

ГЛАВА 1. ВИДЫ СИГНАЛОВ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ

1.1. Аналоговые и цифровые сигналы

Сигнал – это физический процесс (например, изменяющееся во времени напряжение или ток), отображающий некоторую информацию [16,24].

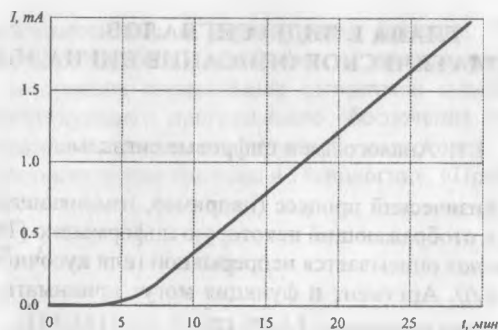
Аналоговый сигнал описывается непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией времени $x_a(t)$. Аргумент и функция могут принимать произвольные значения в определенном интервале: $t \in [t_1, t_2]$, $x_a(t) \in [x_1, x_2]$.

Система цифровой обработки биомедицинских сигналов независимо от ее сложности содержит микропроцессор, ЭВМ или специально разработанное для решения конкретной задачи вычислительное устройство. Входной сигнал должен иметь вид, пригодный для обработки, и представлять собой последовательность чисел в коде машины [13,14]. В основном сигналы, поступающие с медико-технических устройств, изменяются медленно, поэтому их передавать один, два раза за секунду. Таким образом, можно преобразовать аналоговый сигнал в цифровой (рис. 1.1,а), процесс преобразования которого состоит из двух этапов: дискретизации по времени и квантования по уровню (квантования). Сигнал, дискретизированный только по времени, называют дискретным (рис.1.1, б). Он еще не пригоден для обработки в цифровом устройстве и представляет последовательность, значения которой в точности равны соответствующим значениям входного сигнала. Для преобразования аналогового сигнала в цифровой после дискретизации по времени должна следовать дискретизация по уровню, так как вычислительное устройство может оперировать только с числами, принимающими конечное число разрядов [1]. Таким образом, квантование представляет собой округление передаваемых значений с заданной точностью. Сигнал, дискретизированный по времени, и по уровню, называют цифровым (рис.1.1, в).

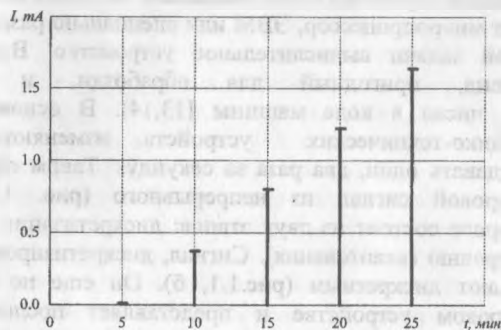
Дискретный сигнал (физически реализуемый) описывается решетчатой функцией $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, значения которой определены только при дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной. При этом предполагается, что $x(nT) = 0$ при $n < 0$.

Значения дискретного сигнала $x(nT)$ называются *отсчетами* сигнала [1]. Они представляют собой выборки исходного аналогового сигнала в моменты времени $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

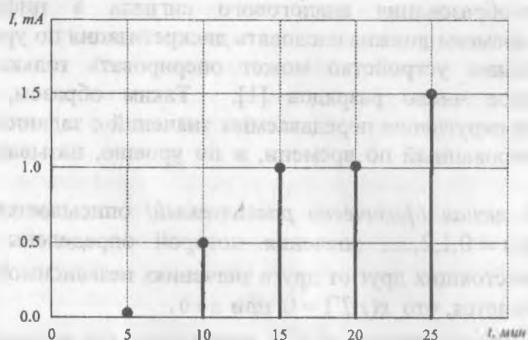
$$x(nT) = x_a(t)|_{t=nT}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$



а



б



в

Рис. 1.1. Виды сигналов (на примере сигнала с датчика давления):
а - непрерывный; б - дискретный; в - цифровой.

Дискретный сигнал (физически реализуемый) описывается решетчатой функцией $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, значения которой определены только при

дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной. При этом предполагается, что $x(nT) = 0$ при $n < 0$.

Значения дискретного сигнала $x(nT)$ называются *отсчетами* сигнала [1]. Они представляют собой *выборки* исходного аналогового сигнала в моменты времени $t = nT, n = 0, 1, 2, \dots$:

$$x(nT) = x_a(t)|_{t=nT}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Отсчеты дискретного сигнала могут принимать произвольные значения в определенном интервале: $x(nT) \in [x_1, x_2]$. Они отстоят друг от друга на величину T , называемую *интервалом дискретизации*. Поскольку дискретный сигнал описывается последовательностью чисел, термин «*решетчатая функция $x(nT)$* » можно заменить термином «*дискретная последовательность x_n* »:

$$x_n = x(nT), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

считая, что параметр T фиксирован.

Выборки сигнала берутся с интервалом T , т.е. с определенной частотой, называемой *частотой дискретизации* f_D :

$$f_D = 1/T. \quad (1.3)$$

Правильный выбор интервалов дискретизации по времени и по уровню очень важен при разработке цифровых систем обработки сигналов. Чем выше частота дискретизации, тем точнее дискретизированный сигнал соответствует исходному непрерывному, но возрастает число отсчетов, что приводит к увеличению скорости обработки [4, 24].

Важным параметром гармонического сигнала является нормированная частота \hat{f} , определяемая как отношение частоты к частоте дискретизации:

$$\hat{f} = f/f_D \quad (1.4)$$

Последовательности бывают конечной и бесконечной длины. Их называют соответственно конечными и бесконечными последовательностями.

Отсчеты x_n незадержанной физически реализуемой конечной последовательности длины N могут принимать ненулевые значения только при $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, а бесконечной последовательности – для всех n .

Для описания последовательностей используются различные способы. Например, последовательность можно представить в аналитическом виде или в виде последовательности отсчетов. При этом предполагается, что $x_n = 0$ при $n < 0$.

Задержанной на m интервалов дискретизации T последовательностью называется последовательность $y_n = x_{n-m}$. При этом $y_n = 0$ при $n < m$ (рис. 1.2).

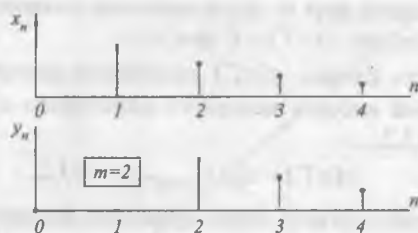


Рис. 1.2. Задержка последовательности

Важное значение в теории и практике цифровой обработки сигналов имеют две последовательности (рис. 1.3):

единичный импульс:

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0; \end{cases} \quad (1.5)$$

единичный скачок:

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

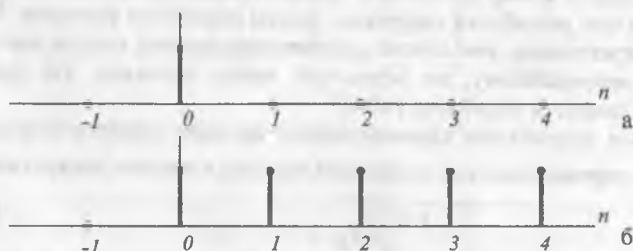


Рис. 1.3. Единичный импульс (а) и единичный скачок (б)

Произвольную последовательность в ряде случаев можно представить с помощью единичного импульса в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta_{n-k}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Система цифровой обработки сигналов с биосенсора должна содержать устройство для преобразования аналогового сигнала в цифровой – аналого-цифровой преобразователь (АЦП), который превращает выборочные значения сигнала в цифровую последовательность, элементы которой – это числа, представленные в коде вычислителя. Далее следует электронное вычислительное устройство, в котором происходит обработка цифрового

сигнала по заданному алгоритму [24]. Цифровые устройства, производящие линейную обработку сигнала, называют цифровыми фильтрами.

1.2. Основные параметры аналого-цифровых преобразователей

Аналого-цифровые преобразователи характеризуются рядом параметров, представляемых в виде числовых величин, и рядом свойств, определяющих внешние связи преобразователей в системах. К числу наиболее важных из этих свойств относятся формы представления входных и выходных аналоговых величин и кодов.

Наиболее распространенными входными величинами АЦП являются временной интервал, сдвиг фаз, частота, угловое или линейное перемещение (или положение), напряжение или ток. Довольно часто встречаются случаи, когда в АЦП аналоговая величина предварительно преобразуется из своего исходного вида в другой, более удобный для осуществления аналого-цифрового преобразования [13,28].

В преобразователях могут использоваться различные виды кодов. Следует отметить, что при рассмотрении вопроса о кодах следует учитывать не только вид кода, но и его форму (последовательную или параллельную).

Рассмотрим важнейшие параметры АЦП. К числу их принадлежат:

- 1) диапазон изменений входных и выходных величин;
- 2) временные параметры:
 - а) период квантования;
 - б) длительность цикла преобразования — задержка «вход — выход»;
 - в) время преобразования;
- 3) точность преобразования, характеризуемая следующими величинами:
 - а) погрешностью квантования по уровню, определяемой числом разрядов в выходном коде;
 - б) инструментальной погрешностью каждого отдельного преобразования;
 - в) динамической погрешностью, связанной с квантованием по времени;
- 4) надежность.

Диапазон изменения входных и выходных величин. При выборе типа преобразователя необходимо учитывать пределы изменений аналоговых величин. При этом могут играть роль как максимальное x_{\max} и минимальное x_{\min} значения аналоговой величины, так и динамический диапазон изменений ее

$$D = \frac{x_{\max}}{x_{\min}}.$$

В случае, когда $x_{\min} = 0$, динамический диапазон равен:

$$D = \frac{x_{max}}{\delta},$$

где δ — допустимая абсолютная погрешность преобразования, выраженная в аналоговой форме.

Временные параметры. При выполнении аналого-цифрового преобразования входной сигнал квантуется по времени; при этом через определенные промежутки времени, как правило, одинаковые, берутся выборки, т. е. определяются текущие значения входного сигнала [18]. Получаемый при каждой выборке выходной код АЦП соответствует значению входного сигнала в определенный момент времени, называемый моментом преобразования.

Различают три временных параметра АЦП (рис. 1.4):

- период квантования T_k , т. е. интервал между двумя последовательными преобразованиями; величину, обратную периоду квантования, называют частотой квантования $f_k = 1/T_k$;
- длительность цикла преобразования, определяющая задержку между моментом подачи входной величины на АЦП и моментом выдачи кода, T_u ;
- время преобразования, т. е. временной интервал, в течение которого входной сигнал непосредственно взаимодействует с АЦП, T_{np} . В первом приближении можно считать, что вне интервала T_{np} входная величина не оказывает влияния на результаты преобразования [22]. При более строгой оценке T_{np} следует учитывать структуру АЦП и характер входного сигнала.

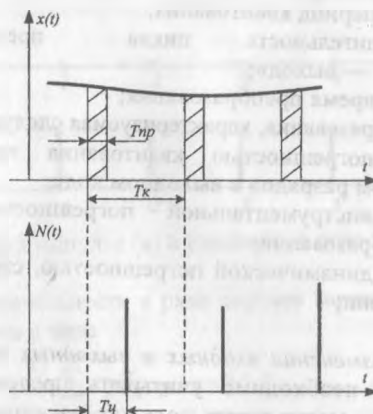


Рис. 1.4. Временные параметры АЦП

Погрешность преобразования. Включение аналого-цифрового преобразователя в систему, входным и выходным сигналами которой являются непрерывные функции времени, приводит к появлению погрешности на выходе системы. Эта погрешность состоит из двух различ-

ных по природе компонент: погрешности вследствие квантования входного сигнала по времени (динамической погрешности) и статической погрешности отдельного отсчета [19]. Последняя в свою очередь состоит из двух частей: погрешности цифрового представления или округления, обусловленной наличием квантования по уровню, и инструментальной погрешности преобразователя.

Если рассмотреть процесс преобразования неизменной входной величины, т. е. если исключить динамическую погрешность, то остается статическая погрешность отдельных отсчетов. Эта погрешность состоит из двух частей: погрешности цифрового представления или округления, обусловленной наличием квантования по уровню, и инструментальной погрешности преобразователя. Вначале выявим основные характеристики погрешности, связанной с квантованием по уровню [13,14]. При квантовании по уровню текущее значение входной величины заменяется ближайшим дискретным значением, выбранным на шкале разрешенных уровней. Таким образом, входная величина при квантовании по уровню как бы накладывается на сетку горизонтальных линий, разнесенных на квант q . Если одновременно производится квантование по времени, то входная величина накладывается на сетку, имеющую по горизонтальной оси (оси времени) деления T_k , а по вертикальной оси (оси уровней) — деления q . Величина кванта характеризует потенциальную разрешающую способность преобразователя по уровню (амплитуде), т. е. для АЦП — наименьшее различимое приращение входной величины. Следует отметить, что в некоторых типах АЦП для увеличения быстродействия при сохранении той же средней точности используется переменная величина кванта; при этом в первых тактах преобразования квант имеет большое значение, а затем происходит его снижение.

При уменьшении величины кванта увеличивается число разрядов в выходном коде АЦП и уменьшается ошибка из-за квантования по уровню. При очень большом числе разрядов в выходном коде, т. е. при очень малой величине кванта, дискретная величина по своим свойствам становится близкой к непрерывной величине [19].

Сетка уровней квантования и диапазон изменений входной величины всегда связаны между собой. Эта связь может быть жесткой и случайной. При жесткой связи наибольшее применение имеют два варианта исполнения, показанные на рис. 1.5.

При первом варианте (рис. 1.5, а) сетка уровней сдвинута относительно начала диапазона измерений входной величины на $q/2$.

При втором варианте (рис. 1.5, б) этот сдвиг равен нулю. При случайной связи сетки уровней и диапазона измерений X они будут сдвинуты на случайную величину η . Число возможных комбинаций в выходном коде АЦП равно числу уровней квантования, если учитывать и нулевой уровень.

1353894

Для представления всех кодовых комбинаций необходимо иметь код, состоящий из n двоичных разрядов, где $n \geq \log_2 N_{\text{макс}}$.



Рис. 1.5. Варианты связи между сеткой уровней квантования и диапазоном измерения входной величины

В идеальном АЦП, т. е. при отсутствии случайной погрешности из-за шумов и помех, имеется однозначная связь между входной x и выходной N величинами. Таким образом, зная входную величину, можно всегда определить значение кода.

Из-за того, что все входные величины, кроме совпадающих с одним из разрешенных уровней, изображаются в виде кода с ошибками, вызванными квантованием уровня, даже в идеальном АЦП нет однозначности в обратной связи между выходной N и входной x величинами. Следовательно, зная код, можно говорить только о вероятности того или иного значения входной аналоговой величины в пределах данного кванта [21,22].

Если известно распределение плотности вероятности входной величины, то можно определить для любого значения выходного кода N_i соответствующую условную вероятность $P(X_i/N_i)$.

При большом числе разрядов в выходном коде рассеяние возможных значений X_i может быть описано прямоугольным законом распределения, что соответствует равной плотности вероятности погрешности квантования в пределах $\pm q/2$ (рис. 1.6). В этом случае дисперсия погрешности квантования по уровню

$$\sigma_{\text{кв}}^2 = \frac{(q/2)^2}{3}$$

или среднеквадратическая погрешность

$$\sigma_{\text{кв}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

Следовательно, для указанного закона распределения среднеквадратическая погрешность будет в $\sqrt{3}$ раз меньше максимальной, а при нормальном законе распределения она в 3 раза меньше максимальной (для доверительной вероятности 0,997).

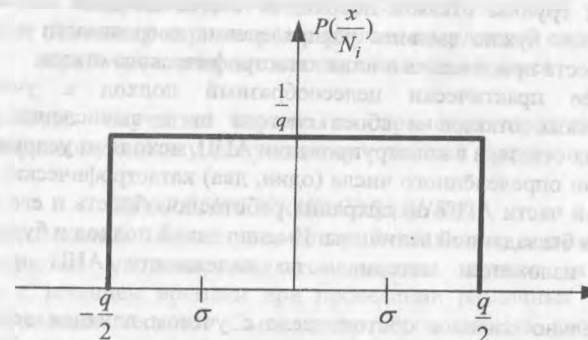


Рис. 1.6. Закон распределения погрешности квантования

Как уже указывалось, второй составляющей статической погрешности является инструментальная погрешность АЦП, которая возникает из-за шумов и помех, как во входном сигнале, так и в узлах АЦП, образовавшихся при изготовлении и эксплуатации АЦП [20].

Надёжность преобразователя. Надёжность является основным требованием, предъявляемым ко всем приборам, в том числе к преобразователям. Однако по сравнению, скажем, с ЭВМ вопрос о надёжности для преобразователей ставится значительно шире. Это связано с тем, что для преобразователей под надёжностью следует понимать не только вероятность безотказной работы в течение определенного времени, но и сохранение в течение этого времени заданной точности.

Принято разделять отказы в АЦП на три вида:

катастрофические или внезапные отказы, приводящие к нарушению нормального функционирования;

сбои, т.е. временные отказы, обычно связанные с влиянием шумов и помех и приводящие к ложному результату преобразования;

постепенные или деградиационные отказы, не приводящие к нарушению нормального функционирования АЦП и возникающие из-за изменения параметров узлов АЦП. Таким образом, при деградиационном отказе сохраняется нормальная работоспособность АЦП, но он будет иметь повышенную погрешность, т.е. произойдёт увеличение инструментальной погрешности из-за нестабильности характеристик отдельных узлов АЦП [16]. Это изменение характеристик в свою очередь является следствием воздействия различных факторов: старения деталей, изменения напряжения питания, температуры, влажности или давления в среде, окружающей АЦП и т.д.

Для оценки надёжности АЦП по катастрофическим отказам и сбоям может быть применена обычная методика. При этом нужно учитывать, что не всякий отказ приводит к таким большим погрешностям, чтобы нарушилась нормальная работа АЦП. Так, например, все отказы, приводящие к искажению младшего разряда выходного кода, являются допустимыми. Отсюда следует, что для этой группы отказов необходим статистический подход к оценке надёжности, т.е. нужно выявить распределение погрешности в коде АЦП в функции от места приложения и вида катастрофического отказа.

Наиболее практически целесообразный подход к учету влияния катастрофических отказов и сбоев состоит не в вычислении вероятности возникновения отказа, а в конструировании АЦП, исходя из условия, чтобы при возникновении определённого числа (один, два) катастрофических отказов или сбоев в любой части АЦП он сохранил работоспособность и его погрешность не превышала бы заданной величины. Именно такой подход и будет принят при дальнейшем изложении материала по надёжности АЦП и методам ее повышения.

Значительно сложнее обстоит дело с учетом влияния деградиационных отказов или, иначе говоря, с параметрической надёжностью. Как уже было сказано, потеря точности преобразователя, связанная с увеличением инструментальной погрешности из-за нестабильности характеристик узлов АЦП, определяет параметрическую надёжность. Все факторы, определяющие параметрическую надёжность, являются случайными процессами (старение деталей, изменение внешних условий и др.), и для учета их влияния должны использоваться вероятностные методы. В связи с этим и инструментальные погрешности, и параметрическую надёжность можно рассматривать только с вероятностных позиций [16].

Исследование источников инструментальных погрешностей и методов их уменьшения может быть сведено к исследованию источников нестабильности основных определяющих параметров узлов АЦП и методов стабилизации этих параметров. При такой постановке задачи оценки инструментальных погрешностей, а значит, и параметрической надёжности можно использовать статистические характеристики узлов АЦП. В дальнейшем именно такой метод оценки будет применяться.

Влияние параметров АЦП на качество систем. Чтобы закончить рассмотрение основных параметров АЦП, следует указать, что единственно правильным подходом к оценке параметров является системный подход, который предполагает оценку влияния изменения того или иного параметра на качество работы системы в целом [19].

Аналого-цифровые преобразователи не являются самостоятельными устройствами, а являются составной частью медико-технических и других информационно-измерительных систем. В последнее время они встраиваются непосредственно в микроконтроллеры. Широкое распространение цифровых методов обработки сигналов определяется большими возможностями в построении сложных алгоритмов, которые невозможно реализовать, используя

аналоговую технику. Цифровые фильтры, например, могут анализировать параметры сигнала и принимать те или иные решения, но для их разработки необходимо, используя их математическое описание, проводить анализ и обоснованный синтез.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Расчет основных параметров сердечно-сосудистой системы при обработке сигнала с датчика частоты пульса

Цель работы: научиться определять параметры сердечно-сосудистой системы по цифровому сигналу, полученному с датчика частоты пульса.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Одним из основных параметров, который позволяет оценить состояние сердечно-сосудистой системы, является частота пульса, а также ее изменчивость с течением времени при проведении различных нагрузочных психофизиологических тестов. Съем дискретного сигнала частоты пульса человека осуществляется при помощи устройства, структурная схема которого приведена на рис. 1.7, после чего он обрабатывается на ПЭВМ.

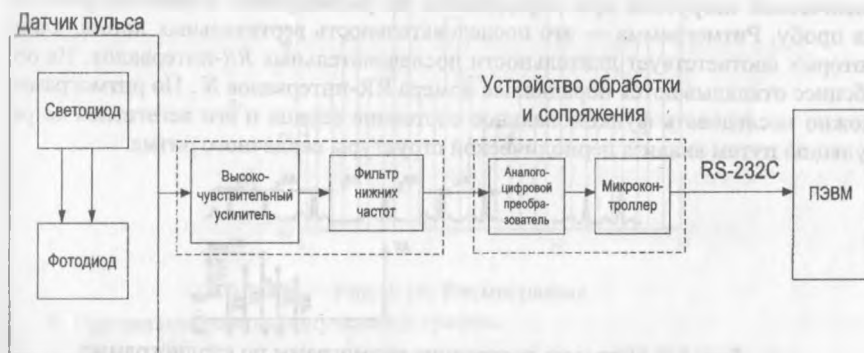


Рис. 1.7. Структурная схема устройства для измерения пульса

В структурной схеме датчик сделан на светодиоде и фотодиоде. Принцип его работы основан на различной величине отражения инфракрасного излучения при наполнении артериальной кровью ткани. Сигнал с датчика усиливается, фильтруется, преобразуется в двоичный код с помощью аналого-цифрового преобразователя, затем подается в ПЭВМ по порту RS-232 и записывается в файл в виде последовательности отсчетов (рис.1.8).

По рис. 1.8 видно, что, зная частоту дискретизации, можно определить время между двумя сердечными сокращениями, исходя из расстояния между соседними максимумами (или минимумами). Полученная величина переводится в количество ударов в минуту и отображается на монитор. Данная

величина считается равной расстоянию между двумя R-R зубцами электрокардиограммы.

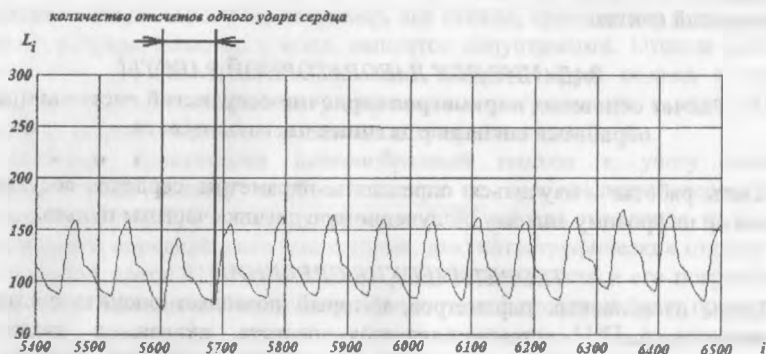


Рис. 1.8. Внешний вид сигнала с датчика частоты пульса.

i – номер отсчета, L_i – амплитуда сигнала с АЦП

Важнейшие сведения о функциональном состоянии сердца дают пробы с физической нагрузкой при определении по ритмограмме характера реакции на пробу. Ритмограмма — это последовательность вертикальных линий, длина которых соответствует длительности последовательных RR-интервалов. На оси абсцисс откладываются порядковые номера RR-интервалов N . По ритмограмме можно исследовать функциональное состояние сердца и его вегетативную регуляцию путем анализа периодической структуры сердечного ритма.

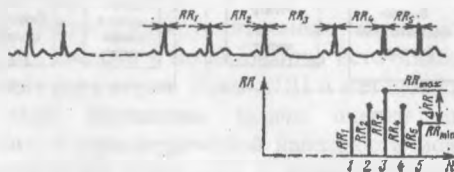


Рис. 1.9. Примеры построения ритмограмм по кардиограмме

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОГО СТЕНДА

Съем сигнала осуществляется устройством, структурная схема которого показана на рис. 1.7. Ввод данных в ПЭВМ и запись в файл значений частоты сердечных сокращений осуществляется специально разработанным программным обеспечением. После снятия сигнала частоты пульса работа выполняется на персональном компьютере. В качестве прикладной программы используется программное обеспечение *Mathcad*, которое можно загрузить с рабочего стола компьютера.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включить компьютер.

2. Измерить сигнал частоты сердечных сокращений, используя стенд и специально разработанную программу. Значения записать в файл *pulse.txt*.

3. Запустить программу *MathCAD*.

4. Считать данные из файла *pulse.txt* при помощи функции READ, или READPRN.

5. Результат представить графически (график должен быть аналогичен приведенному на рис. 1.8).

6. Определить частоту пульса (уд/мин) по двум максимумам, зная, что частота дискретизации $f_d = 100 \text{ Гц}$. Подробный расчет с выводом формулы перевода количества дискретных отсчетов в уд/мин записать в тетрадь.

7. Рассчитать 15 значений частоты пульса по последовательно записанным максимумам. Записать значения в массив в виде вектора. $V_0 = 85, V_1 = 81, \dots, V_{14} = 82$ (в отчете оформить в виде таблицы).

8. Построить ритмограмму (рис. 1.10), т.е. зависимость частоты пульса от номера периода, на котором она была рассчитана (в формате графика установить тип линии *bar*).

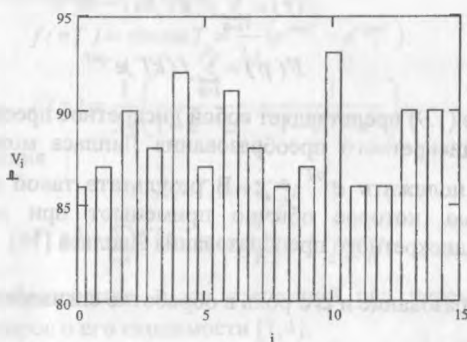


Рис. 1.10. Ритмограмма

9. Проанализировать полученный график.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Для чего нужен микроконтроллер и ПЭВМ в схеме измерителя?
2. Что обеспечивает АЦП?
3. Что такое частота дискретизации, дискретный сигнал, аналоговый сигнал?
4. Как построить ритмограмму, ее назначение?
5. Как осуществляется расчет частоты пульса (уд/мин)?

1.3. Математическое описание сигналов

1.3.1. Дискретное преобразование Лапласа

Методы описания непрерывных и дискретных сигналов во многом аналогичны друг другу. Для анализа цифровых фильтров в основном используют z -преобразование [1].

Запишем преобразование Лапласа для непрерывных сигналов:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.8)$$

Это соотношение справедливо для сигналов, тождественно равных нулю при $t < 0$. Поскольку все реально существующие сигналы имеют начало, преобразование Лапласа можно применять практически для всех сигналов.

Применим преобразование Лапласа к дискретному сигналу $f(kT)$, записанному в виде последовательности δ -функций

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT);$$

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-pkT}. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) представляет собой дискретное преобразование Лапласа.

Формула дискретного преобразования Лапласа может быть несколько упрощена, если положить $e^{pT} = z$. В результате такой замены приходим к z -преобразованию, которое обычно применяют при анализе дискретных сигналов вместо дискретного преобразования Лапласа [16].

1.3.2. Z -преобразование и его роль в обработке сигналов.

Z -преобразование

Z -преобразование представляет собой модификацию дискретного преобразования Лапласа:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}. \quad (1.9)$$

Функция $F(z)$ является аналитической функцией комплексного переменного z . Z -преобразование можно применить и к абстрактным числовым последовательностям [24].

В качестве примеров рассмотрим z -преобразование простейших сигналов. При этом всюду будем полагать, что сигнал $f(nT)$ тождественно равен нулю [1] при $n < 0$.

1. Единичный импульс

$$f(nT) = \begin{cases} 1, n=0, \\ 0, n>0, \end{cases} \quad F(z) = 1.$$

2. Дискретизированный единичный скачок

$$f(nT) = 1; \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

3. Экспоненциально убывающий дискретный сигнал

$$f(nT) = e^{-\alpha nT}; \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

4. Комплексная экспонента

$$f(nT) = e^{j\omega nT};$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega nT} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{j\omega T}}.$$

5. Гармоническая функция

$$f(nT) = \sin n\omega T = \frac{1}{2j} (e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT});$$

$$F(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right).$$

6. Степенная функция

$$f(nT) = K^n;$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n z^{-n} = \frac{1}{1 - Kz^{-1}} = \frac{z}{z - K}.$$

Поскольку Z -преобразование – это степенной ряд переменной z^{-1} , то нужно рассмотреть вопрос о его сходимости [1,4].

Ряд (1.9), определяющий Z -преобразование, сходится для $|z| > R$, где R – радиус сходимости, зависящий от вида функции $f(nT)$. Наиболее просто радиус сходимости определяется для последовательности $f(nT) = K^n$. В этом случае $F(z) = z/(z - K)$. Эта функция имеет полюс при $z = K$. Вне окружности $|z| = K$ функция $F(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной, и описывающий ее ряд (1.9) сходится. Следовательно, для $f(nT) = K^n$ радиус сходимости $R = K$.

Обратное z -преобразование

Умножим обе части выражения (1.9) на z^{k-1} , проинтегрируем по окружности с радиусом, превышающем радиус сходимости R ряда для $F(z)$, и поменяем местами суммирование и интегрирование [1,4]:

$$\oint F(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \oint z^{k-n-1} dz. \quad (1.10)$$

Вычислим интеграл в правой части выражения (1.10):

$$\oint z^{k-n-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ 2\pi j & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Такой результат объясняется тем, что значение интеграла по замкнутому контуру в комплексной плоскости равно произведению $2\pi j$ на сумму вычетов подынтегральной функции; единственный вычет при $z=0$ получается только при $k=n$, когда $z^{k-n-1} = 1/z$.

Следовательно,

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz. \quad (1.11)$$

Получившееся выражение представляет собой формулу обратного z-преобразования, но надо только уточнить форму контура интегрирования. Для этого положим $f_n = K^n$. Тогда $F(z) = z/(z-K)$. Применим обратное z-преобразование к этой формуле:

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^n}{z-K} dz.$$

Подынтегральная функция имеет единственный полюс при $z=K$. Интегрировать можно вдоль любого контура, охватывающего точку $z=K$ (рис. 1.11), но удобнее вдоль окружности радиуса $R > K$ [16].

Для сигналов, абсолютное значение которых убывает во времени, $K < 1$, поэтому в качестве контура интегрирования можно использовать окружность радиуса $R=1$.

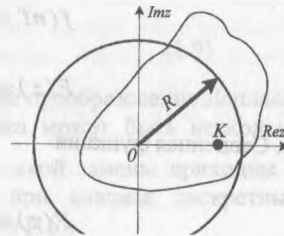


Рис. 1.11. Контур интегрирования при вычислении обратного Z-преобразования

Свойства z-преобразования

Для z-преобразования справедливы некоторые теоремы, аналогичные теоремам о спектрах непрерывных сигналов. Главная из них — теорема о свертке.

Теорема о свертке

В теории непрерывных сигналов эта теорема формулируется следующим образом [24]. Пусть заданы два непрерывных сигнала $x(t)$ и $y(t)$ и их свертка:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

Тогда спектральная плотность свертки $S_f(\omega)$ связана со спектральными плотностями $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$ сигналов $x(t)$ и $y(t)$ соотношением

$$S_f(\omega) = S_x(\omega) S_y(\omega). \quad (1.12)$$

Для дискретных сигналов $x_k = x(kT)$ и $y_k = y(kT)$ по аналогии с непрерывными сигналами вводится дискретная свертка, которая определяется выражением

$$f(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT) y(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT) y(kT) \quad (1.13)$$

$$f_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^n x_{n-k} y_k. \quad (1.14)$$

Запишем для дискретных сигналов x_k , y_k и f_n их z-преобразования

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}; \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}; \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Применим z-преобразование к формуле свертки (1.13)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} z^{-n}.$$

Преобразуем правую часть этого выражения так, чтобы получить произведение Z-преобразований. Для этого нужно, в частности, чтобы x_k умножалось на z^{-k} , а y_{n-k} на $z^{-(n-k)}$. Сгруппируем соответствующим образом степени z [1]:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} z^{-k} z^{-(n-k)}.$$

При $k > n$ $y_{n-k} \equiv 0$, поэтому можно во второй сумме верхний предел суммирования сделать равным ∞ . Далее обозначим $n-k=m$ и получим

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_m z^{-m}.$$

Нижний предел $m=-k$ можно заменить на $m=0$, так как при $m < 0$ все $y_m = 0$. В результате получим

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_m z^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m}$$

$$F(z) = X(z) Y(z). \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) аналогично формуле, описывающей теорему о свертке для обычных непрерывных сигналов. Таким образом, свертка сигналов во временной области эквивалентна умножению z-образов в z-области [1].

Теорема о запаздывании

Сдвинем дискретный сигнал $x(nT)$ по времени на величину периода повторения T . Получившийся новый сигнал $y(nT)$ связан с $x(nT)$ простым соотношением

$$y(nT) = x(nT - T).$$

Пусть известно z-преобразование сигнала $x(nT)$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}.$$

Найдем z-преобразование сигнала $y(nT)$:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT - T) z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-(m+1)} = z^{-1} X(z).$$

Таким образом, запаздывание дискретного сигнала на один элемент соответствует умножению z-преобразования на z^{-1} [24].

Пример.

Рассмотрим дискретную свертку двух простых сигналов: $x_k = x(kT)$, имеющего два ненулевых отсчета [$x(0)=1$ и $x(T)=1$] и $y_k = y(kT)$, состоящего из трех отсчетов [$y(0)=2$; $y(T)=2$ и $y(2T)=2$]. Непосредственный подсчет по формуле (1.13) приводит к следующему результату:

$$f(0) = x(0)y(0) = 2;$$

$$f(T) = x(T)y(0) + x(0)y(T) = 4;$$

$$f(2T) = x(T)y(T) + x(0)y(2T) = 4;$$

$$f(3T) = x(T)y(2T) = 2;$$

$$f(4T) = 0.$$

Сигнал $f(nT)$ является сверткой $x(kT)$ и $y(kT)$.

Найдем z-преобразование сигналов $x(kT)$, $y(kT)$ и $f(nT)$:

$$X(z) = 1 + z^{-1},$$

$$Y(z) = 2(1 + z^{-1} + z^{-2}),$$

$$F(z) = 2(1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3}).$$

Перемножив выражения для $X(z)$ и $Y(z)$, нетрудно убедиться в справедливости выражения (1.15).

1.3.3. Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Прямое преобразование Фурье аналогового сигнала $X_a(t)$ описывается формулой [7,9]:

$$S(j\omega) = \int_0^{\infty} X_a(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.16)$$

где $S(j\omega)$ — полученный спектр, который описывает сигнал в частотной области.

Таким образом, спектр и сигнал связаны между собой парой преобразований Фурье:

Исходный сигнал можно определить по его спектру с помощью

обратного преобразования Фурье [1,14]

$$X_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Чтобы перейти к дискретному преобразованию Фурье (ДПФ), значения спектра нужно вычислять не для всех значений частоты, а для дискретных (выборочных) [16]:

$$\omega = n \frac{2\pi}{T_c} = n\Omega,$$

где T_c — время импульса.

В результате получим окончательную формулу для дискретного преобразования Фурье

$$S(n\Omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jnk\Omega T}$$

$$S(n\Omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}. \quad (1.17)$$

Обратное дискретное преобразование Фурье

$$f(kT) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} S(n\Omega) e^{jnk \frac{2\pi}{N}}, \quad (1.18)$$

где k принимает значения от 0 до $N-1$.

Иногда для удобства записи, используя свойство периодичности дискретного преобразования Фурье, записывают в виде [16]

$$f(kT) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=0}^{N-1} S(n\Omega) e^{jnk \frac{2\pi}{N}}. \quad (1.19)$$

Можно увидеть, что преобразование Фурье представляет собой частный случай z-преобразования:

$$X(e^{j\omega t}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega t}}. \quad (1.20)$$

то есть преобразование Фурье представляет собой z-преобразование, вычисленное на единичной окружности z-плоскости (при $z = e^{j\omega t}$) [24].

Свойства спектра дискретного сигнала

• Свойства спектра дискретного сигнала следуют из свойств z-преобразования.

• Основные свойства спектра дискретного сигнала приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3.

Основные свойства спектра дискретного сигнала

Свойство	Последовательность	Спектр
Линейность	$a_1 x_n + a_2 y_n$	$a_1 X(e^{j2\pi\hat{f}}) + a_2 Y(e^{j2\pi\hat{f}})$
Сдвиг	x_{n-m}	$e^{-j2\pi\hat{f}m} X(e^{j2\pi\hat{f}})$
Свёртка	$x_n h_n$	$X(e^{j2\pi\hat{f}}) H(e^{j2\pi\hat{f}})$
Перемножение	$x_n d_n$	$\int_{-0.5}^{0.5} X(e^{j2\pi\hat{f}\theta}) D(e^{j2\pi(\hat{f}-\theta)}) d\theta$

• Спектр является периодической функцией по частоте с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_D = 2\pi/T$. Это следует из (1.16), поскольку $\exp(j\omega T) = \exp[j(\omega + k2\pi/T)]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

• Модуль и аргумент спектра также являются периодическими функциями с тем же периодом [4].

• Для вещественного сигнала модуль спектра — четная функция, а аргумент — нечетная функция:

$$|X(e^{j\omega t})| = |X(e^{-j\omega t})|, \quad (1.21)$$

$$\arg X(e^{j\omega t}) = -\arg X(e^{-j\omega t}). \quad (1.22)$$

Это следует из (1.16) после подстановки $\exp(j\omega T) = \cos(\omega T) + j\sin(\omega T)$ и $\exp(-j\omega T) = \cos(\omega T) - j\sin(\omega T)$.

Связь между аналоговым и дискретным сигналом

Дискретный сигнал представляет собой последовательность выборок аналогового сигнала с интервалом дискретизации T [16].

Соотношение, устанавливающее связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов, имеет вид

$$S(n\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + m\omega_D)], \quad (1.23)$$

где $\omega_D = 2\pi/T$.

Иными словами, спектр дискретного сигнала (с точностью до постоянного множителя $1/T$) равен сумме спектров исходного аналогового сигнала, смещенных друг относительно друга на все возможные значения

ограничением интервала наблюдения анализируемого сигнала [45]. Обычно это моделируется при помощи прямоугольной весовой функции $w(t)$ - прямоугольного окна. Пусть сигнал $x(t)$ определен на интервале $t \in (-\infty; \infty)$ и характеризуется преобразованием Фурье $A(j\omega)$. Если время наблюдения ограничено промежутком $t \in (-T/2; T/2)$, то фактически наблюдается сигнал $x_1(t) = x(t)w(t)$. Переход к конечному интервалу T приводит к свертке преобразования Фурье исходного сигнала $x(t)$ бесконечной длины с функцией вида $\text{sinc } x = (\sin x)/x$. Вследствие этого спектр сигнала $x(t)$ оказывается искаженным, что снижает точность измерения и приводит к погрешностям за счет слияния энергий соседних гармоник анализируемого сигнала, попадающего в полосу функции $\text{sinc}(\omega T/2)$ [13,14].

Таким образом, оценки спектральной плотности случайного процесса, полученного на основе анализа выборочных периодограмм, не являются достоверными. Поэтому для достижения эффективности оценивания применяют различные методы сглаживания с помощью весовых функций по формуле

$$\bar{G}_X^*(f) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} W(h\Delta f) \bar{G}_X(f - h\Delta f) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \bar{G}_X(h\Delta f) W(f - h\Delta f), \quad (1.38)$$

где $\bar{G}_X(f)$ - сглаженная оценка спектральной плотности как функции; $W(f)$ -

вспомогательная функция, обладающая свойством $\sum_{h=-\infty}^{\infty} W(h\Delta f) = 1$ и называемая спектральным окном, соответствующее ему корреляционное окно $w(\tau)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье [86].

Существуют различные типы спектральных окон. Так, прямоугольное окно принимает как положительные, так и отрицательные значения (рис.1.15, а) и представляет собой только грубое приближение к идеальному узкополосному фильтру с прямоугольными фронтами.

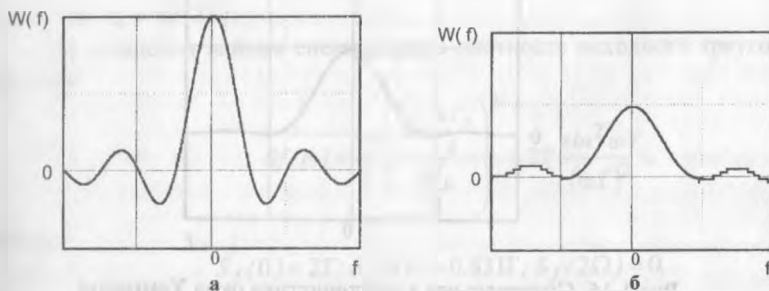


Рис.1.15. Спектральные характеристики прямоугольного окна (а) и окна Бартлетта (б)

Поэтому желательно выбирать весовую функцию без отрицательных выбросов (рис.1.15, б). В частности для треугольного окна (окна Бартлетта) корреляционная характеристика имеет следующий вид:

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{L} & \text{при } |\tau| \leq L; \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq L. \end{cases}$$

Оценка принимает вид

$$\bar{G}_X(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\bar{x}_i(j2\pi f)|^2}{\pi L \Delta f},$$

где $\bar{x}_i(j2\pi f)$ определяется по i -му участку реализации, получающемуся делением реализации $x(t)$ на n равных частей с числом отсчетов $L = T/(n\Delta t)$.

Оценка $\bar{G}_X(f)$, полученная таким образом, не приводит к отрицательным значениям. Однако спектральное окно имеет относительно большие боковые максимумы, что выявляет ложные гармоники при исследовании сигнала дыхания пациента.

Поэтому при обработке сигналов различных приборов и систем рекомендуется использовать окно Хемминга [20]:

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi \tau}{\tau_L} & \text{при } |\tau| \leq \tau_L; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_L. \end{cases} \quad (1.41)$$

Данный тип окна обеспечивает отсутствие значительных боковых максимумов (рис. 1.16) и обладает сравнительной простотой вычислений [1,4,13].

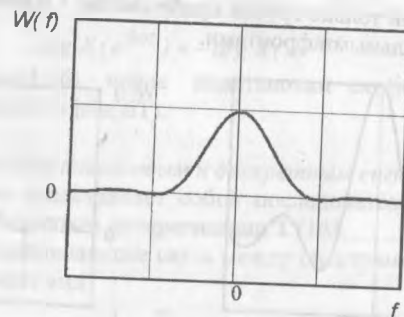


Рис.1.16. Спектральная характеристика окна Хемминга.

Основой для получения достоверного спектра при работе приборов и систем является рациональная методика цифровой обработки сигнала. Выбор оптимальной частоты дискретизации, необходимой продолжительности

выбросов, кратные частоте дискретизации, т. е. на значения $m\omega_D$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Соотношение (1.23) получается путем вычисления (1.16) для $t = nT$, причем интеграл с бесконечными пределами заменяется бесконечной суммой интегралов на интервалах величиной $2\pi/T$ [24].

Спектр вещественного сигнала полностью описывается в основной полосе частот $[0, f_D/2]$. Составляющие спектра, расположенные в этой полосе частот, называют основным спектром.

Если аналоговый сигнал имеет финитный спектр, т. е. такой, что его составляющие равны нулю при $|f| \geq f_{\max}$, причем

$$f_{\max} \leq f_D/2, \quad (1.24)$$

то, как следует из (1.23), спектр дискретного сигнала в основной полосе частот примет вид

$$X(e^{j\omega t}) = \frac{1}{T} X_a(j\omega). \quad (1.25)$$

Если граничная частота спектра не удовлетворяет условию (1.24), то при дискретизации происходит наложение спектров [1].

Для иллюстрации применим дискретное преобразование Фурье к дискретизированному треугольному импульсу, описываемому пятью выборочными значениями:

$$f(0) = 1; f(\pm T) = 1/2; f(\pm 2T) = 0. \quad (1.26)$$

Подставим это выражение дискретного сигнала в формулу дискретного преобразования Фурье (1.17)

$$S(n\Omega) = T \left[1 + \frac{1}{2} \left(e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}} \right) \right] = T(1 + \cos n\frac{\pi}{2}),$$

откуда

$$S(0) = 2T; S(\pm\Omega) = T; S(\pm 2\Omega) = 0, \quad (1.27)$$

где $\Omega = 2\pi/T_c = \pi/(2T)$.

Для сравнения найдем спектральную плотность исходного треугольного импульса:

$$S_f(\omega) = \frac{T_c}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T_c}{4}}{\frac{\omega T_c}{4}} \right)^2 = 2T \frac{\sin^2 \omega T}{(\omega T)^2}, \quad (1.28)$$

причем

$$S_f(0) = 2T; S_f(\Omega) = 0,831T; S_f(2\Omega) = 0.$$

Легко увидеть, что дискретный спектр неточно описывает спектральную плотность треугольного импульса [16]. Значения $S(\pm\Omega)$ несколько отличаются от соответствующих значений спектра треугольного импульса $S_f(\pm\Omega)$.

Теперь подставим дискретные значения спектра в выражение для обратного дискретного преобразования Фурье (1.18):

$$f(kT) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-1}^2 S(n\Omega) e^{jnk\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{T_c} \left(1 + \cos n\frac{\pi}{2} \right) \quad (1.29)$$

откуда

$$f(0) = 1; f(\pm T) = 1/2; f(\pm 2T) = 0.$$

Несмотря на отличие значений дискретного спектра от значений непрерывного, полученный результат полностью совпадает с формулой исходного дискретного сигнала.

Рассмотренный пример показывает, что дискретное преобразование Фурье не всегда точно описывает исходный непрерывный сигнал, подобно тому как дискретизированный сигнал не всегда точно описывает исходный непрерывный сигнал. Однако связь между дискретным сигналом и его дискретным преобразованием Фурье всегда носит взаимно однозначный характер, и формулы прямого и обратного преобразований Фурье являются строгими при любом числе дискретных значений. Поэтому аппарат дискретных преобразований Фурье имеет самостоятельное значение и может быть применен к любым числовым последовательностям [24].

В этом случае формулы дискретного преобразования Фурье должны быть несколько изменены, так как для абстрактной числовой последовательности значения интервала дискретизации T и длительности сигнала T_c не имеют смысла. Поэтому коэффициент T перед суммой в формуле (3.4) опускают, T_c/T заменяют на N , отсчетные значения сигнала и спектра обозначают через f_k и

S_n и формулу дискретного преобразования Фурье записывают в виде:

$$S_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (1.30)$$

При этом обратное дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (1.31)$$

Значения S_n , вычисленные по формуле (1.30), отличаются от выборочных значений спектра $S_f(n\Omega)$ непрерывного колебания $f(t)$ в T раз. Для определения выборочных значений $S_f(n\Omega)$ надо значения S_n , вычисленные по формуле (1.31), умножить на величину интервала дискретизации по времени T :

$$S_f(n\Omega) = T S_n.$$

Покажем, что преобразования (1.30), (1.31) являются взаимно обратными. Для этого возьмем произвольную числовую последовательность f_k , с помощью

дискретного преобразования Фурье (1.30) найдем последовательность S_n и применим к ней обратное дискретное преобразование Фурье (4.12) [22].

Получившуюся при этом последовательность обозначим g_l :

$$g_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} e^{jnl\frac{2\pi}{N}}.$$

Поменяем порядок суммирования и несколько преобразуем это выражение:

$$g_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{jn(l-k)\frac{2\pi}{N}} \quad (1.32)$$

Внутренняя сумма выражения (4.13) равна нулю, если $l \neq k$, и равна N , если $l = k$. Следовательно, $g_l = f_k$ при $l = k$, т.е. числовые последовательности g_l и f_k совпадают друг с другом [1]. Таким образом, при последовательном применении к любой числовой последовательности прямого и обратного дискретного преобразования Фурье получают в результате ту же последовательность.

1.3.4. Реализация алгоритма быстрого преобразования Фурье

Недостатком дискретного преобразования Фурье является большое количество математических операций, которые необходимо произвести при применении формулы (1.17). Если число степеней свободы сигнала равно N , то для расчета по формулам дискретного преобразования Фурье необходимо выполнить N^2 умножений и N^2 сложений комплексных чисел — всего $2N^2$ арифметических операций. При большом N такая обработка сигналов оказывается слишком трудоемкой [1, 13].

Для облегчения вычисления дискретного преобразования Фурье применяют специальные алгоритмы, которые позволяют во много раз сократить объем необходимых вычислений. Такие алгоритмы называют быстрым преобразованием Фурье.

Существует несколько различных алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Каждый из них применяют в определенной ситуации в зависимости от того, на какие множители может быть разложено число степеней свободы N . Наиболее простые алгоритмы получаются, если N является степенью числа 2. Рассмотрим один из таких алгоритмов, основанный на так называемом прореживании по времени [4, 9].

Пусть требуется вычислить дискретное преобразование Фурье числовой последовательности f_k :

$$F_n = \sum f_k e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}.$$

Поскольку число отсчетов сигнала N четное, исходную последовательность f_k можно разбить на две: g_i , в которую войдут все f_k с четными номерами, и h_i , в которую войдут все f_k с нечетными номерами (рис. 1.12), так что

$$g_i = f_{2i}; \quad h_i = f_{2i+1} (i = 0, 1, \dots, N/2 - 1).$$

Применим дискретное преобразование Фурье к последовательностям g_i и h_i ; при этом учтем [9], что последовательности g_i и h_i содержат по $N/2$ членов:

$$G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k e^{-jkn \frac{4\pi}{N}};$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k e^{-jkn \frac{4\pi}{N}}.$$

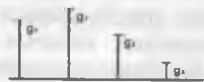


Рис.1.12. Разбиение исходной последовательности

Для сокращения записи обозначим $W = e^{-j2\pi/N}$. Тогда получим

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk};$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{2nk};$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k W^{2nk}.$$

Нашей конечной целью является вычисление значений F_n . Учитывая, что все члены последовательности f_k принадлежат g_i или h_i , можно записать

$$F_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} [g_k W^{2nk} + h_k W^{(2k+1)n}] = \quad (1.33)$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{2nk} + W^n \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k W^{2kn} = G_n + W^n H_n.$$

Таким образом, значения F_n можно вычислить по известным значениям G_n и H_n . Однако формула (1.33) справедлива только для $n \leq N/2 - 1$, поэтому G_n и H_n не определены для больших значений n . Для $n \geq N/2$ значения F_n можно вычислить, используя свойство периодичности дискретного преобразования Фурье [16]:

$$F_n = G_{n-N/2} + W^n H_{n-N/2}. \quad (1.33)$$

Учитывая, что $W^n = W^{n-N/2} \cdot W^{N/2} = -W^{n-N/2}$, получим окончательную расчетную формулу для F_n при $n \geq N/2$:

$$F_n = G_{n-N/2} - W^{n-N/2} H_{n-N/2}. \quad (1.34)$$

Процесс вычисления дискретного преобразования Фурье по формулам (1.33), (1.34) схематически изображен на рис.1.13 с помощью направленного сигнального графа. Здесь каждое из умножений на W^n представлено в виде стрелки, под которой записан соответствующий множитель [16]. Кружочки схематически изображают сложение (вычитание), причем линия, отходящая от кружочков вправо вверх, соответствует сумме, а отходящая вправо вниз — разности двух значений, подводимых к кружочку слева. Например, сумма значений G_2 и $H_2 W^2$ равна F_2 , разность этих значений — F_6 .

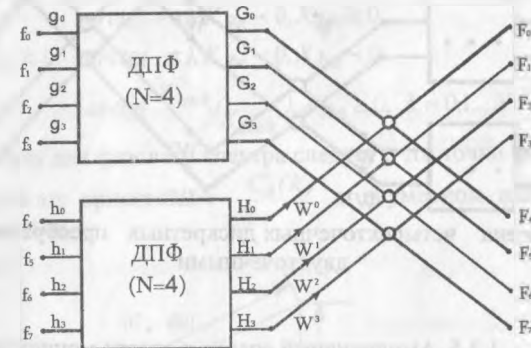


Рис.1.13. Замена восьмиточечного дискретного преобразования Фурье двумя четырехточечными

Для вычисления значений G_n и H_n нужно выполнить два дискретных преобразования Фурье. Однако число дискретных значений в каждом из этих преобразований оказывается в два раза меньше, чем в исходном преобразовании Фурье и равно $N/2$. При этом для вычисления G_n и

H_n необходимо выполнить по $2(N/2)^2$ арифметических операций, и еще $N + N/2$ операций необходимо произвести в процессе расчетов значений F_n по формулам (1.33), (1.34). Таким образом, общее число арифметических операций, необходимых для вычисления дискретного преобразования Фурье, будет равно $N^2 + 3/2N$, что при большом N оказывается значительно меньше, чем при вычислении F_n по общей формуле дискретного преобразования Фурье [4,16].

Если число степеней свободы сигнала N является степенью числа 2, то число $N/2$ тоже будет четным. В этом случае для вычисления значений G_n и H_n вместо общей формулы дискретного преобразования Фурье можно применить алгоритм, аналогичный только что рассмотренному. При этом общая процедура расчета может быть схематически представлена сигнальным графом, представленным на рис.1.14.

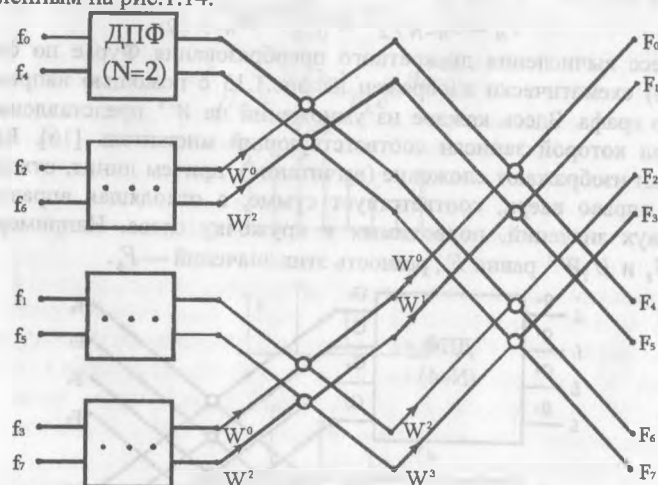


Рис.1.14. Замена четырехточечных дискретных преобразований Фурье двухточечными

1.3.5. Амплитудный спектр и спектр мощности

Энергия непрерывного сигнала может быть вычислена посредством интегрирования в бесконечных пределах или квадрата временной функции, или квадрата её спектра. Аналитически это записывают в виде теоремы Парсеваля [4,9].

Аналогичное соотношение можно получить для дискретных сигналов [9,14]:

$$\frac{1}{2\pi} \oint_L F(z) F\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT),$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(h) = \sum_{k=0}^{N-1} |C_x(k)|^2$$

Если $x(t)$ - форма напряжения или тока, а нагрузка чисто активная, то первая часть - средняя мощность, рассеиваемая резистором с сопротивлением 1 Ом. Каждая величина $|C_x(k)|^2$ представляет собой мощность, содержащуюся в гармонике, имеющей частоту с номером k . Спектр мощности ДПФ определяется как $P(k) = |C_x(k)|^2, k=0,1,...,N-1$. [1,24].

Амплитудный спектр легко определить с помощью спектра мощности следующим образом:

$$A(k) = |C_x(k)|, \quad k=0,1,...,N-1.$$

Если представить компоненты спектра, определенные в результате использования алгоритма БПФ или ДПФ как $F_r = F_{Rek} + jF_{Imk}$, то амплитудный спектр

$$A_k = \frac{1}{N} \cdot \sqrt{F_{Rek}^2(k) + F_{Imk}^2(k)}.$$

Для заданной последовательности фазовый спектр определяется:

$$\Psi_x(k) = \begin{cases} \arctg(+\pi), & X_{Re} < 0, X_{Im} \geq 0 \\ \arctg(-\pi), & X_{Re} < 0, X_{Im} < 0 \\ \arctg(X_{Imk}/X_{Rek}), & X_{Re} \geq 0, \quad k=0,1,...,N-1 \end{cases}$$

Из выражения для фазового спектра следует, что точки фазового спектра $\Psi_x(k)$ отображают ориентацию $C_x(k)$ в двумерном пространстве, как показано на рис. 1.14а.

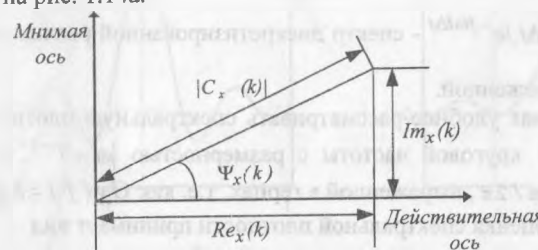


Рис. 1.14а. Геометрическая интерпретация фазового спектра

1.3.6. Методика и параметры обработки сигнала для получения достоверного спектра. Сглаживание с помощью весовых функций

При практическом получении необходимых характеристик с помощью аналоговых и цифровых аппаратных средств необходимо учитывать ряд особенностей. Это определяется формой представления сигнала (непрерывной или дискретной), возможной длительностью наблюдения за сигналом (кратковременной или продолжительной), временем и точностью анализа [4,18].

Основой для получения неискаженного спектра дискретизированного сигнала является выбор оптимальной частоты дискретизации. Как известно, спектр непрерывного сигнала можно найти по спектру дискретизированного сигнала в полосе $\pm \omega_0/2$, если шаг дискретизации по времени $\Delta t \leq \pi/\omega_m = 0.5f_m$, что полностью соответствует теореме Котельникова [13]. Практически принимают

$$\Delta t = \pi/(1.5 - 2)\omega_m. \quad (1.35)$$

Уменьшение Δt значительно ослабляет искажения высокочастотной части спектра, вызываемые наложением частот, но дискретные отсчеты оказываются при этом сильно коррелированными, а их число – большим.

Одним из основных параметров, необходимых для исследования спектров сигналов с датчиков различных приборов и биосистем является разрешающая способность анализа, которая определяется главным образом продолжительностью наблюдения функции. Условием различия двух частот f_1 и f_2 является соотношение

$$T \geq 1/(f_2 - f_1).$$

При экспериментальном определении спектральной плотности может быть использована оценка [14]

$$\bar{S}_X(\omega) = \frac{|\bar{x}(j\omega)|^2}{\pi N \Delta t}, \quad (1.36)$$

(где $\bar{x}(j\omega) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} x(i\Delta t) e^{-j\omega i\Delta t}$ – спектр дискретизированной реализации $x(t)$), которая является несглаженной.

Во многих случаях удобнее рассматривать спектральную плотность не в виде функции $\bar{S}_X(\omega)$ круговой частоты с размерностью $|\omega| = T^{-1}$, а в виде функции частоты $f = \omega/2\pi$, выраженной в герцах, т.е. как $G_X(f) = S_X(2\pi f)$.

Несглаженная оценка спектральной плотности принимает вид

$$\bar{G}_X(f) = \frac{|\bar{x}(j2\pi f)|^2}{\pi N \Delta t}. \quad (1.37)$$

Так как постоянно возникает вопрос об ограниченном времени наблюдения, актуальным является анализ эффекта, обусловленного

ограничением интервала наблюдения анализируемого сигнала [45]. Обычно это моделируется при помощи прямоугольной весовой функции $\omega(t)$ – прямоугольного окна. Пусть сигнал $x(t)$ определен на интервале $t \in (-\infty; \infty)$ и характеризуется преобразованием Фурье $A(j\omega)$. Если время наблюдения ограничено промежутком $t \in (-T/2; T/2)$, то фактически наблюдается сигнал $x_1(t) = x(t)\omega(t)$. Переход к конечному интервалу T приводит к свертке преобразования Фурье исходного сигнала $x(t)$ бесконечной длины с функцией вида $\text{sinc } x = (\sin x)/x$. Вследствие этого спектр сигнала $x(t)$ оказывается искаженным, что снижает точность измерения и приводит к погрешностям за счет слияния энергий соседних гармоник анализируемого сигнала, попадающего в полосу функции $\text{sinc}(\omega T/2)$ [13,14].

Таким образом, оценки спектральной плотности случайного процесса, полученного на основе анализа выборочных периодограмм, не являются достоверными. Поэтому для достижения эффективности оценивания применяют различные методы сглаживания с помощью весовых функций по формуле

$$\bar{G}_X^*(f) = \sum_X W(h\Delta f) \bar{G}_X(f - h\Delta f) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \bar{G}_X(h\Delta f) W(f - h\Delta f), \quad (1.38)$$

где $\bar{G}_X^*(f)$ – сглаженная оценка спектральной плотности как функции; $W(f)$ – весовая функция, обладающая свойством $\sum_{h=-\infty}^{\infty} W(h\Delta f) = 1$ и называемая спектральным окном, соответствующее ему корреляционное окно $\omega(\tau)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье [86].

Существуют различные типы спектральных окон. Так, прямоугольное окно принимает как положительные, так и отрицательные значения (рис.1.15, а) и представляет собой только грубое приближение к идеальному узкополосному фильтру с прямоугольными фронтами.

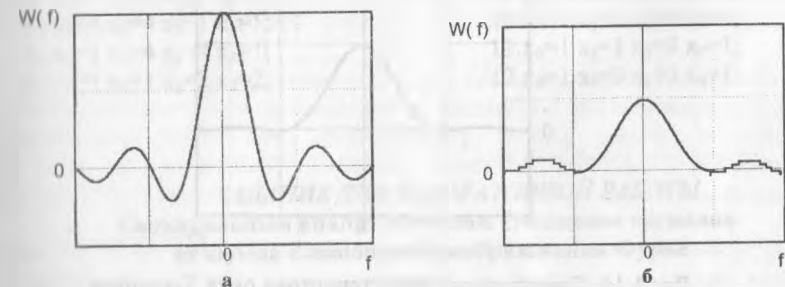


Рис.1.15. Спектральные характеристики прямоугольного окна (а) и окна Бартлетта (б)

Поэтому желательно выбирать весовую функцию без отрицательных выбросов (рис.1.15, 6). В частности для треугольного окна (окна Бартлетта) корреляционная характеристика имеет следующий вид:

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{L} & \text{при } |\tau| \leq L; \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq L. \end{cases} \quad (1.39)$$

Оценка принимает вид

$$\bar{G}_X(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\bar{x}_i(j2\pi f)|^2}{\pi L \Delta t}, \quad (1.40)$$

где $\bar{x}_i(j2\pi f)$ определяется по i -му участку реализации, получающемуся делением реализации $x(t)$ на n равных частей с числом отсчетов $L = T/(n\Delta t)$.

Оценка $\bar{G}_X(f)$, полученная таким образом, не приводит к отрицательным значениям. Однако спектральное окно имеет относительно большие боковые максимумы, что выявляет ложные гармоники при исследовании сигнала дыхания пациента.

Поэтому при обработке сигналов различных приборов и систем рекомендуется использовать окно Хемминга [20]:

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi \tau}{\tau_L} & \text{при } |\tau| \leq \tau_L; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_L. \end{cases} \quad (1.41)$$

Данный тип окна обеспечивает отсутствие значительных боковых максимумов (рис. 1.16) и обладает сравнительной простотой вычислений [1,4,13].

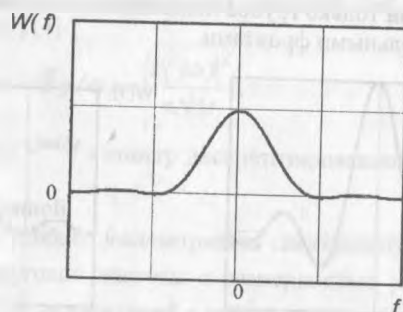


Рис.1.16. Спектральная характеристика окна Хемминга.

Основой для получения достоверного спектра при работе приборов и систем является рациональная методика цифровой обработки сигнала. Выбор оптимальной частоты дискретизации, необходимой продолжительности

наблюдений, имеет большое значение для получения неискаженных оценок сигналов, снимаемых с различных датчиков. Учет влияния конечности интервала наблюдения позволяет (с применением весовой функции Хемминга) получить достоверный спектр с целью построения высокоточных приборов и систем медицинского назначения.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

(Каждый студент выполняет свой вариант)

1. Найти дискретную свертку (непосредственно и с помощью преобразования) сигналов $x(kT)$ и $y(kT)$, состоящих из отсчетов. Изобразить исходные сигналы и результирующий.

- | | |
|--------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $x(0)=1 \ x(T)=1 \ x(2T)=1 \ x(3T)=5;$ | $y(0)=2 \ y(T)=3 \ y(2T)=4 \ y(3T)=2;$ |
| 2. $x(0)=2 \ x(T)=3 \ x(2T)=2 \ x(3T)=4;$ | $y(0)=2 \ y(T)=3 \ y(2T)=4 \ y(3T)=4;$ |
| 3. $x(0)=3 \ x(T)=1 \ x(2T)=2 \ x(3T)=3;$ | $y(0)=2 \ y(T)=4 \ y(2T)=4 \ y(3T)=1;$ |
| 4. $x(0)=1 \ x(T)=2 \ x(2T)=3 \ x(3T)=2;$ | $y(0)=1 \ y(T)=2 \ y(2T)=3 \ y(3T)=4;$ |
| 5. $x(0)=2 \ x(T)=1 \ x(2T)=1 \ x(3T)=1;$ | $y(0)=2 \ y(T)=3 \ y(2T)=4 \ y(3T)=2;$ |
| 6. $x(0)=2 \ x(T)=1 \ x(2T)=2 \ x(3T)=5;$ | $y(0)=4 \ y(T)=3 \ y(2T)=4 \ y(3T)=4;$ |
| 7. $x(0)=3 \ x(T)=1 \ x(2T)=1 \ x(3T)=4;$ | $y(0)=3 \ y(T)=3 \ y(2T)=4 \ y(3T)=1;$ |
| 8. $x(0)=2 \ x(T)=3 \ x(2T)=1 \ x(3T)=3;$ | $y(0)=3 \ y(T)=4 \ y(2T)=4 \ y(3T)=4;$ |
| 9. $x(0)=3 \ x(T)=3 \ x(2T)=2 \ x(3T)=2;$ | $y(0)=3 \ y(T)=2 \ y(2T)=1 \ y(3T)=4;$ |
| 10. $x(0)=4 \ x(T)=1 \ x(2T)=1 \ x(3T)=1;$ | $y(0)=1 \ y(T)=3 \ y(2T)=4 \ y(3T)=1;$ |
| 11. $x(0)=4 \ x(T)=2 \ x(2T)=3 \ x(3T)=5;$ | $y(0)=1 \ y(T)=1 \ y(2T)=3 \ y(3T)=2;$ |
| 12. $x(0)=4 \ x(T)=2 \ x(2T)=3 \ x(3T)=4;$ | $y(0)=1 \ y(T)=1 \ y(2T)=1 \ y(3T)=4.$ |

2. Найти дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности, описываемой следующими выборочными значениями (изобразить графически исходную последовательность и модуль ее дискретного преобразования):

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $x_0=1 \ x_1=2 \ x_2=2 \ x_3=1;$ | 7. $x_0=1 \ x_1=2 \ x_2=1 \ x_3=3;$ |
| 2. $x_0=2 \ x_1=1 \ x_2=1 \ x_3=1;$ | 8. $x_0=1 \ x_1=1 \ x_2=1 \ x_3=4;$ |
| 3. $x_0=1 \ x_1=2 \ x_2=1 \ x_3=3;$ | 9. $x_0=2 \ x_1=2 \ x_2=1 \ x_3=1;$ |
| 4. $x_0=4 \ x_1=4 \ x_2=1 \ x_3=1;$ | 10. $x_0=1 \ x_1=2 \ x_2=2 \ x_3=1;$ |
| 5. $x_0=1 \ x_1=4 \ x_2=4 \ x_3=1;$ | 11. $x_0=1 \ x_1=1 \ x_2=3 \ x_3=1;$ |
| 6. $x_0=1 \ x_1=1 \ x_2=2 \ x_3=2;$ | 12. $x_0=1 \ x_1=3 \ x_2=3 \ x_3=1;$ |

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Спектральный анализ сигналов. Очищение сигналов от шумов с помощью преобразования Фурье

Цель работы: исследование спектров различного типа сигналов и проведение фильтрации сильно зашумленного сигнала на основе анализа спектральных компонент.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

В дискретном преобразовании Фурье значения спектра вычисляется не для всех значений частоты, а для дискретных $\omega = n \frac{2\pi}{T_C} = n\Omega$ (где T_C - длительность импульса (сигнала)).

Формула для дискретного преобразования Фурье может быть записана следующим образом

$$S(n\Omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jnk\Omega T}$$

или, если считать $\Omega = 2\pi / N$, то

$$S(n\Omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}$$

Аппарат дискретных преобразований имеет самостоятельное значение и может быть применен к любым числовым последовательностям. В этом случае коэффициент T перед суммой в формуле опускают, T_C / T заменяют на N , отсчетные значения сигнала и спектра обозначают через f_k и S_n и формулу дискретного преобразования Фурье записывают в виде

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk \frac{2\pi}{N}} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

Амплитудный спектр находится по формуле

$$A_n = |S_n|$$

спектр мощности находится по формуле

$$P_n = |S_n|^2.$$

Разложение сигналов в ряд Фурье было названо спектральным анализом, а воссоздание сигналов суммированием гармоник - спектральным синтезом.

Очищение сигнала от шумов с помощью преобразований Фурье

Фильтрацию сильно зашумленных сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье можно рассматривать как один из методов математической обработки сложных сигналов. Фактически он является разновидностью регрессии, когда в качестве функции регрессии выступает ряд Фурье.

Это преобразование осуществляет гармонический анализ сигнала. Смысл процедуры фильтрации сигнала на базе применения обратного дискретного преобразования Фурье заключается в выделении определенной части спектра сигнала и его обратном преобразовании Фурье во временную зависимость. Фильтр выделяет лишь те области частот, которые близки к гармоническим составляющим исходного сигнала, и ослабляет (точнее говоря, просто отсеивает) другие составляющие.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включить компьютер, ввести имя пользователя и пароль, открыть программу Mathcad.

2. Найти спектр мощности и амплитудный спектр сигналов, которые заданы в файлах (z:\signal1.txt; z:\signal2.txt). Частота дискретизации 1000 Гц.

2.1 Для этого считать данные из указанных файлов командой чтения, в зависимости от версии программы Mathcad, учесть, что количество отсчетов - 1006. Отобразить на графике.

Сигналы 1 и 2 изображены на рис. 1.17

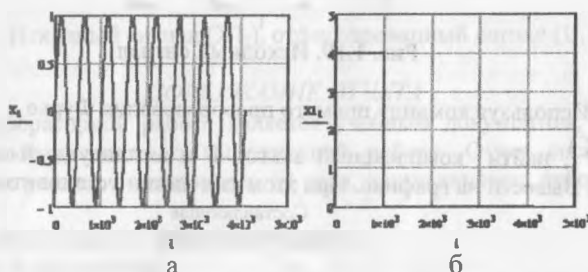


Рис. 1.17. Исходные сигналы: а) – сигнал 1, б) сигнал 2

2.2. Используя команду быстрого преобразования Фурье

$fft(X)$, найти амплитудный спектр сигнала. Вывести на графике. При этом тип линии установить stem (результатирующие графики, которые должны получиться, изображены на рис. 1.18).

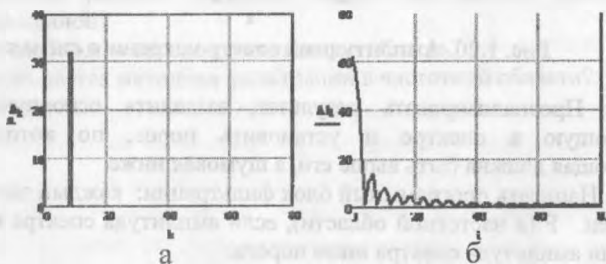


Рис. 1.18. Амплитудные спектры сигналов: а) – сигнал 1, б) сигнал 2

3. Проанализировать и сравнить результат, у первого файла выделить основную составляющую в спектре, найти частоту, на которой был задан исходный сигнал. Сделать выводы.

4. Провести фильтрацию сигнала в частотной области.
 4.1. Считать сигнал из файла z:\signal2.txt, количество отсчетов 4096. Отобразить его на графике (рис. 1.19).

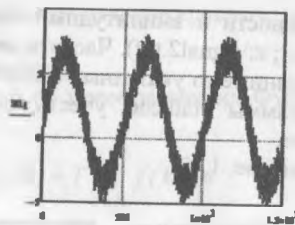


Рис. 1.19. Исходный сигнал

- 4.2. Используя команду прямого преобразования Фурье $F := \text{fft}(X)$, найти комплексный вектор F и амплитудный спектр сигнала (рис. 1.20). Вывести на графике. При этом тип линии установить stem.

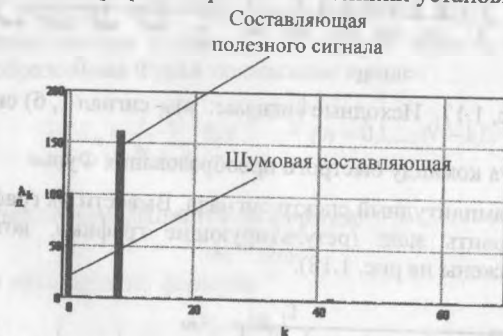


Рис. 1.20. Амплитудный спектр исходного сигнала.

- 4.3. Проанализировать результат, выделить основную и шумовую составляющую в спектре и установить порог, по которому полезная составляющая должна быть выше его, а шумовая ниже.

- 4.4. Написать программный блок фильтрации: каждый элемент V должен быть равен F (в частотной области), если амплитуда спектра выше порога, и нулю, если амплитуда спектра ниже порога.

- 4.5. Над результирующим вектором V – отфильтрованный сигнал в частотной области провести обратное преобразование Фурье по команде $U := \text{ifft}(K)$.

- 4.6. Вывести полученный сигнал во временной области и сравнить с исходным (на одном графике). Проанализировать результат.

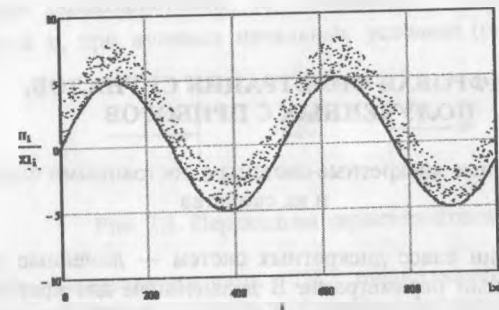


Рис. 1.21. Исходный сигнал ($X1_i$), отфильтрованный сигнал (U_i).

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет о лабораторной работе является учебным документом, который содержит основные сведения о выполненной работе. Отчет составляется студентом индивидуально и независимо от того, как выполнена лабораторная работа.

Отчёт должен содержать следующие пункты:

1. Название и цель работы.
2. Основные формулы прямого и обратного преобразований Фурье и наложения спектров.
3. Результирующие выводы по анализу спектра синусоидального и прямоугольного сигналов. Внешний вид спектров этих сигналов.
4. Методика фильтрации в частотной области и основные результаты.
5. Выводы по работе, обобщение и оценка результатов исследований.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. По графикам скажите, в какой области нарисованы функции – частотной или временной?
2. Для чего необходим переход в частотную область?
3. В чем заключается методика фильтрации в частотной области?

2. ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПРИБОРОВ

2.1. Линейные дискретные системы с постоянными параметрами и их свойства

Рассмотрим один класс дискретных систем — линейные дискретные системы с постоянными параметрами. В дальнейшем для краткости будем называть их линейными дискретными системами (ЛДС) или просто дискретными системами (ДС) [16].

ЛДС осуществляет преобразование входной последовательности x_n в выходную последовательность y_n по определенному алгоритму (рис. 2.1).

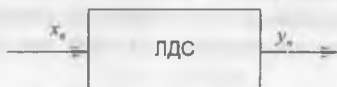


Рис. 2.1. Дискретная система

Свойства и исходные характеристики ЛДС

Для ЛДС справедлив принцип суперпозиции: если входным последовательностям $x_{1,n}$ и $x_{2,n}$ соответствуют реакции (выходные последовательности) $y_{1,n}$ и $y_{2,n}$, то входной последовательности $x_n = a_1 x_{1,n} + a_2 x_{2,n}$ соответствует реакция $y_n = a_1 y_{1,n} + a_2 y_{2,n}$ (следствие линейности системы).

Если входной последовательности x_n соответствует реакция y_n , то задержанной на m интервалов дискретизации входной последовательности x_{n-m} соответствует реакция y_{n-m} (следствие постоянства параметров системы) [24].

Импульсной характеристикой g , называется реакция ЛДС на единичный импульс δ , при нулевых начальных условиях (рис. 2.2).

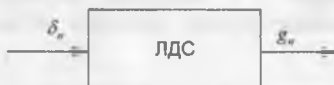


Рис. 2.2. Импульсная характеристика

Переходной характеристикой h , называется реакция ЛДС на единичный скачок u , при нулевых начальных условиях (рис. 2.3.).

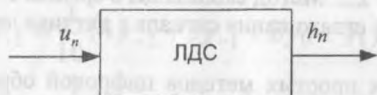


Рис. 2.3. Переходная характеристика

Выходная последовательность ЛДС представляет собой свертку входной последовательности и импульсной характеристики:

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x_{k-n}, \quad 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Для доказательства (2.1) представим входной сигнал в виде последовательности δ -функций:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x_{n-k}$$

Затем, используя рассмотренные выше свойства и характеристики ЛДС, получим реакции системы на последовательность воздействий, приведенных в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Входное воздействие	Реакция
δ_k	g_k
$\delta_k x_{n-k}$	$g_k x_{n-k}$
$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x_{n-k} = x_n$	$\sum_{k=0}^{\infty} g_k x_{n-k} = y_n$

Действительно, реакцией линейной дискретной системы на единичный импульс δ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ является импульсная характеристика g_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Реакцией на взвешенную последовательность $\delta_k x_{n-k}$ будет последовательность $g_k x_{n-k}$ [24].

В соответствии с принципом суперпозиции реакцией на последовательность $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x_{n-k}$ будет последовательность $\sum_{k=0}^{\infty} g_k x_{n-k}$.

Поскольку в соответствии с (1.7) последовательность $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x_{n-k}$ есть входная последовательность x_n , выходная последовательность y_n

линейной дискретной системы будет определяться выражением (2.1).

2.2. Метод скользящего среднего.

Пример сглаживания сигнала с датчика давления.

Одним из самых простых методов цифровой обработки, позволяющим тем не менее, получить положительные результаты, является метод скользящего среднего. Процедура сглаживания направлена на минимизацию случайных отклонений точек ряда от некоторой гладкой кривой предполагаемого тренда процесса.

Наиболее распространен способ осреднения уровня по некоторой совокупности окружающих точек, причем эта операция перемещается вдоль ряда точек, в связи с чем обычно называется скользящая средняя [11]. В самом простом варианте сглаживающая функция линейна и сглаживающая группа состоит из предыдущей и последующей точек, в более сложных — функция нелинейная и использует группу произвольного числа точек.

Сглаживание производится с помощью многочленов, приближающих по методу наименьших квадратов группы опытных точек. Наилучшее сглаживание получается для средних точек группы, поэтому желательно выбирать нечетное количество точек в сглаживаемой группе. Сами группы точек берут по составу скользящими по всей таблице. Например, по первым точкам y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 сглаживают среднюю y_3 , затем по следующей пятерке y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 сглаживают y_4 и т. д. Остающиеся крайние точки сглаживают по специальным формулам.

Наиболее распространенной формой сглаживания является линейное, т. е. с использованием многочлена первой степени [25].

Для сглаживания по трем точкам формулы имеют такой вид:

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{3}(y_{-1} + y_0 + y_{+1});$$

$$\bar{y}_{-1} = \frac{1}{6}(5y_{-1} + 2y_0 - y_{+1});$$

$$\bar{y}_{+1} = \frac{1}{6}(-y_{-1} + 2y_0 + 5y_{+1}).$$

где y_0, \bar{y}_0 — значения исходной и сглаженной функций в средней точке; y_{-1}, \bar{y}_{-1} — значения исходной и сглаженной функций в левой от средней точке; y_{+1}, \bar{y}_{+1} — значения исходной и сглаженной функций в правой от средней точке.

Формулы для \bar{y}_{-1} и \bar{y}_{+1} применяются, как правило, только по краям интервала.

Аналогичные формулы имеются для сглаживания рядов по пяти точкам:

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{5}(y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2);$$

$$\bar{y}_{-1} = \frac{1}{10}(4y_{-2} + 3y_{-1} + 2y_0 + y_1);$$

$$\bar{y}_{+1} = \frac{1}{10}(y_{-1} + 2y_0 + 3y_1 + 4y_2);$$

$$\bar{y}_{-2} = \frac{1}{5}(3y_{-2} + 2y_{-1} + y_0 - y_2);$$

$$\bar{y}_{+2} = \frac{1}{5}(-y_{-2} + y_0 + 2y_1 + 3y_2).$$

Таким образом, обходится весь массив входного сигнала и формируется выходной сглаженный сигнал.

Сглаживание даже в простом линейном варианте является во многих случаях весьма эффективным средством выявления тренда при наложении на эмпирический числовой ряд случайных помех и ошибок измерения. Для рядов с значительной амплитудой помехи имеется возможность проводить многократное сглаживание исходного числового ряда. Число последовательных циклов сглаживания должно выбираться в зависимости от вида исходного ряда, от степени предполагаемой его зашумленности помехой, от цели, которую преследует сглаживание. Надо иметь при этом в виду, что эффективность этой процедуры быстро уменьшается (в большинстве случаев), так что, как показывает опыт, целесообразно повторять ее от одного до трех раз [25].

В качестве некоторого объективного критерия, по которому можно судить о нецелесообразности повторного сглаживания, возможно использовать выражение

$$\max \{ |\bar{y}_i - y_i| \} \leq \varepsilon,$$

где ε — положительное число, выбираемое из соображений точности представления данных и точности последующих алгоритмов обработки; $i = 1, 2, \dots, n$ — номера точек в исходной последовательности.

В общем виде формула сглаживания для средней точки скользящей группы из $m = 2p + 1$ точек может быть записана как

$$\bar{y}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=t-p}^{t+p} y_i.$$

При большом числе точек исходного ряда эту процедуру можно привести к рекуррентной, использующей каждый раз предыдущее значение сглаженного уровня [11]:

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + \frac{y_{t+p} - y_{t-(p+1)}}{2p+1}.$$

Применим данный метод обработки к сглаживанию сигнала с датчика давления (рис.2.4).

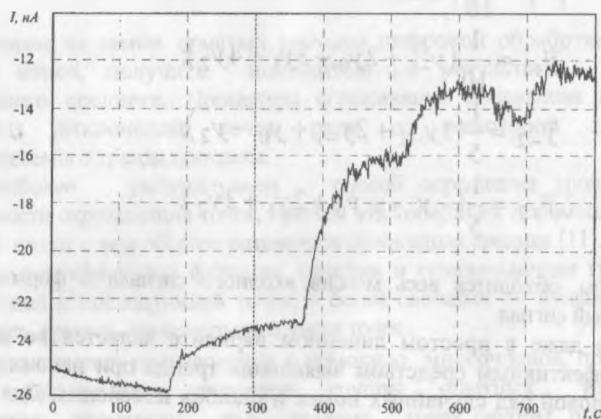


Рис. 2.4. Исходный сигнал с датчика

Как видно из рис. 2.5, 2.6 сглаживание уже по 15 точкам обеспечивает качественный результат, и дальнейшее увеличение количества точек лишь приведет к потере информации.

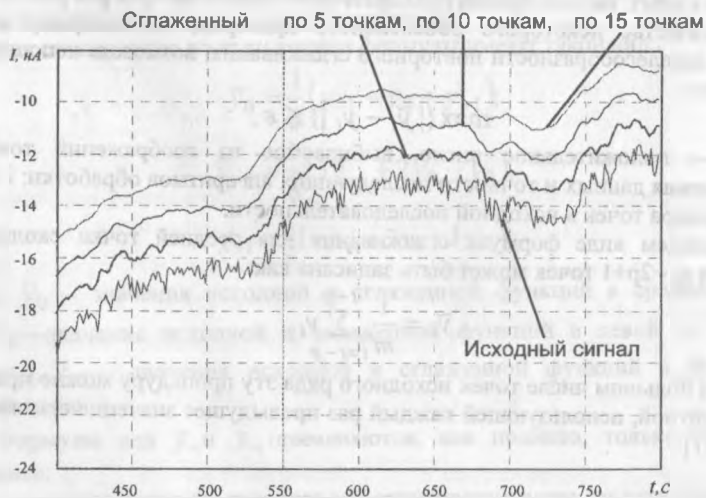


Рис. 2.5. Увеличенный фрагмент результата сглаживания методом скользящего среднего по 5,10 и 15 точкам (для наглядности графики

расположены последовательно)

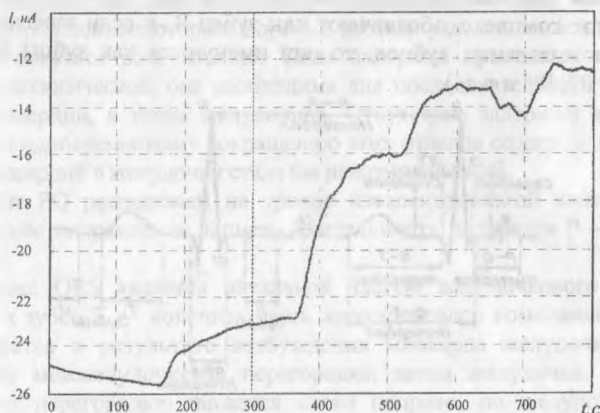


Рис. 2.6. Выходной сигнал с датчика давления, полученный в результате обработки методом скользящего среднего по 15 точкам

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Обработка реального электрокардиосигнала методом скользящего среднего

Цель работы: исследовать методику обработки методом скользящего среднего на примере электрокардиосигнала.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Формирование нормальной электрокардиограммы

Форма кривой электрокардиограммы (ЭКГ) при синхронной записи с различных участков тела будет различной. Зубцы или волны ЭКГ (рис.2.7) характеризуют величину, направление и локализацию потенциалов сердца. Отрезки ЭКГ, находящиеся между зубцами, называются сегментами, а отрезки, состоящие из сегмента и прилегающего зубца, — интервалами.

Горизонтальные участки сегментов указывают на отсутствие разности потенциалов на поверхности тела. Они изображаются изoeлектрической линией [6].

Зубцы и волны, направленные вершиной вверх от изoeлектрической линии, называются положительными, вниз — отрицательными. Вершина каждого зубца образована восходящим и нисходящим коленами.

Высота (амплитуда) зубцов измеряется в миллиметрах. Продолжительность сегментов и интервалов кривой ЭКГ по горизонтали измеряется в секундах (долях секунды). Зубцы имеют буквенные

наименования, введенные еще Эйнтховеном: P, Q, R, S, T, U. Зубцы Q, R, рассматриваются как единый комплекс QRS. Всякий положительный зубец входящий в этот комплекс, обозначают как зубец R, и если зарегистрировано несколько положительных зубцов, то они именуются как зубцы R (принято обозначать R', R'', R''' и т. д.).

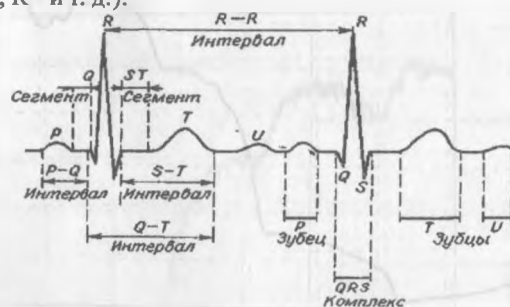


Рис. 2.7. Элементы нормальной ЭКГ

Зубцу R предшествует отрицательный зубец Q. Отрицательные зубцы, следующие за положительными зубцами R, обозначаются как S', S'', S''' и т. д. На ЭКГ зубец Q всегда отрицательный и может быть только один, зубцы R — только положительные, а зубец S — всегда отрицательный [8]. Для обозначения зубцов, имеющих малые амплитуды, принято использовать строчные буквы q, r, s. Зубцы P, T и U могут быть положительными, отрицательными и двухфазными. Величина и направление зубцов зависят от вектора потенциалов правых и левых отделов сердца.

Различают сегменты: PQ, ST и TP, интервалы: P — Q, состоящий из сегмента PQ и зубца P; S — T, состоящий из сегмента ST и зубца T; интервал QT измеряется от начала зубца P до конца зубца T.

Зубец P возникает при распространении возбуждения по миокарду предсердий. Поэтому он называется предсердным зубцом ЭКГ. Возбуждение движется от синусового к атриовентрикулярному узлу. Правое предсердие, где находится синусовый узел, начинает и заканчивает возбуждение на 0,01 с раньше левого. Однако эта разница на записи зубца P не отражается. Возбуждение предсердий примерно на 0,05 с предшествует их сокращению. В нормальных условиях зубец P имеет округлую форму, длительность его не превышает 0,10 — 0,11 с и амплитуда — 2—2,5 мм [6].

Интервал P — Q измеряется от начала зубца P до начала зубца Q, сегмент PQ измеряется от конца P до начала Q, при отсутствии зубца Q измерение производится до начала зубца R. Сегмент PQ соответствует времени равномерного охвата возбуждением миокарда предсердий и проведения импульса по атриовентрикулярному узлу, предсердно-желудочковому пучку, его ножкам и волокнам Пуркинье. Основное время сегмента PQ занимает задержка проведения импульса в атриовентрикулярном

Это возникает вследствие того, что узел работает по принципу синапса: его клетки суммируют энергию импульсов мышечных волокон предсердий, и только по достижении некоторого порога в клетках узла относительно медленно начинается развиваться возбуждение. Такая задержка проведения возбуждения является физиологической, она необходима для последовательного сокращения предсердий, а затем желудочков. Отсутствие задержки возбуждения привело бы к одновременному сокращению этих отделов сердца, и перемещение крови из предсердий в желудочки стало бы невозможным [6].

Сегмент PQ расположен на уровне изoeлектрической линии и имеет горизонтальное направление записи. Длительность интервала P—Q в норме 0,12—0,20 с.

Комплекс QRS является начальной частью желудочкового комплекса, сегмент ST и зубец T — конечная часть желудочкового комплекса. Комплекс QRS образуется в результате возбуждения миокарда желудочков. Первой возбуждается межжелудочковая перегородка, затем желудочки. Волна возбуждения по перегородке движется слева направо, по желудочкам — от эндокарда к эпикарду. В результате такого распространения возбуждения в прямых отведениях от сердца в полости левого желудочка комплекс QRS имеет форму QS, в полости правого желудочка — форму rS, на наружной поверхности левого желудочка — qR, на наружной поверхности правого желудочка — rS. Эти основные формы ЭКГ по изопотенциальным линиям (рис. 2.8) передаются на поверхность тела [6,8].

Длительность комплекса QRS не должна превышать 0,07 — 0,11 с. В норме длительность зубца Q не должна превышать 0,03 с, глубина в большинстве отведений не должна быть больше $\frac{1}{4}$ высоты зубца R в том же отведении. Время от начала комплекса QRS до вершины зубца R (если зубцов R несколько, то до вершины последнего) называется временем внутреннего отклонения. Сегмент ST соответствует периоду равномерного охвата возбуждением миокарда обоих желудочков. Так как при этом разности потенциалов нет, то в нормальных условиях сегмент ST располагается на уровне изoeлектрической линии. Патологическим считается смещение сегмента ST на 1 мм и больше от уровня изoeлектрической линии вверх или вниз [8].

Зубец T соответствует процессу выхода желудочков из состояния возбуждения, т.е. процессу реполяризации. Длительность зубца T не определяется, его высота в нормальных условиях варьирует от 2 до 10 мм. Он имеет закругленную вершину, пологую восходящую и крутую нисходящую части.

Зубец U иногда регистрируется в диастолическом интервале ЭКГ после зубца T. Его происхождение связывают с запаздыванием реполяризации отдельных участков миокарда желудочков. Его амплитуда составляет 2—3 мм.

Интервал Q — T условно называется электрической систолой сердца. Длительность его измеряется от начала зубца Q (при отсутствии Q — от начала зубца R) до конца зубца T. Длительность этого интервала зависит от

частоты ритма сердца: чем ритм чаще, тем длительность Q — Т короче. Весь сердечный цикл электрической активности регистрируется интервалом R-R.

Типы искажений, возникающих при регистрации электрокардиосигнала

При регистрации ЭКГ возможны искажения ее кривой под влиянием многих причин.

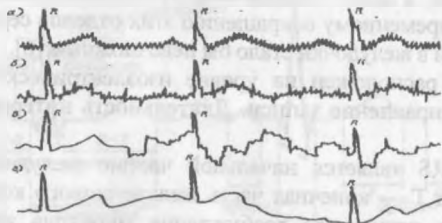


Рис. 2.8. Искажения ЭКС под воздействием помех:

а — наводка напряжения сети; б — мышечные шумы; в — артефакты, вызванные движениями пациента; г — дрейф изолинии при изменении напряжения поляризации

1. Наведенные на объект напряжения от сети переменного тока значительно подавляются усилителем ЭКС с большим значением $K_{ос}$. Остающийся противофазный сигнал дополнительно ослабляется в тракте выделения R-зубца режекторным аналоговым или цифровым фильтром, настроенным на частоту 50 Гц [6].

2. Импульсные помехи, попадающие в кардиограф через сеть при включении мощной медицинской аппаратуры (рентгеновской, физиотерапевтической и др.), частично ослабляются применением экранированных Т-образных LC-фильтров в сетевой цепи КГ. Одновременно фильтры ограничивают спектр частот, попадающих из КГ в сеть, до допустимых норм на индустриальные помехи.

3. Мышечные шумы, вызванные биопотенциалами работающих мышц имеют протяженный спектр частот и их ослабление возможно оптимальным размещением электродов в местах, где мало скелетных мышц, и ограничением $f_{в}$ на входе выделителя R-зубца [8].

4. Помехи, возникающие при движениях больного, за счет изменения напряжения поляризации от смещения электродов имеют спектр частот от 1 до 10 Гц. Для ослабления этих помех необходимо применение слабополяризующихся электродов и надежное их крепление.

5. Смещение изолинии ЭКС из-за медленного дрейфа напряжения поляризации, который наблюдается в первые 10—15 мин после установки электродов и диффузии электролита под кожу.

6. Напряжение собственных шумов электродов и усилителя ЭКС в низкочастотном диапазоне значительно меньше порога обнаружения R-зубца и сказывается только на качестве изображения ЭКС.

7. Импульсные напряжения, попадающие на вход усилителя ЭКС, при одновременном воздействии на больного импульсами дефибриллятора и кардиостимулятора приводят к искажению кардиокомплекса из-за перегрузки тракта усиления и поляризационных явлений под электродом кардиостимулятора. Импульс дефибриллятора значительно ограничивается на выходе усилителя ЭКС [6], а время перегрузки может быть уменьшено ручным или автоматическим успокоением. Положение облегчается еще и тем, что в этом случае имеет значение только возможность быстрого возбуждения ЭКС (эффективности дефибрилляции), а не его автоматический анализ. Сложнее обстоит дело с артефактом стимула кардиостимулятора, который может быть принят за QRS-комплекс при отсутствии сокращения сердца в ответ на стимул (неэффективная стимуляция). Для устранения ложного выделения R-зубца нужны специальные меры, которые будут рассмотрены ниже.

8. Искажения кардиокомплекса, связанные с ограничением ЭКС при его выходе за динамический диапазон усилителя ЭКС или аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Эти искажения могут быть устранены применением АРУ и автоматической центровкой ЭКС относительно динамического диапазона.

9. Помехи, определяемые структурой кардиокомплекса, т. е. теми его составляющими, которые не подлежат анализу (зубцы Р и Т), но могут быть приняты за QRS-комплекс и давать ошибки ложного обнаружения. Устранение [8] этих ошибок возможно путем частотной фильтрации и временной селекции, а в сложных случаях — дополнительным анализом формы ложно обнаруженных комплексов, их сравнением с нормальными и последующим исключением ложного.

Методика сглаживания электрокардиосигнала

Процедура сглаживания направлена на минимизацию случайных отклонений точек ряда от некоторой гладкой кривой предполагаемого тренда процесса.

В случае работы с ЭКС установлено, что наилучшие результаты достигаются при обработке методом скользящего среднего.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Считать электрокардиосигнал из файла на диске Z:\CARD.TXT (или на диске, указанном преподавателем),
 - в *MuthCAD 2000* при помощи функции — READ,
 - в *MuthCAD 2001* — READPRN, при этом учесть, что количество отсчетов 4996.
- Отобразить на графике сигнал (рис. 2.9). Выделить основные структурные составляющие сигнала (Q-R-S комплекс).

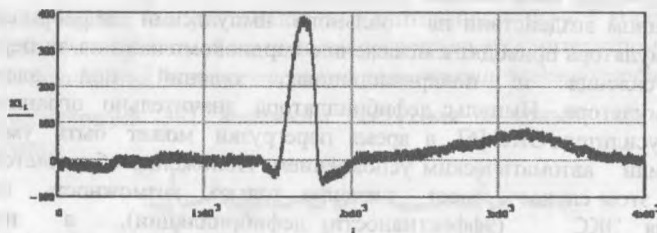


Рис. 2.9. Электрокардиосигнал, считанный из файла

2. Обеспечить обработку сигнала методом скользящего среднего по точкам. Вывести результат на график и сравнить с исходным сигналом.

3. Выделить фрагмент в увеличенном масштабе (по оси x и y) с 1825 по 1845 отсчет на исходном и сглаженном сигнале. Отобразить. Сравнить и проанализировать параметры сигналов. Зарисовать и записать в сравнительную таблицу значения этих отсчетов.

№ отсчета	Исходные данные	Сглаживание по 5 точкам
1825	-38	-28,7
1826		
...		
1845		

4. Сделать выводы.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое электрокардиограмма?
2. Как описывается методика сглаживания методом скользящего среднего?
3. Какое влияние оказывает количество точек сглаживания на сигнал?
4. Какие параметры сигнала изменяются в результате обработки методом скользящего среднего?

2.3. Разностные уравнения и передаточные функции цифровых фильтров

Важнейшим подмножеством класса ЛДС являются такие дискретные системы, входная и выходная последовательности которых [1] связаны линейным рекурсивным разностным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_{n-k}, \quad n=0,1,2, \dots, \quad (2.2)$$

где N и M — постоянные целые числа, b_k и a_k — постоянные коэффициенты, а

x_n и y_n — отсчеты входного и выходного сигналов соответственно.

Разностное уравнение вида (2.2) описывает алгоритм рекурсивного фильтра (РФ). Как видно из (2.2), n -й отсчет выходной последовательности y_n определяется N отсчетами входной последовательности ($x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-N+1}$) и $M-1$ предыдущими отсчетами самой выходной последовательности ($y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-M+1}$).

В частном случае уравнение (2.2) имеет нерекурсивный вид и описывает алгоритм нерекурсивного фильтра (НРФ): [14].

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x_{n-k}, \quad n=0,1,2, \dots \quad (2.3)$$

Как видно из (2.3), n -й отсчет выходной последовательности y_n определяется только N отсчетами входной последовательности ($x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-N+1}$).

Пример.

При $N=3, M=3$ уравнение (2.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k=0}^2 b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^2 a_k y_{n-k} = \\ &= b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}. \end{aligned}$$

Пример.

При $N=2, b_0 = b_2 = 0.25, b_1 = 0.5$ уравнение (2.3) имеет вид:

$$y_n = \sum_{k=0}^2 b_k x_{n-k} = 0.25 x_n + 0.5 x_{n-1} + 0.25 x_{n-2}.$$

Разностное уравнение определяет алгоритм вычисления отсчетов выходной последовательности. Для рекурсивного фильтра (2.3) эти вычисления можно выполнить только в том случае, если известны начальные условия ($y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-M+1}$).

Пример.

Рекурсивный фильтр описывается разностным уравнением $y_n = x_n - a_1 y_{n-1}$. Необходимо определить импульсную характеристику (ИХ) фильтра.

Поскольку импульсная характеристика — это реакция на единичный импульс δ_n , при нулевых начальных условиях, необходимо положить $y_{-1} = 0$. Вычисления отсчетов выходного сигнала $y_n = g_n$ приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

n	Вычисления	y,
0	$y_0 = x_0 - a_1 y_{-1} = 1 - a_1 \cdot 0$	1
1	$y_1 = x_1 - a_1 y_0 = 0 - a_1 \cdot 1$	$-a_1$
2	$y_2 = x_2 - a_1 y_1 = 0 - a_1 \cdot (-a_1)$	$(-a_1)^2$
3	$y_3 = x_3 - a_1 y_2 = 0 - a_1 \cdot (-a_1)^2$	$(-a_1)^3$
...
N	$y_n = x_n - a_1 y_{n-1} = 0 - a_1 (a_1)^{n-1}$	$(-a_1)^n$

Пример.

Нерекурсивный фильтр описывается разностным уравнением $y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$. Необходимо определить импульсную характеристику фильтра. Вычисления отсчетов выходного сигнала $y_n = h_n$ приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Определение ИХ

N	Вычисления	y _n
0	$y_0 = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0$	b_0
1	$y_1 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0$	b_1
2	$y_2 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1$	b_2
3	$y_3 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0$	0

Отметим, что отсчеты импульсной характеристики НРФ равны коэффициентам разностного уравнения.

Если импульсная характеристика фильтра [10] описывается последовательностью с конечным числом членов, то фильтр может быть реализован в виде схемы, изображенной на рис. 2.9, где буквой T обозначены элементы задержки сигнала на время T (на одну ячейку); $g(0), g(T), \dots, g(NT)$ — элементы, умножающие сигнал на соответствующий коэффициент.

Схема, изображенная на рис. 2.9, не является электрической схемой цифрового фильтра; эта схема представляет собой графическое изображение алгоритма цифровой фильтрации и показывает последовательность арифметических операций, выполняемых при обработке сигнала [24].

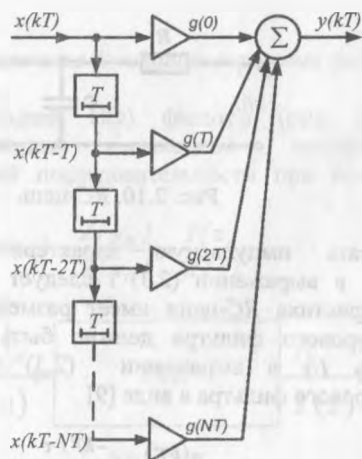


Рис. 2.9. Схема нерекурсивного цифрового фильтра

Для цифровых фильтров, обрабатывающих сигналы в виде абстрактных числовых последовательностей, понятие «задержка на время T » является не совсем корректным. Поэтому элементы, задерживающие сигнал на одну ячейку, на схемах цифровых фильтров обычно отмечают символом z^{-1} , обозначающим задержку сигнала на языке z -преобразований.

Вернемся к схеме цифрового фильтра, изображенной на рис. 2.9. Такие фильтры, где для расчета используются лишь значения входного сигнала, называют простыми или нерекурсивными. Алгоритм нерекурсивного фильтра легко записать, если известна импульсная характеристика фильтра. Для практической реализации алгоритма необходимо, чтобы импульсная характеристика содержала конечное число членов. Если импульсная характеристика содержит бесконечное число членов, но они быстро убывают по величине, то можно ограничиться конечным числом членов, отбросив те, значения которых малы [7]. В случае если элементы импульсной характеристики не убывают по величине, алгоритм нерекурсивного фильтра оказывается нереализуемым.

В качестве примера рассмотрим простейший цифровой фильтр, аналогичный RC -цепи (рис. 2.10). Импульсная характеристика RC -цепи имеет вид

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (2.3)$$

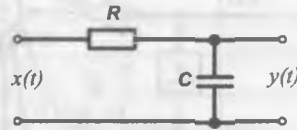


Рис. 2.10. RC-цепь

Чтобы записать импульсную характеристику соответствующего цифрового фильтра, в выражении (2.3) t следует заменить на kT . Однако импульсная характеристика RC-цепи имеет размерность $1/c$, а импульсная характеристика цифрового фильтра должна быть безразмерной. Поэтому опустим множитель $1/\tau$ в выражении (2.3) и запишем импульсную характеристику цифрового фильтра в виде [9]

$$g(kT) = e^{-kT/\tau} \quad (2.4)$$

Такая импульсная характеристика содержит бесконечно много членов, но их величина убывает по экспоненциальному закону, и можно ограничиться N членами, выбирая N таким, чтобы $e^{-NT/\tau} \ll 1$.

Теперь можно записать выражение для сигнала на выходе фильтра:

$$y(nT) = x(nT) + e^{-T/\tau} x(nT - T) + e^{-2T/\tau} x(nT - 2T) + \dots + e^{-NT/\tau} x(nT - NT) \quad (2.5)$$

Это выражение является одновременно [10] алгоритмом цифрового фильтра. Схема этого фильтра представлена на рис. 2.11.

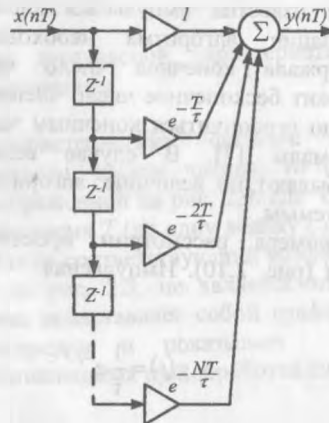


Рис. 2.11. Схема нерекурсивного цифрового фильтра, аналогичного RC-цепи

Передаточные функции дискретных фильтров

Передаточной функцией $H(z)$ фильтра (рис. 2.12) называется отношение Z-преобразования выходной последовательности к Z-преобразованию входной последовательности при нулевых начальных условиях [24]:

$$H(z) = \frac{Z\{y_n\}}{Z\{x_n\}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.6)$$

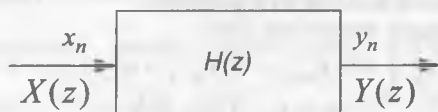


Рис. 2.12. Передаточная функция

Передаточную функцию можно получить, применив Z-преобразование к разностному уравнению. При этом целесообразно использовать свойства Z-преобразования.

В качестве примера найдем системную функцию цифрового фильтра первого порядка, аналогичного RC-цепи:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT/\tau} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}} \quad (2.7)$$

Важную роль в системах обработки биомедицинских сигналов играют рекурсивные фильтры 1-го и 2-го порядков, поэтому этим фильтрам будет уделено значительное внимание [16].

• Базовый рекурсивный фильтр 1-го порядка. Базовым РФ 1-го порядка называют фильтр, описываемый разностным уравнением вида:

$$y_n = x_n - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Применив z-преобразование к левой и правой частям уравнения, получим

$$Y(z) = X(z) - a_1 z^{-1} Y(z).$$

Отсюда

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (2.9)$$

• Рекурсивный фильтр 1-го порядка. Разностное уравнение имеет вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Применив z-преобразование к левой и правой частям уравнения, получим

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z).$$

Отсюда

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}. \quad (2.11)$$

• **Базовый рекурсивный фильтр 2-го порядка.** Разностное уравнение и передаточная функция имеют вид:

$$y_n = x_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \quad (2.13)$$

• **Рекурсивный фильтр 2-го порядка.** Разностное уравнение и передаточная функция имеют вид [24]:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \quad (2.15)$$

• **Нерекурсивный фильтр 2-го порядка.** Разностное уравнение и передаточная функция имеют вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}. \quad (2.17)$$

На основе приведенных примеров можно сформулировать правила определения передаточной функции по разностному уравнению (и наоборот):

- коэффициенты разностного уравнения являются коэффициентами передаточной функции [16];

- коэффициенты разностного уравнения b_k при x_{n-k} равны коэффициентам числителя передаточной функции при z^{-k} , $k = 0, 1, \dots, N-1$;

- коэффициенты разностного уравнения $-a_k$ при y_{n-k} равны коэффициентам знаменателя передаточной функции (с обратным знаком) при z^{-k} , $k = 0, 1, \dots, M-1$.

Пример. Известна передаточная функция рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{0.2 - 0.5z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.64z^{-2}}.$$

Необходимо записать разностное уравнение:

Разностное уравнение имеет вид:

$$y_n = 0.2x_n - 0.5x_{n-2} + 0.4y_{n-1} - 0.64y_{n-2}.$$

- В общем случае передаточная функция дискретного фильтра может быть получена [24] путем применения z -преобразования к разностным уравнениям (2.2) и (2.3).

Рекурсивный фильтр:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \quad (2.18)$$

Нерекурсивный фильтр

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}. \quad (2.19)$$

2.4. Структурные схемы цифровых фильтров и их устойчивость

Рассмотрим цифровой фильтр общего вида, который описывается уравнением

$$\begin{aligned} y(nT) - a_1 y(nT - T) - a_2 y(nT - 2T) - \dots - a_M y(nT - MT) = \\ = b_0 x(nT) + b_1 x(nT - T) + \dots + b_N x(nT - NT). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Это уравнение можно рассматривать и как разностное уравнение N -го порядка, и как алгоритм цифровой фильтрации [16], если его переписать иначе:

$$\begin{aligned} y(nT) = b_0 x(nT) + b_1 x(nT - T) + \dots + b_N x(nT - NT) + \\ + a_1 y(nT - T) + a_2 y(nT - 2T) + \dots + a_M y(nT - MT). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Алгоритму (2.21) соответствует структурная схема, изображенная на рис. 2.13

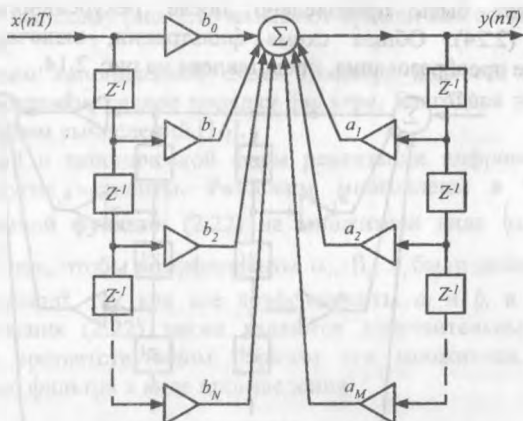


Рис. 2.13. Схема рекурсивного цифрового фильтра N -го порядка

Найдем передаточную функцию такого фильтра [24]. Для этого применим к уравнению (2.21) z -преобразование:

$$\begin{aligned} Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \dots - a_M z^{-M} Y(z) = \\ = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_N z^{-N} X(z), \end{aligned}$$

откуда

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M}} \quad (2.22)$$

Схема рекурсивного цифрового фильтра, представленная на рис. 2.13, не является единственно возможной формой реализации цифрового фильтра с передаточной функцией вида (2.22).

Запишем выражение, связывающее z -преобразования сигналов на входе и выходе рекурсивного фильтра [9]:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M}} \quad (2.23)$$

Введем промежуточную последовательность $w(nT)$, для которой определим Z -преобразование следующим образом:

$$W(z) = \frac{X(z)}{a_0 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M}} \quad (2.24)$$

Такое преобразование осуществляется с помощью рекурсивного фильтра N -го порядка [7]. Связь между выходным сигналом $y(nT)$ и промежуточным $w(nT)$ определяется выражением

$$Y(z) = W(z) (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}) \quad (2.25)$$

Формула (2.25) определяет нерекурсивное преобразование сигнала, которое может быть произведено после рекурсивного, определяемого выражением (2.24). Общая схема фильтрации, включая рекурсивное и нерекурсивное преобразования, представлена на рис. 2.14.

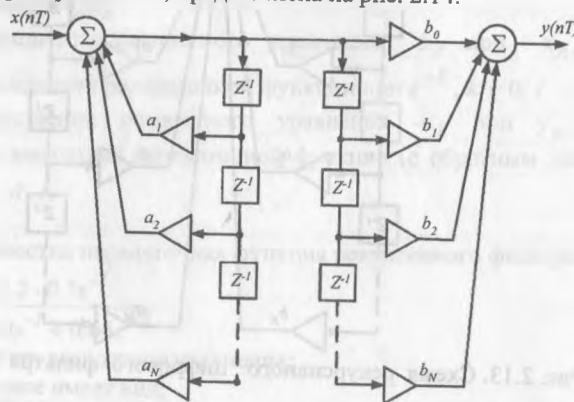


Рис. 2.14. К выводу канонической схемы цифрового фильтра

В схеме рис. 2.14 несколько элементов задержки являются лишними, так как дублируют друг друга. Если попарно объединить дублирующие друг друга

элементы [10], то получим схему фильтра, которую называют канонической (рис. 2.15).

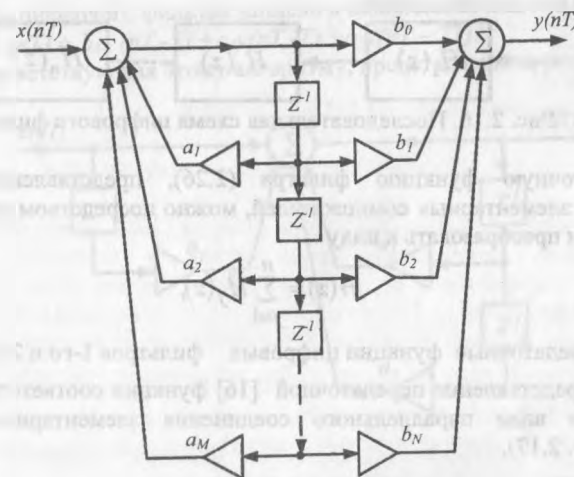


Рис. 2.15. Каноническая схема цифрового фильтра N -го порядка

В отличие от нее схему рис. 2.15 называют прямой или основной формой цифрового фильтра.

Преимуществом канонической схемы фильтра является минимальное число элементов задержки, равное порядку фильтра. Благодаря этому удастся сократить общий объем вычислений [16].

Кроме прямой и канонической форм реализации цифровых фильтров существуют и другие варианты. Разложим многочлены в числителе и знаменателе системной функции (2.22) на множители вида $(\alpha_i + \beta_i z^{-1})$ и $(\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \gamma_i z^{-2})$ так, чтобы коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ были действительными числами. Это возможно, так как все коэффициенты a_i и b_i в числителе и знаменателе выражения (2.22) также являются действительными числами. Затем, группируя соответствующим образом эти множители, представим системную функцию фильтра в виде произведения

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \dots H_k(z), \quad (2.26)$$

где сомножители $H_i(z)$ имеют вид $\frac{\alpha_i + \beta_i z^{-1}}{1 + \gamma_i z^{-1}}$ или $\frac{\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \delta_i z^{-2}}{1 + \gamma_i z^{-1} + \chi_i z^{-2}}$ и

являются, таким образом, передаточными функциями цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков. Таким образом, цифровой фильтр с передаточной функцией вида (2.26) может быть реализован посредством каскадного

соединения цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков [24], как показано на рис. 2.16. Такую форму реализации цифровых фильтров называют последовательной или каскадной.

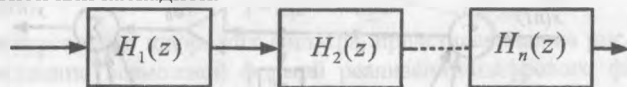


Рис. 2.16. Последовательная схема цифрового фильтра

Передающую функцию фильтра (2.26), представленную в виде произведения элементарных сомножителей, можно посредством разложения на простые дроби преобразовать к виду

$$H(z) = \sum_{j=1}^n \tilde{H}_j(z), \quad (2.27)$$

где $\tilde{H}_j(z)$ - передаточные функции цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков.

Такое представление передаточной [16] функции соответствует схемной реализации в виде параллельного соединения элементарных цифровых фильтров (рис. 2.17).

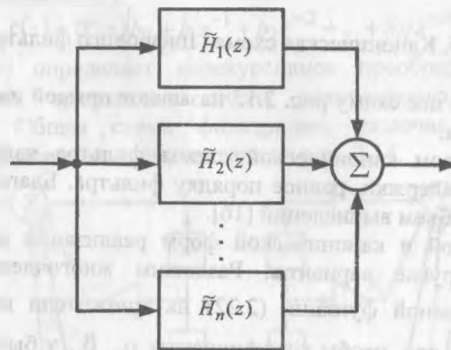


Рис 2.17. Параллельная схема цифрового фильтра

Рассмотренные четыре типа фильтров совершенно эквивалентны друг другу и дают один и тот же результат, если не учитывать квантование сигналов и считать, что параметры фильтров, т. е. коэффициенты α_i , β_i , γ_i и другие, заданы абсолютно точно.

В реальных цифровых фильтрах происходит округление значений входного сигнала и результатов промежуточных вычислений, а параметры фильтров задаются с конечной точностью [10]. В результате этого возникают погрешности обработки сигналов, а в отдельных случаях нарушается устойчивость фильтров. Наиболее сильно эти нежелательные эффекты проявляются при реализации фильтров в виде прямой и канонической форм:

применение последовательной или параллельной форм позволяет несколько снизить ошибки обработки сигналов.

Пример.

Алгоритм цифрового фильтра записан в виде:

$$y(nT) = x(nT) + b_1x(nT-T) + a_1y(nT-T) + a_2y(nT-2T).$$

Структура, соответствующая этому алгоритму, представлена на рис. 2.18.

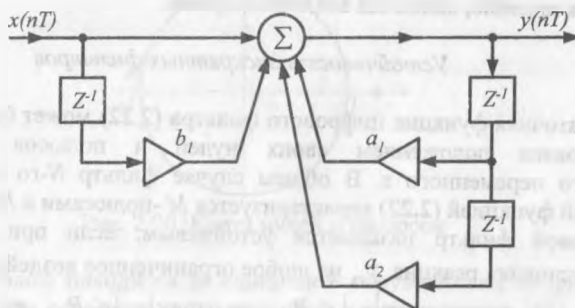


Рис. 2.18. Схема цифрового фильтра 2-го порядка, аналогичного колебательному контуру

Импульсная характеристика и передаточная функция

Установим связь между двумя характеристиками: передаточной функцией $H(z)$ [24] и импульсной характеристикой g_n .

Так как передаточная функция – это z -соотношение выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях, то получим:

$$H(z) = \frac{Z\{h_k\}}{Z\{\delta_k\}} = Z\{h_k\}.$$

Таким образом, передаточная функция – z -преобразование импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}.$$

Импульсную характеристику можно определить по передаточной функции с помощью обратного z -преобразования.

Импульсная характеристика может иметь конечную и бесконечную длины [16].

Импульсная характеристика нерекурсивного фильтра (НРФ) имеет конечную длину и равна коэффициентам передаточной функции.

Импульсная характеристика рекурсивного фильтра (РФ), как правило, имеет бесконечную длину. В зависимости от вида импульсной характеристики выделяют:

- 1) КИХ-фильтры (фильтры с конечной импульсной характеристикой),
- 2) БИХ-фильтры (фильтры с бесконечной импульсной характеристикой).

РФ, как правило, являются БИХ-фильтрами.

Устойчивость дискретных фильтров

Передаточная функция цифрового фильтра (2.22) может быть полностью охарактеризована положением своих нулей и полюсов в плоскости комплексного переменного z . В общем случае фильтр N -го порядка [10] с передаточной функцией (2.22) характеризуется M -полюсами и N -нулями.

Цифровой фильтр называется устойчивым, если при произвольных начальных условиях реакция y_n на любое ограниченное воздействие x_n также ограничена, т.е. если $\max |x_n| \leq R_x$, то $\max |y_n| \leq R_y$, где $R_x, R_y < \infty$. Критерием устойчивости дискретного фильтра является абсолютная сходимость ряда отсчетов импульсной характеристики:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty$$

Другой, более простой для применения, критерий устойчивости (рис.2.19): все полюса передаточной функции должны находиться внутри единичного круга z -плоскости [24], т.е. $|z_k^*| < 1$.

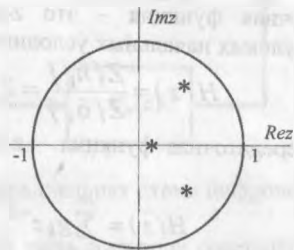


Рис. 2.19. Пояснение критерия устойчивости

Пример. Передаточная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-1.2z^{-1}}$. Исследовать на устойчивость и найти импульсную характеристику (7 первых отсчетов).

Данный фильтр имеет один полюс и один нуль. Для их нахождения прибавим в передаточной функции от отрицательных степеней $H(z) = \frac{z+1}{z-1.2}$, $z_1^0 = -1$; $z_1^* = 1.2$. Построим карту нулей и полюсов (рис.2.20).

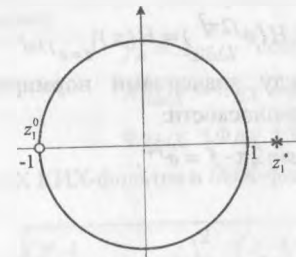


Рис. 2.20. Карта нулей и полюсов

Так как полюс находится за единичной окружностью, то фильтр будет неустойчивым, что отразится на импульсной характеристике [16], амплитуда которой резко повышается с увеличением номера выходного отсчета.



Рис. 2.21. Импульсная характеристика.

2.5. Частотные характеристики дискретных фильтров

Частотной характеристикой $H(e^{j \cdot 2\pi \cdot f})$ цифрового фильтра называется отношение преобразования Фурье выходной последовательности к преобразованию Фурье входной последовательности при нулевых начальных условиях:

$$H(e^{j \cdot 2\pi \cdot f}) = \frac{F\{y_n\}}{F\{x_n\}} = \frac{y(e^{j \cdot 2\pi \cdot f})}{x(e^{j \cdot 2\pi \cdot f})} \quad (2.28)$$

Частотная характеристика представляет собой коэффициент передачи фильтра для каждого значения частоты [10]. Частотная характеристика равна передаточной функции фильтра, вычисляемой на единичной окружности z -плоскости при $z = e^{j \cdot 2\pi \cdot \hat{f}} = e^{j \cdot \varphi}$:

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = H(z)|_{z=e^{j2\pi\hat{f}}} \quad (2.29)$$

Установим связь между значениями нормированной частоты \hat{f} и соответствующим углом φ в z -плоскости:

$$e^{j \cdot 2\pi \cdot \hat{f}} = \cos 2\pi \cdot \hat{f} + j \cdot \sin 2\pi \cdot \hat{f} = e^{j\varphi},$$

$$2\pi\hat{f} = \varphi,$$

$$\hat{f} = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Покажем связь точек единичной окружности и частот \hat{f} (рис.2.22):

точке $z = 1 = \cos 0 + j \cdot \sin 0 = \cos 0 + j \cdot \sin 0$ соответствует $\hat{f} = 0$,

точкам $z = \pm j = \cos(\pm \frac{\pi}{2}) + j \cdot \sin(\pm \frac{\pi}{2})$ соответствуют $\hat{f} = \pm 0,25$,

точке $z = -1 = \cos(\pm \pi) + j \cdot \sin(\pm \pi)$ соответствуют $\hat{f} = \pm 0,5$.

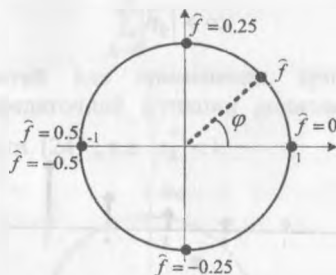


Рис. 2.22. Связь точек единичной окружности и частот

Частотные характеристики КИХ и БИХ фильтров

Частотная характеристика $H(e^{j2\pi\hat{f}})$ — комплексная функция. Ее можно представить в виде

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = H_{Re}(e^{j2\pi\hat{f}}) + jH_{Im}(e^{j2\pi\hat{f}}) = A(\hat{f})e^{j\varphi(\hat{f})}. \quad (2.30)$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется функция

$$A(\hat{f}) = |H(e^{j2\pi\hat{f}})| = \sqrt{H_{Re}^2(e^{j2\pi\hat{f}}) + H_{Im}^2(e^{j2\pi\hat{f}})}. \quad (2.31)$$

Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) называется функция

$$\varphi(\bar{f}) \arg H(e^{j2\pi\bar{f}}) = \tan^{-1}(H_{Im}(e^{j2\pi\bar{f}})/H_{Re}(e^{j2\pi\bar{f}})). \quad (2.32)$$

АЧХ устанавливает связь между амплитудами, а ФЧХ — между фазами выходного и входного сигналов фильтра. Если

$$x_n = A_{BX} \cdot \cos(2\pi\bar{f}n + \varphi_{BX}),$$

то в установившемся режиме

$$y_n = A_{ВЫХ} \cdot \cos(2\pi\bar{f}n + \varphi_{ВХ}),$$

где

$$A_{ВЫХ} = A_{ВХ} \cdot A(\bar{f}), \quad (2.33)$$

$$\varphi_{ВЫХ} = \varphi_{ВХ} + \varphi(\bar{f}). \quad (2.34)$$

Общие формулы АЧХ КИХ-фильтра и БИХ-фильтра получаются из выражения (2.30) и (2.31):

$$A_{КИХ}(\bar{f}) = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos 2\pi\bar{f}k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin 2\pi\bar{f}k\right)^2}, \quad (2.35)$$

$$A_{БИХ}(\bar{f}) = \sqrt{\frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos 2\pi\bar{f}k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin 2\pi\bar{f}k\right)^2}{\left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k \cos 2\pi\bar{f}k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{M-1} a_k \sin 2\pi\bar{f}k\right)^2}}. \quad (2.36)$$

Свойства частотных характеристик

Частотную характеристику можно рассматривать как спектр импульсной характеристики [24]. Действительно, из (2.28) и (2.29) следует, что частотная характеристика является преобразованием Фурье импульсной характеристики:

$$H(e^{j2\pi\bar{f}}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-j2\pi\bar{f}k} \quad (2.37)$$

Следовательно, свойства ЧХ фильтра во многом совпадают со свойствами спектра дискретного сигнала. Основные свойства частотных характеристик дискретных фильтров:

- частотная характеристика является периодической функцией по частоте с периодом, равным частоте дискретизации;
- АЧХ и ФЧХ также являются периодическими функциями с тем же периодом;
- для фильтров с вещественными коэффициентами АЧХ — четная функция, а ФЧХ — нечетная функция [16];
- для полного описания частотной характеристики фильтра с вещественными коэффициентами достаточно задать ее в основной полосе частот $\bar{f} \in [0, 0.5]$.

Нормированные фильтры

Дискретный фильтр называют нормированным, если максимальное значение АЧХ равно единице [16].

Нормировка фильтра достигается путем умножения коэффициентов числителя передаточной функции на нормирующий множитель $q_H = 1/A_{\max}$, где A_{\max} — максимальное значение АЧХ на интервале $\bar{f} \in [0, 0.5]$.

Пример. Рассмотрим БИХ-фильтр 1-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{b_0' + b_1' z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

Допустим, что при данных коэффициентах наибольшее значение АЧХ на интервале $\bar{f} \in [0, 0.5]$ равно A_{\max} . Нормированный фильтр будет иметь передаточную функцию

$$H_{\text{норм}} = q_H \frac{b_0' + b_1' z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad (2.38)$$

где $b_0 = q_H b_0'$, $b_1 = q_H b_1'$, $q_H = 1/A_{\max}$.

Частотные характеристики избирательного БИХ фильтра 1-го порядка

Формулы для передаточной функции (ПФ), частотной (ЧХ), амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик БИХ-фильтра 1-го порядка с учетом (2.10), (2.30), (2.31) и (2.32) имеют вид

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

$$H(e^{j2\pi\bar{f}}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j2\pi\bar{f}}}{1 + a_1 e^{-j2\pi\bar{f}}}, \quad (2.39)$$

$$A(\bar{f}) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos 2\pi\bar{f})^2 + (b_1 \sin 2\pi\bar{f})^2}{(b_0 + a_1 \cos 2\pi\bar{f})^2 + (a_1 \sin 2\pi\bar{f})^2}},$$

$$\varphi(\bar{f}) = \tan^{-1} \frac{b_1 \sin 2\pi\bar{f}}{b_0 + b_1 \cos 2\pi\bar{f}} - \tan^{-1} \frac{a_1 \sin 2\pi\bar{f}}{b_0 + a_1 \cos 2\pi\bar{f}}.$$

Вид АЧХ и ФЧХ фильтра можно определить [24] путем расчета на ЭВМ по (2.39). Полезно знать, что значения АЧХ легко определяются на границах основной полосы частот (для $\bar{f}=0$ и $\bar{f}=0.5$). Из (2.39) получим

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} \right|, \quad A(0.5) = \left| \frac{b_0 - b_1}{1 - a_1} \right| \quad (2.40)$$

Пример. Рассмотрим БИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0.15 + 0.15z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1}};$$

- фильтр имеет один нуль $z_1^0 = -1$ и один полюс $z_1^* = 0.7$;
- значения АЧХ на границах основной полосы частот $A(0) = 1$, $A(0.5) = 0$;
- графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 2.23. Фильтр относится к классу избирательных фильтров нижних частот (ФНЧ).

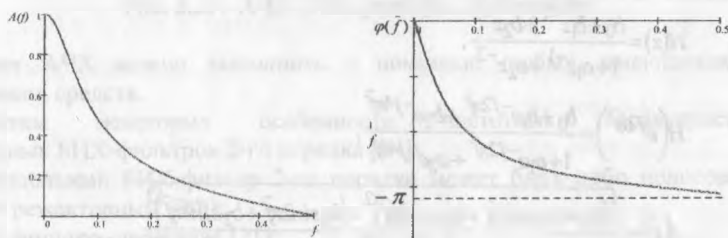


Рис. 2.23. АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра 1-го порядка ($a_1 < 0$)

Пример. Рассмотрим БИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0.02 - 0.02z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1}};$$

- фильтр имеет один нуль $z_1^0 = 1$ и один полюс $z_1^* = -0.6$;
- значения АЧХ на границах основной полосы частот $A(0) = 1$, $A(0.5) = 0$;
- графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 2.24. Фильтр относится к классу избирательных фильтров верхних частот (ФВЧ);

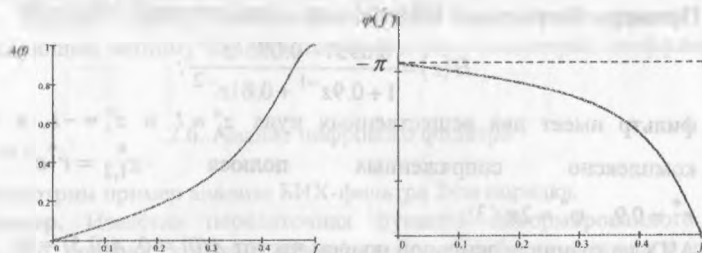


Рис. 2.24. АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра 1-го порядка ($a_1 > 0$)

- избирательный БИХ-фильтр 1-го порядка является либо ФНЧ (при $a_1 < 0$), либо ФВЧ (при $a_1 > 0$);

- ФЧХ фильтра — нелинейная;
- При приближении полюса к единичной окружности (увеличении $|a_1|$) фильтр становится более узкополосным [16,24].

Частотные характеристики избирательного БИХ-фильтра 2-го порядка

Формулы для передаточной функции (ПФ), частотной (ЧХ), амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик БИХ-фильтра 2-го порядка с учетом (2.15) (2.30), (2.31) и (2.32) имеют вид

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j2\pi f} + b_2 e^{-j4\pi f}}{1 + a_1 e^{-j2\pi f} + a_2 e^{-j4\pi f}}$$

$$A(f) = \frac{(b_0 + b_1 \cos 2\pi f + b_2 \cos 4\pi f)^2 + (b_1 \sin 2\pi f + b_2 \sin 4\pi f)^2}{(b_0 + a_1 \cos 2\pi f + a_2 \cos 4\pi f)^2 + (a_1 \sin 2\pi f + a_2 \sin 4\pi f)^2} \quad (2.4)$$

$$\varphi(f) = \tan^{-1} \frac{b_1 \sin 2\pi f + b_2 \sin 4\pi f}{b_0 + b_1 \cos 2\pi f + b_2 \cos 4\pi f} - \tan^{-1} \frac{a_1 \sin 2\pi f + a_2 \sin 4\pi f}{b_0 + a_1 \cos 2\pi f + a_2 \cos 4\pi f} \quad (2.42)$$

Вид АЧХ и ФЧХ фильтра можно определить путем расчета на ЭВМ по (2.41) и (2.42). Полезно знать, что значения АЧХ легко определяются на границах основной полосы частот [16] (для $f=0$; $f=0.5$). Из (2.41) получим

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|, \quad A(0.5) = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right| \quad (2.43)$$

Пример. Рассмотрим БИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0.0951 - 0.0951z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

- фильтр имеет два вещественных нуля $z_1^0 = 1$ и $z_2^0 = -1$, а также два комплексно сопряженных полюса $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$, где $r^* = 0.9$, $\varphi^* = 2\pi/3$;
- АЧХ на границах основной полосы частот $A(0) = 0$, $A(0.5) = 0$;
- углу $\varphi^* = 2\pi/3$, на котором расположен полюс в z -плоскости, соответствует частота $f^* = 1/3$ (рис. 2.25);
- график АЧХ приведен на рис. 2.25. Фильтр относится к классу избирательных полосовых фильтров (ПФ).

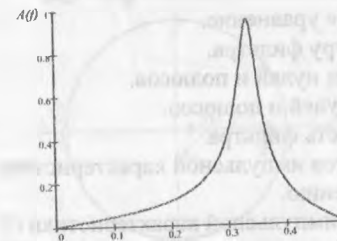


Рис. 2.25. АЧХ БИХ-фильтра 2-го порядка

Расчет АЧХ можно выполнить с помощью любых, имеющихся в распоряжении, средств.

Отметим некоторые особенности частотных характеристик избирательных БИХ-фильтров 2-го порядка [24]:

- избирательный БИХ-фильтр 2-го порядка может быть либо полосовым (ПФ), либо режекторным (РФ);
- ФЧХ фильтра — линейная [21];
- при приближении полюса к единичной окружности фильтр становится более узкополосным;
- максимум АЧХ полосового фильтра находится приблизительно на частоте f^* , которая соответствует углу φ^* положения полюса в z -плоскости.

Частотные характеристики фильтров с симметричными коэффициентами

Рассмотрим КИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} \quad (2.44)$$

КИХ-фильтр данного вида может быть фильтром нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовым (ПФ) или режекторным (РФ), соответствующим четному или нечетному N и типу симметрии коэффициентов [21].

2.6. Анализ цифрового фильтра

Рассмотрим пример анализа БИХ-фильтра 2-го порядка.

Пример. Известна передаточная функция ненормированного БИХ-фильтра 2-го порядка, который применялся к обработке сигнала с датчика давления:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{5 + 4z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

Требуется выполнить анализ данного фильтра:

1. Записать разностное уравнение.
2. Изобразить структуру фильтра.
3. Рассчитать значения нулей и полюсов.
4. Изобразить карту нулей и полюсов.
5. Оценить устойчивость фильтра.
6. Рассчитать 5 отсчетов импульсной характеристики по формуле и разностному уравнению.
7. Изобразить график импульсной характеристики (5 отсчетов).
8. Записать формулу частотной характеристики. Записать формулу АЧХ.
9. Рассчитать значения АЧХ на частотах $\hat{f} = 0$, $\hat{f} = 0,5$, $\hat{f} = \hat{f}^*$, где \hat{f}^* – частота, соответствующая углу φ^* , на котором расположен полюс в Z-плоскости.
10. Выполнить нормировку фильтра, допустив, что $A_{\max} = A(\hat{f}^*)$
11. Построить (качественно) график АЧХ нормированного фильтра на интервале частот $f \in [0, 0,5]$

Также требуется провести исследование результата прохождения сигнала с датчика давления через данный цифровой фильтр нижних частот.

Решение

1. Разностное уравнение цифрового фильтра:

$$y_n = 5x_n + 4x_{n-1} - x_{n-2} + 0,9y_{n-1} - 0,1y_{n-2}.$$

2. Структура фильтра приведена на рис. 2.26.

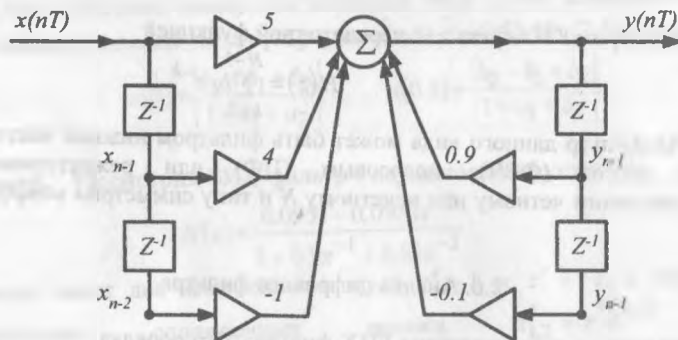


Рис. 2.26. Структура фильтра

3. Значения нулей и полюсов следующие:

$$z_1^0 = -1, z_2^0 = 0,2; z_1^* = 0,13,$$

$$z_2^* = 0,77.$$

4. Карта нулей и полюсов показана на рис. 2.27.

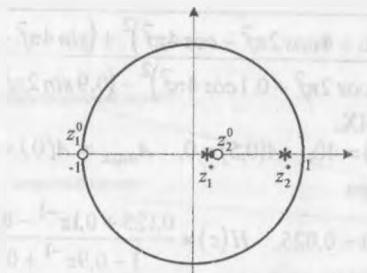


Рис. 2.27. Карта нулей и полюсов

5. Фильтр устойчив, поскольку

$$r^* = |z_{1,2}^*| < 1.$$

6. Расчет отсчетов импульсной характеристики. Результаты расчета (с точностью до 2-х знаков после запятой приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

n	0	1	2	3	4	5	6	7
g_n	5	8.5	6.15	4.68	3.60	2.77	2.13	1.64

7. График импульсной характеристики приведен на рис. 2.28.

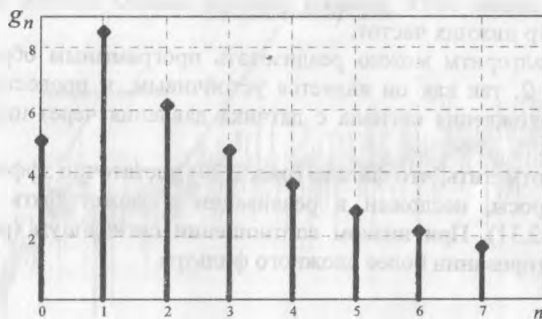


Рис. 2.28. Импульсная характеристика

8. Частотная характеристика

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = \frac{5 + 4e^{-j2\pi\hat{f}} - e^{-j4\pi\hat{f}}}{1 - 0.9e^{-j2\pi\hat{f}} + 0.1e^{-j4\pi\hat{f}}}.$$

Далее переходим к анализу АЧХ и нормировке фильтра.
Формула АЧХ:

$$A(\bar{f}) = \sqrt{\frac{(0.6 + 4 \cos 2\pi\bar{f} - \cos 4\pi\bar{f})^2 + (\sin 4\pi\bar{f} - \sin 2\pi\bar{f})^2}{(1 - 0.9 \cos 2\pi\bar{f} + 0.1 \cos 4\pi\bar{f})^2 + (0.9 \sin 2\pi\bar{f} - 0.1 \sin 4\pi\bar{f})^2}}$$

9. Расчет значений АЧХ.

$$A(0) = 40, \quad A(0.5) = 0, \quad A_{max} = A(0) = 40.$$

10. Нормировка фильтра

$$q_n = 1/40 = 0,025, \quad H(z) = \frac{0,125 + 0,1z^{-1} - 0,025z^{-2}}{1 - 0,9z^{-1} + 0,1z^{-2}}$$

11. График АЧХ фильтра приведен на рис.2.29.

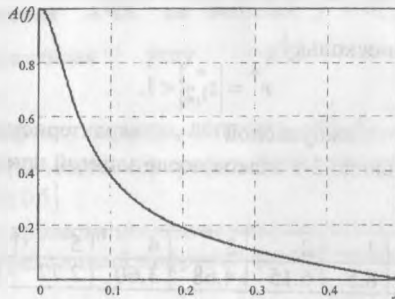


Рис. 2.29. АЧХ цифрового фильтра

Проводя анализ АЧХ данного фильтра, можно сделать вывод, что этот фильтр - фильтр нижних частот.

Данный алгоритм можно реализовать программным образом, согласно структуре в п. 2, так как он является устойчивым, и провести исследование результата прохождения сигнала с датчика давления через цифровой фильтр нижних частот.

Следует отметить, что фильтр (рис. 2.29) достаточно эффективно сгладил шумовые выбросы, несложен в реализации и может быть использован в практике (рис.2.31). При низком соотношении сигнал/шум (рис. 2.30) стоит задача в проектировании более сложного фильтра.

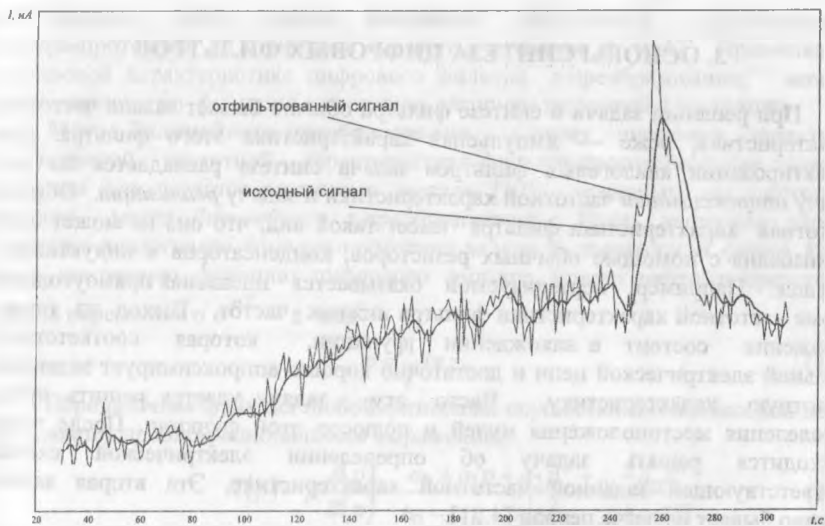


Рис. 2.30. Применение фильтра к обработке сигнала с датчика давления.

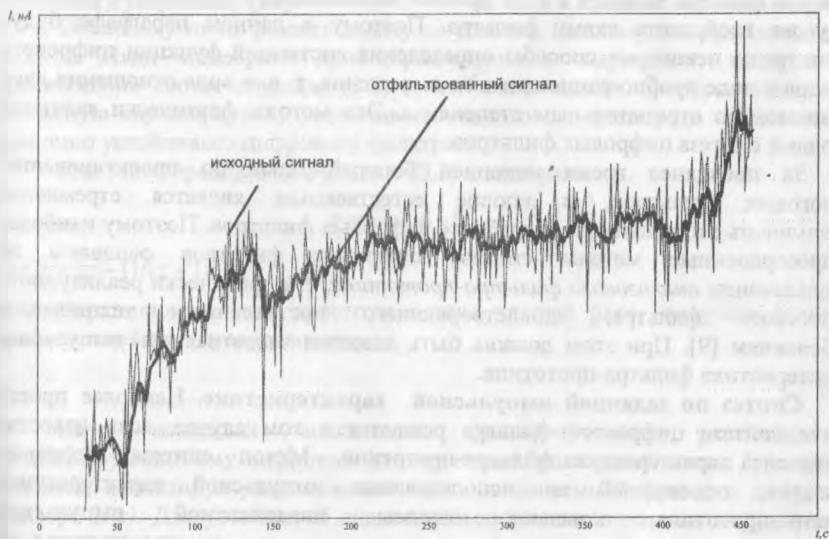


Рис. 2.31. Применение фильтра к обработке сигнала с датчика Холла

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ВИДЫ СИГНАЛОВ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ..... 11	
1.1 Аналоговые и цифровые сигналы.....	11
1.2. Основные параметры аналого-цифровых преобразователей.....	15
1.3. Математическое описание сигналов.....	24
1.3.1. Дискретное преобразование Лапласа.....	24
1.3.2. z-преобразование и его роль в обработке сигналов.....	24
1.3.3. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и его свойства.....	28
1.3.4. Реализация алгоритма быстрого преобразования Фурье...	33
1.3.5. Амплитудный спектр и спектр мощности.....	36
1.3.6. Методика и параметры обработки сигнала для получения достоверного спектра. Сглаживание с помощью весовых функций.....	38
ГЛАВА 2. ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПРИБОРОВ..... 46	
2.1. Линейные дискретные системы с постоянными параметрами и их свойства.....	46
2.2. Метод скользящего среднего. Пример сглаживания сигнала с датчика давления.....	48
2.3. Разностные уравнения и передаточные функции цифровых фильтров.....	56
2.4. Структурные схемы цифровых фильтров и их устойчивость.....	63
2.5. Частотные характеристики дискретных фильтров.....	69
2.6. Анализ цифрового фильтра.....	75
ГЛАВА 3. ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ..... 80	
ГЛАВА 4. ОБРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ..... 84	
4.1. Методика построения эмпирического распределения. Сопоставление и проверка сходимости эмпирического распределения с теоретическим.....	84
4.2. Проверка статистических гипотез.....	92
4.3. Проверка гипотезы о законе распределения случайной величины.....	94
4.4. Проверка гипотезы равенства двух выборочных средних..	101
4.5. Проверка гипотезы равенства двух выборочных	