

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ЗАГРУЖЕННЫХ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ НАГРУЗКАМИ.

Учебно-методическое указание

по дисциплине:

«Основы расчета строительных конструкций»

программы переподготовки:

“Промышленное и гражданское строительство”

МОСКВА 2015г

С о с т а в и т е л и

доцент А.Ю.Ушаков.

ВВЕДЕНИЕ

Любое возводимое сооружение должно быть рассчитано на прочность, жесткость и устойчивость. Это позволяют сделать несколько дисциплин, в том числе: сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, теории упругости, пластичности и другие.

Умение рассчитать конструкцию, помогает инженеру в выборе экономичных конструкций, в правильном понимании работы сооружений при действии нагрузки, позволяет теоретически обосновать методы образования инженерных сооружений.

Стержневые конструкции весьма разнообразны. К этой группе относятся такие сооружения, как стойки, сваи, колонны, балки, в том числе многопролетные, а также конструкции ферм строительных конструкций, например, перекрытий, фермы мостовых пролетных строений, ферменные конструкции кранов, конструкции ЛЭП, рамы строительных конструкций – каркасы зданий, комбинированные стержневые конструкции вантовые и висячие конструкции пролетных строений мостов, современные висячие и вантовые перекрытия больших пролетов.

Целью настоящего пособия является обучение методам и способам определения внутренних усилий в статически определимых стержневых системах, (балки и плоские рамы) от заданных воздействий.

Изучение дисциплины сопровождается самостоятельным выполнением слушателем курсовой работы с использованием имеющихся конспектов лекций и учебников.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Статически определимыми сооружениями называются сооружения, в которых все внутренние усилия можно определить при помощи уравнений статики. Простота расчета и возможность более точно подобрать необходимые сечения элементов обусловили широкое распространение статически определимых систем. Однако эти системы обладают меньшей жесткостью по сравнению со статически неопределимыми. Разрушение одного из элементов влечет за собой выход из строя всей системы, что уменьшает надежность и безопасность конструкции.

1.1. Свойства статически определимых систем.

1.1.1 Все связи статически определимой системы являются *абсолютно необходимыми* т. е. при удалении хотя бы одной из них система превращается в геометрически изменяемую.

1.1.2 Каждой конкретной конечной нагрузке соответствуют конечные и вполне определенные значения усилий (*свойство единственности решения*). При отсутствии нагрузки

усилия в элементах статически определимых систем равны нулю. Нагрузка, приложенная к основной части конструкции, будет вызывать усилия только в ее элементах.

1.1.3 Геометрические характеристики сечений, деформации элементов, а также характеристики упругих свойств материалов в уравнения равновесия не входят и поэтому не влияют на значения усилий.

1.1.4 Смещения опор и температурные воздействия не вызывают усилий в статически определимой системе.

Стержневые конструкции представляют собой совокупность прямолинейных и (или) криволинейных стержней, соединенных между собой тем или иным способом. Элементы стержневой конструкции скрепляются между собой болтами, заклепками или же свариваются, причем для увеличения жесткости соединения нередко используются накладки и косынки. Размеры соединения обычно существенно меньше длин стержней. Поэтому в стержневых системах оно изображается точкой пересечения осей сходящихся в нем стержней и называется **узлом**.

1.2. Жесткие и шарнирные узлы.

В зависимости от способа имитации реального взаимодействия стержней в соединении различают **жесткие и шарнирные узлы**.

Жесткий узел исключает взаимные смещения и повороты сечений всех сходящихся в нем стержней и моделирует очень жесткое реальное соединение. Такой узел имеет три степени свободы на плоскости, т.к. для описания его положения нужно задать три параметра: поступательные перемещения узла по вертикали и горизонтали и угол его поворота (рис. 1.2.1)

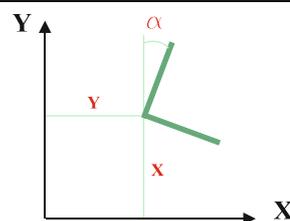


Рис 1.2.1 Жесткий узел.

В **шарнирном узле** сечения стержней могут свободно поворачиваться друг относительно друга. Он имеет две степени свободы на плоскости т.к. для описания его положения нужно задать два параметра - поступательные перемещения узла по вертикали и горизонтали. Понятия поворота шарнирного узла не существует, поскольку углы поворотов примыкающих к нему стержней отличаются. (Рис.1.2.2). Пусть в шарнирном узле сходятся n_c стержней. Кратностью шарнирного узла называется число $n_k = n_c - 1$. Шарнирный узел, соединяющий два стержня, называется одиночным, т.к. его кратность равна единице, три стержня - двойным, т.к. его кратность равна двум, и т.д. (рис. 1.2.3-1.2.4).

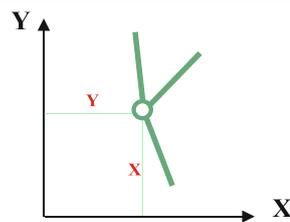


Рис 1.2.2 Шарнирный узел.



Рис 1.2.3 Одиночный шарнир.



Рис 1.2.4 Двойной шарнир.

Такие узлы вводятся в стержневую систему в тех случаях, когда жесткость реального соединения в отношении поворотов стержней не играет существенной роли и ею можно пренебречь.

1.3.Связи и их характеристики.

Плоская стержневая система прикрепляется к основанию исключительно в узловых точках.

Всякое устройство, препятствующее изменению взаимного положения элементов системы (налагающее ограничения на перемещения), называется *связью*. Связь, соединяющая сооружение с основанием, называется *опорой (опорной связью)*.

Каждая связь имеет две характеристики. *Кинематическая характеристика* определяет, каким перемещениям одного элемента относительно другого препятствует связь, а *статическая характеристика* - какие реакции могут в ней возникать. Далее рассмотрим основные способы идеализации связей между элементами плоских расчетных схем.

Под опорным стержнем условимся понимать упругий или недеформируемый ферменный стержень, соединяющий опорный шарнир с каким-либо ферменным или другим шарнирным узлом. Поясним смысл опорных стержней, ограничившись рассмотрением наиболее употребительных прикреплений к опорам плоских стержневых систем.

Связь, препятствующая перемещению какой-либо её точки в одном из направлений, например по вертикали или горизонтали, называется **катковой опорой** (рис.1.3.1.).

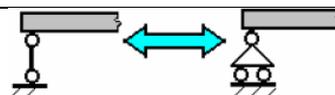


Рис.1.3.1. Катковая опора и её изображение.

Если в точке тела приложены две связи, не лежащие на одной прямой, то они ограничивают любые поступательные перемещения этой точки, т.е. по вертикали и горизонтали. Такие две связи называются **неподвижной шарнирной опорой** (рис.1.3.2).

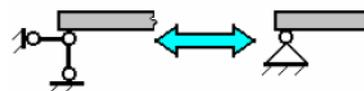


Рис.1.3.2. Шарнирная неподвижная опора и её изображение.

Жёсткое соединение элементов характеризуется полным отсутствием взаимных перемещений элементов. Разместим на бесконечно малом расстоянии от закреплённой двумя связями точки (шарнирной неподвижной опоры) еще одну, третью связь. Если линии действия этих трёх связей не будут пересекаться в одной точке, то бесконечно малый элемент, находящийся в зоне наложения связей, окажется закреплённым не только от поступательных перемещений (как при наличии шарнирной неподвижной опоры), но и поворота. Такие три связи, ограничивающие перемещения по всем трём степеням свободы на плоскости, называются **жёсткой заделкой** (рис.1.3.3.).

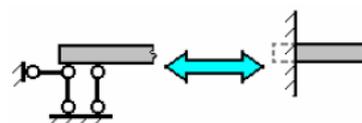


Рис.1.3.3. Жёсткая заделка и её изображение.

В строительной механике в расчётных схемах могут использоваться и другие виды опорных закреплений, в частности: **скользящая заделка**. Эта опорная связь препятствует повороту и линейным перемещениям, перпендикулярным оси закрепленного элемента, и допускает линейные перемещения вдоль его оси (рис 1.3.4.).



Рис.1.3.4. Скользящая заделка и её изображение.

1.4. Реакции опорных связей.

Для определения всех сил, действующих на балку, необходимо определять три неизвестные опорные реакции из условий равновесия тела, нагруженного заданными внешними силами и искомыми усилиями в связях.

При плоской системе сил уравнения равновесия могут быть записаны в различной форме:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_k = 0;$$

Точка k – любая точка, лежащая в плоскости действия сил.

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum X = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0$$

При этом точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

При расчетах вводят две составляющих реакции: силу и момент.

Пусть к элементу бесконечно малого размера извне приложена сила P . Если элемент закреплён связью по направлению действия этой силы, то его перемещение по данному направлению будет невозможным. Согласно первому закону Ньютона, равнодействующая всех сил, приложенных к элементу, находящемуся в состоянии равновесия, должна быть равна нулю. Это достигается за счёт возникновения усилия в связи, называемого **реакцией связи**. Величина реакции должна быть равна по величине и противоположна по направлению внешнему усилию P , приложенному к элементу (рис.1.4.1.).

Если направление приложенной к элементу внешней силы и направление связи не совпадают, то величина реакции связи, очевидно, будет равна по величине и противоположна по направлению проекции силы P на ось, совпадающую с направлением связи (рис.1.4.2.). В этом случае об обеспечении равновесия фрагмента в другом направлении (на рис.1.4.2) – (горизонтальном) следует позаботиться отдельно.

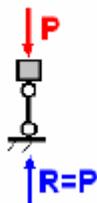


Рис.1.4.1. Реакция связи.

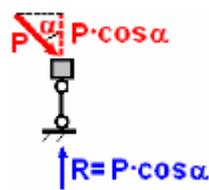


Рис.1.4.2. Реакция связи в случае наклонной внешней силы.

Поскольку катковая опора соответствует одной связи, в этой опоре возникает одна реакция по направлению наложенной связи (рис.1.4.3.).

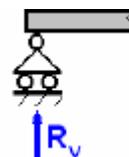
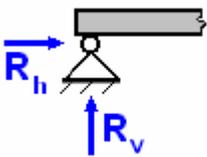
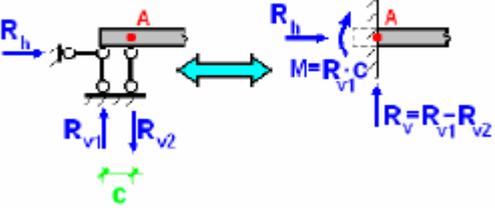


Рис.1.4.3. Реакция в катковой опоре.

<p>Шарнирная неподвижная опора соответствует двум связям, поэтому можно утверждать, что в ней возникают две опорные реакции, например, по вертикали и по горизонтали (рис.1.4.4.).</p>	 <p>Рис.1.4.4. Реакции в шарнирной неподвижной опоре.</p>
<p>Жёсткая заделка соответствует трём связям, поэтому в ней возникают три опорные реакции. Эти три реакции можно представить в виде двух сил (в вертикальном и горизонтальном направлениях) и момента, приложенных в точке защемления (точке А на рис.1.4.5.).</p>	 <p>Рис. 1.4.5. Реакции в жёсткой заделке.</p>
<p>При расчетах скользящей заделки вводят две составляющих реакции: силу и момент. Схематично скользящая заделка может быть представлена в виде двух параллельных одиночных связей (рис. 1.4.6.).</p>	 <p>Рис. 1.4.6. Реакции в жёсткой заделке.</p>

1.5 Порядок выполнения статического расчета и построение эпюр внутренних усилий.

Целью статического расчета стержневой системы является определение всех внутренних сил во всех ее элементах или сечений элементов системы и сводится к вычислению изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в сечениях и построению эпюр внутренних усилий.

Эпюрой внутреннего усилия называется график, каждая ордината которого показывает значение данного усилия в сечении стержня, соответствующем этой ординате. При этом на эпюрах Q и N ординаты можно откладывать с любой стороны от оси стержня, только обязательно необходимо указать знак усилия. На эпюре M ординаты откладываются со стороны растянутых волокон, что является его знаком.

Порядок выполнения расчета:

1. Рассматривая равновесие всей системы в целом или любой её части (один элемент или группа элементов), определяем опорные реакции и усилия взаимодействия в шарнирах. Для любой плоской системы сил можно записать три независимых уравнения равновесия всей системы под действием внешней нагрузки и сил, заменяющих опорные связи - опорные реакции, которые действуют вдоль связи и первоначально могут быть направлены произвольно. Если в каком-либо сечении имеется шарнир, то для определения опорных реакций можно использовать условие, что изгибающий момент в сечении, совпадающем с шарниром, равен нулю. При этом желательно каждый раз записывать такое уравнение, в которое войдет только одна искомая реакция и внешняя нагрузка, чтобы не решать систему уравнений. Если в результате решения уравнения реакция

получится со знаком плюс, то ее первоначальное направление было выбрано правильно. **Если реакция получилась со знаком минус, необходимо изменить ее направление на противоположное, а не указывать знак.**

2. Найти внутренние силовые факторы в характерных сечениях любого элемента методом сечений для этого:

- а) необходимо мысленно расцезть стержень (стержневую систему) в интересующем месте;
- б) отбросить одну из образовавшихся частей;
- в) заменить действие отброшенной части на оставшуюся внутренними усилиями (рисунок 1.4.7.);
- г) оставить уравнения статического равновесия всех сил, приложенных к оставшейся части.

3. Построить эпюры всех внутренних сил - изгибающего момента M_p , поперечной силы Q_p и продольной N_p сил.

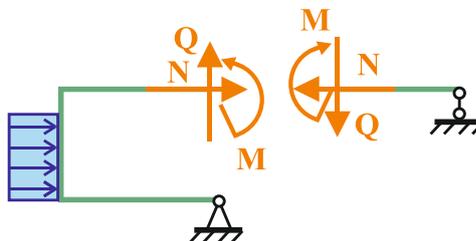


Рис. 1.4.7.

Изгибающим моментом называется сумма статических моментов всех односторонних сил относительно центральной оси рассматриваемого сечения перпендикулярной силовой плоскости. При построении эпюр изгибающих моментов используется другое правило знаков (правило относительных знаков), при котором знак момента не зависит от направления внешних осей. Эпюра моментов строится на оси бруса, и ордината момента откладывается в сторону выпуклости упругой линии, т.е., как говорят, эпюра моментов строится со стороны растянутых волокон.

Поперечной силой называется сумма проекций всех односторонних сил на ось, перпендикулярную оси стержня и лежащую в силовой плоскости. Поперечная сила считается положительной, если вызывает вращение отсеченного элемента по часовой стрелке.

Продольной силой называется сумма проекций всех односторонних сил на ось стержня. Продольная сила считается положительной, если вызывает растяжение отсеченного элемента, и отрицательной, если – сжатие.

Из соотношений можно сделать некоторые общие выводы о характере эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для прямого бруса.

1. Если брус нагружен равномерно распределённой нагрузкой интенсивности $q = \text{const}$, очевидно, функция Q будет линейной, а M - квадратичной.
2. Если брус нагружен сосредоточенными силами или моментами, то в промежутках между точками их приложения интенсивность $q = 0$. Следовательно, $Q = \text{const}$, а M является

линейной функцией. В точках приложения сосредоточенных сил эпюра Q претерпевает скачок на величину внешней силы, а в эпюре M возникает соответствующий излом (разрыв в производной).

При построении эпюр внутренних усилий по вычисленным в характерных сечениях значениям необходимо иметь в виду следующие особенности:

1) ординаты эпюр откладываются перпендикулярно оси стержня: в эпюре M – со стороны растянутого волокна без указания знаков; в эпюре Q – с двух сторон от оси стержня; в эпюре N – симметрично от оси стержня с указанием знаков;

2) каждый узел рамы должен находиться в равновесии;

3) на прямолинейном незагруженном участке рамы изгибающий момент всегда изменяется по линейному закону, а поперечная и продольная силы постоянны;

4) при действии на элемент равномерно распределенной нагрузки изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы, поперечная сила – по линейному закону, а продольная сила постоянна, если действующая нагрузка перпендикулярна оси стержня, и изменяется по линейному закону, если нагрузка не перпендикулярна оси стержня;

5) если на элемент системы действует нагрузка в виде сосредоточенной силы, то в том сечении, где она приложена, на эпюре M будем иметь точку излома в сторону приложения силы; на эпюре Q скачок на величину этой силы, если она перпендикулярна оси стержня, и на величину проекции этой силы на ось; перпендикулярную оси стержня, если нагрузка не перпендикулярна оси элемента; на эпюре N скачок будет только в том случае, если нагрузка не перпендикулярна оси стержня, и его величина будет равна проекции этой силы на ось стержня;

6) в эпюре Q разрывы – "скачки" функции в сечениях над опорами соответствуют по величине и по направлению опорным реакциям;

7) в точках расположения шарниров эпюра изгибающего момента проходит через ноль.

8) в точках, где $Q=0$, график изгибающего момента имеет экстремум.

9) если на элемент рамы действует нагрузка в виде сосредоточенного момента, то в том сечении, где он приложен, на эпюре M будет скачок на величину этого момента с параллельными ветвями, очерчивающими эпюру; на эпюры Q и N эта нагрузка влияния не оказывает;

10) между изгибающим моментом и поперечной силой существует известная зависимость $\frac{dM}{dx} = Q$, согласно которой, если эпюра M на рассматриваемом участке нисходящая, то Q положительна, если эпюра M восходящая, то Q отрицательна.

Построив эпюры M , Q и N необходимо выполнить статическую проверку, которая состоит в том, что любая отсеченная часть рамы должна находиться в равновесии и, таким образом, должны выполняться условия равновесия статики.

2.1 Примеры расчета.

Построить эпюры внутренних усилий M , Q , N в однопролетной статически определимой балки, находящейся под действием заданной нагрузки.

Пример расчета №1.

Исходные данные.

Схема балки приведена на рис.2.1.1.

Величины действующих нагрузок: $P = 10 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кНм}$, $q = 10 \text{ кН/м}$. Длина: $a = 1 \text{ м}$.

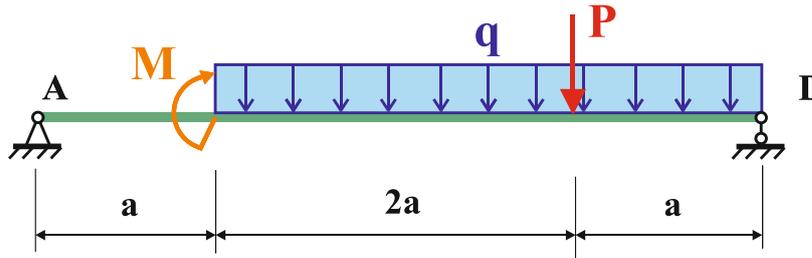


Рис. 2.1.1. Схема балки.

2.1.1.1. Определение опорных реакций.

Вместо опор, расположенных в т. A и D балки, приложим опорные реакции, их направление выбираем произвольно, например, как указано на рис. 2.1.2. В шарнирно-неподвижной опоре A вводим две составляющие реакции R_A и H_A . В шарнирно-подвижной опоре D - одну вертикальную реакцию R_D .

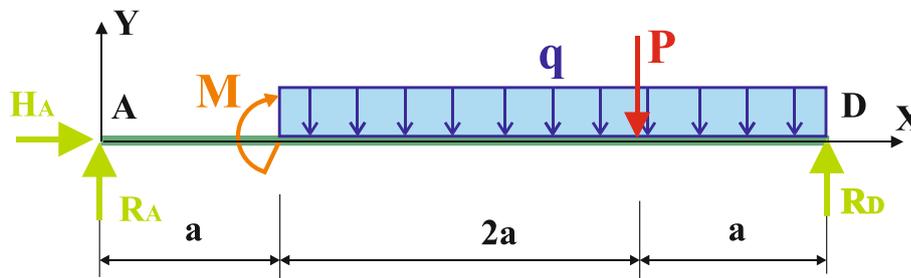


Рис. 2.1.2. Схема реакций в балке.

Система сил, действующих на балку, представляет собой плоскую произвольную систему сил. Для такой системы сил можно составить три линейно-независимых уравнения равновесия. Введем систему координат yOx . Ось « x » вдоль оси балки, а ось « y » вертикально вверх. Составим уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad H_A = 0 \\ \sum M_D &= 0; \quad R_A \cdot 4a + M - 3qa \cdot \frac{3}{2}a - P \cdot a = 0 \\ \sum M_A &= 0; \quad -R_D \cdot 4a + P \cdot 3a + 3qa \left(\frac{3}{2}a + a \right) + M = 0 \end{aligned}$$

Решая эти уравнения находим реакции опор:

$$R_A = \frac{-M + 4,5qa^2 - P \cdot a}{4a} = \frac{-20 + 45 + 10}{4 \cdot 1} = 8,75 \text{ kH}$$

$$R_D = \frac{P \cdot 3a + 3qa \cdot 2,5a + M}{4a} = \frac{30 + 75 + 10}{4 \cdot 1} = 31,25 \text{ kH}$$

Проверяем правильность определения реакций. Для этого составим еще одно уравнение равновесия, а именно сумму проекций сил на вертикальную ось «у».

$$\sum Y = 0; \quad R_A - 3qa - P + R_D = 0$$

$$8,75 - 30 - 10 + 31,25 = 0$$

$$0 = 0$$

2.1.2. Составление выражений для поперечных сил Q и изгибающих моментов M по участкам.

Определяем границы участков балки для построения эпюр. Границы - это точки расположенные на балке, в которых изменяется или появляются новые внешние усилия. В примере балку надо поделить на 3 части. Рис. 2.1.3.

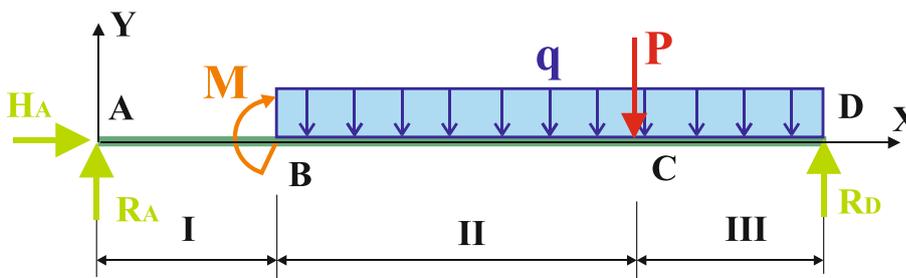
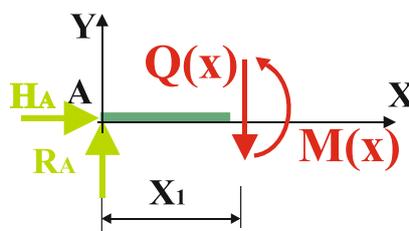


Рис. 2.1.3.

Участок I (AB) $0 \leq X_1 \leq a = 1\text{м}$ (рассматривается часть балки слева от сечения).



$$Q = R_A = 8,75 \text{ (кН)}$$

$$M = R_A \cdot X_1 = 8,75 \cdot X_1 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

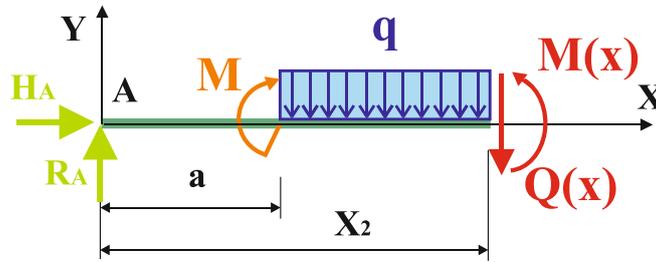
Поперечная сила Q является величиной постоянной равной $8,75\text{кН}$ и не зависит от X_1 (эпюра-линия параллельная оси «X»).

Изгибающий момент M зависит от X_1 линейно (эпюра-наклонная прямая линия). Вычисляем M на границах участка:

$$X = 0; \quad M = 0 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

$$X = 1; \quad M = 8,75 \cdot 1 = 8,75 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

Участок II (BC) $a = 1\text{м} \leq X_2 \leq 3a = 3\text{м}$ (рассматривается часть балки слева от сечения).



$$Q = R_A - q(X_2 - a) = 8,75 - 10(X_2 - 1)$$

Поперечная сила Q является линейной функцией X_2 (эпюра-наклонная прямая).

$$X = 1; Q = 8,75 - 10(1 - 1) = 8,75 \text{ (кН)}$$

$$X = 3; Q = 8,75 - 10(3 - 1) = -11,25 \text{ (кН)}$$

Так как Q имеет разные знаки на границах участка, то обязательно будет точка с абсциссой X_0 , в которой $Q(X_0)=0$. Найдем эту точку. Для этого приравняем выражение для $Q(X_0)$ нулю.

$$Q(X_0) = 8,75 - 10(X_0 - 1)$$

Решая это уравнение находим X_0 :

$$X_0 = \frac{8,75}{10} + 1 = 1,875 \text{ (м)};$$

$$M(X) = R_A \cdot X_2 + M - q(X_2 - a) \cdot \frac{X_2 - a}{2} = 8,75 \cdot X_2 + 20 - 5(X_2 - 1)^2$$

Изгибающий момент $M(X)$ – является квадратичной функцией X_2 (эпюра-парабола).

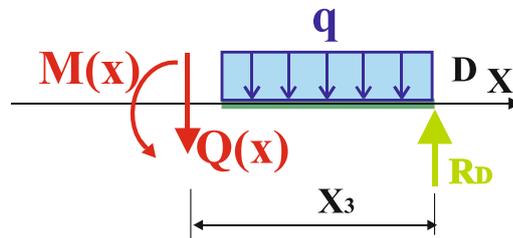
$$X = 1; M = 8,75 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

$$X = 3; M = 8,75 \cdot 3 + 20 - 5 \cdot 2^2 = 26,25 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

Чтобы точно построить параболу необходимо вычислить значение M , в третьей точке. В качестве такой точки необходимо взять значение $X_0=1,875$ м. т.к. в этой точке M , будет иметь экстремум.

$$X = 1,875; M = 8,75 \cdot 1,875 + 20 - 5 \cdot 0,875^2 = 32,58 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

Участок (III) CD $0 \leq X_3 \leq a = 1$ м (рассматривается часть балки справа от сечения).



$$Q = -R_D + qX_3 = -31,25 + 10X_3$$

Поперечная сила Q является линейной функцией (эпюра-наклонная прямая)

$$X = 0 Q = 31,25 \text{ (кН)}$$

$$X = 1; Q = -21,25 \text{ (кН)}$$

$$M(X_3) = R_D \cdot X_3 - qX_3 \cdot \frac{X_3}{2} = 31,25 \cdot X_3 - 5 \cdot X_3^2$$

Изгибающий момент M является квадратичной функцией (эюра-парабола).

$$X = 0 \quad M = 0 \quad (\text{kHm})$$

$$X = 1; \quad Q = 26,25 \quad (\text{kHm})$$

На заданном участке параболу можно построить по двум точкам, т.к. она не будет иметь экстремума (Она участке не проходит через значение ноль).

2.1.3. Построение эюр.

По полученным значениям строим эюры Q и M для всей балки рис. 2.1.4. Построенные эюры необходимо проверить, используя правила контроля эюр.

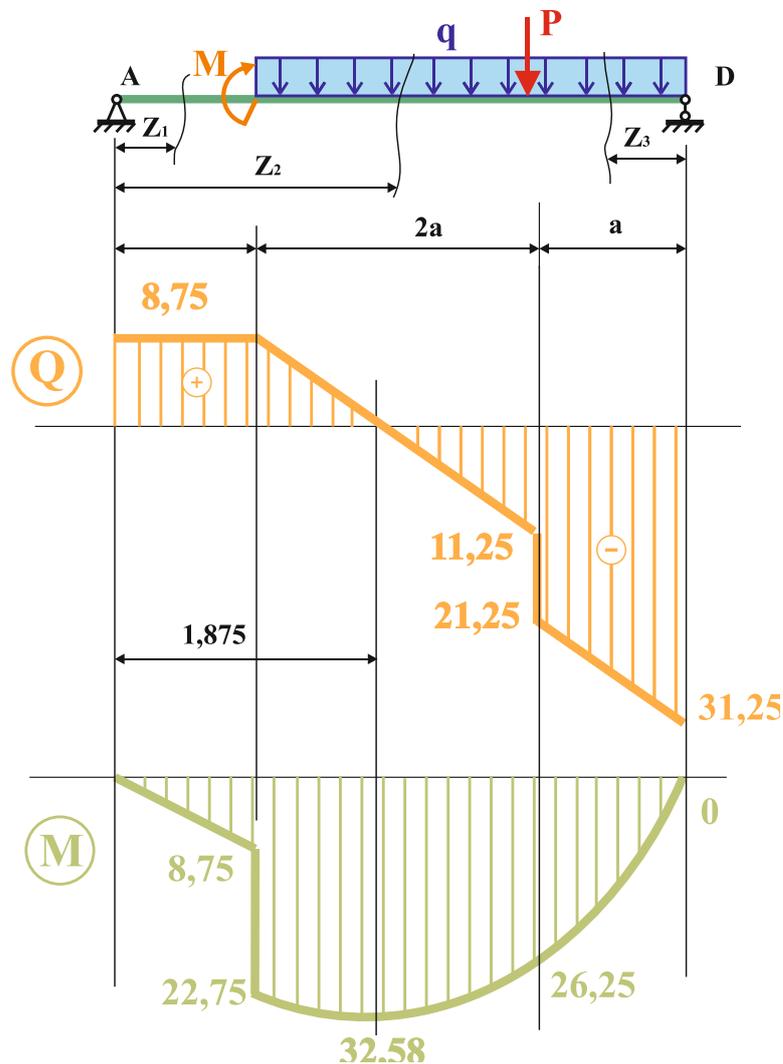


Рис. 2.1.4. Эюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Пример расчета №2.

Построить эюры моментов и перерезывающих сил в балке, находящейся под действием внешних нагрузок.

Исходные данные.

Схема балки приведена на рис.2.2.1. Величины действующих нагрузок: $P=10$ кН, $M=2$ кНм, $q=3$ кН/м. Длина $L=2$ м.

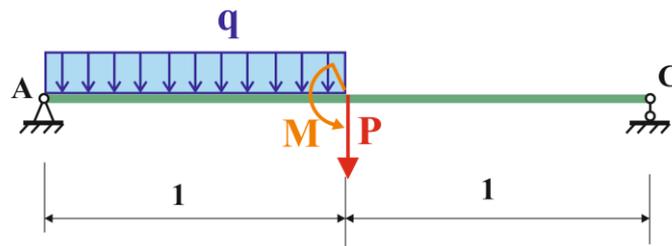


Рис.2.2.1.

Решение.

1. Определяем реакции опор балки. Для этого отбрасываем связи и заменяем их действие двумя вертикальными реакциями R_A и R_C (рис. 2.2.2.).

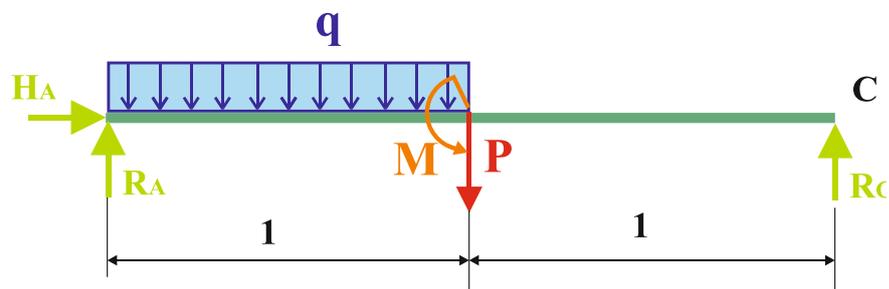


Рис. 2.2.2

Составляем два уравнения моментов относительно точек A и B

$$\sum M_A = 0; \quad -R_C \cdot 2 + q \cdot 1 \cdot 0,5 - M + P \cdot 1 = -R_C \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0,5 - 2 + 10 \cdot 1 = 0$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_A \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot 1,5 - P \cdot 1 - M = R_A \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1 - 2 = 0$$

Решаем уравнения. Определяем $R_A = 8,25$ кН и $R_C = 4,75$ кН.

2. Выполняем проверку решения. Составляем уравнение проекции на вертикальную ось

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_C - P - q \cdot 1 = 8,25 + 4,75 - 10 - 3 \cdot 1 = 0$$

Уравнение удовлетворяется тождественно, реакции найдены верно.

Построение эпюр.

Выбираем начало координат на левом конце балки. Определяем границы участков балки для построения эпюр. Границы - это точки расположенные на балке, в которых изменяется или появляются новые внешние усилия. В примере балку надо поделить на 2 части. Рис. 2.2.3.

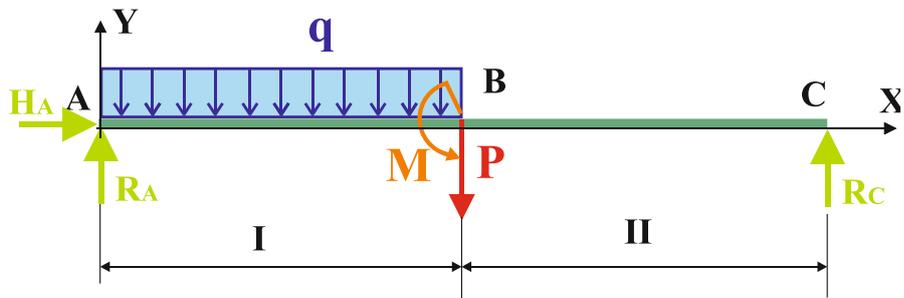


Рис. 2.2.3.

4. Разрезаем участок I балки в некоторой произвольной средней точке. Для первого участка $0 \leq x \leq 1$. Отбрасываем правую часть балки, заменяя ее действие реакциями - моментом M и поперечной силой Q (на рис. 2.2.4.) Из условия равновесия оставшейся части определяем реакции $M(x)$ и $Q(x)$ как функции x .

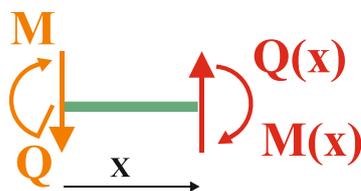


Рис. 2.2.4.

Выписываем значения момента и перерезывающей силы на участке I при $0 \leq x \leq 1$, руководствуясь принятым правилом знаков (рис. 2.2.5.). На этом участке действует реакция опоры R_A и распределенная нагрузка.

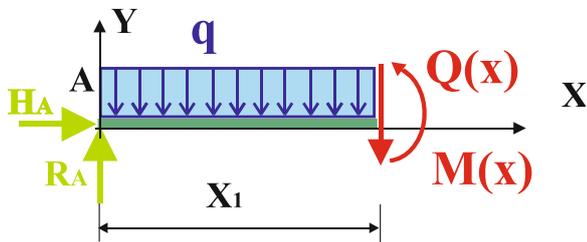


Рис. 2.2.5.

Поэтому выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M получаются:

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}$$

$$Q(x_1) = R_A - q \cdot x_1$$

Используя полученные выражения определим Q и M в точках A и слева от B:

$$x = 0; \quad Q = R_A = 8,25 \text{ (кН)}$$

$$M = 0 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

$$x = 1; \quad Q = 1 - 3 \cdot 1 = -2 \text{ (кН)}$$

$$M = 8,25 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1^2}{2} = 6,75 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

Разрезаем участок II балки в некоторой произвольной средней точке. Отбрасываем левую часть балки, заменяя ее действие реакциями - моментом $M(x)$ и поперечной силой $Q(x)$ (на рис. 2.2.6.).

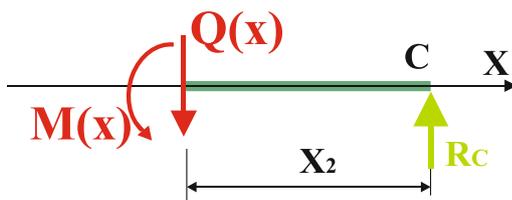


Рис. 2.2.6.

Из условия равновесия оставшейся части определяем реакции $M(x)$ и $Q(x)$ как функции X . Выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M получаются:

$$M(X_2) = R_c \cdot X_2$$

$$Q(X_1) = R_c$$

Используя полученные выражения определим Q и M в точках С и справа от В:

$$X = 1; Q = R_c = 4,75 \text{ (кН)}$$

$$M = 4,75 \cdot 1 = 4,75 \text{ (кНм)}$$

$$X = 2; Q = R_c = 4,75 \text{ (кН)}$$

$$M = 4,75 \cdot 0 = 0 \text{ (кНм)}$$

Используя найденные выражения функций на отдельных участках, строим искомые эпюры. (Рис.2.2.7.).

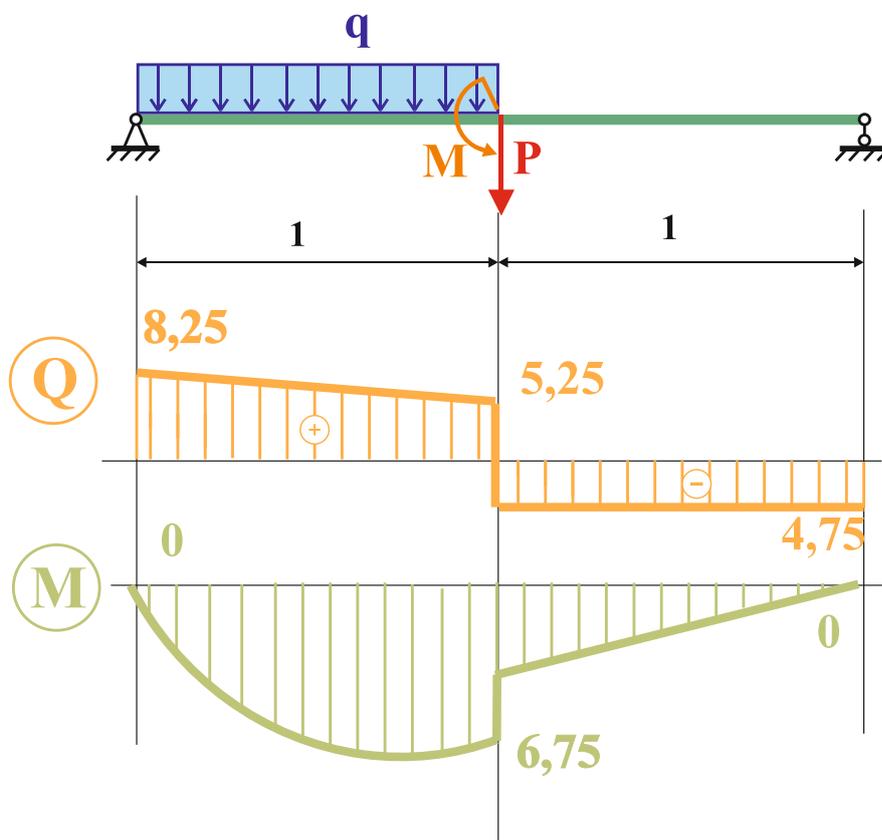


Рис.2.2.7.. Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Пример расчета №3.

Построить эпюры моментов и перерезывающих сил в балке, находящейся под действием вертикальной сосредоточенной нагрузки $P=2$ кН, распределенной силы $q=6$ кН/м и момента $M=10$ кНм (рис. 2.3.1). Размеры даны в метрах.

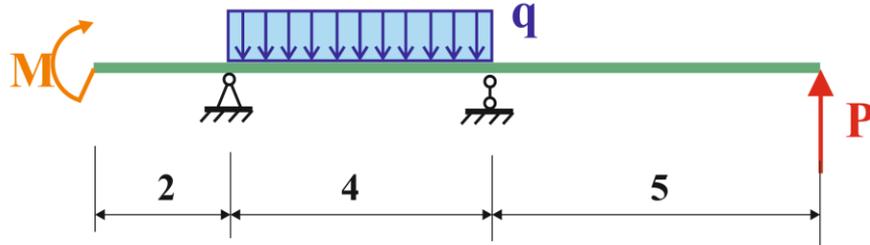


Рис. 2.3.1

Решение

1. Определяем реакции опор балки. Для этого отбрасываем связи и заменяем их действие двумя вертикальными реакциями R_A и R_B (рис. 2.3.2.).

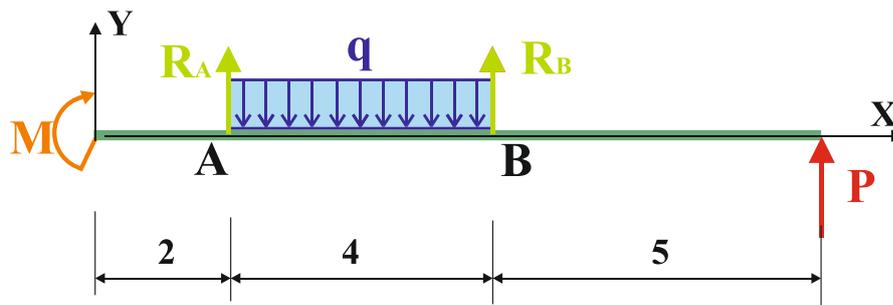


Рис. 2.3.2.

Составляем два уравнения моментов относительно точек A и B

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B \cdot 4 - P \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 2 + M = 0$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 4 - P \cdot 5 - q \cdot 4 \cdot 2 + M = 0$$

Решаем уравнения. Определяем $R_A=12$ кН и $R_B=10$ кН.

2. Выполняем проверку решения. Составляем уравнение проекции на вертикальную ось

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B + P - q \cdot 4 = 12 + 10 + 2 - 24 = 0$$

Уравнение удовлетворяется тождественно, реакции найдены верно.

3. Определяем границы участков балки для построения эпюр. Балка имеет три участка I, II, III (рис. 2.3.3.). Границами участков являются концы балки, опоры A и B .

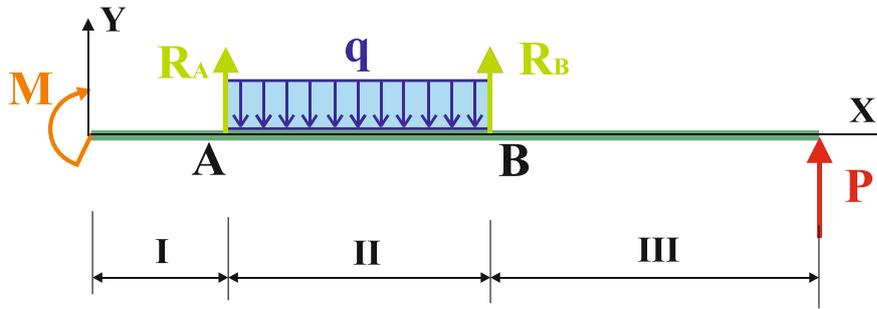


Рис. 2.3.3.

4. Выбираем начало координат на левом конце балки. Разрезаем участок I рамы в некоторой произвольной средней точке. Для первого участка $0 \leq X \leq 2$. Отбрасываем правую часть балки, заменяя ее действие реакциями - моментом $M(x)$ и поперечной силой $Q(x)$. Из условия равновесия оставшейся части определяем реакции $M(x)$ и $Q(x)$ как функции X .

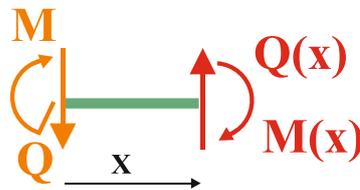


Рис. 2.3.4.

Выписываем значения момента и перерезывающей силы на участке I при $0 \leq X \leq 2$, руководствуясь принятым правилом знаков. К этому участку приложен только момент, поэтому выражения получаются простые.

$$M(x) = M, Q(x) = 0.$$

Для второго участка $2 \leq X \leq 6$ (рис. 2.3.5). Распределенную нагрузку q длиной $X-2$ заменяем равнодействующей $q(X-2)$, приложенной в ее центре (рис. 2.3.5.), т.е. на расстоянии $(X-2)/2$ от ее правого конца.

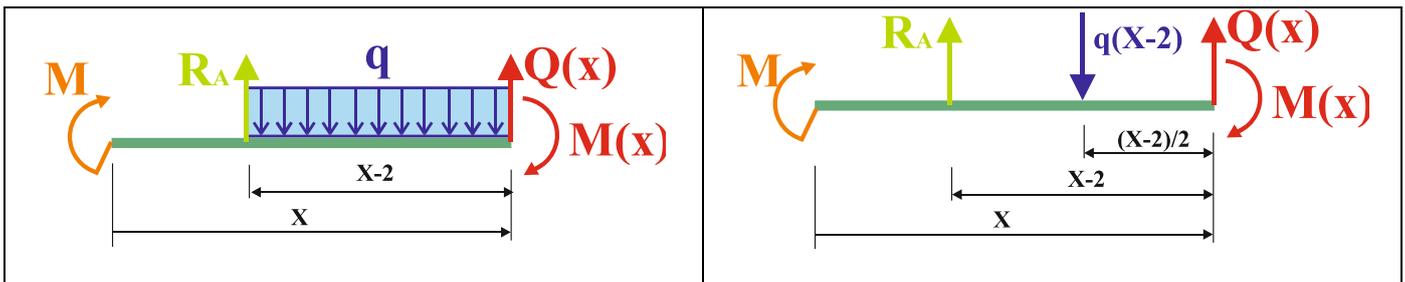


Рис. 2.3.5.

Выписываем значения момента и перерезывающей силы на участке II при $2 \leq x \leq 6$, руководствуясь принятым правилом знаков. Моменты сил, приложенных к участку балки, берем относительно сечения, т.е. правого конца, со знаком +, если поворот силы виден по часовой стрелке.

$$M(x) = M + R_A(x - 2) - \frac{q(x - 2)^2}{2}$$

$$Q(x) = R_A - q(x - 2)$$

Для третьего участка $6 \leq X \leq 11$ (рис. 2.3.6). Распределенную нагрузку q на длине 4 м заменяем равнодействующей $4q$, приложенной в середине пролета AB (рис. 2.3.6).

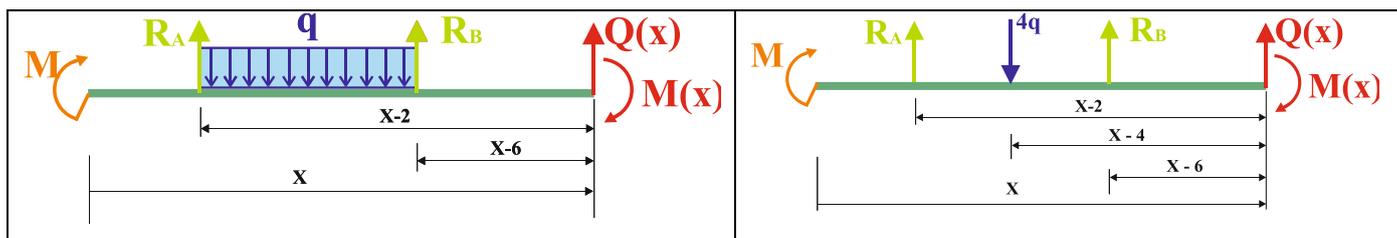


Рис. 2.3.6.

Выписываем значения момента и перерезывающей силы на участке III при $6 \leq X \leq 11$, руководствуясь принятым правилом знаков. Моменты сил, приложенных к участку балки, берем относительно сечения, т.е. правого конца, со знаком +, если поворот силы виден по часовой стрелке.

$$M(x) = M + R_A(x - 2) + R_B(x - 6) - 4q(x - 4)$$

$$Q(x) = R_A + R_B - 4q$$

5. Используя найденные выражения функций на отдельных участках, строим искомые зависимости для всей балки при $0 \leq X \leq L$. Для удобства построения, проверки и для большей наглядности эпюры рисуем одну под другой, совмещая также с рисунком балки с нагрузкой (рис. 2.3.7.).

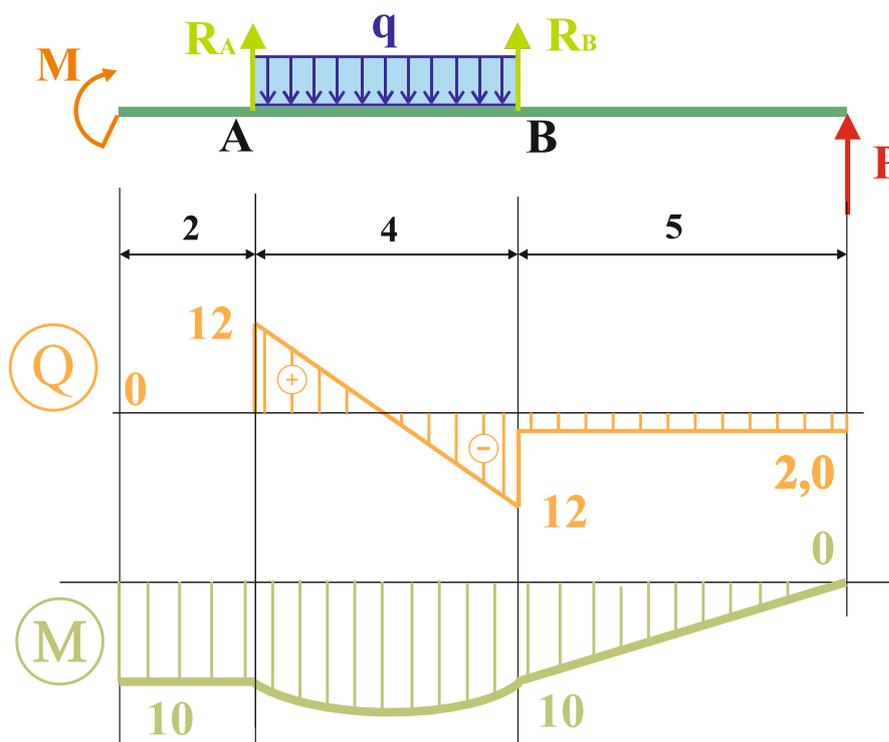


Рис. 2.3.7.. Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

6. Проверяем выполнение дифференциальной зависимости $Q(x) = dM(x)/dx$. На эпюре Q есть участок II, где перерезывающая сила Q обращается в ноль. Согласно дифференциальной зависимости в этом месте момент имеет максимум. Находим значение $x = x^*$, где $Q(x) = 0$. Для

этого приравняем нулю выражение $Q(x)$ на втором участке $Q(x)=R_A-q(x^*-2)=0$, откуда находим $x^*=4$ м. Вычисляем соответствующее значение момента.

$$M(x^*) = M + R_A(x - 2) - \frac{q(x - 2)^2}{2} = 10 + 12 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 22 \text{ кНм}$$

Заметим также, что в тех точках, где на балку действуют сосредоточенные силы, там эпюра моментов имеет точку излома, а эпюра перерезывающих сил - скачок. Скачок на эпюре моментов соответствует сосредоточенному моменту. В данном примере он незаметен, так как приходится на начало балки.

Замечание. Значение момента в середине участка длиной L , где действует равномерно распределенная нагрузка q , можно вычислить по формуле $(M_1+M_2)/2+ql^2/8$, где M_1 и M_2 - значения эпюры на концах участка.

Пример расчета №4.

От заданной нагрузки определить внутренние усилия в сечениях рамы (рис.2.4.1.) и построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N сил. При определении усилий направление осей проекций принято в соответствии с декартовой системой координат.

Исходные данные.

Величины действующих нагрузок: $P_1=10$ кН, $P_2=20$ кН, $M=7$ кНм, $q=2$ кН/м.

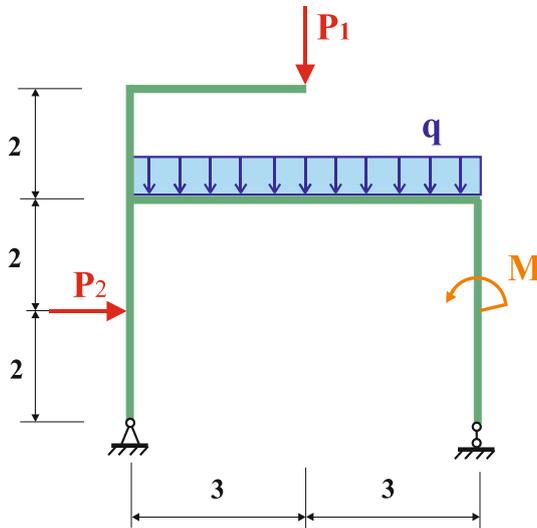


Рис.2.4.1.

1. Определяем реакции опор рамы. Для этого отбрасываем связи и заменяем их действие двумя вертикальными реакциями R_A и R_C (рис. 2.4.2.).

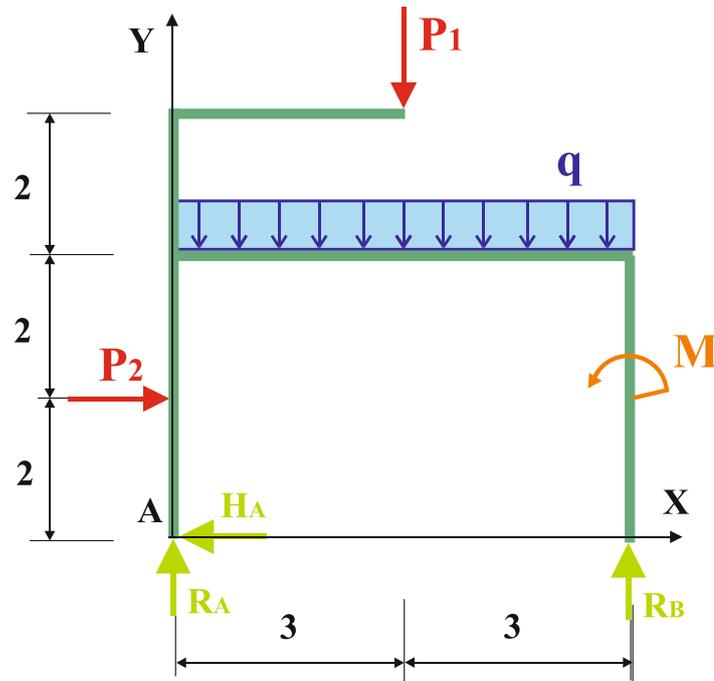


Рис. 2.4.2.

Составляем два уравнения моментов относительно точек A и B :

$$\sum M_A = 0; \quad P_2 \cdot 2 + P_1 \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - R_B \cdot 6 - M = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 3 - R_B \cdot 6 - 7 = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad P_2 \cdot 2 - P_1 \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} + R_A \cdot 6 - M = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot 3 + R_A \cdot 6 - 7 = 0$$

$$\sum X = 0; \quad -H_A + P_2 = -H_A + 20 = 0$$

Решаем уравнения. Определяем $R_A = 5,5$ кН.; $R_B = 16,5$ кН.; $H_A = 20$ кН

2. Выполняем проверку решения. Составляем уравнение проекции на вертикальную ось Y :

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - P_1 - q \cdot 6 = 5,5 + 16,5 - 10 - 2 \cdot 6 = 0$$

Уравнение удовлетворяется тождественно, реакции найдены верно.

2) определяем значения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в характерных сечениях рамы, рассматривая равновесие отсеченных частей рамы. Характерные точки расположены в опорах, местах приложения внешних сосредоточенных и распределенных нагрузок, местах изменения направления оси стержней или в точках где необходимо определить внутренние усилия (рис.2.4.3.).

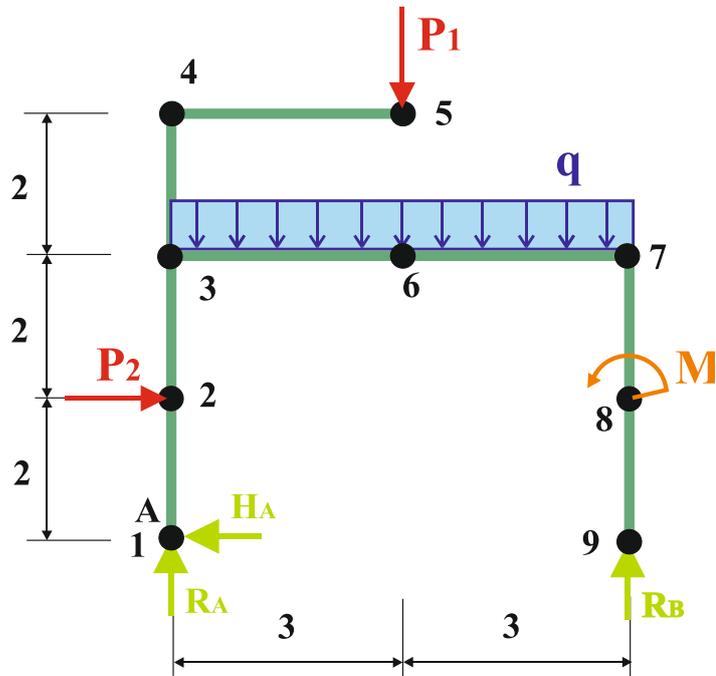


Рис. 2.4.3.

Для определения внутренних усилий в произвольном сечении X, в стержнях рамы, рассмотрим последовательно равновесие узлов системы под действием приложенных внешних сил.

Узел №1.

$\Sigma M_I = 0; M_I + H_A \cdot 0 = 0, M_I = 0$ $\Sigma X = 0; H_A + Q_I = -20 + Q_I = 0; Q_I = 20 \text{ кН,}$ $\Sigma Y = 0; R_A + N_I = 5,5 + N_I = 0; N_I = -5,5 \text{ кН (стержень сжат).}$	
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Узел №2.(ниже узла)

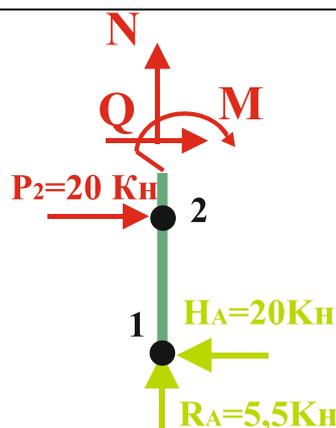
$\Sigma M_{2H} = 0; M_{2H} + H_A \cdot 2 = M_{2H} + 20 \cdot 2 = 0, M_{2H} = -40 \text{ кНм (растянуты правые волокна),}$ $\Sigma X = 0; -H_A + Q_{2H} = -20 + Q_{2H} = 0; Q_{2H} = 20 \text{ кН,}$ $\Sigma Y = 0; R_A + N_{2H} = 5,5 + N_{2H} = 0; N_{2H} = -5,5 \text{ кН (стержень сжат).}$	
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Узел №2.(выше узла)

$\Sigma M_{2B}=0; M_{2B}+P_2 \cdot 2=M_{2B}+20 \cdot 2=0, M_{2B}=-40$ кНм (растянуты правые волокна),

$\Sigma X=0; Q_{2B}+P_2-H_A=Q_{2B}+20-20=0; Q_{2B}=0,$

$\Sigma Y=0; N_{2B}+R_A=N_{2B}+5,5=0, N_{2B}=-5,5$ кН (стержень сжат).

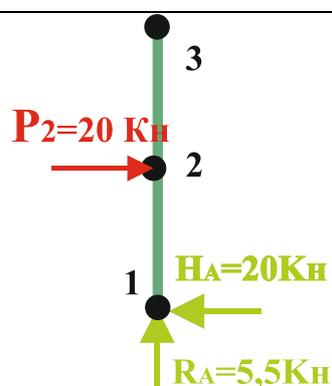


Узел №3.(ниже узла)

$\Sigma M_{3H}=0; M_{3H}-P_2 \cdot 2+H_A \cdot 4=M_{3H}-20 \cdot 2+20 \cdot 4=0, M_{3H}=-40$ кНм (растянуты правые волокна),

$\Sigma X=0; Q_{3H}+P_2-H_A=Q_{3H}+20-20=0; Q_{3H}=0,$

$\Sigma Y=0; N_{3H}+R_A=N_{3H}+5,5=0, N_{3H}=-5,5$ кН (стержень сжат).

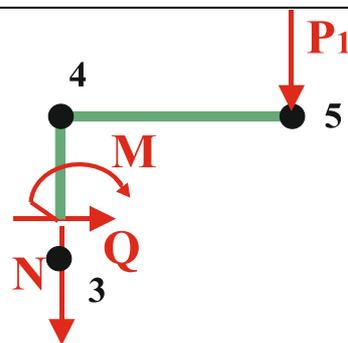


Узел №3.(выше узла)

$\Sigma M_{3B}=0; P_1 \cdot 3+M_{3B}=10 \cdot 3+M_{3B}=0, M_{3B}=-30$ кНм (растянуты левые волокна),

$\Sigma X=0; Q_{3B}=0,$

$\Sigma Y=0; -P_1-N_{3B}=-10-N_{3B}=0, N_{3B}=-10$ кН (стержень сжат).

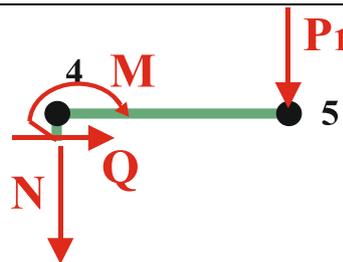


Узел №4.(ниже узла)

$\Sigma M_{4H}=0; P_1 \cdot 3+M_{4H}=10 \cdot 3+M_{4H}=0, M_{4H}=-30$ кНм (растянуты левые волокна),

$\Sigma X=0; Q_{4H}=0,$

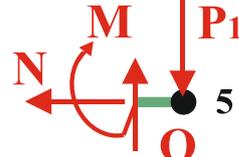
$\Sigma Y=0; -P_1-N_{4H}=-10-N_{4H}=0, N_{4H}=-10$ кН (стержень сжат).



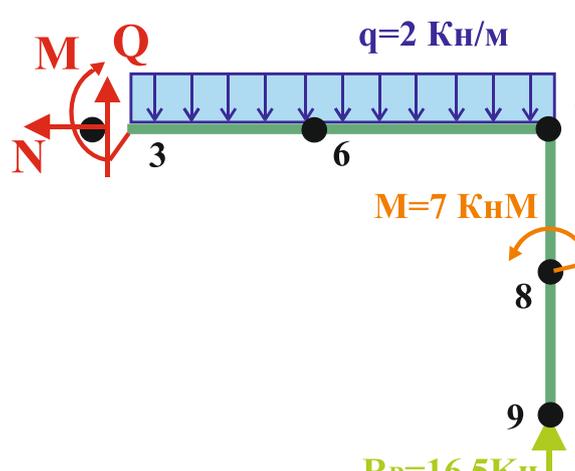
Узел №4.(правее узла)

$\Sigma M_{4П}=0; M_{4П}+P_I \cdot 3=M_{4П}+10 \cdot 3=0, M_{4П}=-30 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна), $\Sigma X=0; N_{4П}=0,$ $\Sigma Y=0; Q_{4П}-P_I=Q_{4П}-10=0, Q_{4П}=10 \text{ кН.}$	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------

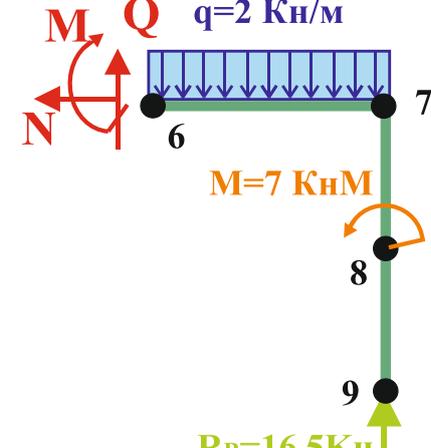
Узел №5.(левее узла)

$\Sigma M_{5Л}=0; M_{5Л}=0,$ $\Sigma X=0; N_{5Л}=0,$ $\Sigma Y=0; Q_{5Л}-P_I=Q_{5Л}-10=0, Q_{5Л}=10 \text{ кН.}$	
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

Узел №3.(правее узла)

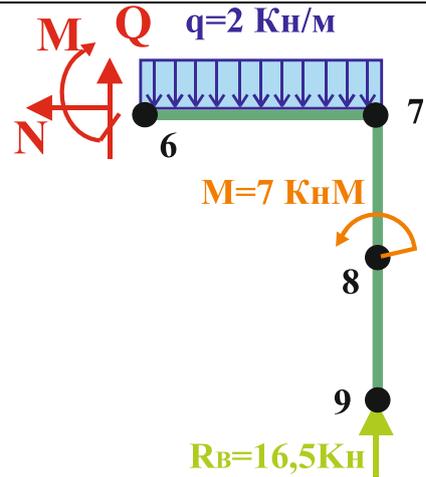
$\Sigma M_{3П}=0; M_{3П}+q \cdot 6 \cdot 3-7-R_B \cdot 6=M_{3П}+2 \cdot 6 \cdot 3-7-16,5 \cdot 6=0,$ $M_{3П}=70 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна), $\Sigma X=0; N_{3П}=0,$ $\Sigma Y=0; Q_{3П}-q \cdot 6+R_B=Q_{3П}-2 \cdot 6+16,5=0, Q_{3П}=-4,5 \text{ кН.}$	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

Узел №6.

$\Sigma M_6=0; M_6+q \cdot 3 \cdot 1,5-7-R_B \cdot 3=M_6+2 \cdot 3 \cdot 1,5-7-16,5 \cdot 3=0, M_6=47,5$ кНм(растянуты нижние волокна), $\Sigma X=0; N_6=0,$ $\Sigma Y=0; Q_6-q \cdot 3+R_B=0, Q_6=-10,5 \text{ кН.}$	
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------

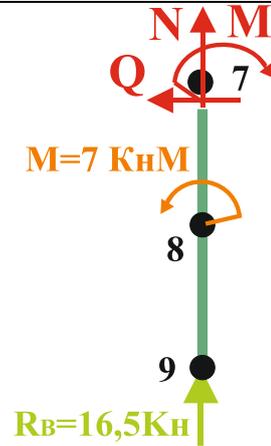
Узел №7.(левее узла)

$\Sigma M_{7Л}=0; M_{7Л}-M=M_{7Л}-7=0, M_{7Л}=7$ кНм (растянуты нижние
волокна),
 $\Sigma X=0; N_{7Л}=0,$
 $\Sigma Y=0; Q_{7Л}+R_B=0, Q_{7Л}=-16,5$ кН.



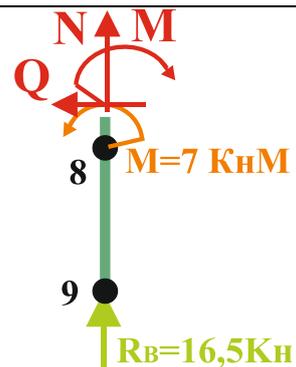
Узел №7.(ниже узла)

$\Sigma M_{7Н}=0; M_{7Н}-M=M_{7Н}-7=0, M_{7Н}=7$ кНм (растянуты левые
волокна),
 $\Sigma X=0; Q_{7Н}=0,$
 $\Sigma Y=0; N_{7Н}+R_B=N_{7Н}+16,5=0, N_{7Н}=-16,5$ кН (стержень сжат).



Узел №8.(выше узла)

$\Sigma M_{8В}=0; M_{8В}-M=M_{8В}-7=0, M_{8В}=7$ кНм (растянуты левые
волокна),
 $\Sigma X=0; Q_{8В}=0,$
 $\Sigma Y=0; N_{8В}+R_B=N_{8В}+16,5=0, N_{8В}=-16,5$ кН (стержень
сжат).



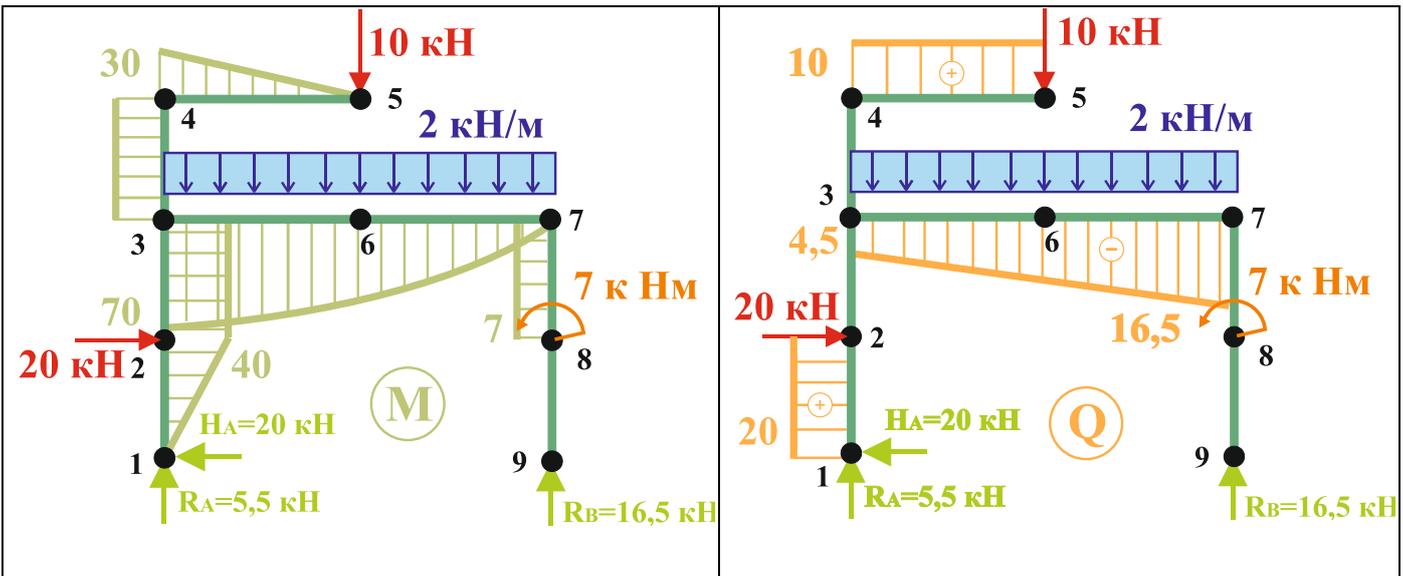
Узел №8.(ниже узла)

$\Sigma M_{8H}=0; M_{8H}=0,$ $\Sigma X=0; Q_{8H}=0,$ $\Sigma Y=0; N_{8H}+R_B=N_{8H}+16,5=0, N_{8H}=-16,5 \text{ кН (стержень сжат).}$	
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Узел №9.(выше узла)

$\Sigma M_{9B}=0; M_{9B}=0,$ $\Sigma X=0; Q_{9B}=0,$ $\Sigma Y=0; N_{9B}+R_B=N_{9B}+16,5=0, N_{9B}=-16,5 \text{ кН (стержень сжат).}$	
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

3)строим эпюры изгибающих моментов M_p , поперечных сил Q_p и продольных N_p сил. Проверяем равновесие узлов (рис.2.4.4.).



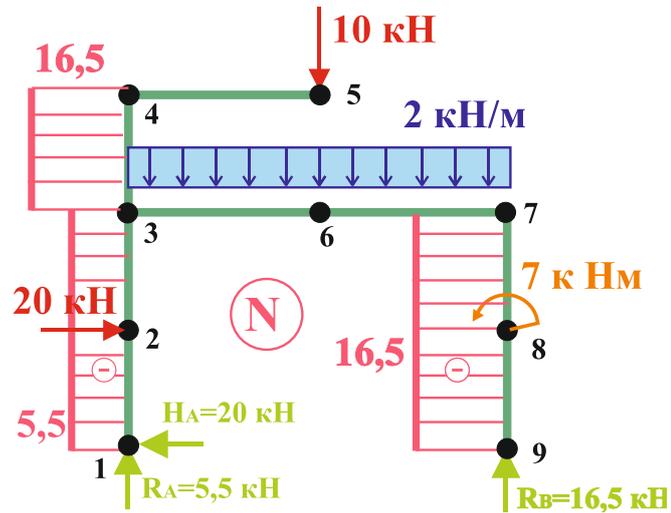


Рис.2.4.4.. Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M.

4) производим статическую проверку правильности расчета, рассматривая равновесие отсеченной сечением I-I части системы (рис.2.4.5).

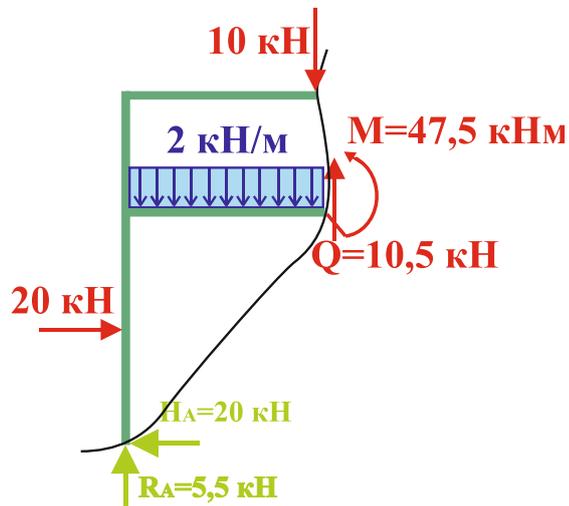


Рис.2.4.5.

$$\Sigma X=0;$$

$$-H_A + P_2 = -20 + 20 = 0,$$

$$\Sigma Y=0;$$

$$-P_1 - 3 \cdot 2 + Q + R_A = -10 - 3 \cdot 2 + 10,5 + 5,5 = -16 + 16 = 0$$

$$\Sigma M_A=0;$$

$$P_1 \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + P_2 \cdot 2 - Q \cdot 3 - M = 10 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 2 - 10,5 \cdot 3 - 47,5 = \\ = 79 - 79 = 0.$$

Уравнение удовлетворяется тождественно, расчет выполнен правильно.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.

Каждый слушатель выполняет по дисциплине «Основы расчета строительных конструкций» курсовую работу, предусмотренную учебным планом.

В курсовую работу, входят задачи по расчету плоских статически определимых систем нагруженных произвольными неподвижными нагрузками. Исходные данные для решения задач выбираются преподавателем в соответствии с порядковым номером.

Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не засчитываются.

Приступать к решению контрольных заданий следует только после изучения соответствующего раздела курса. Пояснительная записка к курсовой работе должна выполняться на листах стандартного размера А4 (210x297). На титульном листе, указывается: фамилия студента, название направления подготовки, название дисциплины, дата выполнения работы. Перед решением задачи надо вычертить заданную схему и указать на ней в числах все величины, необходимые для расчёта. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными объяснениями и схемами.

Необходимо указывать размерность всех величин и подчеркивать окончательные результаты.

В случае незачёта работы, необходимо выполнить требуемые исправления на том же листе (если позволяет место) или на отдельных листах и представить всю работу целиком на повторную проверку.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Приложение 1

Тип балки	Нагрузки		
	Сосредоточенная сила	Сосредоточенный момент	Равномерно распределённая нагрузка
Шарнирно опёртая по концам			
Консольная			

Приложение 2

Внешние силовые факторы	Сосредоточенный момент	Сосредоточенная сила	Равномерно распределённая нагрузка
Схема нагрузки			
Эпюра изгибающих моментов			
Эпюра поперечных сил			
Дифференциальные зависимости между M, Qi, qy	<p>Характер эпюр:</p> <ol style="list-style-type: none"> На незаряженном участке ($q_y = 0$): эпюра M – прямая, эпюра Q – постоянная. На участке с равномерно распределённой нагрузкой ($q_y = \text{const}$): эпюра M – квадратная парабола, выпуклая в направлении действия нагрузки; эпюра Q – наклонная прямая; - в точке, где $Q = 0$, на эпюре M – экстремум (M_{max} или M_{min}). 		

Основная литература.

- Александров А. В. Строительная механика: учебник для вузов. Часть 1. / Александров А. В., Потапов В. Д., Зылев В. Б. / М: Высшая школа, 2007. 703 с.
- Александров А. В. Строительная механика. Динамика и устойчивость. Кн. 2 / Александров А. В., Потапов В. Д., Зылев В. Б. / М: Высшая школа, 2008. 384 с.
- Анохин Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах: учебное пособие для студентов вузов. ч.1. Плоские статически определимые стержневые системы. М.: АСВ, 1999 335 с.
- Анохин Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах: учебное пособие для студентов вузов. ч. 2. Статически неопределимые системы. М: АСВ, 2007. 464 с.
- Дарков А. В. Строительная механика: учебник 12 издание, стереотип. / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. / Санкт-Петербург: Спб., Москва: М., Краснодар: Лань, 2010. 656 с.
- Потапов В. Д. Строительная механика. Кн. 1. Статика упругих систем. / Потапов В. Д., Александров А. В. / М: Высшая школа, 2007. 511 с.
- Смирнов А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. / Смирнов А. Ф., Александров А. В. / М: Стройиздат, 1984. 416 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение.	3
Основные положения расчета стержневых статически определимых систем	3
1.1. Свойства статически определимых систем	3
1.2. Жесткие и шарнирные узлы.	4
1.3. Связи и их характеристики.	5
1.4. Реакции опорных связей.	6
1.5 Порядок выполнения статического расчета и построение эпюр внутренних усилий.	7
2.1 Примеры расчета.	10
Пример расчета №1.	10
Пример расчета №2.	13
Пример расчета №3.	16
Пример расчета №4.	20
Приложения	28
Основная литература	29