Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики

Кафедра информатики

Вычислительная математика –

Методические указания к курсовой работе
для студентов заочного факультета

Практическое решение инженерных и научных задач на ПК с использованием математических пакетов

Москва 2016

Практическое решение инженерных и научных задач на ПК с использованием математических пакетов

1. Цель курсовой работы

Целью курсовой работы является:

- получение практических навыков решения задач, требующих применения численных методов и методов оптимизации;
- изучение возможностей математических пакетов и развития навыков их практического использования для получения числовых и символьных решений вычислительных задач, а также графических иллюстраций полученных результатов;
- изучение и использование средств персонального компьютера для оформления отчета по курсовой работе.

2. Общие требования к отчету

Отчет по курсовой работе (пояснительная записка) оформляется на стандартных листах формата А4. Для ввода текста должны быть использованы следующие настройки: шрифт - Times New Roman, размер шрифта для ввода основного текста – 12, для заголовков глав и пунктов следует использовать элемент панели форматирования Стиль, позволяющего произвести выбор соответствующего уровня вложения заголовка. Страницы текста пояснительной записки должны быть пронумерованы (на титульном листе номер не указывается).

Пояснительная записка к курсовой работе должна быть написана таким образом, чтобы любой человек, в том числе не особенно владеющий материалом, мог понять, что требуется сделать и как.

Обязательные пункты отчета:

- Общее и индивидуальное задание (с указанием номера варианта);
- Краткие теоретические сведения по решению каждого пункта задания (применяемым численным методам). Например, при решении нелинейного уравнения (НЛУ) следует пояснить, что такое НЛУ, и что является решением НЛУ, перечислить и описать этапы решения НЛУ и показать их применение для решения конкретной задачи курсовой работы.
- Результаты решения задания и выводы по работе.

Под «***ручным расчетом***» понимается расчет, проводимый по формулам соответствующего метода с использованием математического пакета Mathcad в качестве многофункционального калькулятора. «***Расчет средствами MathCad***» - это расчет, в котором используются необходимые встроенные функции пакета Mathcad.

Все расчеты и графики, используемые для иллюстраций текста, выполненные с использованием средств пакета Mathcad, помещаются в текст отчета через буфер памяти.

Титульный лист оформляется по принятому стандарту, при этом он должен содержать номер варианта, сведения о студенте, выполнившим данную курсовую работу (группа, фамилия и инициалы), а также фамилию преподавателя.

Перед выполнением работы рекомендуется изучить теоретический материал [1], [2] и разобрать приведенный ниже пример выполнения задания.

3. Общее задание

1. **Выбрать вариант задания** из таблицы 1 в соответствии с номером в журнале группы.
2. **Найти два корня** уравнения (x_1 и x_2) заданной функции на заданном интервале [**a**;**b**] указанными методами (столбцы **t** и **m** в таблице 1). Для этого необходимо:
   - **отделить** корни уравнения;
   - **проверить** (аналитически) **условия** сходимости применяемых методов решения уравнений (в случае необходимости привести уравнение к виду, обеспечивающему сходимость процесса приближения к корню);
   - **выбрать** начальные **приближения**;
   - **записать** рекуррентную **формулу** для уточнения корня и произвести по ним **«*ручной расчет*»** 3-х итераций;
   - **оценить погрешности**, по формулам оценки погрешности соответствующего метода;
   - **вычислить значения корней «*расчетом средствами MathCad*»**.

3. **Вычислить** значение определенного интеграла, для чего:
   - **произвести «ручной расчет»** $\int_a^b f(x)\partial x$ с шагом $\mathbf{h_0}$ и $\mathbf{h_0/2}$ (где a, b – заданный интервал) методами средних прямоугольников, трапеций и Симпсона, в двух вариантах для каждого метода: 1) без использования пакета MathCad (или используя пакет <u>только</u> как калькулятор, и 2) используя пакет MathCad для записи формул соответствующих методов (вычисления сумм ($\sum$) значений функции и т.п.) ;
   - **оценить погрешность** интегрирования по правилу Рунге;
   - **вычислить значения** $\int_a^b f(x)\partial x$ и $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\partial x$ (где x_1 и x_2 – корни уравнения f(x)=0) с использованием **«*расчета средствами MathCad*».**
4. **Определить точку экстремума** функции $f(x)$ двумя методами одномерной оптимизации (дихотомии и золотого сечения), для чего:
   - **проверить условие** унимодальности функции и выбрать начальный отрезок оптимизации;
   - **провести «*ручной расчет*» 3-х итераций** по сокращению отрезка оптимизации и **проверить условие окончания** поиска минимума (максимума) функции;
   - **определить точку экстремума** функции $f(x)$ **«*расчетом средствами MathCad*»**.

4. Варианты индивидуальных заданий

Таблица 1

№	f(x)	a	b	t	m	h_0
1	$8\,e^{-x}\sin(-2x)$	1	4	1	3	0.75
2	$e^{-x}\sin(2x+1)$	2	5	2	1	1.5
3	$x^{3/2} - 2\,x\sin(x) - 10$	3	8	3	2	1.25
4	$e^{-x}\cos(-2x)$	2	4	1	3	1
5	$-\cos(2x) - 2\sin(x)$	3	6	2	1	0.75
6	$8\sin(2x) - x$	3	5	3	2	1
7	$5\cos(-2x)\,e^{-x}$	-1	1	2	3	0.5
8	$x\sin(x+1) - \cos(x-5)$	0	3	1	2	1.5
9	$8(x-1)e^{\frac{-x^2}{2}} - 0{,}5$	1	3	1	3	0.5
10	$-\sin(2x) - \ln x$	1.5	3	1	3	0.75
11	$\sin(e^{x}) - e^{-x}$	0	1.2	2	1	0.6
12	$5\,x\sin(x+1) + 2\cos(x)$	5	9	1	2	1
13	$15 - 5\,e^{-x} - 4\,x - x^3/3$	-2	3	1	2	1.25
14	$-2\sin(4x)\ln(-x)$	-4	-3	1	3	0.5
15	$\sin(x-1) - x\cos(x+3)$	-5	-1	3	1	1
16	$4\sin(x) - \sqrt{x} - 0{,}5$	0	3	2	3	1.5
17	$5\sin^3(x) + \cos^3(x) - 2$	0.5	2.5	2	1	0.5
18	$\cos(2x+1)\ln(2/x)$	3	5.2	3	2	0.55
19	$3\cos(x^2)/\ln(x+5)$	2	3	1	3	0.25
20	$\sin(x^2) + 1/(2-x)$	-3.2	-2.2	2	1	0.5
21	$x\sin(x) + \cos(x)$	5.5	10	1	2	1.125
22	$\cos(x) + \cos(2x)$	5	8	3	1	0.75

23	**sin(4x) / ln(x)**	3	4	1	3	0.5
24	**3 -** $\sqrt{1+x^2}$ **-** e^{-x}	-1	3	2	1	1
25	**sin(x + 1)** e^{-x} **– 0,5**	-1	1	3	2	0.5
26	**2 (1 + x)** e^{-x} **– 2 cos(x) – 0,5**	1	5	2	3	1
27	**8 sin(–** x^3**)** e^{-x}	1.2	2	1	3	0.2
28	**– 10 sin(**x^3**) cos(– x)**	1.8	2.2	2	1	0.1
29	x^2 **cos(x + 3) – 4**	2	5	3	1	0.75
30	**– cos(x – 5)** $e^{2x/3}$	0	4	1	3	1

В таблице 1 **[a; b]** - отрезок с двумя корнями, **t** – номер метода для вычисления первого корня, **m -** номер метода для вычисления второго корня, h_0 – начальный шаг интегрирования.

Номера методов: **1** – *половинное деление*; **2** – *итерации*; **3** – *Ньютона*; **4** – *хорд*

5. Пример выполнения задания

Пусть функция $f(x) = x + 3 + \cos(x) - x^2$ задана на отрезке [-2; 3].

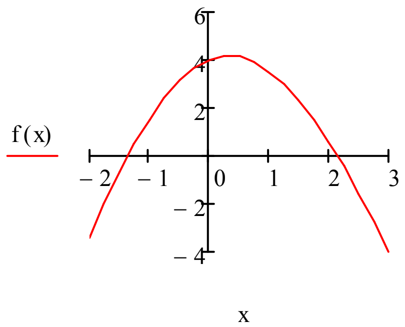
1. Нахождение двух корней уравнения f(x)=0

- **Отделим корни уравнения:** $x + 3 + \cos(x) - x^2 = 0$

Построим график заданной функции

$f(x) := x + 3 + \cos(x) - x^2$

$x := -2, -1.75 .. 3$



Отделим корни уравнения аналитически для двух предполагаемых интервалов:

$$f(x) := x + 3 + \cos(x) - x^2$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 1 - \sin(x) - 2 \cdot x$$

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow -\cos(x) - 2$$

$x := -2, -1.9 .. -1$

x =	f(x) =	f1(x) =	f2(x) =
-2	-3.416	5.909	-1.584
-1.9	-2.833	5.746	-1.677
-1.8	-2.267	5.574	-1.773
-1.7	-1.719	5.392	-1.871
-1.6	-1.189	5.2	-1.971
-1.5	-0.679	4.997	-2.071
-1.4	-0.19	4.785	-2.17
-1.3	0.277	4.564	-2.267
-1.2	0.722	4.332	-2.362
-1.1	1.144	4.091	-2.454
-1	1.54	3.841	-2.54

$x := 2, 2.1 .. 3$

x =	f(x) =	f1(x) =	f2(x) =
2	0.584	-3.909	-1.584
2.1	0.185	-4.063	-1.495
2.2	-0.229	-4.208	-1.411
2.3	-0.656	-4.346	-1.334
2.4	-1.097	-4.475	-1.263
2.5	-1.551	-4.598	-1.199
2.6	-2.017	-4.716	-1.143
2.7	-2.494	-4.827	-1.096
2.8	-2.982	-4.935	-1.058
2.9	-3.481	-5.039	-1.029
3	-3.99	-5.141	-1.01

На отрезках [-2; -1] и [2; 3] функция f(x) меняет знаки, т.е. существует, по крайней мере, по одному корню. Поскольку знак первой (и второй) производной на выбранных отрезках остается постоянным, то можно сказать, что функция на этих отрезках монотонна. Следовательно, выбранные отрезки содержат по одному корню.

- **Уточнение корней уравнения f(x)=0**
  Примеры уточнения корня уравнения методом половинного деления, методом Ньютона, методом хорд и методом итераций приведены в описании лабораторной работы №1 «Методы решения нелинейных уравнений»

- **Вычисление значения корней уравнения** «***расчетом средствами MathCad***» с использованием функции ***root***:

$$x1 := \mathrm{root}(f(x), x, -2, -1) = -1.36 \qquad f(x1) = 0$$

$$x2 := \mathrm{root}(f(x), x, 2, 3) = 2.145 \qquad f(x2) = 0$$

Таким образом, первый корень **x1 = -1.36,** второй корень **x2 = 2.145.**

2. Вычисление определенного интеграла

В качестве примера рассмотрим вычисление интеграла $\int_1^3 \ln x dx$ с шагом h_0=1 и $\frac{h_0}{2} = 0.5$ методами средних прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Пример выполнения задания с использованием технологии «ручного расчета» без математического пакета (или используя **MathCad** **<u>только</u>** как калькулятор)

«Ручной расчет» интеграла с шагом h_0=1 и $h_0/2$ (I_{h0} и $I_{h0/2}$) и оценка его погрешности по правилу Рунге, при использовании MathCad <u>только</u> как калькулятора

Правило Рунге применяют для вычисления погрешности путём двойного просчёта интеграла с шагами **h/2** и **h,** при этом погрешность вычисляется по формуле $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{I}_{h/2} - \mathbf{I}_h}{2^p - 1}$. Полагают, что интеграл вычислен с точностью **E**, если $|\mathbf{R}| < \mathbf{E}$; тогда $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{h/2} + \mathbf{R}$, где **I** – уточненное значение интеграла, **p** – порядок метода.

Вычислим интеграл $\int_1^3 \ln x dx$ с шагом h_0=1 и $\frac{h_0}{2} = 0.5$ по формуле

- **средних прямоугольников** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчёта**:

$f(x) := \ln(x) \quad h := 1$

$x := 1, 1.25..3$

x = f(x) =

x	f(x)
1	0
1.25	0.223144
1.5	0.405465
1.75	0.559616
2	0.693147
2.25	0.81093
2.5	0.916291
2.75	1.011601
3	1.098612

$I1 := h \cdot (f(1.5) + f(2.5)) = 1.321756$

$I2 := \frac{h}{2}(f(1.25) + f(1.75) + f(2.25) + f(2.75)) = 1.302645$

$R := \frac{I2 - I1}{3} = -6.3702 \times 10^{-3}$

$Isr := I2 + R = 1.296275$

- **трапеций** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:

$f(x) := \ln(x) \quad h := 1$

$x := 1, 1.5 .. 3$

$x =$ $\quad f(x) =$

x	f(x)
1	0
1.5	0.405465
2	0.693147
2.5	0.916291
3	1.098612

$$I1 := \frac{h}{2}\cdot(f(1) + f(3) + 2\cdot f(2)) = 1.242453$$

$$I2 := \frac{h}{4}[f(1) + f(3) + 2\cdot(f(1.5) + f(2) + f(2.5))] = 1.282105$$

$$R := \frac{I2 - I1}{3} = 0.01322$$

$$Itrap := I2 + R = 1.295322$$

- **Симпсона** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:

$f(x) := \ln(x) \quad h := 1$

$x := 1, 1.5 .. 3$

$x =$ $\quad f(x) =$

x	f(x)
1	0
1.5	0.405465
2	0.693147
2.5	0.916291
3	1.098612

$$I1 := \frac{h}{3}\cdot(f(1) + f(3) + 4\cdot f(2)) = 1.2904$$

$$I2 := \frac{h}{6}[f(1) + f(3) + 4\cdot(f(1.5) + f(2.5)) + 2\cdot f(2)] = 1.295322$$

$$R := \frac{I2 - I1}{15} = 3.28089\times 10^{-4}$$

$$Isimp := I2 + R = 1.29565$$

Пример выполнения задания для «ручного расчета» с использованием MathCad

«Ручной расчет» интеграла с использованием MathCad с шагом h_0 и $h_0/2$ и оценка его погрешности по правилу Рунге

- **по формуле средних прямоугольников:**

$$f(x) := \ln(x) \quad a := 1 \quad b := 3$$

$$h := 1 \quad n := \frac{(b-a)}{h} \quad i := 0..n-1 \quad x_i := a + \left(\frac{h}{2}\right) + i \cdot h \quad y_i := f(x_i) \quad Ip1 := h \cdot \sum_i y_i \quad Ip1 = 1.3218$$

$$h := \frac{h}{2} \quad n := \frac{(b-a)}{h} \quad i := 0..n-1 \quad x_i := a + \left(\frac{h}{2}\right) + i \cdot h \quad y_i := f(x_i) \quad Ip2 := h \cdot \sum_i y_i \quad Ip2 = 1.3026$$

$$R := \frac{|Ip1 - Ip2|}{3} \quad R = 6.3702 \times 10^{-3}$$

- **по формуле трапеций:**

$$f(x) := \ln(x) \quad h := 1 \quad a := 1 \quad b := 3$$

$$n := \frac{b-a}{h} = 2 \quad i := 0..n \quad x_i := a + i \cdot h \quad y_i := f(x_i)$$

$$I1 := \frac{h}{2} \cdot \left[\sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})\right] = 1.242453$$

$$h := \frac{h}{2} = 0.5 \quad n := \frac{b-a}{h} = 4 \quad i := 0..n \quad x_i := a + i \cdot h \quad y_i := f(x_i)$$

$$I2 := \frac{h}{2} \cdot \left[\sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})\right] = 1.282105$$

$$R := \frac{|I2 - I1|}{3} = 0.01322$$

- **по формуле Симпсона:**

$f(x) := \ln(x) \quad h := 1 \quad a := 1 \quad b := 3$

$n := \frac{b-a}{h} = 2 \quad i := 0..n \quad x_i := a + i \cdot h \quad y_i := f(x_i)$

$I1 := \frac{h}{3} \cdot (y_0 + y_n + 4 \cdot y_1) = 1.2904$

$h := \frac{h}{2} = 0.5 \quad n := \frac{b-a}{h} = 4 \quad i := 0..n \quad x_i := a + i \cdot h \quad y_i := f(x_i)$

$m := 1, 3..n-1 \quad k := 2, 4..n-2$

$I2 := \frac{h}{3} \cdot \left[y_0 + y_n + 4 \cdot \left(\sum_m y_m\right) + 2 \cdot \left(\sum_k y_k\right)\right] = 1.295322$

$R := \frac{|I2 - I1|}{15} = 3.28089 \times 10^{-4}$

Вычисление значений интегралов с использованием «расчета средствами MathCad»:

Для сравнения результатов решения примера, разобранного для «ручного расчета» с расчетом средствами MathCad, приведем значение $\int_1^3 \ln x dx = 1.296$

Вернемся к функции f(x) = x + 3 + cos(x) - x^2 , которая задана на отрезке [-2; 3] и вычислим $\int_a^b f(x)\partial x$ и $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\partial x$ (где x_1 и x_2 – корни уравнения f(x)=0) средствами MathCad

$f(x) := x + 3 + \cos(x) - x^2$

$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 6.884$

$x1 := \mathrm{root}(f(x), x, -2, -1) = -1.36$

$x2 := \mathrm{root}(f(x), x, 2, 3) = 2.145$

$\int_{x1}^{x2} f(x)\,dx = 9.58$

3. Нахождение точки экстремума методами одномерной оптимизации

Для нахождения точки экстремума применим методы ***дихотомии*** и ***золотого сечения***, причем для нахождения максимума следует ввести новую функцию $y(x) = -f(x)$, где в нашем примере $y(x) = -f(x) = x^2 - 3 - x - \cos x$.

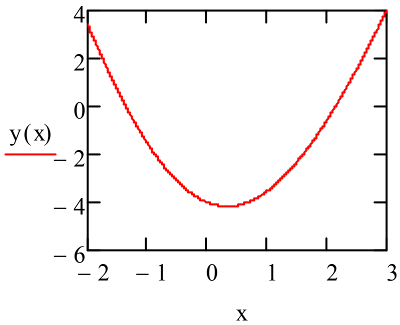
- **Проверка условий унимодальности функции $y(x) = -f(x)$ и выбор отрезка неопределенности.**

$f(x) := x + 3 + \cos(x) - x^2$

$y(x) := -f(x) \rightarrow x^2 - \cos(x) - x - 3$

$y1(x) := \frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 2 \cdot x + \sin(x) - 1$

$y2(x) := \frac{d^2}{dx^2}y(x) \rightarrow \cos(x) + 2$



$x := -2, -1.5 .. 3$

x =	y(x) =	y1(x) =	y2(x) =
-2	3.416	-5.909	1.584
-1.5	0.679	-4.997	2.071
-1	-1.54	-3.841	2.54
-0.5	-3.128	-2.479	2.878
0	-4	-1	3
0.5	-4.128	0.479	2.878
1	-3.54	1.841	2.54
1.5	-2.321	2.997	2.071
2	-0.584	3.909	1.584
2.5	1.551	4.598	1.199
3	3.99	5.141	1.01

Из приведенных расчетов видно, что на отрезке [-2; 3] функция y(x) – унимодальная, т.к. ее вторая производная y2(x)=cos(x)+2 всегда>0 (cos(x) не может быть меньше, чем -1), тогда первая производная монотонно возрастает и, следовательно, этот отрезок может быть выбран в качестве начального отрезка неопределенности.

- **Проведение «*ручного расчета*» 3-х итераций по сокращению отрезка неопределенности**

1) метод дихотомии:

$$y(x) := x^2 - \cos(x) - x - 3$$

$$\varepsilon := 0.01 \quad \delta := \frac{\varepsilon}{5} = 2 \times 10^{-3}$$

1. $a0 := -2 \quad b0 := 3 \quad b0 - a0 = 5$

$$x1 := \frac{a0 + b0}{2} - \delta = 0.498 \qquad x2 := \frac{a0 + b0}{2} + \delta = 0.502$$

$$y(x1) = -4.129 \qquad y(x2) = -4.127 \qquad y(x1) < y(x2)$$

2. $a1 := a0 = -2 \quad b1 := x2 = 0.502 \quad b1 - a1 = 2.502$

$$x1 := \frac{a1 + b1}{2} - \delta = -0.751 \qquad x2 := \frac{a1 + b1}{2} + \delta = -0.747$$

$$y(x1) = -2.416 \qquad y(x2) = -2.429 \qquad y(x1) > y(x2)$$

3. $a2 := x1 = -0.751 \quad b2 := b1 = 0.502 \quad b2 - a2 = 1.253$

$$x1 := \frac{a2 + b2}{2} - \delta = -0.127 \qquad x2 := \frac{a2 + b2}{2} + \delta = -0.123$$

$$y(x1) = -3.85 \qquad y(x2) = -3.855 \qquad y(x1) > y(x2)$$

$$a3 := x1 = -0.127 \quad b3 := b2 = 0.502$$

$$xmin := \frac{a3 + b3}{2} = 0.188 \qquad y(xmin) = -4.135$$

Результаты вычислений сведены в таблицу

N	a	b	X_1	X_2	$y(X_1)$	$y(X_2)$	Δ_n
1	-2	3	0.498	0.502	-4.129	-4.127	5
2	-2	0.502	-0.751	-0.747	-2. 416	-2.429	2.502
3	-0.751	0.502	-0.127	-0.123	-3.85	-3.855	1.253
4	-0.127	0.502					0.629

После 3-х итераций $xmax \approx 0.188$, а $f(xmax) \approx 4.135$.

2) метод золотого сечения:

$y(x) := x^2 - \cos(x) - x - 3$

$k1 := 0.382 \quad k2 := 0.618$

1 итерация

$a0 := -2 \quad b0 := 3 \quad b0 - a0 = 5$

$x1 := a0 + k1 \cdot (b0 - a0) = -0.09 \quad x2 := a0 + k2 \cdot (b0 - a0) = 1.09$

$y(x1) = -3.898 \quad y(x2) = -3.364 \quad y1 := y(x1) \quad y2 := y(x2) \quad y1 < y2$

2 итерация

$a1 := a0 = -2 \quad b1 := x2 = 1.09 \quad x2 := x1 = -0.09 \quad y2 := y1 = -3.898$

Считаем $x1 := a1 + k1 \cdot (b1 - a1) = -0.82$ и $y1 := y(x1) = -2.191$

$b1 - a1 = 3.09 \quad y1 > y2$

3 итерация

$a2 := x1 = -0.82 \quad b2 := b1 = 1.09 \quad x1 := x2 = -0.09 \quad y1 := y2 = -3.898$

Считаем $x2 := a2 + k2 \cdot (b2 - a2) = 0.361 \quad y2 := y(x2) = -4.166$

$b2 - a2 = 1.91 \quad y1 > y2$

После 3-х итераций

$a3 := x1 = -0.09 \quad b3 := b2 = 1.09$

$x1 := x2 = 0.361$

$y1 := y2 = -4.166$

$xmin := \frac{a3 + b3}{2} = 0.5 \quad y(xmin) = -4.128 \quad b3 - a3 = 1.18$

Результаты вычислений сведены в таблицу

N	a	b	X_1	X_2	$y(X_1)$	$y(X_2)$	Δ_n
1	-2	3	-0.09	1.09	-3.898	-3.364	5
2	-2	1.09	-0.82	-0.09	-2.191	-3.898	3.09
3	-0.82	1.09	-0.09	0.361	-3.898	-4.166	1.91
4	-0.09	1.09	0.361		-4.166		1.18

После 3-х итераций $xmax \approx 0.5$, а $f(xmax) \approx 4.128$.

- **Решим задачу оптимизации «расчетом средствами MathCad»**

$f(x) := x + 3 + \cos(x) - x^2 \quad y(x) := -f(x) \rightarrow$

$y(x) := x^2 - \cos(x) - x - 3$

$x := 1$

Given

$\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) = 0$

$xmin := Minerr(x) = 0.335 \quad y(xmin) = -4.167$

$xmax := xmin = 0.335 \quad f(xmax) = 4.167$

ИЛИ 2 способ:

$x := 1$

$xmax := Maximize(f, x) = 0.335$

$f(xmax) = 4.167$

Список литературы

1. Шакин В.Н. , Семенова Т.И., Кравченко О.М. ИНФОРМАТИКА – 4 сем. Учебное пособие. Модели и алгоритмы решения задач численных методов с использованием математических пакетов. – М: МТУСИ, 2010, - с.
2. Шакин В.Н. , Семенова Т.И., Кравченко О.М. ИНФОРМАТИКА – 4 сем. Лабораторный практикум. Модели и алгоритмы решения задач численных методов с использованием математических пакетов. – М: МТУСИ, 2010, - с.
3. Шакин В.Н., Семенова Т.И. ИНФОРМАТИКА - 3 сем. Учебное пособие: Тема 3.5. Базовые элементы и средства математического пакета MathCad. Для студентов заочников МТУСИ: -М., 2010.-88с.
4. Шакин В.Н. , Семенова Т.И., Юскова И.Б. ИНФОРМАТИКА- 3 сем. Лабораторный практикум: Базовые элементы и средства математического пакета MathCad. – М: МТУСИ, 2010, - с.
5. Банди Б. Методы оптимизации. – М.: Радио и связь.1988 – 128с.
6. Гловацкая А.П. Методы и алгоритмы вычислительной математики. – М.: Радио и связь, 1999. – 408с.
7. Воробьёва Г.Н., Демидова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М.: Высшая школа, 1990. – 207с.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Учебное пособие для вузов. – М.: Физматгиз, 1966 – 639с.
9. Моисеев Н. И., Иванилов Ю.П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. 352с.