Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки
38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент»
заочная ускоренная форма обучения

Утверждено на заседании Совета департамента
анализа данных, принятия решений и финансовых технологий
(протокол № 2 от 19 сентября 2017 г.)

Москва 2017

УДК 330.4(072
ББК 22.18я73
А46

Рецензент: **И.М. Эйсымонт, к.ф.-м.н., доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий.**

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман. Математика. Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент», заочная ускоренная форма обучения. – М.: Финансовый университет, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2017, 74 с.

В пособии приведен обзор основных понятий и положений дисциплины «Математика», даны методические рекомендации по ее изучению, выделены типовые задачи и приведены практико-ориентированные (экономические) задачи с решениями, представлены контрольные вопросы для подготовки к экзамену и задачи для самоподготовки по данной дисциплине, приведены варианты контрольной работы (с методическими указаниями по их выполнению и решением демонстрационного варианта), примеры тестовых заданий (с решениями и методическими указаниями по компьютерному тестированию) для студентов первого курса бакалавриата, обучающихся по заочной ускоренной форме обучения по направлениям «Экономика» и «Менеджмент».

УДК 330.4(072)
ББК 22.18я73

Учебное издание

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман

Математика

Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент», заочная ускоренная форма обучения.

Компьютерный набор, верстка: *А.В. Потемкин*

Формат 60x90/16. Гарнитура*Times New Roman*

Содержание

Введение

Настоящее пособие подготовлено для студентов первого курса бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент», заочная ускоренная форма обучения. Целью данного пособия является оказание помощи студентам в организации занятий при изучении дисциплины «Математиках», подготовке к выполнению контрольной работы, предусмотренной в первом семестре в соответствии с учебными планами направлений заочной ускоренной формы обучения, а также успешной сдачи экзамена по дисциплине.

Изучение дисциплины «Математика» осуществляется на первом курсе в первом семестре обучения.

Организация самостоятельной работы студентов основывается на учебно-тематическом плане изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций, практических занятий, вопросы и задания для самостоятельного изучения.

Лекционные занятия проходят в формате видеолекций. По видеолекциям для успешного освоения материала желательно составлять конспект.

При подготовке к практическому занятию необходимо повторить или, если это требуется, изучить соответствующий теоретический материал. Во время занятия нужно точно записывать формулировки решаемых задач, вопросы, указания преподавателя к решению и разбираемые решения. После занятий необходимо просмотреть записанные решения и восстановить в решениях имеющиеся пробелы. В случае затруднений отметить соответствующие задания и обратиться за консультацией к преподавателю. Практические занятия проходят, как правило, в интерактивной форме и преподаватель учитывает активность студентов, направленную на решение предложенных задач, и в поиске ответов на вопросы. Не следует бояться дать неверный ответ или допустить иную ошибку: исправление и анализ ошибок в режиме общения с преподавателем и сокурсниками в ходе практического занятия способствуют освоению учебного материала и предупреждают появление ошибок в дальнейшем.

Самостоятельная работа студентов включает в себя выполнение различного рода заданий, которые ориентированы на более глубокое усвоение материала изучаемой дисциплины. К выполнению заданий для самостоятельной работы предъявляются следующие требования: задания должны выполняться самостоятельно и представляться в установленный срок, а также соответствовать установленным требованиям по оформлению.

Домашняя контрольная работа являются одной из форм текущего контроля самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математика». Каждый вариант домашней контрольной работы содержит 8 заданий, выполняя которые студент должен продемонстрировать не только умение решать типовые задачи, но и проводить типовые расчеты, анализировать их, строить графики, а также применять математические знания к решению экономических задач.

Содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Математический анализ

Тема 1. Числовые множества и функции

Элементы теории множеств. Кванторы. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение. Конечные, счетные и несчетные множества. Ограниченные и неограниченные множества.

Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Комплексные числа и действия над ними. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел.

Понятие функции. Числовая функция одной переменной. Способы задания функций. График функции. Свойства функций одной переменной: четность и нечетность, монотонность, выпуклость, периодичность, ограниченность.

Функциональные зависимости в экономике: функции полезности, однофакторные производственные функции, функции спроса и предложения. Функции средних издержек и связь между ними (ATC = AVC + AFC).

Изучение темы следует начать с основных понятий теории множеств, введения операций над множествами и в дальнейшем в переходе к рассмотрению задач прикладного характера.

Рассмотреть расширение понятия числовых множеств, то есть переход от множества действительных чисел к множеству комплексных чисел.

Далее нужно четко усвоить важнейшее понятие математического анализа – функции, уметь находить область ее определения, знать способы задания функции: аналитический, графический, табличный, словесный.

В курсе дисциплины «Математика» рассматриваются в основном элементарные функции. Среди основных элементарных функций необходимо знать свойства и строить графики следующих основных функций, таких как $y = C$ (постоянная), $y = x^n$ (степенная), $y = a^x$ (показательная), $y = \log_a x$ (логарифмическая), $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ (тригонометрические функции), $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arc}tgx$, $y = \mathrm{arcc}tgx$ (обратные тригонометрические функции), а далее необходимо усвоить понятие сложной функции (функции от функции).

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Заданы два множества $A = \{1;3;5;7\}$, $B = \{1;2;4;5;6;8\}$. Найти $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A.$. Определить мощности этих множеств.

2. Пусть $A = [-3;+\infty)$, $B = [-5;4)$. Выполнить следующие операции над множествами: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. Даны множества чисел: $A = \{2,3,5,6\}$, $B = \{5,6,7,8\}$, $C = \{3,4,6,8\}$ и универсальное множество $U = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Найти множества чисел $D = (C \cap B) \cup (B \setminus A) \cup \overline{A \cup C}$, $E = (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap B)$. Являются ли множества E и D равными? эквивалентными? включающими одно в другое ($D \subset E$ или $E \subset D$)? пересекающимися, но не включающими одно в другое? непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

4. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

5. Из 100 абитуриентов 33 сдают ЕГЭ по математике, 23 – по информатике, 20 – по физике, 12 сдают экзамен и по математике и по информатике, 16 – по математике и физике, 10 – по информатике и физике, 7 –по математике, физике и информатике вместе. Сколько абитуриентов не сдают ни одного уз указанных предметов?

6. Для комплексных чисел $z_1 = 2 - 5i$ и $z_2 = -6 + 8i$ найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $z_1 - z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.

7. Комплексные числа $z_1 = -i$ и $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ представить в тригонометрической форме и найти:

а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^5; г) $\sqrt[5]{z_2}$.

8. Вычислить: а) $\frac{(3-2i)(4+i)}{(4-3i)}$; б) $(1-i)^{\frac{4}{9}}$.

9. Решить уравнения: а) $x^2 + 9 = 0$; б) $x^2 - x + 2 = 0$.

10. Построить графики функций:

а) $y = 2(x-1)^2$; б) $y = log_2(2x-3)$; в) $y = sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

г) $y = |x+2| - 2|x-3|$; д) $y = |x^2 - 3x + 2|$.

Тема 2. Предел и непрерывность

Числовые последовательности, предел последовательности и его свойства, монотонные, ограниченные последовательности. Геометрическая и арифметические прогрессии. Простые и сложные проценты. Наращение и дисконтирование. Непрерывно начисление процентов.

Паутинообразная модель рынка одного товара. Последовательность цен и ее сходимость. Понятие о числовых рядах. Сходимость ряда. Сумма ряда. Вечная рента.

Предел функции в точке и на бесконечности. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Первый и второй замечательные пределы. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.

Непрерывность функции в точке и на множестве. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация. Примеры непрерывных и разрывных функций в экономике: функция издержек, зависимость налоговой ставки от дохода (случай пропорционального и прогрессивного налога). Асимптоты графика функции. Асимптотическое поведение функций спроса Торнквиста.

Важнейшими понятиями темы являются понятия предела и непрерывности. Понятие предела следует рассмотреть сначала для числовой последовательности $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$, а затем перейти к рассмотрению предела функции на бесконечности $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)$ и в точке $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$. Для освоения этих понятий целесообразно использовать их геометрическую интерпретацию.

Необходимо знать первый замечательный предел $\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1\right)$ и второй замечательный предел в двух формах записи:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e.$$

При вычислении пределов нужно освоить методы раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^\infty]$, в том числе с использованием замечательных пределов и эквивалентных бесконечно малых величин.

Необходимо с помощью пределов уметь находить уравнения асимптот кривых (горизонтальных, вертикальных, наклонных), к которым приближаются кривые при неограниченном удалении от начала координат. Уметь применять полученные знания для нахождения асимптот различных функции спроса Торнквиста.

Также рассматриваются две задачи финансового анализа, такие как наращение и дисконтирование.

Суть задачи наращения состоит в присоединении к первоначальной денежной сумме S_0 процентов в результате какой-либо финансовой операции (например, процентов на банковский вклад). При этом размер наращенной суммы S_n через n лет при годовой ставке $i = \frac{p}{100}$ (p% в год) находится по формулам простых, сложных и непрерывных процентов соответственно $S_n = S_0(1+ni)$, $S_n = S_0(1+i)^n$, $S_n = S_0 e^{in}$.

Дисконтирование представляет обратную задачу и состоит в нахождении первоначальной, или современной, суммы S_0 по известной наращенной сумме S_n .Соответствующие формулы для простых, сложных и непрерывных процентов: $S_0 = \frac{S_n}{1+ni}$, $S_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n}$, $S_0 = S_n e^{-in}$.

Понятие непрерывности функции (в точке, на множестве (промежутке)) является более простым, чем предел, так как оно выражается непрерывностью графика при прохождении данной точки, данного промежутка (без отрыва карандаша от листа бумаги). Наряду с интуитивным представлением надо знать два определения непрерывности функции в точке (основанных на равенстве предела функции в точке ее значению в этой точке и на стремлении приращения функции к нулю при стремлении приращения аргумента к нулю) и на промежутке. Усвоить свойства непрерывных функций, а также то, что всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения и может иметь разрыв лишь на границах области определения. Говоря о точках разрыва функции, надо разделять точки разрыва первого рода, устранимого разрыва и разрыва второго рода.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Задана числовая последовательность следующего вида:

$$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \ldots .$$

Записать ее общий член.

2. Найти предел последовательности, общий член которой имеет вид:

$$u_n = \frac{3n^2 - 2n + 4}{2n^2 + 5n + 7}.$$

3. Найти предел последовательности, общий член которой имеет вид:

$$u_n = \frac{n \cos \frac{\pi n}{2}}{5n + 1}.$$

4. Найти предел: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{2n}$.

5. Найти предел: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n - 1}\right)^{3n}$.

6. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x - 4}{2x^2 + 3x + 2}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - x)$; в) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 9x + 6})$;

г) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{\sqrt{4 + x} - 2}$.

7. Вклад в размере 10000 руб. размещен на депозитном счете в банке под 5% годовых. Определить размер вклада через пять лет, если начисления процентов производится: а) один раз в год; б) раз в полгода; в) ежеквартально; г) ежемесячно; д) ежедневно (принять, что в году 360 дней); е) непрерывно.

8. Банк выдал кредит 5 млн. руб. на десять лет под 20% годовых. а) Найти сумму долга (с процентами), которую необходимо возвратить банку; б) Каким должен быть выданный кредит, чтобы через десять лет при той же процентной ставке сумма долга (с процентами) составила 8 млн. руб.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производная функции, ее геометрический смысл, свойства производной. Производная сложной и неявно заданной функций. Предельные *и средние величины в экономике: предельные и средние издержки, предельная и средняя производительность труда.*

Средняя и точечная эластичность функции. Эластичности спроса и предложения по цене, эластичность спроса по доходу. Дифференцируемость функции, первый дифференциал и его геометрический смысл. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

Основные теоремы дифференциального исчисления: лемма Ферма, теоремы Ролля и Лагранжа. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Монотонность функции. Условие монотонности. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Задача максимизации прибыли. Моделирование налоговых поступлений в бюджет. Кривая Лаффера.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Формула Маклорена. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Полное исследование функции и построение графика с помощью дифференциального исчисления.

Студенты должны знать три классические задачи, которые приводят к понятию производной: задачу о касательной к плоской кривой, задачу о скорости неравномерного прямолинейного движения и задачу о производительности труда. Их решение выявляет геометрический, механический и экономический смысл производной.

Изучая материал этой темы, студенты знакомятся с необходимым условием дифференцируемости функции. Усвоив основные правила дифференцирования, студенты должны уметь находить производную суммы и произведения нескольких дифференцируемых функций, производную частного двух функций, пользоваться основными формулами дифференцирования, овладеть техникой дифференцирования функций, в частности правилом дифференцирования сложной функции.

Одно из простейших приложений производной – раскрытие неопределенностей вида [0/0] или $[\infty/\infty]$ с помощью правила Лопиталя.

Надо четко представлять схему исследования функции для нахождения ее характерных точек и особенностей, по которым можно построить ее график.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Найти производную функции:

а) $y=(6x^2+2x+1)e^{3x+4}$; б) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-4x+1})$; в) $y=\dfrac{\ln^4 x}{2x-3}$.

2. Вычислить дифференциал функции $y=\sqrt{x^2-3x+11}$ при x=2 и Δx=0,1.

3. При помощи дифференциала функции найти приближенное значение $\sqrt[5]{34}$.

4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 8x}$.

5. Составить уравнение касательной к графику функции $y=4x^3-8x^2-3x-2$ в точке x_0=1. Сделать чертеж.

6. Составить уравнения касательных к графику функции $y=-\dfrac{x+1}{x-2}$, параллельных прямой, проходящей через точки с координатами (–2; 7) и (2; –5). Сделать чертеж.

7. Составить уравнения касательных к графику функции $y=\sqrt{1-4x}$, проходящей через точку с координатами (4; –1). Сделать чертеж.

8. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+3)^2 - 2x$ на отрезке [-2,5; 0].

9. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x}{2\left(x\ \ +4\right)}$ и схематично постройте ее график.

10. Исследуйте функцию $y = \left(x+1\right)e^{2x-1}$ и схематично постройте ее график.

11. Исследуйте функцию $y = \dfrac{\ln x}{x}$ и схематично постройте ее график.

12. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.). Определите средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

13. В математической модели рынка некоторого товара с функцией спроса $D(p) = 7 + \dfrac{48}{p+14}$ и функцией предложения $S(p) = 10 + \ln(\dfrac{p}{2})$, где p – цена товара в рублях, вычислите эластичность предложения в точке рыночного равновесия.

14. Затраты на производство продукции объёма *x* задаются функцией $y = x^2 + 5x + 4$. Производитель реализует каждую единицу продукции по цене 25 ден. ед. Найдите максимальную прибыль, равную разности между выручкой от реализации и затратами, и объем производства *x*, при котором прибыль будет максимальная.

Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций.

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница и ее применение. Выпуск продукции за определенное время при заданном законе мгновенной мощности производства.

Среднее значение функции. Средняя производительность труда, средняя капиталоотдача.

Несобственные интегралы. Интеграл Пуассона.

Операция интегрирования функции является операцией, обратной дифференцированию, но в отличие от последнего приводит к неоднозначному результату: для любой непрерывной функции $f(x)$ имеется бесконечное множество первообразных. Они отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое. Правильность интегрирования можно проверить дифференцированием.

Под непосредственным интегрированием понимают нахождение неопределенного интеграла путем преобразования его к табличному с помощью основных правил интегрирования и тождественных преобразований подынтегрального выражения.

Практическое применение формулы интегрирования по частям, если оно целесообразно, связано с проблемой правильного разбиения подынтегрального выражения на сомножители u и dv. Отметим, что формулу интегрирования по частям, как правило, удобно применять, если подынтегральная функция является произведением многочлена на показательную, обратную тригонометрическую или логарифмическую функцию.

Студент должен знать определение определенного интеграла как предела интегральной суммы и то, что вычисление определенного интеграла сводится к применению формулы Ньютона – Лейбница.

Применяя определенный интеграл для вычисления площадей плоских фигур, мы исходим из того интуитивного утверждения, что всякая плоская фигура, ограниченная несколькими непрерывными кривыми, образующими замкнутый контур, имеет площадь. Следует помнить, что "простейшей" фигурой, площадь которой выражается определенным интегралом, является криволинейная трапеция. Во всех остальных случаях фигуру нужно представить в виде сумм или разностей криволинейных трапеций. Решение задачи на вычисление площади криволинейной трапеции всегда начинают с построения чертежа и при этом следят за тем, чтобы граница фигуры содержала все заданные в условии линии и точки. Уяснить сказанное можно, разобрав примеры, в которых вычисляются площади различных плоских фигур.

Понятие несобственного интеграла с бесконечными пределами появляется как обобщение понятия определенного интеграла для случая, когда один из пределов интегрирования или оба не ограничены.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^3-5x^2+7x-9}{x-1}dx$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+9}}$, в) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-5e^x+4}$,

г) $\int e^{-5x+1}(2x+3)dx$, д) $\int \frac{ln\,x}{\sqrt[5]{x}}dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$, б) $\int_1^e \frac{\sqrt{5ln\,x+4}}{x}dx$, в) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=(x-5)(1-x)$, $y=4$, $x=1$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y=\frac{48}{(x+2)^3}$.

5. Сменная производительность труда рабочего описывается функцией $f(t)=-0{,}312t^2+2{,}5t$, где t – время в часах. Причем $0\le t\le 7$.

Определите объем выпуска продукции в течение месяца (за 24 рабочий день) бригадой, состоящей из 10 человек.

6. Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $z = 32 - 2^{-0,5t+5}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной за третий месяц, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

7. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^t$, $L(t) = (t+1)^2$, $K(t) = (100-3t)^2$, $a_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0{,}5$, (t – время в годах).

Тема 5. Функции нескольких переменных

Пространство R^n. Множества в пространстве R^n. Функции нескольких переменных. Примеры функций нескольких переменных в экономике: функция полезности, многофакторные производственные функции (мультипликативная, Кобба-Дугласа). Способы задания функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Кривые безразличия и изокванты.

Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость и дифференциал функции нескольких переменных.

Средняя и предельная производительность труда и капиталоотдача. Коэффициенты эластичности выпуска по труду и капиталу. Предельные нормы замещения факторов производства.

Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент.

Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия локального экстремума. Достаточное условие для случая двух независимых переменных.

Условный экстремум. Метод подстановки. Метод множителей Лагранжа. Задача потребительского выбора, экономический смысл множителей Лагранжа.

Глобальный экстремум. Минимизация затрат и максимизация прибыли многопродуктовой фирмы.

Кратные интегралы. Сведение кратного интеграла к повторному.

При рассмотрении этой темы достаточно ограничиться рассмотрением функции двух переменных. Для успешного усвоения этого раздела рекомендуется использовать метод аналогии с функциями одной переменной, хотя с увеличением числа переменных возникают существенные качественные отличия. Область определения функции двух переменных изображается множеством точек плоскости, а график – некоторой поверхностью в трехмерном пространстве.

В определении частной производной функции по одной из переменных используется понятие частного приращения, а в остальном оно сходно с определением производной функции одной переменной. Обратите внимание на способы обозначения частных производных. Техника дифференцирования функции двух (нескольких) переменных использует те же правила и приемы, которые применялись при нахождении производных функций одной переменной.

Для экстремума функции двух переменных формулируется определение и необходимое и достаточное условия его существования.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции $f(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2 + 4x + 11y - 8$.

2.Найти полный дифференциал функции $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - y^2}\right)$.

3. Найти полный дифференциал функции $f(x, y) = x^y$.

4. Вычислить приближенно $1{,}05^{2{,}1}$.

5. Найти производную функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ в точке $M(1,\ 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = (3, -4)$.

6. Найти производную функции $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $M(3,\ 4)$ в направлении градиента функции $f(x, y)$.

7. Найти экстремум функции $f(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2 + 4x + 11y - 8$.

8. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x - 4y + 5$.

9. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x_i	2	4	5	6	9
y_i	5,5	6	6,5	7	7,5

В результате их выравнивания получена функция $y = \sqrt{x} + 2$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выясните, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделайте чертеж.

Тема 6. Дифференциальные уравнения

Социально-экономические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Общее решение дифференциального уравнения. Частные решения дифференциального уравнения. Задача Коши.

Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Устойчивость решения. Критерий устойчивости.

Различные вопросы математики, естествознания, экономики приводят к необходимости решения уравнений, содержащих в качестве неизвестной не только некоторую функцию, но и ее производные до некоторого порядка.

Если искомая функция, входящая в уравнение, является функцией одного переменного, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Если же искомая функция является функцией от нескольких переменных, то в дифференциальные уравнения входят частные производные, а уравнение называется дифференциальным в частных производных. Мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения, а поэтому в дальнейшем для краткости будем говорить «дифференциальные уравнения».

Общий вид дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией можно записать в виде:

$$F(x,y,y',\dots y^{(n)})=0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в это уравнение.

Примером применения дифференциальных уравнений первого порядка может служить следующее уравнение, возникающее при рассмотрении *задачи о построении математической модели демографического процесса.* Пусть $y=y(t)$ – число жителей региона в момент времени t. Число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорционально численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Дифференциальное уравнение, описывающее изменение численности населения имеет вид:

$$y'=(k_1-k_2)y.$$

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=x$, удовлетворяющее условию $y(2)=4$.

2. Решить дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' = \frac{y}{x}$.

3. Решить дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$(x^2+1)dx = x \cdot y \cdot dy$$

4. Решить дифференциальное уравнение 1-го порядка $xy' = y \ln(\frac{y}{x})$.

5. Решить дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' + xy = xe^x$.

6. Решить дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' + \frac{y}{x-1} = x^3$.

7. Решить дифференциальное уравнение 1-го порядка $\left(x^2 - 1\right)y' + \left(y^2 - 4\right) = 0.$

Раздел 2. Линейная алгебра

Тема 7. Векторы и матрицы

Арифметические векторы и их использование в экономике. Геометрическая интерпретация векторов. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Примеры скалярного произведения в экономике. Длина вектора. Угол между векторами.

Матрицы и их виды. Линейные операции над матрицами. Транспонирование матрицы. Произведение матриц. Свойства операций над матрицами.

Элементарные преобразования над строками и столбцами матриц. Теорема о приведении произвольной матрицы к ступенчатой форме. Ранг матрицы. Невырожденность квадратных матриц.

Обратная матрица. Свойства обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Определитель квадратной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Свойства определителя. Критерий невырожденности матрицы. Вычисление определителя с помощью элементарных преобразований.

Матрица – прямоугольная таблица, составленная из чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Необходимо знать, как устанавливаются размеры матрицы и ее порядок, уметь выполнять транспонирование матриц, алгебраические операции над ними (умножение матрицы на число, сложение, вычитание, умножение матриц).

Следует четко уяснить, что если матрица – это таблица чисел, то определитель квадратной матрицы – это число, характеризующее эту матрицу и вычисляемое по определенным правилам. Необходимо уметь по этим правилам вычислять определители второго и третьего порядков.

При изучении свойств определителей особое внимание следует обратить на их свойства и теорему Лапласа о разложении определителя по строке или столбцу.

Нужно знать определение присоединенной и обратной матриц, уметь их вычислять. Необходимо представлять, что такое ранг матрицы и как он определяется.

В общем случае для определения ранга матрицы рекомендуется использовать метод элементарных преобразований. Важное значение имеет теорема о ранге матрицы, из которой следует, что ранг матрицы есть максимальное число ее линейно независимых строк (или столбцов), через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Вычислить произведения матриц AB и BA или обосновать, что произведение не определено, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Найти матрицу A^{-1} если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тема 8. Системы линейных уравнений и неравенств

Система линейных алгебраических уравнений. Однородная и неоднородная система линейных уравнений. Определение решения системы линейных уравнений. Эквивалентность систем линейных уравнений. Совместные и определенные системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Исследование и решение системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса. Общее решение системы линейных уравнений. Частные решения системы линейных уравнений. Базисные решения системы линейных уравнений.

Фундаментальная система решений однородной системы уравнений. Общие решения однородной и неоднородной систем, связь между ними.

Прямые на плоскости. Прямые и плоскости в пространстве.

Системы линейных алгебраических неравенств и их использование в экономике: бюджетные множества, ограничения по использованию ресурсов.

Поиск неотрицательных базисных решений системы линейных уравнений. Симплексные преобразования.

При изучении материала темы следует освоить матричную форму записи заданной системы n линейных уравнений с n переменными и уметь переходить к этой форме от общего вида системы и наоборот. Необходимо знать и уметь объяснить, какие системы уравнений называются совместными (определенными и неопределенными) и несовместными. Надо твердо уяснить, что вопрос о разрешимости системы n линейных уравнений с n переменными устанавливается с помощью теоремы Крамера. Решаются же такие системы различными способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса.

Практический интерес в приложениях представляет случай, когда число m уравнений системы меньше числа n переменных $(m<n)$. Рассмотрение таких систем приводит к разбиению переменных на базисные (основные) и свободные (неосновные) переменные и выделению из общего числа решений системы базисных решений, в которых все свободные (неосновные) переменные равны нулю.

Следует отметить, что матричное уравнение $AX=B$, к которому сводится система линейных уравнений (A – матрица системы, X – неизвестный столбец переменных, B – столбец свободных членов), может рассматриваться и в случае, когда X – неизвестная матрица. Вообще матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X имеют вид $AX=B(1)$, $XA=B$ (2), $AXC=B(3)$, где A, B, C, X – матрицы таких размеров, что все используемые операции возможны, а левые и правые части этих матричных уравнений представляют матрицы одинаковых размеров.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Используя теорему Крамера, решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -8; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

2. С помощью обратной матрицы решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 4\,; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\,; \\ -5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2\,. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 7, \\ -5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -2. \end{cases}$$

4. Найти общее и базисное решения системы:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{cases}$$

5. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 10x_4 & = & 0. \end{cases}$$

6. Найти ранг матрицы:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тема 9. Линейное пространство

Линейное (векторное) пространство. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Преобразование координат вектора при замене базиса.

В данной теме обобщается понятие вектора и дается определение векторного пространства, являющегося основным объектом линейной алгебры. Множества всех плоских и пространственных векторов, для которых определены операции сложения и умножения, а также умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных (линейных) пространств.

Рассматривается понятие базиса и размерности линейного пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Преобразование координат вектора при замене базиса.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Даны четыре вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ в некотором базисе. Покажите, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют базис, и найдите координаты вектора $\vec{a}_4$ в этом базисе, если $\vec{a}_1$=(3;4; – 3); $\vec{a}_2$=(2;1; – 4); $\vec{a}_3$=(– 5;5;0); $\vec{a}_4$=(8; – 16;17).

2.. При каких значениях α векторы $\vec{a}=(1;2;3), \vec{b}=(-1;2;0), \vec{c}=(\alpha;-2;3)$ образуют базис пространства R^3?

3. Найдите ранг системы векторов $\vec{a}=(-1;1;-1;0;2;-1)$, $\vec{b}=(0;0;1;-2;0;-1)$, $\vec{c}=(0;0;-1;2;1;-1)$ и $\vec{d}=(2;3;-1;0;1;0)$.

Тема 10. Линейные преобразования и квадратичные формы

Линейные преобразования пространства R^n *(линейные операторы). Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.*

Собственные значения матрицы. Характеристический многочлен матрицы. Собственные векторы матрицы.

Линейная модель обмена (модель международной торговли).

Симметрические матрицы и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к нормальному и каноническому виду. Кривые второго порядка.

Нужно четко знать понятие базиса n-мерного пространства, представляющего совокупность его n линейно независимых векторов. При этом любой вектор линейного пространства может быть представлен единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса.

Необходимо представлять, что такое линейный оператор и возможность его представления в матричной форме. Результатом действие линейного оператора на вектор привод к другому вектору.

Для решения задач надо уметь находить собственные числа и собственные векторы матриц, используя характеристическое уравнение. При этом, надо понимать, что действие линейного оператора на собственный вектор приводит к растяжению или сжатию исходного вектора и, возможно к изменеию его направления на противоположное.

Экономическим приложением матричного исчисления является рассмотрение задач, связанных с моделью Леонтьева международной торговли.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Линейный оператор $\tilde{A}$ задан свои действием на базисе e_1, e_2 пространства R^2: $\tilde{A}(e_1) = 3e_1 + 6e_2$, $\tilde{A}(e_2) = e_1 + 4e_2$. Найти образ вектора $v = e_1 - 4e_2$ при действии оператора $\tilde{A}$.

2. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора оператора $\tilde{A}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Найдите собственные значения матрицы: $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

4. При каком значении параметра α вектор $\vec{q} = \{-1;\ 0;\ \alpha\}$ является собственным вектором линейного оператора $\tilde{A}$, заданного матрицей

$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Найдите собственное значение оператора $\tilde{A}$, соответствующее данному вектору.

5. Предприятие производит продукцию трех видов (P_1, P_2, P_3). При этом используется сырье трех типов (S_1, S_2, S_3). Нормы расхода сырья на единицу продукции каждого вида, себестоимость одной условной единицы каждого вида сырья и стоимость его доставки приведены в таблице:

Показатель	Норма расхода сырья на единицу продукции, у.е.		
	S_1	S_2	S_3
Вид продукции			
P_1	4	5	2
P_2	3	1	2
P_3	1	3	5
Себестоимость единицы сырья, ден. ед.	2	5	3
Стоимость доставки сырья, ден. ед.	3	5	4

Дневной план выпуска продукции составляет 100 единиц продукции P_1, 75 единиц продукции P_2 и 50 единиц продукции P_3. Определить общие затраты предприятия за день работы.

6. Структурная матрица торговли двух стран имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Каким должно быть соотношение национальных доходов двух стран для сбалансированной торговли?

Тема 11. Линейное программирование

Примеры линейных оптимизационных моделей в экономике. Линейная производственная задача. Постановка и различные формы записи задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

Каноническая форма задачи линейного программирования. Допустимые решения. Свойства области допустимых решений. Алгоритм симплексного метода линейного программирования.

Симплексный метод как метод направленного перебора базисных допустимых решений. Критерий оптимальности. Экономическая интерпретация задачи линейного программирования, симплексного метода, симплексных оценок.

Симметричная пара двойственных задач. Экономическая интерпретация двойственной задачи.

Основное неравенство теории двойственности, его экономическая интерпретация. Малая теорема двойственности. Достаточное условие оптимальности пары взаимно двойственных задач. Первая и вторая основные теоремы двойственности, их геометрическая и экономическая интерпретация.

Несимметричная пара двойственных задач.

Третья основная теорема двойственности, ее геометрическая и экономическая интерпретация. Область устойчивости двойственных оценок.

Транспортная задача. Задача, двойственная к транспортной. Замкнутая транспортная задача и ее решение методом потенциалов. Экономическая интерпретация оценок клеток, потенциалов поставщиков и потребителей.

Вырожденная транспортная задача. Фиктивные поставки. Открытая транспортная задача, фиктивные поставщики и потребители. Обязательные и запрещенные поставки.

Линейное программирование – область математики, позволяющая разрабатывать теорию и численные методы решения задач на экстремум функций нескольких переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Для практического решения оптимизационных экономических задач в первую очередь необходимо уметь составить экономико-математическую модель задачи, то есть построить некоторую целевую функцию, записать уравнения или неравенства, которым должны удовлетворять введённые в задаче переменные.

Транспортная задача определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Целевая функция в транспортной задаче представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Ограничения подразделяются на две группы. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок таблице. Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску

1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
A	1	2	6
B	2	1	8

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным. Решить задачу двумя способами – графическим и симплексным методом.

2. Заводы некоторой автомобильной фирмы расположены в городах A, B и C. Основные центры распределения продукции сосредоточены в городах D и E. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1300 и 1200 автомобилей ежеквартально. Величины квартального спроса в центрах распределения составляют 2300 и 1400 автомобилей соответственно. Стоимости перевозки автомобилей по железной дороге по каждому из возможных маршрутов приведены в следующей таблице.

	D	E
A	80	215
B	100	108
C	62	68

Построить математическую модель, позволяющую определить количество автомобилей, перевозимых из каждого завода в каждый центр распределения, таким образом, чтобы общие транспортные расходы были минимальны.

Методические указания по выполнению контрольных работ

В соответствии с учебным планом по дисциплине «Математика» каждый студент направлений «Экономика» и «Менеджмент» должен выполнить контрольную работу по приведенным в данном учебно-методическом пособии вариантам.

Номер варианта любой контрольной работы определяется по последней цифре номера личного дела студента, который совпадает с номером его студенческого билета.

В помощь студентам после варианта 10 приводится демонстрационный вариант контрольной работы с решениями содержащихся в нем заданий.

Сроки представления контрольных работ на проверку указаны в индивидуальном графике студента. Однако эти сроки являются крайними. Чтобы работа была своевременно проверена, а при необходимости доработана и сдана повторно, ее надлежит представить значительно раньше указанного срока.

Если в ходе написания работы у студента появятся вопросы или затруднения в решении задач контрольного задания, он может обратиться к преподавателю за консультацией (по электронной почте).

После проверки контрольная работа студента получает оценку «Зачтено» или «Не зачтено».

Каждая контрольная работа содержит набор заданий, при выполнении которых необходимо соблюдать следующие правила оформления.

Допускается оформление решения заданий домашней контрольной работы как от руки в ученических тетрадях, так и на листах формата А4 (набор текста и формул на компьютере не обязателен). В обязательном порядке должен быть правильно оформлен титульный лист.

Образец оформления титульного листа контрольной работы

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования

«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

Домашняя контрольная работа
по дисциплине

«Математика»

Выполнил(а) студент(ка) группы

____

Преподаватель:

____

Москва 2017

Перед решением каждой задачи варианта контрольной работы нужно обязательно привести полностью ее условие. Решения задач должны сопровождаться развернутыми пояснениями, нужно привести в общем виде используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений, а окончательный ответ следует выделить.

При этом желательно придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в вариантах заданий, строго сохраняя при этом нумерацию примеров (задач).

Не допускается замена задач контрольной работы другими заданиями.

В конце работы приводится список использованной литературы (указывают автора, название, издательство, год издания), ставится дата окончания работы и подпись.

Контрольная работа не проверяется, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет.

При изучении учебного материала и подготовке к контрольным работам рекомендуется использовать видеолекции, учебники и учебные пособия, Интернет-ресурсы, приведенные ниже в разделе «Литература», а также данное пособие.

Демонстрационный вариант контрольной работы

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 15, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса.

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 15 \\ -2 & 1 & -3 & 14 \end{array}\right).$$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений состоит из двух этапов. Первый этап – так называемый прямой ход метода Гаусса – приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Проделаем это. Расширенную матрицу системы будем приводить к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования строк матрицы. Умножая первую строку на (–3) и прибавляя ее ко второй строке, получим нулевой элемент на месте элемента a_{21}, то есть:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 15 \\ -2 & 1 & -3 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-3) \\ \hookleftarrow \\ \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -10 & 5 & 30 \\ -2 & 1 & -3 & -14 \end{array}\right).$$

Далее обнуляем элемент a_{31}. С этой целью первую строчку матрицы умножаем на 2 и складываем с третьей строкой. Также, нетрудно заметить, что элементы второй строки пропорциональны 5. Поделим вторую строку на (–5). Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -10 & 5 & 30 \\ -2 & 1 & -3 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 2 \\ :(-5) \\ \hookleftarrow \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & -24 \end{array}\right).$$

На следующем шаге обнуляем элемент a_{32}. Это можно сделать, например, следующим образом. Элементы второй строки умножаем на (–7) и складываем с элементами третьей строки, умноженными на 2. При этом получим, что элементы третьей строки будут кратны 3. Поделим ее на (–3), то есть:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-7) \\ \cdot 2 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) :(-3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица системы приведена к ступенчатому виду. Такая матрица соответствует следующей эквивалентной исходной системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ \quad 2x_2 - x_3 = -6, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Второй этап решения – обратный ход метода Гаусса – начиная с последнего уравнения и поднимаясь вверх, находим неизвестные. В нашем случае, из последнего уравнения следует, что $x_3 = 2.$ Далее из второго уравнения находим x_2 и, соответственно, из первого уравнения определяем x_1, то есть:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 3x_2 + x_3 = -5 - 3\cdot(-2) + 2 = 3, \\ x_2 = \frac{1}{2}(-6 + x_3) = \frac{1}{2}(-6 + 2) = -2, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, решением исходной системы уравнений является упорядоченная тройка чисел $(3; -2; 2)$. ►

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 4x\sqrt[3]{x+3} - 5x + 1}{3x^2 + x\sqrt{2x-3} + 1}.$$

Решение. Нетрудно заметить, что если вместо переменной x в выражение функции подставить очень большое число, то, как в числителе, так и в знаменателе получатся очень большие числа. Следовательно, мы имеем дело с неопределенностью вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Так как числитель и знаменатель представляют собой комбинации степенных функций, то можно и в числителе и в знаменателе вынести за скобку x с наибольшим показателем, а именно x^2. Далее сокращаем на x^2 и пользуемся тем, что дроби, у которых степень знаменателя больше степени числителя являются бесконечно малыми и, следовательно, стремятся к нулю. В результате, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4x\sqrt[3]{x+3}-5x+1}{3x^2+x\sqrt{2x-3}+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(2-4\dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{x}\nearrow 0-\dfrac{5}{x}\nearrow 0+\dfrac{1}{x^2}\nearrow 0\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x}\searrow 0+\dfrac{1}{x^2}\searrow 0\right)}=\frac{2}{3}. \blacktriangleright$$

3. Найти эластичность функции $f(x)=e^{\sqrt{x^2-3x+6}}$ в точке $x_0=5$. Сделать вывод об эластичности функции в заданной точке.

Решение. Эластичностью $E_x(y)$ функции $y=y(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то есть:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\cdot y'.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, последнее выражение можно записать в виде $E_x(y)=\dfrac{x}{y}\cdot y'=x\cdot(\ln y)'$. Другими словами говоря, эластичность функции представляет собой произведение аргумента на ее логарифмическую производную.

Прологарифмировав данную в условии задания функцию, получим:

$$\ln f(x) = \ln e^{\sqrt{x^2-3x+6}} = \sqrt{x^2-3x+6} \cdot \ln e = \sqrt{x^2-3x+6}.$$

Далее находим производную полученного выражения, используя правило дифференцирования сложной функции. Имеем:

$$\left(\ln f(x)\right)' = \left(\sqrt{x^2-3x+6}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+6}} \cdot \left(x^2-3x+6\right)' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+6}}.$$

Следовательно, эластичность функции будет равна

$$E_x(y) = x \cdot \left(\ln y(x)\right)' = x \cdot \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+6}} = \frac{2x^2-3x}{2\sqrt{x^2-3x+6}}.$$

В частности, при $x_0 = 5$ эластичность будет равна

$$E_x(y)\Big|_{x=5} = \frac{2\cdot 5^2 - 3\cdot 5}{2\sqrt{5^2-3\cdot 5+6}} = \frac{35}{8} = 4{,}375.$$

Так как эластичность в точке $x_0 = 5$ больше единицы, то можно сделать вывод о том, что функция в этой точке является эластичной[1]. ►

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = 2x^3 - 39x^2 + 280x + 30.$ Доход от реализации единицы продукции равен 100. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

Решение. Количество выпускаемой продукции будет оптимальным для данного производства, если оно приводит к наибольшему значению функцию прибыли. Функция прибыли представляет собой разность между доходом и издержками производства, то есть

$$P(x) = px - C(x).$$

В нашем случае

[1] Функция называется эластичной в точке, если ее эластичность в этой точке по абсолютной величине превышает единицу, то есть $\left|E_x(y)\right| > 1$.

$$P(x)=100x-\left(2x^3-39x^2+280x+30\right)=-2x^3+39x^2-180x-30.$$

Исследуем на экстремум функцию прибыли. Для этого найдем ее производную:

$$P'(x)=\left(-2x^3+39x^2-180x-30\right)'=-6x^2+78x-180.$$

Приравняв производную к нулю, получим:

$$P'(x)=-6x^2+78x-180=0 \text{ или } x^2-13x+30=0.$$

Решая квадратное уравнение, определяем критические точки.

$$D=13^2-4\cdot 30=49=7^2;\ x_1=\frac{13-7}{2}=6;\quad x_1=\frac{13+7}{2}=10.$$

Функцию прибыли имеет смысл рассматривать только при неотрицательных значениях переменной x – количества выпускаемой продукции. Поэтому будем определять наибольшее значение функции прибыли на промежутке $[0;+\infty)$. Критические точки разбивают область определения функции прибыли на три промежутка (Рис. 2). Определив знаки производной на каждом промежутке, делаем вывод о том, что $x=10$ является точкой максимума (Рис. 1).

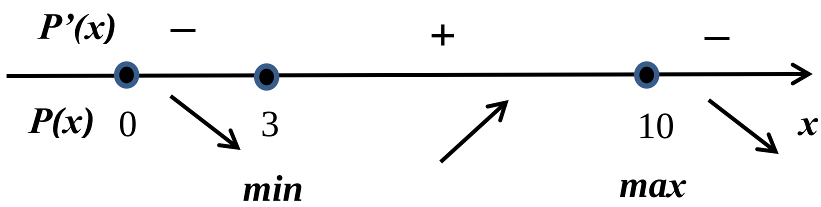

Рис.1.

Таким образом, количество выпускаемой продукции для производства будет оптимальным, если оно составляет 10 единиц. При этом, прибыль будет равна $P(10)=-2\cdot 10^3+39\cdot 10^2-180\cdot 10-30=70.$

Функция средних издержек производства $AC(x)$ определяется как отношение функции издержек к количеству выпускаемой продукции, то есть

$$AC(x)=\frac{C(x)}{x}.$$

В нашем случае $AC(x)=\dfrac{2x^3-39x^2+280x+30}{x}=2x^2-39x+280+\dfrac{30}{x}.$ Средние издержки при $x=10$ будут равны

$$AC(10)=2\cdot 10^2-39\cdot 10+280+\frac{30}{10}=93.$$

Предельные издержки производства $MC(x)$ определяются как производная функции издержек, то есть $MC(x)=C'(x)$. Определим их.

$$MC(x)=\left(2x^3-39x^2+280x+30\right)'=6x^2-78x+280.$$

Предельные издержки при $x=10$ равны $MC(10)=6\cdot 10^2-78\cdot 10+280=100.$ ►

5. Предприниматель решил открыть новую фирму по производству кисломолочных продуктов. При этом он готов на развитие этой фирмы выделить 4 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить y млн. руб., а на зарплату новых сотрудников x млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $u(x,y)=0{,}004x^{0,25}y^{0,75}$. Как следует распределить выделяемые денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным.

Решение. Очевидно, что мы имеем дело с задачей об оптимизации производства, в которой целевая функция – прирост объема выпускаемой продукции данным предприятием – описывается функцией двух переменных x и y вида $u(x,y)=0{,}004x^{0,25}y^{0,75}$. Сведем решение последней задачи к исследованию функции одной переменной.

По условию задачи на развитие фирмы предприниматель готов выделить 4 млн. руб., которые распределяются между суммой y млн. руб., выделяемой на приобретение нового оборудования, и суммой x млн. руб., выделяемой на выплату зарплаты сотрудникам предприятия, Очевидно, что $x+y=4$. Разрешая последнее соотношение относительно y, получим

$y=4-x$. Полученное выражение подставляем вместо y в функцию прироста объема выпускаемой продукции. В результате имеем:

$$u(x)=0{,}004x^{0{,}25}(4-x)^{0{,}75}.$$

Функция $u(x)$ определена на промежутке $[0;4]$. Наибольшее значение функции на отрезке достигается либо на концах отрезка, либо в точках экстремума. Для нахождения экстремумов функции, продифференцируем ее:

$$u'(x)=\left(0{,}004x^{0{,}25}(4-x)^{0{,}75}\right)'=0{,}004\cdot\left(x^{0{,}25}(4-x)^{0{,}75}\right)'=$$

$$=0{,}004\cdot\left(\left(x^{0{,}25}\right)'\cdot(4-x)^{0{,}75}+x^{0{,}25}\cdot\left((4-x)^{0{,}75}\right)'\right)=$$

$$=0{,}004\cdot\left(0{,}25\cdot x^{0{,}25-1}\cdot(4-x)^{0{,}75}+x^{0{,}25}\cdot 0{,}75\cdot(4-x)^{0{,}75-1}(4-x)'\right)=$$

$$=0{,}004\cdot\left(0{,}25\cdot x^{-0{,}75}\cdot(4-x)^{0{,}75}+x^{0{,}25}\cdot 0{,}75\cdot(4-x)^{-0{,}25}(-1)\right)=$$

$$=0{,}004\cdot 0{,}25\cdot\left(\frac{(4-x)^{0{,}75}}{x^{0{,}75}}-\frac{3x^{0{,}25}}{(4-x)^{0{,}25}}\right)=$$

$$=0{,}00001\cdot\frac{(4-x)-3x}{x^{0{,}75}\cdot(4-x)^{0{,}25}}=0{,}00001\cdot\frac{4-4x}{x^{0{,}75}\cdot(4-x)^{0{,}25}}=$$

$$=0{,}00004\cdot\frac{1-x}{x^{0{,}75}\cdot(4-x)^{0{,}25}}.$$

Для нахождения точек экстремума функции, приравниваем полученную производную к нулю. Решая полученное уравнение, находим $x=1$.

Убедимся, что $x=1$ является точкой максимума функции. Для этого исследуем знак производной функции правее и левее этой точки. Знак производной определяется числителем дроби $\dfrac{1-x}{x^{0{,}75}\cdot(4-x)^{0{,}25}}$. Нетрудно заметить, что если $x<1$ дробь положительна, а при $x>1$ дробь будет отрицательной. Следовательно, при переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, что свидетельствует о том, что точка $x=1$ является точкой максимума (Рис.2).

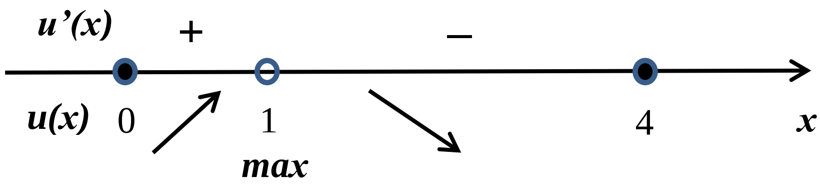

Рис.2.

Таким образом, прирост объема выпускаемой продукции будет максимальным, если на зарплату вновь принятых сотрудников будет выделено 1 млн. руб., а на покупку нового оборудования $y=4-x=4-1=3$ млн. руб. ►

6. Исследовать функцию $y=\dfrac{e^{x-2}}{x+1}$ и построить ее график.

Решение. Воспользуемся общей схемой исследования функции и построения ее графика.

1. Находим область определения функции. Функция, стоящая в числителе определена для любого аргумента x, а знаменатель дроби должен быть отличен от нуля. Следовательно, область определения функции будет $x+1\neq 0$, то есть $x\neq -1$. Таким образом, $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Функция является функцией общего вида в силу того, что

$$y(-x)=\frac{e^{-x-2}}{-x+1}=\frac{e^{-(x+2)}}{-(x-1)}\neq \pm y(x).$$

В силу области определения функции она может иметь вертикальную асимптоту. Выясним характер поведения функции слева и справа от точки $x=-1$. Для этого найдем пределы функции при стремлении x к точке -1 справа и слева:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{e^{x-2}}{x+1}=\left[\frac{e^{-1-2}}{-0}\right]=-\infty;\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{e^{x-2}}{x+1}=\left[\frac{e^{-1-2}}{+0}\right]=+\infty.$$

Так как пределы равны бесконечности, то делаем вывод о том, что прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

Исследуем поведение функции на бесконечности. Будем исходить из того, что на плюс бесконечности и на минус бесконечности функция $y=e^x$, стоящая в числителе, график которой представлен на рисунке 3, имеет разный характер поведения.

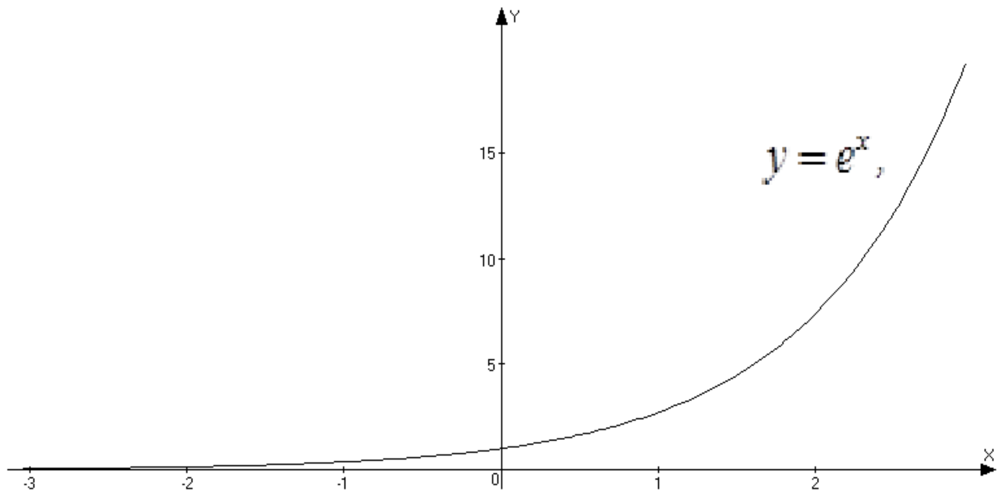

Рис.3.

Действительно,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Найдем предел функции на плюс и на минус бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-2}}{x+1}=\left[\frac{0}{-\infty}\right]=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-2}}{x+1}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x-2}\right)'}{\left(x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-2}}{1}=+\infty.$$

При вычислении последнего предела воспользовались правилом Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Так как при $x\to-\infty$ получили конечное значение предела функции, то это означает, что график функции имеет левую горизонтальную асимптоту $y=0$.

Найдём точки экстремума и интервалы монотонности функции. Сначала найдём критические точки функции, используя необходимое условие существования экстремума функции в точке (ищем те значения *x*, при которых производная функции или равна нулю, или не существует).

$$y' = \left(\frac{e^{x-2}}{x+1}\right)' = \frac{\left(e^{x-2}\right)' \cdot (x+1) - e^{x-2} \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{e^{x-2} \cdot (x+1) - e^{x-2} \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^{x-2} \cdot x}{(x+1)^2}.$$

Приравнивая числитель к нулю, получаем, что производная равна нулю при $x=0$. Используя достаточное условие существования экстремума функции в точке, выясним, достигает ли функция экстремума в критической точке.

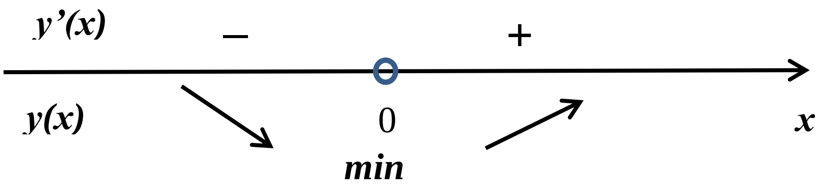

Рис.4.

Производная функции отрицательна на интервале $x \in (-\infty; 0)$ и, следовательно, функция на данном интервале является монотонно убывающей. Производная функции положительна на интервале $x \in (0; +\infty)$ и, следовательно, функция на данном интервале является возрастающей. Точка x=0 является точкой минимума функции. Значение функции в этой точке равно $y(0) = \dfrac{e^{0-2}}{0+1} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \approx 0{,}137.$

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Точка пересечения с осью ординат находится, задавая $x=0$. Эта точка была найдена ранее (является точкой минимума функции). Точки пересечения с осью абсцисс находится из уравнения $y(x)=0$. Уравнение $\dfrac{e^{x-2}}{x+1} = 0$ корней не имеет, ибо числитель всегда отличен от нуля и, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

Строим график. Асимптоты изображаем пунктирными линиями (Рис.5).

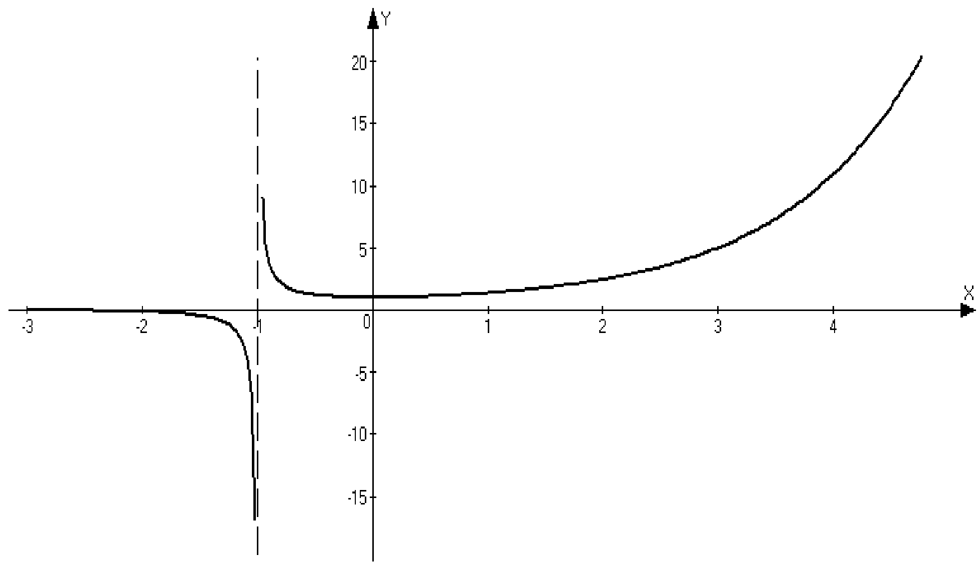

Рис.5. ►

7. На предприятии внедряется новая технология производства, при которой изменение производительности труда одного рабочего в течение восьмичасовой рабочей смены описывается функцией $p(t) = 54t - 6t^2$, где t – время в часах, $0 \le t \le 8$. Определить среднюю производительность труда одного рабочего за смену. Найти функцию объема продукции, производимой одним рабочим за время t. Определить среднюю производительность труда одного рабочего за смену. Найти объем выпуска продукции за месяц (принять, что в месяце 24 рабочих дня) бригадой, состоящей из 5 человек.

Решение. Согласно экономическому смыслу производной, функция производительности труда является производной от функции объема выпускаемой продукции. На основании этого можно сказать, что для вычисления объема выпускаемой продукции одним рабочим за время t, достаточно найти интеграл от функции его производительности труда, то есть

$$u(t) = \int_0^t p(t)\,dt = \int_0^t \left(54t - 6t^2\right)dt = \left(54\cdot\frac{t^2}{2} - 6\cdot\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \left(27t^2 - 2t^3\right)\Big|_0^t = 27t^2 - 2t^3.$$

Таким образом, объем выпускаемой продукции за время $t \in [0,8]$ часов одним рабочим определяется функцией $u(t) = 27t^2 - 2t^3$.

Средняя производительность труда одного рабочего за время $t \in [0,8]$ часов определяется соотношением:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t p(t)dt = \frac{1}{t}\cdot\left(27t^2 - 2t^3\right) = 27t - 2t^2.$$

В частности, если t=8, получим, что $\bar{u}(8) = 27\cdot 8 - 2\cdot 8^2 = 88$.

Для определения объема выпуска продукции за месяц бригадой, состоящей из 5 человек, сначала вычислим объем продукции, выпускаемой одним рабочим за смену. Учитывая, что рабочая смена длится 8 часов, подставим в выражение для функции значение t=8. Получим, что $u(8) = 27\cdot 8^2 - 2\cdot 8^3 = 8^2\cdot(27 - 2\cdot 8) = 64\cdot 11 = 704$. Тогда искомый объем выпуска продукции будет равен $24\cdot 5\cdot 704 = 84480$. ►

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y = ln\,x$.

Решение. Сначала сделаем схематичный чертёж. Построим график функции $y = ln\,x$. Оси координат и график функции ограничивают заштрихованную фигуру. Следует отметить, что эта фигура является неограниченной снизу (Рис.6).

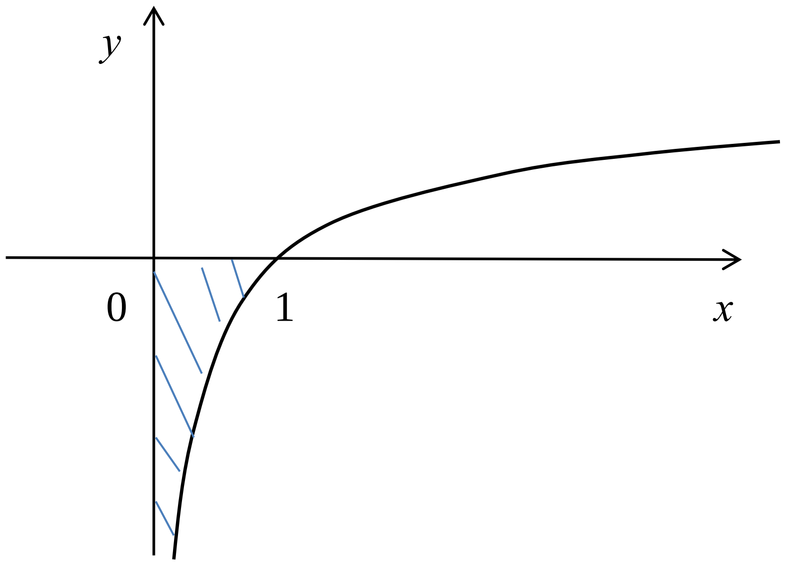

Рис.6.

Искомую площадь вычислим при помощи определённого интеграла, в котором подынтегральная функция представляет собой разность между уравнениями верхней границей и нижней линией, ограничивающих эту площадь. Сверху площадь ограничивается линией $y = ln\,x$, а снизу – графиком функции $y = ln\,x$. Пределы интегрирования будут соответственно от 0 до 1.

$$S = \int_0^1 (0 - \ln x)\,dx = -\int_0^1 \ln x\,dx. \text{ кв. ед.}$$

Так как при x=0 функция $y = ln\,x$ не определена, то мы имеем дело с несобственным интегралом второго рода. Вычислим его или покажем, что он не существует (расходится).

$$S = -\int_0^1 \ln x\,dx = -\lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln x\,dx = -\lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln x\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла будем использовать формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Положив, что $u(x) = \ln x$ и $dv(x) = dx$. Тогда $du(x) = d\ln x = (\ln x)'\,dx = \dfrac{dx}{x}$ и $v(x) = x$. Подставим полученные выражения в наш интеграл, получим:

$$S = -\lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln x\,dx = -\lim_{a\to 0}\left(x\ln x\Big|_a^1 - \int_a^1 x\cdot\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= -\lim_{a\to 0}\left(1\cdot\ln 1 - a\cdot\ln a - \int_a^1 dx\right) = -\lim_{a\to 0}\left(-a\cdot\ln a - \int_a^1 dx\right) = \lim_{a\to 0}\left(a\cdot\ln a + x\Big|_a^1\right) =$$

$$=\lim_{a\to 0}\left(a\cdot\ln a+1-a\right)=\lim_{a\to 0}\left(a\cdot\ln a\right)+1.$$

Последний предел вычислим следующим образом. Преобразуем неопределенность вида $\left[0\cdot\infty\right]$к неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, а затем воспользуемся правилом Лопиталя. Получим:

$$\lim_{a\to 0}\left(a\cdot\ln a\right)=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln a}{1/a}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{a\to 0}\frac{\left(\ln a\right)'}{\left(\dfrac{1}{a}\right)'}=$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\dfrac{1}{a}}{-\dfrac{1}{a^2}}=-\lim_{a\to 0}\frac{a^2}{a}=-\lim_{a\to 0}a=0.$$

Таким образом, площадь неограниченной снизу фигуры будет равна $S=1+0=1$ кв. ед. ►

Варианты контрольной работы

Вариант № 1

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 1)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to -2} \frac{x + \sqrt{10 + x - x^2}}{\sqrt{2 - 7x} + 2x}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = 1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = e^{-\sqrt{3x^2+1}}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = x^3 - 120x^2 + 270x + 200$. Доход от реализации единицы продукции равен 150. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил открыть новую фирму по производству канцелярской продукции. При этом он готов на развитие этой фирмы выделить 8 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x, y) = 0,002x^{0,25}y^{0,75}$. Как следует распределить выделяемые

денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y = \dfrac{3x^2}{x-1}$ и построить ее график.

7. На предприятии внедряется новая технология производства, при которой изменение производительности труда одного рабочего в течение восьмичасовой рабочей смены описывается функцией $p(t) = 48t - 4t^2$, где t – время в часах, $0 \le t \le 8$. Определить среднюю производительность труда одного рабочего за смену. Найти функцию объема продукции, производимой одним рабочим за время t. Найти объем выпуска продукции за месяц (принять, что в месяце 24 рабочих дня) бригадой, состоящей из 3 человек.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y = x \ln x$.

Вариант № 2

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 2)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x+8}-\sqrt{x^2-7x-6})$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = 2$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = ln^2(5x^2+1)$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = x^3 - 30x^2 + 240x + 500$. Доход от реализации единицы продукции равен 450. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил создать новую ферму по производству сельскохозяйственной продукции. При этом он готов на развитие этой фермы выделить 5 млн. руб. Известно, что если на аренду земли, помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x,y) = 0{,}002x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}$. Как следует распределить выделяемые

денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y=\left(3-x\right)e^{-3x}$ и построить ее график.

7. Изменение производительности труда одного рабочего в течение шестичасовой рабочей смены в связи с переоборудованием цеха описывается функцией $p(t)=36t-4t^2$, где t – время в часах, $0\le t\le 6$ Определить среднюю производительность труда одного рабочего за смену. Найти функцию объема продукции, производимой одним рабочим за время t. Найти объем выпуска продукции за месяц (принять, что в месяце 24 рабочих дня) бригадой, состоящей из 8 человек.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y=\dfrac{24}{\left(x+2\right)^2}$.

Вариант № 3

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 3)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{6x^2+3}+3x}{x^2-1}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = 1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = 3^{-x^2+2x+1}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = x^3 - 120x^2 + 270x + 200$. Доход от реализации единицы продукции равен 150. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил открыть новый цех по производству детских игрушек. При этом он готов на развитие этого цеха выделить 3 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x,y) = 0{,}003x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. Как следует распределить выделяемые денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y=\dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

7. Изменение производительности каждого из однотипных цехов завода, производящих одинаковую продукцию, в течение квартала (74 рабочих дня) в связи с переоборудованием предприятия описывается функцией $p(t)=240t-2t^2$, где t – время в днях, $0\le t\le 72$. Определить среднюю производительность цеха за квартал. Найти функцию объема продукции, производимой одним цехом за время *t*. Найти объем выпуска продукции за квартал, в течение которого происходила модернизация предприятия (принять, что в квартале 72 рабочих дня) шестью однотипными цехами.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y=\dfrac{3}{(x+1)^3}$.

Вариант № 4

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 4)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\cdot x^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{2x}+1}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = -1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = \sqrt{e^{-x^2+2x+1}}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = 2x^3 - 39x^2 + 180x + 120$. Доход от реализации единицы продукции равен 150. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил расширить свое производство женской обуви. Для этого он готов выделить 6 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x, y) = 0{,}003x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}}$. Как следует распределить выделяемые денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y=-e^{2x-x^2}+1$ и построить ее график.

7. Изменение производительности каждого из однотипных филиалов завода, производящих одинаковую продукцию, в течение квартала (72 рабочих дня) в связи с экспериментами по внедрению новых технологий описывается функцией $p(t)=\frac{t^3}{3}-40t^2+1200t$, где t – время в днях, $0\le t\le 72$. Определить среднюю производительность филиала за квартал. Найти функцию объема продукции, производимой одним филиалом за время *t*. Найти объем выпуска продукции за квартал, в течение которого происходили эксперименты по внедрению новых технологий (72 рабочих дня) четырьмя однотипными филиалами..

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y=\frac{9}{(x+3)^2}$.

Вариант № 5

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 5)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 1 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 1 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5\sqrt{x} + \sqrt[3]{8x^3} + \sqrt[4]{x}\cdot x^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{9x^2} + 1}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = 1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = e^{-\sqrt{3x^2+5x+1}}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = x^3 - 150x^2 + 700x + 200$. Доход от реализации единицы продукции равен 150. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x,y) = \sqrt{xy - 250}$. Бюджетное ограничение составляет $2x + y = 100$. Найти максимум полезности потребления.

6. Исследовать функцию $y = \dfrac{2x-3}{2x^2} - 1$ и построить ее график.

7. Изменение производительности труда одного рабочего в течение шестичасовой рабочей смены в связи с внедрением новых технологических

процессов описывается функцией $p(t)=32t-4t^2$, где t – время в часах, $0 \le t \le 6$. Определить среднюю производительность труда одного рабочего за смену. Найти функцию объема продукции, производимой одним рабочим за время *t*. Найти объем выпуска продукции за квартал (принять, что в месяце 24 рабочих дня) бригадой, состоящей из 3 человек.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y=\dfrac{16}{(x+2)^4}$.

Вариант № 6

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 6)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \frac{x}{y}$ в точке $x_0 = 1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = ln(3x^2 + x + 2)$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = x^3 - 55{,}5x^2 + 480x + 300$. Доход от реализации единицы продукции равен 270. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил открыть новую фирму по производству канцелярской продукции. При этом он готов на развитие этой фирмы выделить 5 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x,y) = 0{,}002x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}$. Как следует распределить выделяемые

денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y=\left(x^2-2x-2\right)e^x$ и построить ее график.

7. Изменение производительности труда одного корректора текста в течение шестичасовой рабочей смены в связи с состоянием зрения и степенью концентрации внимания описывается функцией $p(t)=24t-4t^2$, где t – время в часах, $0\le t\le 6$. Определить среднюю производительность труда одного корректора за смену. Найти функцию объема текста (страниц), проверенных одним корректором за время *t*. Найти объем проверенного текста за месяц (принять, что в месяце 24 рабочих дня) тремя корректорами одинаковой квалификации.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y=\dfrac{12}{\left(x+1\right)^2}$.

Вариант № 7

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 7)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = 1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = \sqrt[3]{e^{2x^2-1}+1}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс. руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = x^3 - 4{,}5x^2 + 240x + 500$. Доход от реализации единицы продукции равен 450. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил создать новую ферму по производству сельскохозяйственной продукции. При этом он готов на развитие этой фермы выделить 8 млн. руб. Известно, что если на аренду земли, помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x,y) = 0{,}002x^{0{,}25}y^{0{,}75}$. Как следует распределить выделяемые

денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y = \dfrac{e^{3-2x}}{3-2x}$ и построить ее график.

7. Изменение производительности труда одного корректора текста в течение шестичасовой рабочей смены в связи с состоянием зрения и степенью концентрации внимания описывается функцией $p(t) = 64t - 8t^2$, где t – время в часах, $0 \le t \le 6$. Определить среднюю производительность труда одного корректора за смену. Найти функцию объема текста (страниц), проверенных одним корректором за время t. Найти объем проверенного текста за месяц (принять, что в месяце 24 рабочих дня) тремя корректорами одинаковой квалификации.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y = x^2 \ln x$.

Вариант № 8

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 8)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{\sqrt{8x^2 + 17} + 5x}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \frac{x}{y}$ в точке $x_0 = 2$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = \sqrt[3]{ln(2x^2 + 1)}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + 10$. Доход от реализации единицы продукции равен 37. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил открыть новый цех по производству детских игрушек. При этом он готов на развитие этого цеха выделить 6 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x, y) = 0{,}003x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}}$. Как

следует распределить выделяемые денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y = \dfrac{4x}{(x+2)^2} + 1$ и построить ее график.

7. Изменение производительности каждого из однотипных филиалов завода, производящих одинаковую продукцию, в течение квартала (72 рабочих дня) в связи с экспериментами по изменению технологического процесса описывается функцией $p(t) = \dfrac{t^3}{3} - 40t^2 + 700t$, где t – время в днях, $0 \le t \le 72$. Определить среднюю производительность филиала за квартал. Найти функцию объема продукции, производимой одним филиалом за время *t*. Найти объем выпуска продукции за квартал, в течение которого происходили изменения технологий (72 рабочих дня), четырьмя однотипными филиалами.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y = \dfrac{96}{(x+4)^2}$.

Вариант № 9

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 9)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_3 = 3, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3}-2x}.$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = 1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = \sqrt[3]{ln^2(x^2+1)}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = 0{,}08x^2 + 40x + 1000$. Доход от реализации единицы продукции равен 200. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Предприниматель решил расширить свое производство женской обуви. Для этого он готов на выделить 3 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудников y млн. руб., то прирост объема выпускаемой продукции составит $U(x,y) = 0{,}003x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. Как следует распределить выделяемые денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Исследовать функцию $y=\dfrac{x-5}{e^{2x}}-1$ и построить ее график.

7. Изменение производительности каждого из однотипных филиалов завода, производящих одинаковую продукцию, в течение квартала (72 рабочих дня) в связи с испытаниями нового оборудования описывается функцией $p(t)=\dfrac{t^3}{3}-20t^2+300t$, где t – время в днях, $0\le t\le 72$. Определить среднюю производительность филиала за квартал. Найти функцию объема продукции, производимой одним филиалом за время t. Найти объем выпуска продукции за квартал, в течение которого происходили испытания нового оборудования (72 рабочих дня), четырьмя однотипными филиалами.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции $y=\dfrac{12}{(x+1)^5}$.

Вариант № 10

(для студентов, номера студенческих билетов которых оканчиваются цифрой 10)

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

по формулам Крамера и методом Гаусса. Сравнить полученные результаты.

2. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+2x+6}-\sqrt{2x^2-7x-6}\right)$$

3. Найти коэффициент эластичности $E = y'_x \dfrac{x}{y}$ в точке $x_0 = 1$, если функция $y(x)$ определяется формулой: $y = e^{-\sqrt{4x^2+1}}$. Является ли в этой точке функция эластичной.

4. Издержки производства $C(x)$ (тыс.руб.) зависят от объема выпускаемой продукции x (ед.) как $C(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 10$. Доход от реализации единицы продукции составляет $p(x) = 8 - \sqrt{x}$. Найти оптимальное для производства количество выпускаемой продукции. Вычислить при этом значении средние и предельные издержки производства.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x,y) = \sqrt{xy + 10y + 350}$. Бюджетное ограничение составляет $2x + y = 80$. Найти максимум полезности потребления.

6. Исследовать функцию $y = -xe^{-2x^2} + 3$ и построить ее график.

7. Изменение производительности каждого из однотипных филиалов завода, производящих одинаковую продукцию, в течение квартала (72

рабочих дня) в связи с изменениями в технологическом процессе описывается функцией $p(t)=\frac{t^3}{3}-30t^2+800t$, где t – время в днях, $0 \le t \le 72$. Определить среднюю производительность филиала за квартал. Найти функцию объема продукции, производимой одним филиалом за время t. Найти объем выпуска продукции за квартал, в течение которого происходили изменения в технологическом процессе (72 рабочих дня), четырьмя однотипными филиалами.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y=x^3 \ln x$.

Теоретические вопросы для подготовки к экзамену[2]

1. Множество. Операции над множествами. Конечные, счетные и несчетные множества. Ограниченные и неограниченные множества.

2. Комплексные числа и действия над ними. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел.

3. Понятие функции. Свойства функций одной переменной.

4. Функциональные зависимости в экономике.

5. Числовые последовательности, предел последовательности и его свойства, монотонные, ограниченные последовательности.

6. Простые и сложные проценты. Наращение и дисконтирование. Непрерывное начисление процентов.

7. Паутинообразная модель рынка одного товара.

8. Числовой ряд. Сходимость ряда. Сумма ряда.

9. Предел функции в точке и на бесконечности.

10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

11. Первый и второй замечательные пределы.

12*. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций.

13. Непрерывность функции в точке и на множестве. Свойства непрерывных функций.

14. Точки разрыва и их классификация.

15. Асимптоты графика функции.

16. Производная функции, ее геометрический смысл, свойства производной.

17*. Производная сложной и неявно заданной функций.

18. Предельные и средние величины в экономике (случай функции одной переменной).

19. Средняя и точечная эластичность функции (случай функции одной переменной).

---

[2] Вопросы, отмеченные * включаются в экзаменационные билеты по усмотрению преподавателя.

20. Дифференцируемость функции, первый дифференциал и его геометрический смысл.

21*. Основные теоремы дифференциального исчисления: лемма Ферма, теоремы Ролля и Лагранжа.

22. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

23. Монотонность функции. Условие монотонности.

24. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума.

25. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

26*. Производные и дифференциалы высших порядков.

27*. Формула Тейлора. Формула Маклорена.

28*. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.

29*. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

30. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

31. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям.

32. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

33. Среднее значение функции.

34. Несобственные интегралы. Интеграл Пуассона.

35. Пространство R^n. Множества в пространстве R^n. Функции нескольких переменных.

36. Примеры функций нескольких переменных в экономике.

37*. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

38. Частные производные функции нескольких переменных.

39*. Дифференцируемость и дифференциал функции нескольких переменных.

40*. Предельные и средние величины в экономике (случай функции нескольких переменных).

41*. Средняя и точечная эластичность функции (случай функции нескольких переменных).

42*. Производная сложной функции.

43*. Производная по направлению и градиент.

44. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия локального экстремума.

45*. Достаточное условие для случая двух независимых переменных.

46*. Условный экстремум. Метод подстановки.

47*. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

48*. Глобальный экстремум.

49*. Кратные интегралы. Сведение кратного интеграла к повторному.

50*. Общее решение дифференциального уравнения. Частные решения дифференциального уравнения. Задача Коши.

51*. Уравнения с разделяющимися переменными.

52*. Однородные уравнения первого порядка.

53*. Линейное уравнение первого порядка.

54*. Уравнение Бернулли.

55*. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

56*. Устойчивость решения. Критерий устойчивости.

57. Арифметические векторы.

58. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Транспонирование матрицы. Произведение матриц.

59. Элементарные преобразования над строками и столбцами матриц.

60. Теорема о приведении произвольной матрицы к ступенчатой форме. Ранг матрицы. Невырожденность квадратных матриц.

61. Обратная матрица.

62. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителя. Критерий невырожденности матрицы.

63. Система линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

64. Прямые на плоскости.

65. Прямые и плоскости в пространстве.

66. Системы линейных алгебраических неравенств и их использование в экономике.

67. Линейное (векторное) пространство.

68. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Базис и размерность линейного пространства.

69*. Линейные преобразования пространства R^n (линейные операторы).

70*. Собственные значения и собственные векторы матрицы.

71*. Линейная модель обмена (модель международной торговли).

72*. Симметрические матрицы и квадратичные формы.

73*. Приведение квадратичной формы к нормальному и каноническому виду.

74*. Кривые второго порядка.

75*. Примеры линейных оптимизационных моделей в экономике.

76. Постановка и различные формы записи задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

77. Каноническая форма задачи линейного программирования. Допустимые решения. Свойства области допустимых решений.

78*. Алгоритм симплексного метода линейного программирования.

79*. Симплексный метод как метод направленного перебора базисных допустимых решений. Критерий оптимальности.

80*. Симметричная пара двойственных задач. Экономическая интерпретация двойственной задачи.

81*. Основное неравенство теории двойственности, его экономическая интерпретация.

82*. Малая теорема двойственности.

83*. Достаточное условие оптимальности пары взаимно двойственных задач.

84*. Первая и вторая основные теоремы двойственности, их геометрическая и экономическая интерпретация.

85*. Несимметричная пара двойственных задач.

86*. Третья основная теорема двойственности, ее геометрическая и экономическая интерпретация.

87. Транспортная задача.

88*. Задача, двойственная к транспортной.

89. Замкнутая транспортная задача и ее решение методом потенциалов. Экономическая интерпретация оценок клеток, потенциалов поставщиков и потребителей.

90*. Вырожденная транспортная задача.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Высшая математика для экономистов. Учебник /под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.

2. Высшая математика для экономистов. Практикум /под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.

3. Высшая математика для экономического бакалавриата. Учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера.– М.: Юрайт, 2014.

4. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра. Учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера.– М.: Юрайт, 2014.

5. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математический анализ: Учебник и Практикум / под. ред. Н.Ш. Кремера – М.: Юрайт, 2014.

6. Математика для экономистов и менеджеров. Учебник /под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Кнорус, 2015.

7. Математика для экономистов и менеджеров. Практикум /под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Кнорус, 2015.

Дополнительная

8. Высшая математика: Учебник и практикум для академического бакалаврата /под ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М.: Юрайт, 2017.

9. Гисин В.Б., Кремер Н.Ш. Математика. Практикум. – М.: Юрайт, 2017.

10. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики. Учебно-справочное пособие / под ред. Н.Ш. Кремера.– М.: Юрайт, 2014.

11. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., И.Г.Шандра Математика в экономике. – М: Финансы и статистика, ИНФРА-М, 2011, ч. 1,2.

12. Сборник задач по курсу "Математика в экономике". Под ред. В.А. Бабайцева, В.Б. Гисина.— М. : Финансы и статистика: Инфра-М, 2010, ч. 1,2.

13. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2006.

14. Красс М.С., Математика для экономического бакалавриата. – М.ИНФРА-М, 2011

15. Малугин В.А. Математика для экономистов. Математический анализ. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2009.

16. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. –. М.: Физматлит, 2009.

Ресурсы информационно-коммуникационной сети «Интернет»

1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации http://portal.ufrf.ru/.

2. Сайт департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий. http://fa.ru/dep/data_analysis/

3. Библиотечно – информационный комплекс Финуниверситета при Правительстве РФ. http://library.fa.ru.

4. Репозиторий Финуниверситета при Правительстве РФ. http://repository.vzfei.ru.

5. Компьютерная обучающая программа для студентов 1 курса по дисциплине «Математика» (КОПР1-М); зарегистрирована в Информационно-библиотечном фонде РФ, рег. №50200000053 от 08.06.2000. Дата обновления 06.12.2010. (http://repository.vzfei.ru). Доступ по логину и паролю.