (рис. 7.7) эмпирической функции распределения.

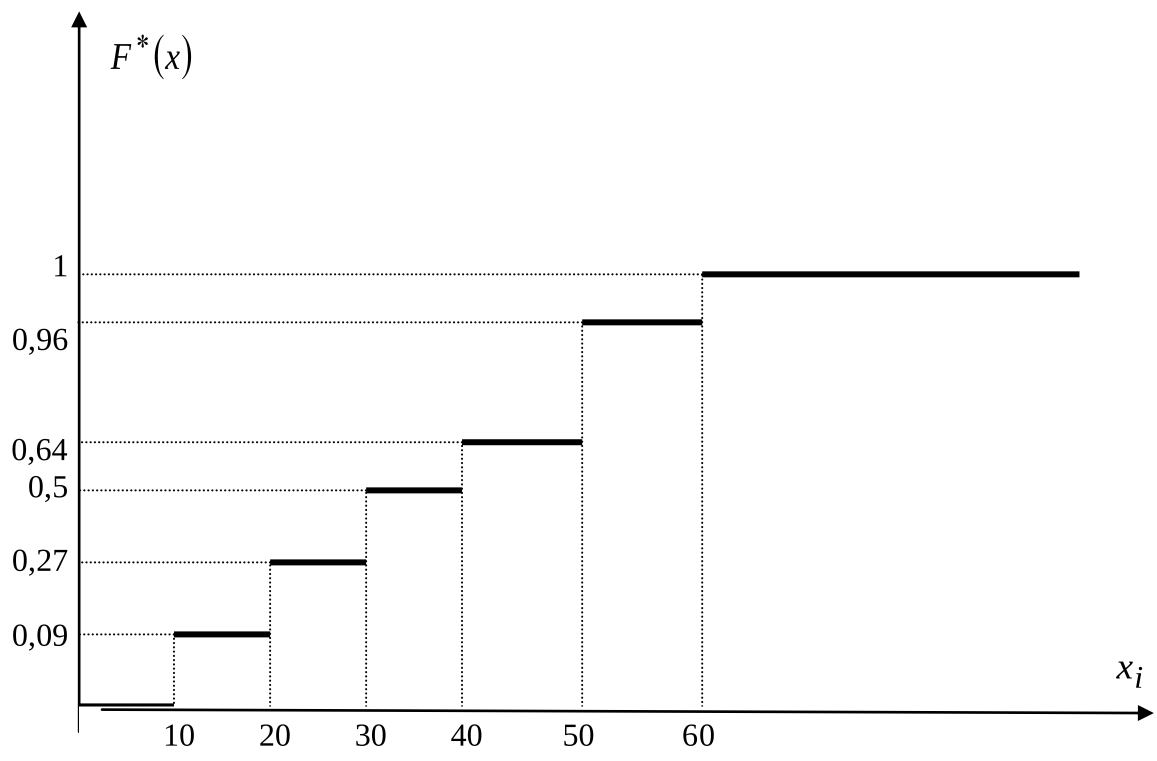

Рис. 7.7

Пример 7.6. Выполнены многократные измерения длины линии. Требуется построить доверительный интервал с надежностью $\gamma = 0{,}9$ для оценки математического ожидания количественного признака X – неизвестной длины линии. Данные измерений приведены в таблице.

x_i	20,005	20,01	20,02	20,03
n_i	3	6	7	4

Решение

1. Составим расчетную таблицу.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\left(x_i - \overline{x_в}\right)$	$\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i$
20,005	3	60,015	–0,012	0,000432
20,01	6	120,06	–0,007	0,000294
20,02	7	140,14	0,003	0,000063
20,03	4	80,12	0,013	0,000676
	$\sum n_i = 20$	$\sum x_i \cdot n_i = 400{,}335$		$\sum\left(x_i - \overline{x_в}\right) \cdot n_i = 0{,}001465$

2. Найдем выборочное среднее по формуле:

$$\overline{x_в} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{400{,}335}{20} = 20{,}017.$$

«Исправленное» среднеквадратическое отклонение найдем по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum n_i \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}001465}{19}} = \sqrt{0{,}000077} = 0{,}0088.$$

Найдем доверительный интервал для оценки математического ожидания a. Так как распределение признака в генеральной совокупности распределено нормально, воспользуемся формулой:

$$\overline{x_в} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}},$$

где S – найденное по выборке «исправленное» среднеквадратическое отклонение, значение t_γ находится по данным n и γ (прил. 3).

Получили: $\overline{x_в} = 20,017$, $S = 0,0045$, $t_\gamma = 1,73$. Подставим эти значения в формулу и получим доверительный интервал:

$$20,017 - 1,73 \cdot \frac{0,0088}{\sqrt{20}} < a < 20,017 + 1,73 \cdot \frac{0,0088}{\sqrt{20}}$$

или

$$20,017 - 0,0034 < a < 20,017 + 0,0034; \quad 20,0136 < a < 20,0204.$$

Ответ. С вероятностью 90 % мы можем утверждать, что доверительный интервал 20,0136 < a < 20,0204 накроет неизвестное математическое ожидание a.

7.9. Элементы теории корреляции. Линейная корреляция

Пусть некоторый объект характеризуется двумя признаками. Между признаками X и Y могут существовать различные виды зависимостей.

Функциональная зависимость, когда каждому значению признака X соответствует единственное значение признака Y, задается формулой $y = f(x)$.

Статистическая зависимость, когда каждому значению признака X соответствует статистическое распределение признака Y, задается в виде корреляционной таблицы.

Корреляционная зависимость – частный случай статистической зависимости, когда каждому значению признака X соответствует среднее значение $\overline{y_x}$ признака Y и связь между ними достаточно хорошо описывается функцией $\overline{Y_x} = f(x)$, называемой уравнением регрессии Y по X. Аналогично, каждому значению признака Y соответствует среднее значение $\overline{x_y}$ признака X и эта зависимость описывается в виде функции $\overline{X_y} = \varphi(y)$, называемой уравнением регрессии X по Y.

Две основные задачи теории корреляции:

1. Оценить силу (тесноту) связи между признаками X и Y.
2. Найти вид (форму) этой связи в виде уравнения регрессии.

Рассмотрим *линейную* связь. Она задается линейным уравнением регрессии $\overline{Y_x} = kx + b$ и изображается на графике в виде прямой, где k и b называются параметрами регрессии. Задача состоит в том, что бы определить параметры регрессии таким образом, чтобы разность между истинными значениями Y и значениями $\overline{Y_x}$, полученными по уравнению регрессии, была минимальной. Обозначим через e_i эти разности, т. е.

$$e_i = Y_i - \overline{Y_x}.$$

Используя метод наименьших квадратов [2, с. 235], найдем минимум функции: $\sum e_i^2$.

В результате получим уравнения для нахождения k и b:

$$k = \bar{y} - b\bar{x}; \qquad b = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}.$$

где $\overline{\sigma_x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$; $\overline{\sigma_{xy}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\ \bar{y}$. Полученные оценки для истинного уравнения связи являются несмещенными и эффективными.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид:

$$\overline{y_x} - \bar{y} = r_в \frac{\overline{\sigma_y}}{\overline{\sigma_x}}\left(x - \bar{x}\right),$$

где $\overline{y_x}$ – условная средняя; $r_в$ – выборочный коэффициент корреляции; $\overline{\sigma_y}$, $\overline{\sigma_x}$ – выборочные среднеквадратические отклонения; $\bar{x}, \bar{y}$ – выборочные средние. Выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} x y - n\bar{x}\bar{y}}{n\overline{\sigma_x}\,\overline{\sigma_y}},$$

где n – объем выборки; x, y – варианты признаков X и Y; n_{xy} – частота пар (x, y).

Выборочный коэффициент корреляции также может быть вычислен по альтернативной формуле:

$$r_в = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{\overline{\sigma_x}}\,\overline{\overline{\sigma_y}}},$$

где $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Аналогично, выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y имеет вид:

$$\overline{x_y} - \overline{x} = r_в \frac{\overline{\overline{\sigma_x}}}{\overline{\overline{\sigma_y}}}\left(y - \overline{y}\right).$$

Оценка тесноты линейной связи между признаками X и Y производится с помощью коэффициента линейной корреляции:

$$-1 \le r_в \le 1 \text{ или } |r| \le 1.$$

Знак r указывает на вид связи: прямая или обратная. Абсолютная величина $|r|$ указывает на силу (тесноту) связи. При $r > 0$, связь прямая, т. е. с ростом x растет y. При $r < 0$, связь обратная, т. е. с ростом x убывает y.

Для оценки значимости коэффициента корреляции используют, например, критерий Фишера (F – критерий). Для этого находим наблюдаемое значение критерия по выборочным данным, по формуле:

$$F_{набл.} = \frac{r^2}{\left(1 - r^2\right)} \cdot (n-2),$$

где r – выборочный коэффициент корреляции; n – объем выборки. Сравним найденное значение с критическим значением критерия Фишера, которое найдем по прил. 5 по данным (k_1, k_2), где k_1 – число переменных в уравнении регрессии, в нашем случае $k_1 = 1$, $k_2 = (n-2)$.

Если $F_{набл.} < F_{крит.}$, тогда коэффициент корреляции принимаем незначимым, полученная связь между признаками случайная.

Если $F_{набл.} > F_{крит.}$, тогда коэффициент корреляции принимаем значимым, полученная связь между признаками неслучайная.

Оценка надежности коэффициента корреляции определяется погрешностью, вычисляемой по формуле:

$$M_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}.$$

Гипотеза о достоверности связи проверяется величиной r / M_r. Если отношение $r / M_r > 2{,}58$, то с вероятностью 99 % считают, что полученное значение коэффициента корреляции отображает зависимость между коррелируемыми величинами.

7.10. Контрольные задания по теме «Основы теории вероятностей и математической статистики»

Номер варианта равен последней цифре зачетной книжки студента.

Задача 7.1. Две лампочки соединены в электрической цепи параллельно. Вероятность того, что первая лампочка выйдет из строя равна p_1, а вероятность неисправности второй лампочки равна p_2. Найти вероятность того, что:

а) света не будет; б) свет будет.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
p_1	0,1	0,2	0,3	0,15	0,05	0,25	0,02	0,13	0,16	0,1
p_2	0,2	0,2	0,25	0,16	0,09	0,1	0,3	0,19	0,18	0,2

Задача 7.2. В урне находится *k* белых, *M* красных и *r* черных шаров. Наудачу вынимаются *n* шаров. Найти вероятность того, что из них окажется:

а) 2 белых; б) все красные.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k	7	6	7	8	5	6	4	6	5	7
M	3	4	3	6	5	4	3	2	2	3
r	2	3	3	5	4	4	7	7	5	3
n	2	2	3	3	2	2	3	4	4	2

Задача 7.3. В ящике находится k деталей, принадлежащих цеху № 1, M деталей – цеху № 2 и r деталей – цеху № 3. Вероятность того, что деталь окажется бракованной для цеха № 1, равна p_1, для цеха № 2 – p_2, а цех № 3 производит n % брака. Наудачу ОТК отбирает на проверку деталь, найти вероятность того, она окажется стандартной.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k	6	8	4	5	4	7	5	3	6	8
M	4	4	3	3	5	6	3	4	5	3
r	5	6	5	4	4	3	3	6	4	4
p_1	0,1	0,2	0,02	0,15	0,08	0,04	0,03	0,12	0,2	0,06
p_2	0,2	0,1	0,12	0,14	0,1	0,18	0,13	0,06	0,9	0,2
n	10	12	5	6	7	12	9	4	3	5

Задача 7.4. Выполнены многократные измерения длины объекта. Требуется построить доверительный интервал с надежностью γ для оценки математического ожидания количественного признака X – неизвестной длины объекта. Данные измерений приведены в таблице по вариантам.

Вариант 1. $\gamma = 0,95$

x_i	10,01	10,02	10,03	10,04
n_i	4	5	7	4

Вариант 2. $\gamma = 0,9$

x_i	20,05	20,06	20,07	20,08
n_i	4	4	8	4

Вариант 3. $\gamma = 0,95$

x_i	23,05	23,06	23,07	23,08
n_i	5	6	5	4

Вариант 4. $\gamma = 0,9$

x_i	18,005	18,015	18,02	18,03
n_i	4	7	6	3

Вариант 5. γ = 0,95

x_i	12,005	12,01	12,025	12,03
n_i	2	6	8	4

Вариант 6. γ = 0,9

x_i	20,015	20,02	20,03	20,04
n_i	4	6	7	3

Вариант 7. γ = 0,9

x_i	20,005	20,01	20,02	20,03
n_i	4	7	6	4

Вариант 8. γ = 0,95

x_i	20,015	20,03	20,035	20,04
n_i	4	6	8	2

Вариант 9. γ = 0,9

x_i	19,05	19,06	19,08	19,09
n_i	4	6	8	2

Вариант 0. γ = 0,95

x_i	17,02	17,03	17,04	17,05
n_i	3	7	6	4

Задача 7.5. Для выборки объема n, определить среднее выборочное, выборочную дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию. Построить таблицу, содержащую интервальный вариационный ряд. Построить гистограмму, график эмпирической функции распределения, если выборка задана по вариантам.

Вариант 1. Выборка: 18; 19; 21; 30; 36; 34; 19; 21; 30; 35; 19; 18; 21; 21; 22; 18; 30; 23; 19; 28; 21; 30.

Вариант 2. Выборка: 19; 19; 21; 30; 33; 34; 19; 21; 30; 35; 35; 19; 18; 21; 36; 21; 22; 18; 22; 19; 28; 21.

Вариант 3. Выборка: 18; 18; 21; 34; 34; 19; 21; 30; 35; 19; 18; 21; 36; 21; 22; 18; 30; 23; 19; 28; 21; 30.

Вариант 4. Выборка: 17; 19; 21; 30; 36; 34; 17; 21; 30; 19; 18; 21; 21; 39; 22; 18; 30; 23; 19; 40; 28; 21.

Вариант 5. Выборка: 28; 19; 21; 30; 34; 19; 28; 30; 35; 36; 19; 18; 21; 21; 22; 18; 30; 23; 19; 21; 30; 18.

Вариант 6. Выборка: 38; 39; 30; 36; 34; 39; 30; 35; 36; 36; 40; 49; 45; 40; 36; 22; 30; 23; 40; 28; 21; 30.

Вариант 7. Выборка: 38; 29; 21; 40; 36; 34; 21; 30; 35; 36; 21; 36; 40; 40; 21; 36; 22; 30; 23; 40; 28; 21.

Вариант 8. Выборка: 28; 21; 30; 36; 24; 21; 30; 35; 36; 19; 18; 21; 26; 21; 36; 22; 18; 30; 23; 28; 21; 20.

Вариант 9. Выборка: 29; 21; 30; 26; 34; 30; 35; 36; 31; 36; 40; 39; 40; 21; 36; 24; 30; 23; 40; 28; 21; 40.

Вариант 0. Выборка: 38; 31; 30; 36; 34; 31; 30; 35; 36; 21; 36; 40; 40; 21; 36; 32; 30; 25; 19; 40; 28; 21.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т. 1: учеб. пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: ИНТЕГРАЛ-Пресс, 2002. – 416 с.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2. т. Т. 2: учеб. пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: ИНТЕГРАЛ-Пресс, 2002. – 544 с.

3. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – 6-е изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984 (Дрофа, 2006). – 284 с.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988 (Дрофа, 2007). – 402 с.

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985 (Дрофа, 2005). – 512 с.

7. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г.Н. Берман. – 22-е изд., переработанное. – СПб.: Профессия, 2005. – 432 с.

8. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 11-е изд. перераб. – М.: Высшее образование, 2008. – 404 с.

9. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2008. – 479 с.

10. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: Юнити, 2007. – 479 с.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

$\varphi(-x)=\varphi(x)$ – плотность вероятности стандартного нормального распределения.

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

Окончание прил. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	$x > 4{,}5$	0,5
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,9	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,9	0,95	0,99	0,099
5	2,13	2,78	4,60	8,61	20	1,73	2,093	2,861	3,883
6	2,01	2,57	4,03	6,86	25	1,71	2,064	2,797	3,745
7	1,94	2,45	3,71	5,96	30	1,70	2,045	2,756	3,659
8	1,89	2,37	3,50	5,41	35	1,70	2,032	2,720	3,600
9	1,86	2,31	3,36	5,04	40	1,70	2,023	2,708	3,558
10	1,83	2,26	3,25	4,78	45	1,68	2,016	2,692	3,527
11	1,81	2,23	3,17	4,59	50	1,68	2,009	2,679	3,502
12	1,80	2,20	3,11	4,44	60	1,68	2,001	2,662	3,464
13	1,78	2,18	3,06	4,32	90	1,67	1,987	2,633	3,403
14	1,77	2,16	3,01	4,22	100	1,67	1,984	2,627	3,392
15	1,76	2,15	2,98	4,14	120	1,64	1,980	2,617	3,374
16	1,75	2,13	2,95	4,07	∞	1,64	1,960	2,576	3,291
17	1,75	2,12	2,92	4,02					
18	1,74	2,11	2,90	3,97					
19	1,73	2,10	2,88	3,92					

Приложение 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92				

Приложение 5

Критические точки распределения F – Фишера – Снедекора (k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – число степеней свободы меньшей степени)

Уровень значимости α = 0,01												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,41	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости α = 0,05												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,69	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38