

## **Занятие 2. Исследование нелинейной математической модели участка ленты средствами пакета MathCAD**

### **1. Цель работы**

Изучение математической модели участка ленты и переходных характеристик, возникающих на участке бумажной ленты. Изучение основных возможностей программы для компьютерного моделирования MathCAD. Использование программы MathCAD для построения математической модели ленты и получение переходных характеристик.

### **2. Практическая часть**

Для моделирования нелинейного участка ленты воспользуемся пакетом MathCAD, который представляет собой программное средство выполнения на компьютере разнообразных математических и технических расчетов, которое снабжено достаточно простым графическим интерфейсом и предоставляет пользователю инструменты для работы с формулами, числами, графиками и текстами. В среде MathCAD доступны более сотни операторов и логических функций, предназначенных для численного и символьного решения математических задач различной сложности.

Основное отличие MathCAD от аналогичных программ — это графический, а не текстовый режим ввода выражений. Для набора команд, функций, формул можно использовать как клавиатуру, так и кнопки на многочисленных специальных панелях инструментов. В любом случае — формулы будут иметь привычный, аналогичный книжному, вид. То есть особой подготовки для набора формул не нужно. Вычисления с введенными формулами осуществляются по желанию пользователя или мгновенно, одновременно с набором, либо по команде. Обычные формулы вычисляются слева направо и сверху вниз (подобно чтению текста). Любые переменные, формулы, параметры можно изменять, наблюдая воочию соответствующие изменения результата. Это дает возможность организации действительности интерактивных вычислительных документов.

В других программах (Maple, MuPAD, Mathematica) вычисления осуществляются в режиме программного интерпретатора, который трансформирует в формулы введенные в виде текста команды. Maple своим интерфейсом ориентирован на тех пользователей, кто уже имеет навыки программирования в среде традиционных языков с введением сложных формул в текстовом режиме. Для пользования MathCAD можно вообще не быть знакомым с программированием в том или ином виде.

Для начала моделирования откроет программу MathCAD. В открывшемся окне (рис. 2.1) в основное поле для работы начнем ввод значений основных переменных. Переменные вводятся следующим образом, в начале символьное значение, затем знак присваивания «:=», затем числовое значение.

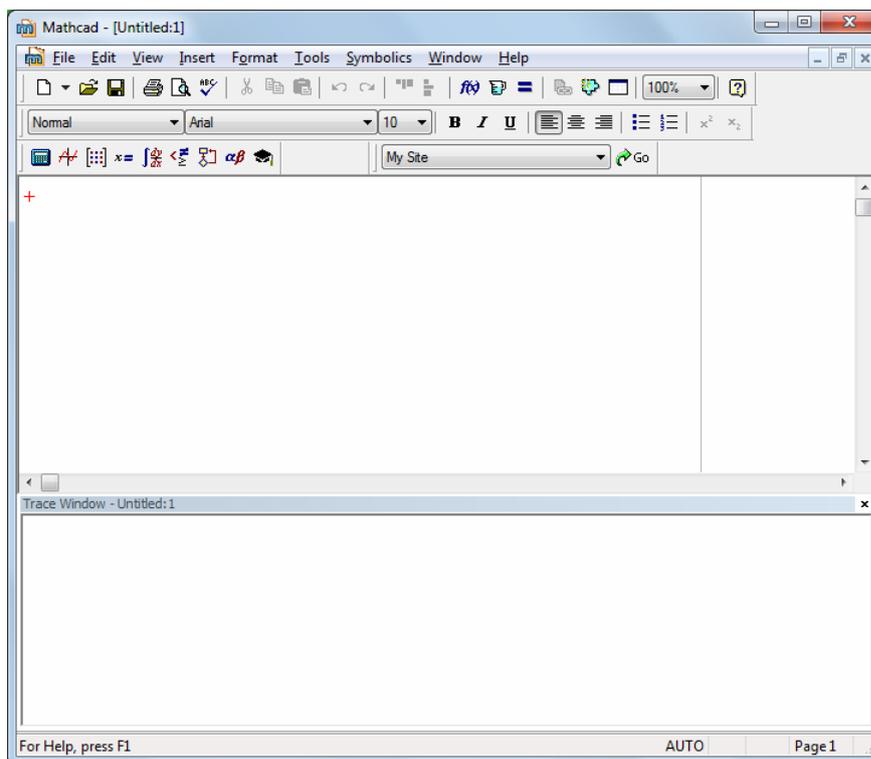


Рис. 2.1. Главное окно программы MathCAD

Знак присваивания можно ввести, нажав на комбинацию клавиш Shift+; или ввести из окна инструментов Calculator (рис. 2.2), предварительно введя его в рабочее окно с помощью команды основного меню View>Toolbars> Calculator или нажав на кнопку  в основном окне MathCAD.

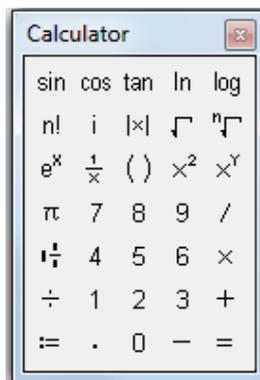


Рис. 2.3. Окно инструментов Calculator

На следующем рисунке (рис. 2.4) представлена панель для добавления различных окон инструментов в рабочее окно программы MathCAD.

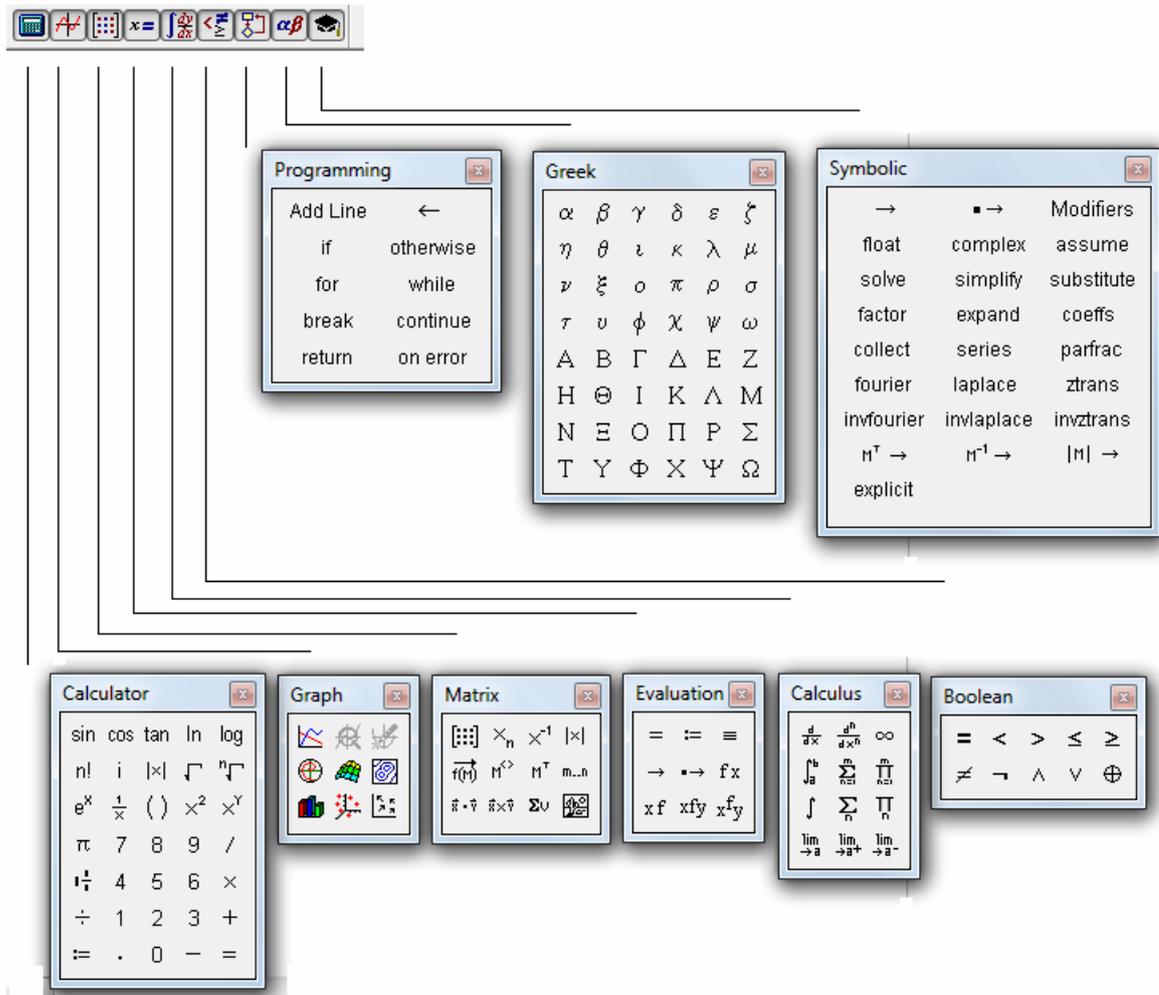


Рис. 2.4. Панель для добавления окон различных инструментов.

На следующем рисунке (рис. 2.5) показано главное окно с введенными значениями различных переменных.

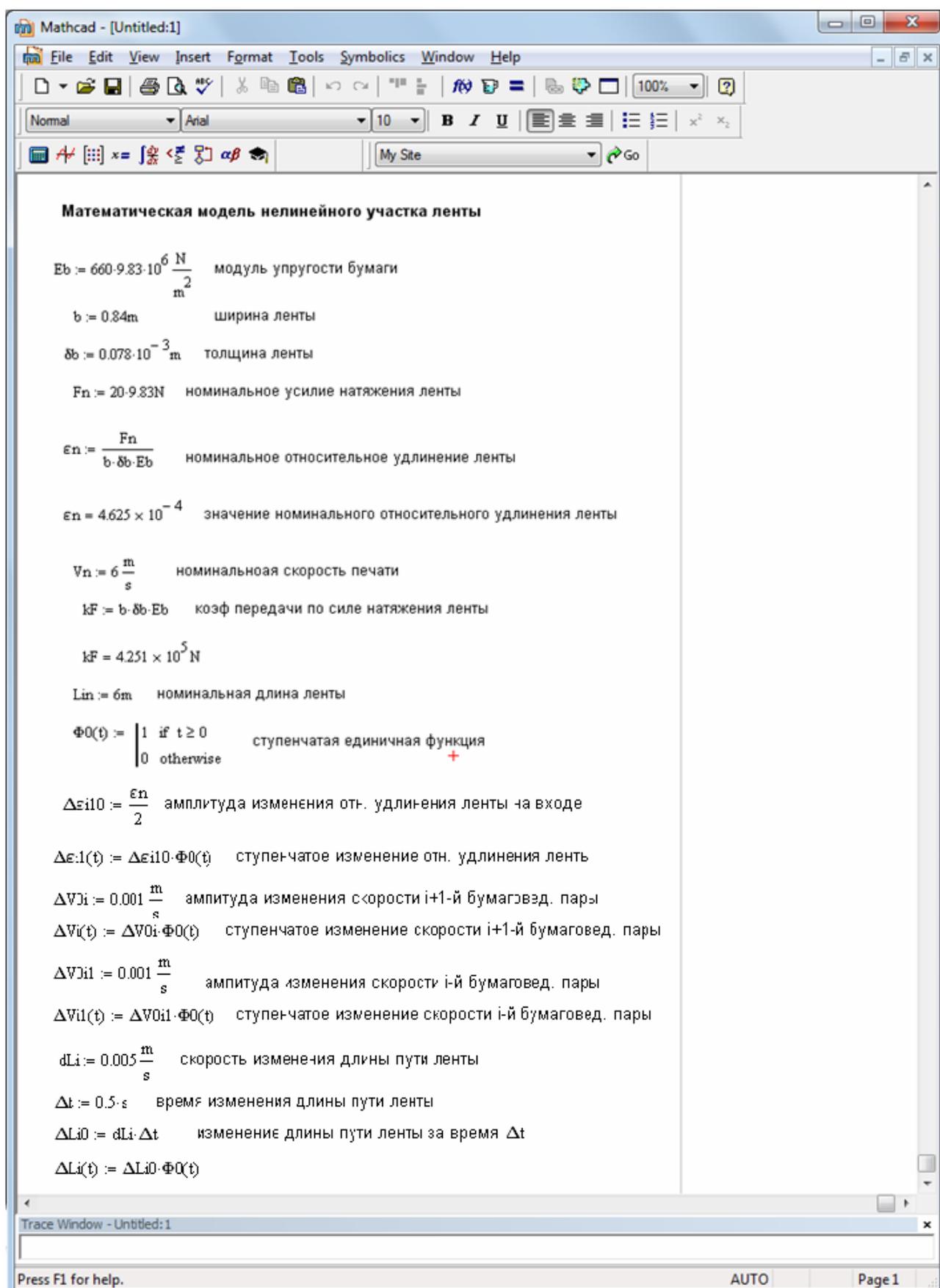


Рис. 2.5. Главное окно программы с введенными параметрами

Для создания переменной, у которой меняется значение после выполнения одного из условий нужно нажать на клавишу «]» на клавиатуре или нажать на кнопку «Add Line» в окне панели инструментов «Programming». Таким образом, например, можно оформить единично-ступенчатое воздействие  $1(t)$  и прямоугольный импульс:

$$\Phi 0(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{ступенчатая единичная функция}$$

$$dLi0(t) := \begin{cases} dLi & \text{if } t \geq 0 \cdot s \wedge t \leq \Delta t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{прямоугольный импульс}$$

Далее произведем расчет переходной характеристики по изменению пути ленты. Введем следующие параметры:

$$tb := 1s \quad \text{масштаб времени}$$

$$dLi0(t) := \begin{cases} dLi & \text{if } t \geq 0 \cdot s \wedge t \leq \Delta t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{прямоугольный импульс}$$

$$\epsilon i := \epsilon n \quad \text{начальное условие}$$

$$k\epsilon il := 0 \quad kVi1 := 0 \quad kVi := 0 \quad kLi := 1 \quad \text{значения коэффициентов передачи}$$

Запишем дифференциальное уравнение:

$$DuL(t, \epsilon i) := \frac{1 + \epsilon i}{Lin + kLi \cdot \Delta Li(t \cdot tb)} \cdot tb \cdot \left[ Vn + kVi1 \cdot \Delta Vi1(t \cdot tb) - (Vn + kVi \cdot \Delta Vi(t \cdot tb)) \cdot \frac{1 + \epsilon i}{1 + \epsilon n + k\epsilon il \cdot \Delta \epsilon il(t \cdot tb)} + kLi \cdot dLi0(t \cdot tb) \right]$$

При решении дифференциального уравнения искомой величиной является функция. Для обыкновенных дифференциальных уравнений неизвестная функция – функция одной переменной. Дифференциальные уравнения в частных производных – это дифференциальные уравнения, в которых неизвестной является функция двух или большего числа переменных. MathCAD имеет ряд встроенных функций, предназначенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждая из этих функций предназначена для численного решения дифференциального уравнения. В результате решения получается матрица, содержащая значения функции, вычисленные на некотором множестве точек (на некоторой сетке значений). Для каждого алгоритма MathCAD имеет различные встроенные функции. Несмотря на различные методы поиска решения, каждая из этих функций требует, чтобы были заданы, по крайней мере, следующие величины, необходимые для поиска решения:

- Начальные условия.
- Набор точек, в которых нужно найти решение.

- Само дифференциальное уравнение, записанное в некотором специальном виде.

Для решения данного дифференциального уравнения воспользуемся функцией `rkfixed`. Функция `rkfixed` использует универсальный метод для решения дифференциальных уравнений. Хотя метод Рунге-Кутты, используемый этой функцией, не всегда является самым быстродействующим, он почти всегда приводит к искомому результату. Функция `rkfixed` имеет следующие аргументы:

**rkfixed (y, x1, x2, npoints, D)**

**y** - вектор начальных условий размерности  $n$ , где  $n$  — порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе (если решается система уравнений).

**x1, x2** - граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений. Начальные условия, заданные в векторе **y**, — это значение решения в точке  $x1$ .

**npoints** - число точек (не считая начальной точки), в которых ищется приближенное решение. При помощи этого аргумента определяется число строк ( $1 + npoints$ ) в матрице, возвращаемой функцией `rkfixed`.

**D(x, y)** - функция, возвращающая значение в виде вектора из  $n$  элементов, содержащих первые производные неизвестных функций.

```
n := 0..9999    номера расчетных точек
ZLui := rkfixed(εi, 0, 10, 500, DuL)    процедура расчета
```

Матрица расчетных точек `ZLui` и есть нужное решение уравнения. На основании решения далее можно построить переходную характеристику по изменению пути ленты. Переходная характеристика представляет собой график зависимости. Для построения графика воспользуемся командой меню `Insert>Graph>X-Y Plot` (Вставка>График>График X-Y) или нажмем на кнопку  на панели инструментов `Graph`. В точке, где находится курсор появиться пустая форма для ввода значений переменных и функции (рис. 2.6).

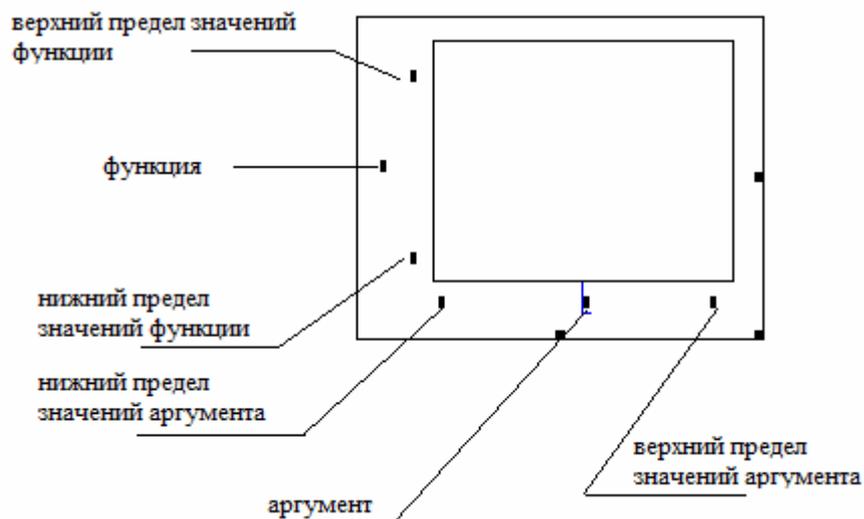


Рис. 2.6. Пустая форма для построения графика

После ввода значений функции и аргумента программа построит график. В поля для ввода значений аргумента и функции можно вводить несколько функций и переменных, для после ввода одной функции нужно нажать на клавишу «,», после этого курсор опустится на одну строку и можно водить следующие значения. Для изменения различных параметров графика, таких как цвета линий, добавления сетки и т.д. нужно нажать правой кнопкой мыши на графике и в открывшемся меню выбрать пункт Format (рис. 2.7).

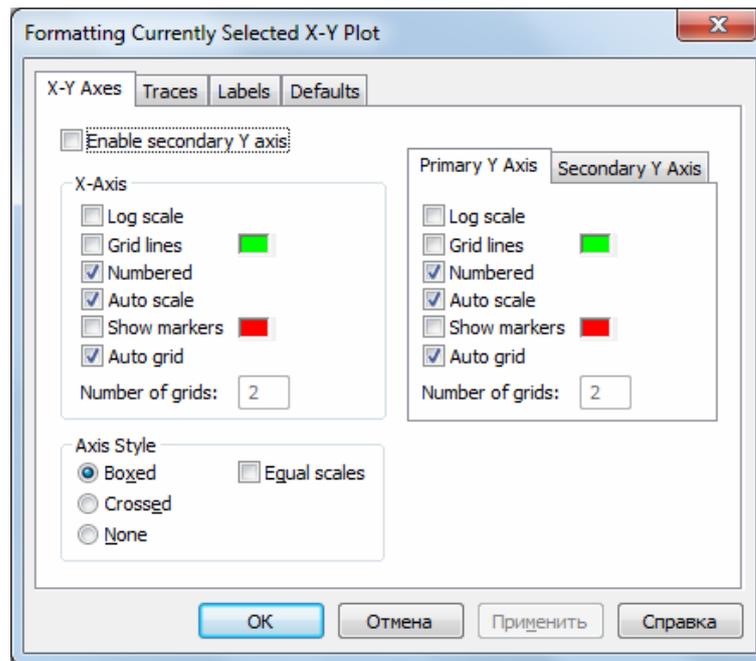


Рис. 2.7. Окно для изменения параметров графика

На следующем рисунке представлен график переходной характеристики по изменению длины пути ленты построенный выше изложенным способом (рис. 2.8).

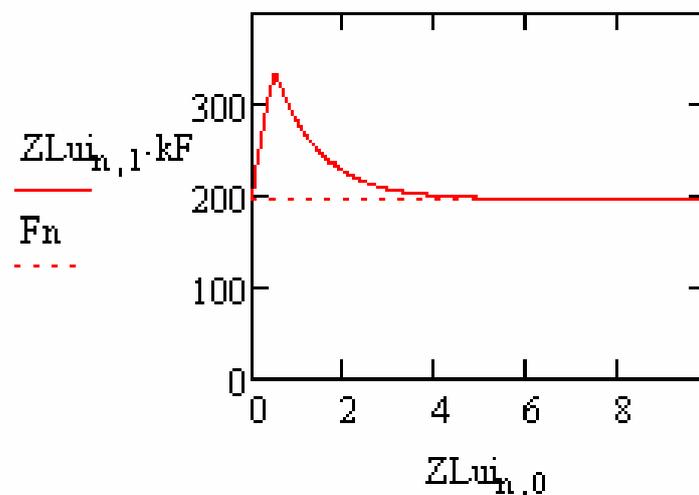


Рис. 2.8. График переходной характеристики

Аналогичным способом произведем расчеты переходных характеристик по изменению скорости  $i+1$ -й бумаговедущей пары, по изменению скорости  $i$ -й бумаговедущей пары и по изменению относительного удлинения ленты на входе:

$k_{\varepsilon i1} := 0$      $k_{V i1} := 1$      $k_{V i} := 0$      $k_{L i} := 0$     значения коэффициентов передачи

$$DViu(t, \varepsilon_i) := \frac{1 + \varepsilon_i}{L_{in} + k_{L i} \Delta L_i(t-tb)} \cdot tb \cdot \left[ V_n + k_{V i1} \Delta V_{i1}(t-tb) - (V_n + k_{V i} \Delta V_i(t-tb)) \cdot \frac{1 + \varepsilon_i}{1 + \varepsilon_n + k_{\varepsilon i1} \Delta \varepsilon_{i1}(t-tb)} + k_{L i} dL_{i0}(t-tb) \right]$$

$ZViu := rkfixed(\varepsilon_i, 0, 10, 500, DViu)$     процедура расчета

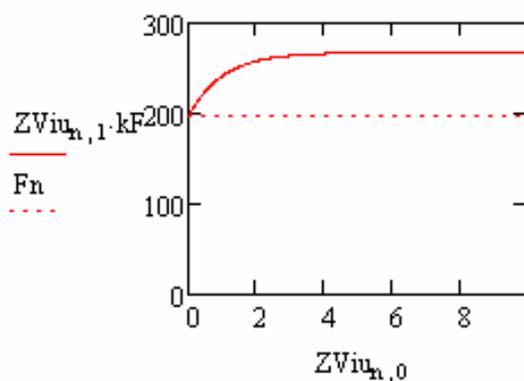


Рис. 2.9. График переходной характеристики по изменению скорости  $i+1$ -й бумаговедущей пары

$k_{\varepsilon i1} := 0$      $k_{V i1} := 0$      $k_{V i} := 1$      $k_{L i} := 0$     значения коэффициентов передачи

$$DViu(t, \varepsilon_i) := \frac{1 + \varepsilon_i}{L_{in} + k_{L i} \Delta L_i(t-tb)} \cdot tb \cdot \left[ V_n + k_{V i1} \Delta V_{i1}(t-tb) - (V_n + k_{V i} \Delta V_i(t-tb)) \cdot \frac{1 + \varepsilon_i}{1 + \varepsilon_n + k_{\varepsilon i1} \Delta \varepsilon_{i1}(t-tb)} + k_{L i} dL_{i0}(t-tb) \right]$$

$n := 0..999$     номера расчетных точек

$ZViu := rkfixed(\varepsilon_i, 0, 10, 500, DViu)$     процедура расчета

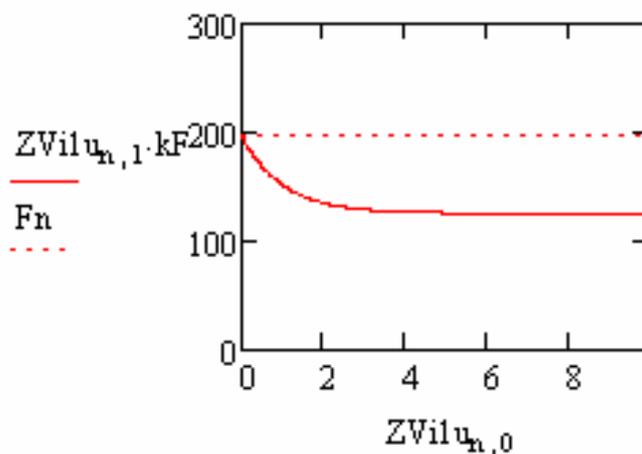


Рис. 2.10. График переходной характеристики по изменению скорости  $i$ -й бумаговедущей пары

$k_{\varepsilon i} := 1$      $k_{V i 1} := 0$      $k_{V i} := 0$      $k_{L i} := 0$     значения коэффициентов передачи

$$D_{\varepsilon i u}(t, \varepsilon i) := \frac{1 + \varepsilon i}{L_{i n} + k_{L i} \cdot \Delta L_i(t-t_b)} \cdot t_b \cdot \left[ V_n + k_{V i 1} \cdot \Delta V_{i 1}(t-t_b) - (V_n + k_{V i} \cdot \Delta V_i(t-t_b)) \cdot \frac{1 + \varepsilon i}{1 + \varepsilon n + k_{\varepsilon i 1} \cdot \Delta \varepsilon_{i 1}(t-t_b)} + k_{L i} \cdot dL_{i 0}(t-t_b) \right]$$

$Z_{\varepsilon i u} := \text{rkfixed}(\varepsilon i, 0, 10, 500, D_{\varepsilon i u})$     процедура расчета

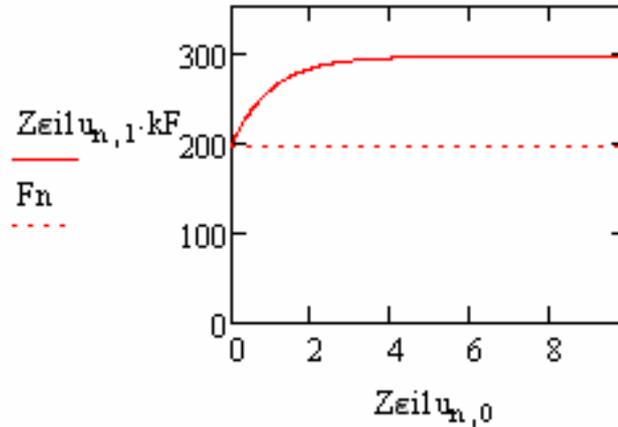


Рис. 2.11. График переходной характеристики по изменению относительного удлинения ленты на входе

После выполнения данной лабораторной работы следует сделать выводы о полученных результатах.

## Задание 4. Компьютерное моделирование линейризованной лентопроводящей системы рулонной печатной машины средствами пакета MathCAD

### 1. Цель работы

Исследование компьютерной модели лентопроводящей системы и переходных характеристик участков бумажной ленты. Изучение основных возможностей программы для компьютерного моделирования Mathcad. Использование программы Mathcad для построения математической модели ленты и получение переходных характеристик.

### 2. Практическая часть

На рис. 4.1 представлена линейризованная математическая модель участка бумажной ленты. Видно, что в динамическом отношении участок бумажной ленты представляет собой инерционное звено первого порядка. Это звено имеет постоянную времени  $T_i$ .

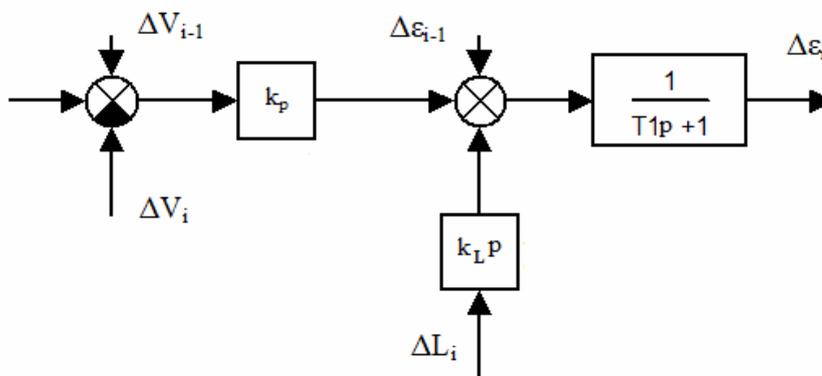


Рис. 4.1. Линейризованная математическая модель участка бумажной ленты

На рис. 4.2 представлена математическая модель лентопроводящей системы рулонной печатной машины (РПМ).

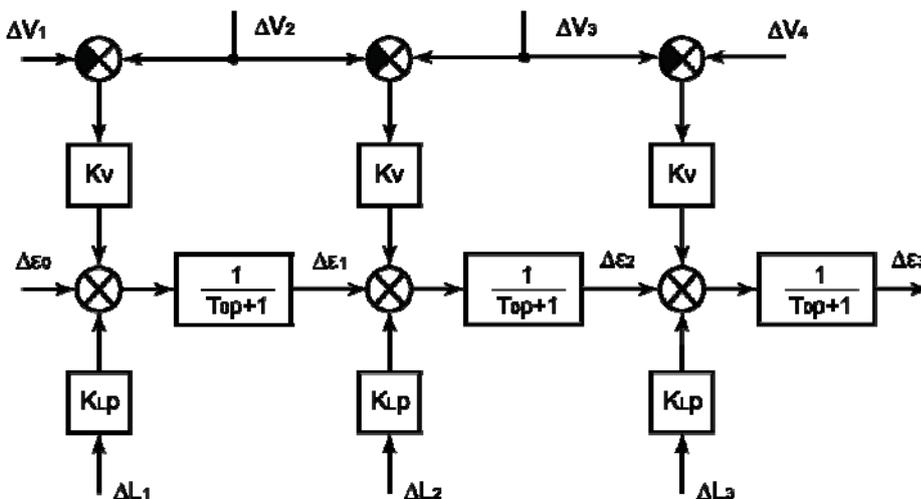


Рис. 4.2. Математическая модель лентопроводящей системы

По каналу натяжения « $\Delta\varepsilon_{i-1} \rightarrow \Delta\varepsilon_i$ » участок ленты имеет коэффициент передачи равный единице. По скорости входной бумаговедущей пары  $\Delta V_i$  участок бумажной ленты имеет коэффициент передачи «минус  $k_v$ », т.е. при увеличении скорости подаваемой бумажной ленты установившееся значение натяжения падает. По скорости выводной бумаговедущей пары  $\Delta V_{i+1}$  участок бумажной ленты имеет коэффициент передачи  $k_v$ , т.е. при увеличении скорости выводящей пары установившееся значение натяжения возрастает. По каналу изменения длины бумажной ленты « $\Delta L_i \rightarrow \Delta\varepsilon_i$ » участок ленты имеет дифференцирующие свойства с коэффициентом передачи  $k_L$ .

Найдем переходные характеристики участка бумажной ленты по этим каналам. Для этого откроем программу Mathcad. Введем основные константы, такие как ширину ленты ( $b$ ), толщину бумаги ( $\delta b$ ) и модуль упругости бумаги ( $E_b$ ). Также введем значения силы натяжения в ньютонах ( $F_n$ ), длину ленты ( $L_n$ ) и линейную скорость размотки рулона ( $V_n$ ).

На основании этих данных рассчитаем относительное удлинение, коэффициенты передач, постоянную времени, а также малые приращения скорости, длины пути и относительного удлинения по формулам приведенным в теоретической части (рис. 4.3).

$E_b := 660 \cdot 9.8 \cdot 10^6$	модуль упругости
$b := 0.84$	ширина ленты
$\delta b := 0.078 \cdot 10^{-3}$	толщина ленты
$\varepsilon_n := \frac{F_n}{b \cdot \delta b \cdot E_b}$	относительное удлинение
$k_F := b \cdot \delta b \cdot E_b$	коэффициент преобразования относительного удлинения в силу
$\Delta \varepsilon_0 := 0.2 \cdot \varepsilon_n$	малое приращение относительного удлинения
$\Delta V_i := 0.2 V_n \cdot \varepsilon_n$	малое приращение скорости
$\Delta L_i := 0.2 \cdot L_n \cdot \varepsilon_n$	малое приращение длины пути ленты
$T_0 := \frac{L_n}{V_n}$	постоянная времени
$k_v := \frac{1 + \varepsilon_n}{V_n}$	коэффициенты передачи
$k_l := \frac{1 + \varepsilon_n}{V_n}$	

Рис. 4.3. Формулы для расчета введенные в программу MathCAD

Приступаем непосредственно к расчетам переходных характеристик:

### 3. Переходная характеристика участка бумажной ленты по каналу « $\Delta\varepsilon_{i-1} \rightarrow \Delta\varepsilon_i$ ».

Найдем переходную характеристику участка бумажной ленты по каналу « $\Delta\varepsilon_{i-1} \rightarrow \Delta\varepsilon_i$ ». В этом случае его на входе действует ступенчатое возмущение  $\Delta\varepsilon_{i-1} = \Delta\varepsilon_{i-1}(t)$ .

В соответствии с математической моделью участка бумажной ленты изображение выходного сигнала будет иметь вид:

$$\Delta\varepsilon_i(p) = W_{\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i}(p)\Delta\varepsilon_{i-1}(p) = \frac{1}{T_i p + 1} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{i-1}}{p}$$

В Mathcad построим переходные характеристики по изменению силы натяжения ленты ( $\Delta F$ ) по каналу « $\Delta\varepsilon_{i-1} \rightarrow \Delta\varepsilon_i$ », т.к. изменение силы пропорционально изменению относительного удлинения.

$f_0(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	Отсекающая функция, единично ступенчатое воздействие
$\Delta F_{00} := \Delta\varepsilon_0 \cdot kF$	изменение входного сигнала
$\Delta F_0(t) := \Delta F_{00} \cdot f_0(t)$	ступенчатое изменение усилия натяжения ленты на входе в первую бумаговедущую пару

Переходную характеристику определим в аналитического виде, воспользовавшись функцией для обратного преобразования Лапласа `invlaplace`, которая находится в окне Symbolic.

■ `invlaplace`, ■  $\rightarrow$

В левую часть функции вводится передаточная функция (изображение), а в правой части определяется символ оператора Лапласа (обычно  $p$  или  $s$ ). После ввода данных за символом  $\rightarrow$  появиться вычисленная переходная функция (решение дифференциального уравнения).

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta\varepsilon_0 \rightarrow \Delta\varepsilon_1$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_1$ »):

$$\Delta F_{10}(t, T_0, \Delta\varepsilon_0, kF) := kF \cdot \left( \frac{1}{T_0 \cdot p + 1} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_0}{p} \right) \text{invlaplace, } p \rightarrow kF \cdot \Delta\varepsilon_0 \cdot \left[ \left( -e^{-\frac{t}{T_0}} \right) + 1 \right]$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на первом участке по ступенчатому изменению силы натяжения:

$$\Delta F_1(t) := \Delta F_{10}(t, T_0, \Delta\varepsilon_0, kF) \cdot f_0(t)$$

Аналогично проводятся расчеты и для остальных участков.

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta\varepsilon_0 \rightarrow \Delta\varepsilon_2$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_2$ »):

$$\Delta F_{20}(t, T_0, \Delta \varepsilon_0, kF) := kF \cdot \left[ \frac{1}{(T_0 \cdot p + 1)^2} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_0}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow kF \cdot \Delta \varepsilon_0 \cdot \left[ \left( -e^{-\frac{t}{T_0}} \right) - \frac{1}{T_0} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} + 1 \right]$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на втором участке по ступенчатому изменению силы натяжения:

$$\Delta F_2(t) := \Delta F_{20}(t, T_0, \Delta \varepsilon_0, kF) \cdot f_0(t)$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta \varepsilon_0 \rightarrow \Delta \varepsilon_3$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_3$ »):

$$\Delta F_{30}(t, T_0, \Delta \varepsilon_0, kF) := kF \cdot \left[ \frac{1}{(T_0 \cdot p + 1)^3} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_0}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow kF \cdot \Delta \varepsilon_0 \cdot \left[ \left( -e^{-\frac{t}{T_0}} \right) - \frac{1}{T_0} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} - \frac{1}{2 \cdot T_0^2} \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} + 1 \right]$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на третьем участке по ступенчатому изменению силы натяжения:

$$\Delta F_3(t) := \Delta F_{30}(t, T_0, \Delta \varepsilon_0, kF) \cdot f_0(t)$$

На рис. 4.4 представлены примеры графиков переходных характеристик лентопроводящей системы РПМ при ступенчатом изменении усилия натяжения ленты  $F_0$  перед первой бумаговедущей парой.

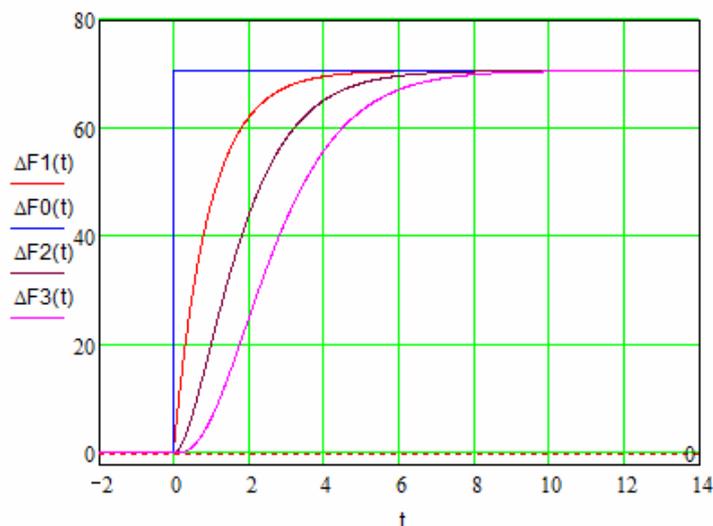


Рис. 4.4. Примеры графиков переходных характеристик.

#### 4. Переходная характеристика участка бумажной ленты по каналу « $\Delta V_1 \rightarrow \Delta \varepsilon_i$ ».

Определим переходную характеристику по ступенчатому изменению скорости  $i$ -той бумаговедущей пары, т.е. по каналу « $\Delta V_1 \rightarrow \Delta \varepsilon_i$ ». В этом случае преобразование Лапласа от выходного сигнала имеет вид:

$$\Delta\varepsilon_i(p) = W_{V_i\varepsilon_i}(p)\Delta V_i(p) = \frac{-k_v}{T_i p + 1} \cdot \frac{\Delta V_i}{p}$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta V_1 \rightarrow \Delta\varepsilon_1$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_1$ »):

$$\Delta F_{10}(t, T_0, \Delta V_i, kF, kv) := kF \cdot \left( \frac{-kv}{T_0 p + 1} \cdot \frac{\Delta V_i}{p} \right) \text{invlaplace, } p \rightarrow (-kF) \cdot kv \cdot \Delta V_i \cdot \left[ \left( -e^{-\frac{t}{T_0}} + 1 \right) \right]$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на первом участке по ступенчатому изменению скорости:

$$\Delta F_1(t) := \Delta F_{10}(t, T_0, \Delta V_i, kF, kv) \cdot f_0(t)$$

Аналогично проводятся расчеты и для остальных участков.

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta V_1 \rightarrow \Delta\varepsilon_2$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_1$ »):

$$\Delta F_{20}(t, T_0, \Delta V_i, kF, kv) := kF \cdot \left[ \frac{-kv}{(T_0 p + 1)^2} \cdot \frac{\Delta V_i}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow (-kF) \cdot kv \cdot \Delta V_i \cdot \left[ \left( -e^{-\frac{t}{T_0}} \right) - \frac{1}{T_0} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} + 1 \right]$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на втором участке по ступенчатому изменению скорости:

$$\Delta F_2(t) := \Delta F_{20}(t, T_0, \Delta V_i, kF, kv) \cdot f_0(t)$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta V_1 \rightarrow \Delta\varepsilon_3$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_3$ »):

$$\Delta F_{30}(t, T_0, \Delta V_i, kF, kv) := kF \cdot \left[ \frac{-kv}{(T_0 p + 1)^3} \cdot \frac{\Delta V_i}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow (-kF) \cdot kv \cdot \Delta V_i \cdot \left[ \left( -e^{-\frac{t}{T_0}} \right) - \frac{1}{T_0} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} - \frac{1}{2 \cdot T_0^2} \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} + 1 \right]$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на третьем участке по ступенчатому изменению скорости:

$$\Delta F_3(t) := \Delta F_{30}(t, T_0, \Delta V_i, kF, kv) \cdot f_0(t)$$

На рис. 4.5 представлены примеры графиков переходных характеристик лентопроводящей системы РПМ при ступенчатом изменении усилия натяжения ленты.

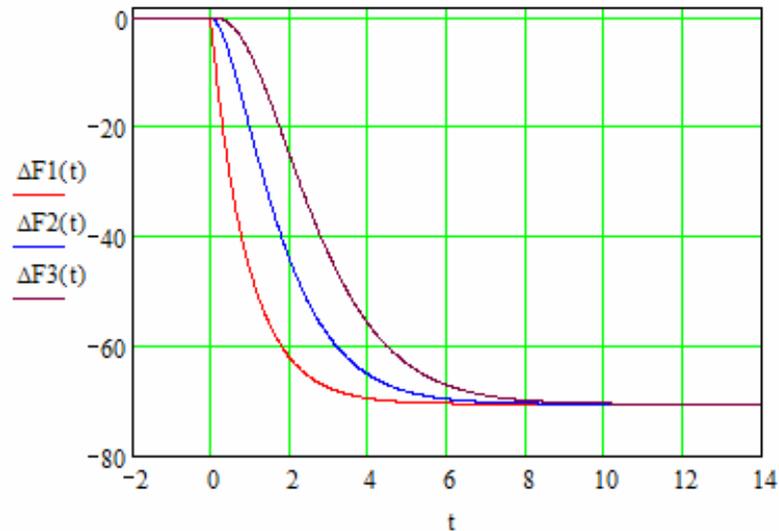


Рис. 4.5. Примеры графиков переходных характеристик.

### 5. Переходная характеристика участка бумажной ленты по каналу « $\Delta V_2 \rightarrow \Delta \varepsilon_i$ ».

Определим переходную характеристику по ступенчатому изменению скорости  $i$ -той бумаговедущей пары, т.е. по каналу « $\Delta V_2 \rightarrow \Delta \varepsilon_i$ ». В этом случае преобразование Лапласа от выходного сигнала имеет вид:

$$\Delta \varepsilon_i(p) = W_{V_{i+1} \varepsilon_i}(p) \Delta V_{i+1}(p) = \frac{k_v}{T_i p + 1} \cdot \frac{\Delta V_{i+1}}{p}$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta V_2 \rightarrow \Delta \varepsilon_i$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_1$ »):

$$\Delta F_{10}(t, T_0, \Delta V_i, kF, k_v) := kF \cdot \left( \frac{k_v}{T_0 p + 1} \cdot \frac{\Delta V_i}{p} \right) \text{invlaplace, } p \rightarrow kF \cdot k_v \cdot \Delta V_i \cdot \left[ \left( \frac{-t}{T_0} \right) + 1 \right]$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на первом участке по ступенчатому изменению скорости:

$$\Delta F_1(t) := \Delta F_{10}(t, T_0, \Delta V_i, kF, k_v) \cdot f_0(t)$$

Аналогично проводятся расчеты и для остальных участков.

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta V_2 \rightarrow \Delta \varepsilon_2$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_2$ »):

$$\Delta F_{20}(t, T_0, \Delta V_i, kF, k_v) := kF \cdot \left[ \frac{-k_v \cdot T_0 \cdot p}{(T_0 p + 1)^2} \cdot \frac{\Delta V_i}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow (-kF) \cdot \frac{k_v}{T_0} \cdot \Delta V_i \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на втором участке по ступенчатому изменению скорости:

$$\Delta F_2(t) := \Delta F_{20}(t, T_0, \Delta V_i, k_F, k_v) \cdot f_0(t)$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta V_2 \rightarrow \Delta \varepsilon_3$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_3$ »):

$$\Delta F_{30}(t, T_0, \Delta V_i, k_F, k_v) := k_F \cdot \left[ \frac{-k_v \cdot T_0 \cdot p}{(T_0 \cdot p + 1)^3} \cdot \frac{\Delta V_i}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot k_F \cdot \frac{k_v}{T_0^2} \cdot \Delta V_i \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на третьем участке по ступенчатому изменению скорости:

$$\Delta F_3(t) := \Delta F_{30}(t, T_0, \Delta V_i, k_F, k_v) \cdot f_0(t)$$

На рис. 4.6 представлены примеры графиков переходных характеристик лентопроводящей системы РПМ при ступенчатом изменении усилия натяжения ленты.

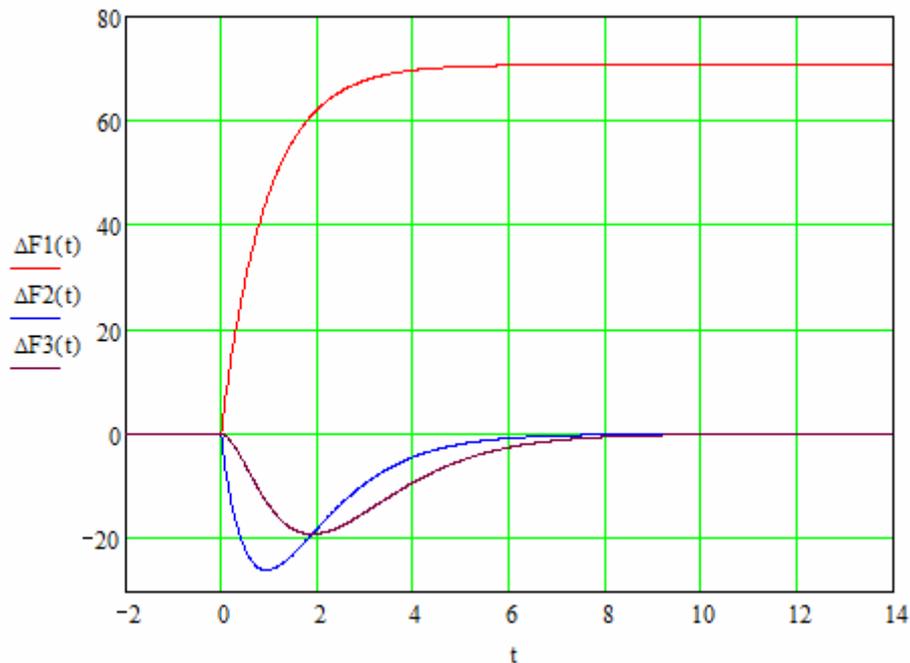


Рис. 4.6. Примеры графиков переходных характеристик.

## 6. Переходная характеристика участка бумажной ленты по каналу « $\Delta L_i \rightarrow \Delta \varepsilon_i$ ».

Изображение переходной характеристики по каналу  $\Delta L_i \rightarrow \Delta \varepsilon_i$  имеет вид:

$$\Delta \varepsilon_i(p) = W_{L_i \varepsilon_i}(p) \Delta L_i(p) = \frac{k_L}{T_i p + 1} \cdot \frac{\Delta L_i}{p}$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta L_i \rightarrow \Delta \varepsilon_i$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_1$ »):

$$\Delta F_{10}(t, T_0, \Delta L_i, k_F, k_l) := k_F \cdot \left( \frac{k_l \cdot p}{T_0 \cdot p + 1} \cdot \frac{\Delta L_i}{p} \right) \text{invlaplace, } p \rightarrow k_F \cdot k_l \cdot \Delta L_i \cdot \frac{e^{-\frac{t}{T_0}}}{T_0}$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на первом участке по ступенчатому изменению длины ленты:

$$\Delta F_1(t) := \Delta F_{10}(t, T_0, \Delta L_i, k_F, k_l) \cdot f_0(t)$$

Аналогично проводятся расчеты и для остальных участков.

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta L_i \rightarrow \Delta \varepsilon_2$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_2$ »):

$$\Delta F_{20}(t, T_0, \Delta L_i, k_F, k_l) := k_F \cdot \left[ \frac{k_l \cdot p}{(T_0 \cdot p + 1)^2} \cdot \frac{\Delta L_i}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow k_F \cdot k_l \cdot \Delta L_i \cdot t \cdot \frac{e^{-\frac{t}{T_0}}}{T_0^2}$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на втором участке по ступенчатому изменению длины ленты:

$$\Delta F_2(t) := \Delta F_{20}(t, T_0, \Delta L_i, k_F, k_l) \cdot f_0(t)$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения переходной характеристики по каналу « $\Delta L_i \rightarrow \Delta \varepsilon_3$ » (« $\Delta F_0 \rightarrow \Delta F_3$ »):

$$\Delta F_{30}(t, T_0, \Delta L_i, k_F, k_l) := k_F \cdot \left[ \frac{k_l \cdot p}{(T_0 \cdot p + 1)^3} \cdot \frac{\Delta L_i}{p} \right] \text{invlaplace, } p \rightarrow \frac{1}{2} \cdot k_F \cdot k_l \cdot \Delta L_i \cdot t^2 \cdot \frac{e^{-\frac{t}{T_0}}}{T_0^3}$$

Переходная характеристика изменения усилия натяжения ленты на третьем участке по ступенчатому изменению длины ленты:

$$\Delta F_3(t) := \Delta F_{30}(t, T_0, \Delta L_i, k_F, k_l) \cdot f_0(t)$$

На рис. 4.7 представлены примеры графиков переходных характеристик лентопроводящей системы РПМ при ступенчатом изменении усилия натяжения ленты.

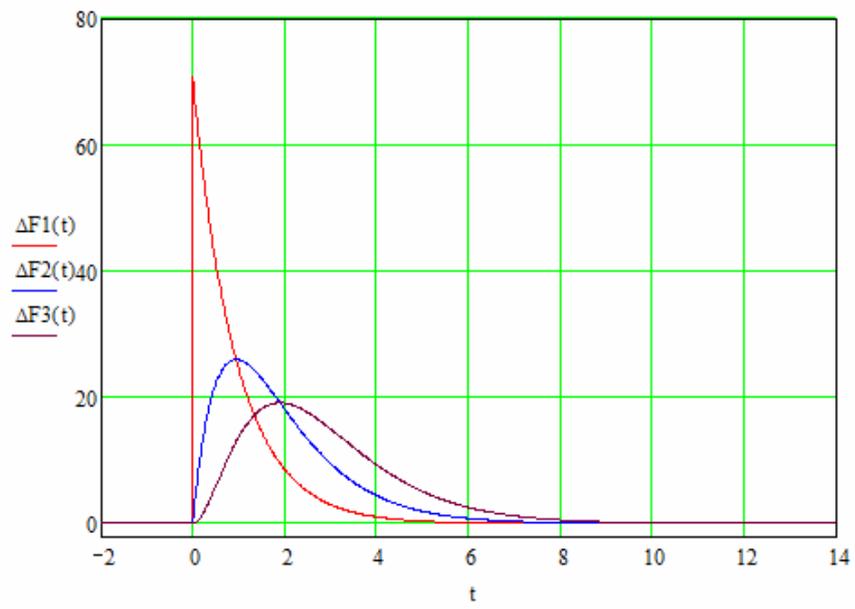


Рис. 4.7. Примеры графиков переходных характеристик.

## Задание 5. Исследование частотных и переходных характеристик пружинно-масляного амортизатора»

### 1. Цель работы

Изучение пружинного амортизатора с масляным демпфером и его математической модели. Построение компьютерной модели амортизатора в программе MathCAD. Получение и исследование переходных и логарифмических частотных характеристик амортизатора с помощью программы MathCAD.

### 2. Теоретическая часть.

Данное устройство содержит масляный или пневматический демпфер, который позволяет в достаточно широких пределах корректировать частотные свойства амортизатора. На рис. 5.1. показана схема пружинно-масляного амортизатора с качающимся валиком.

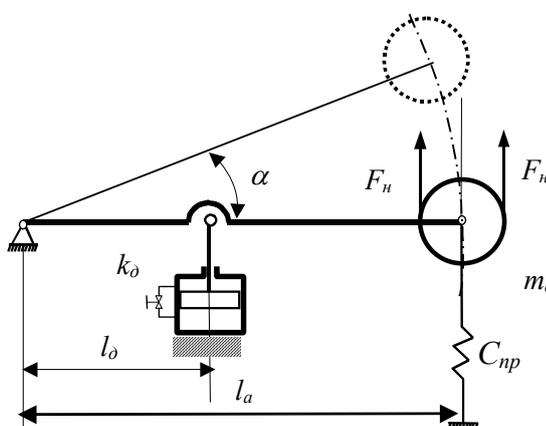


Рис. 5.1. Пружинно-масляный амортизатор с качающимся валиком

На штанге данного элемента лентопитающей системы закреплена тяга масляного демпфера. Последний представляет собой заполненную жидкостью емкость, в которой перемещается поршень, соединенный с тягой. Скорость перетекания масла, из верхней части демпфера в его нижнюю часть зависит от положения регулируемого дросселя. Коэффициент демпфирования  $k_d$  обратно пропорционален скорости перетекания масла. При полностью открытом дросселе коэффициент демпфирования минимален и поршень свободно перемещается. При полностью закрытом дросселе демпфер неподвижен и амортизатор не функционирует.

Очевидно, что коэффициент демпфирования  $k_d$  устанавливает связь между скоростью перемещения поршня  $V_{п}$  в демпфере и силой давления поршня на жидкость, т.е.

$$F_{\delta} = k_{\delta} V_{п} = k_{\delta} l_{\delta} \cdot d\alpha / dt$$

Его величина зависит как от степени открытости дросселя, так и от его диаметра и вязкости жидкости. Чем выше вязкость используемой жидкости, тем больше сглаживающие свойства демпфера. Обычно в жидкостном демпфере используется минеральное масло.

Запишем уравнение динамического баланса сил, действующих на штангу амортизатора:

$$J_a \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 2F_n \cdot l_a - F_\delta \cdot l_\delta - F_{np} \cdot l_a \quad (5.1)$$

Поскольку  $F_n = b\delta E_\delta \cdot \varepsilon_0$ ,  $F_\delta = k_\delta l_\delta \cdot d\alpha / dt$  и  $F_{np} = C_{np} l_a \cdot \alpha$ , то уравнение (5.1) принимает вид:

$$J_a \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k_\delta l_\delta^2 \frac{d\alpha}{dt} + C_{np} l_a^2 \alpha = 2b\delta E_\delta l_a \varepsilon_0 \quad (5.2)$$

Приведем дифференциальное уравнение (5.2) к каноническому виду:

$$\frac{J_a}{C_{np} l_a^2} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{k_\delta l_\delta^2}{C_{np} l_a^2} \frac{d\alpha}{dt} + \alpha = \frac{2b\delta E_\delta}{C_{np} l_a} \varepsilon_0$$

или

$$T_a^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2\zeta_a T_a \frac{d\alpha}{dt} + \alpha = k_a \varepsilon_0 \quad (5.3)$$

Здесь:

$$T_a = \sqrt{\frac{J_a}{C_{np} l_a}} \text{ — постоянная времени;} \quad (5.4)$$

$$\zeta_a = \frac{k_\delta l_\delta^2}{2 \cdot l_a \sqrt{J_a C_{np}}} \text{ — степень демпфирования;} \quad (5.5)$$

$$k_a = \frac{2b\delta E_\delta}{C_{np} l_a} \text{ — коэффициент передачи амортизатора.} \quad (5.6)$$

Формула (5.5) показывает, что степень демпфирования  $\zeta_a$  прямо пропорциональна коэффициенту  $k_\delta$  и отношению плеч  $l_\delta/l_a$ . При этом она обратно пропорциональна моменту инерции амортизатора  $J_a$  и жесткости пружины  $C_{np}$ . При настройке амортизатора коэффициент демпфирования к выбирается по возможности наибольшим, чтобы амортизатор имел аperiодическую переходную характеристику, т.е. степень демпфирования была значительно больше единицы, т.е.  $\zeta_a \gg 1$ .

Определим размерность коэффициента демпфирования  $k_d$ , исходя из формулы

$$k_d = F_\delta / (l_\delta \cdot d\alpha / dt), \text{ т. е. } [k_d] = \text{Н} \cdot \text{с} / (\text{м} \cdot \text{рад}).$$

Дифференциальному уравнению (5.3) соответствует следующая передаточная функция

$$W_a(p) = \frac{k_a}{T_a^2 p^2 + 2\zeta_a T_a p + 1} \quad (5.7)$$

или

$$W_a(p) = \frac{k_a}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \quad (5.8)$$

Здесь:  $a_2 = T_a^2$  и  $a_1 = 2\zeta_a T_a$  — постоянные коэффициенты.

Мы получили, что в динамическом отношении пружинно-масляный амортизатор является инерционным звеном второго порядка с коэффициентом передачи  $k_d$ , постоянной времени  $T_a$  и степенью демпфирования  $\zeta_a \gg 1$ .

Рассчитаем переходные и частотные характеристики пружинно-масляного амортизатора, имеющего следующие значения конструктивных параметров:  $l_a = 0,4$  м,  $l = 0,2$  м,  $J_a = 1$  кгм<sup>2</sup>,  $C_a = 1000$  Н/м,  $k_d = 8000$  Н·с/м·рад

Примем, что физические свойства ленты характеризуются параметрами:  $b = 0,84$  м,  $\delta = 0,078 \cdot 10^{-3}$  м,  $E_\delta = 6,48 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>.

Расчет по формулам (5.4) — (5.7) в этом случае дает значения:  $k_a = 2,119 \cdot 10^3$ ,  $T = 0,079$  с,  $\zeta_a = 12,65$ ,  $a^2 = 6,2 \cdot 10^{-3}$  с<sup>2</sup>,  $a_1 = 2$  с.

На рис. 5.2 показана относительная переходная характеристика пружинно-масляного амортизатора, полученная при ступенчатом изменении относительного удлинения ленты на величину  $\varepsilon_0$ .

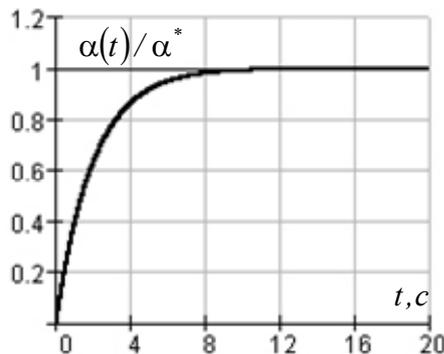


Рис. 5.2. Переходная характеристика пружинно-масляного амортизатора

Здесь  $\alpha^* = k_a \varepsilon^*$  — номинальное значение угла поворота штанги амортизатора. Мы видим, что форма полученной переходной характеристики очень близка форме характеристики инерционного звена первого порядка, имеющего постоянную времени примерно 2 с. Так как между коэффициентами  $a_2$  и  $a_1$  выполняется соотношение  $0,0062 \ll 2$ , то коэффициентом  $a_2$  можно пренебречь. В результате мы получаем приближенное выражение для передаточной функции амортизатора:

$$W_a(p) \approx \frac{k_a}{a_1 p + 1} \quad (5.9)$$

Таким образом, приближенно мы можем считать данный амортизатор аperiодическим инерционным звеном первого порядка с постоянной времени  $T_a' = a_1 = 2$  с.

На рис. 5.3 и рис. 5.4 представлены логарифмические частотные характеристики рассматриваемого амортизатора.

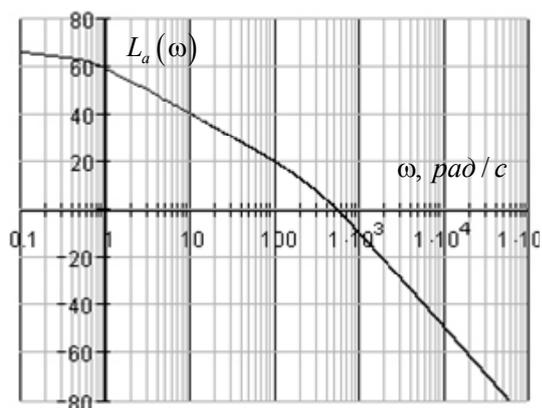


Рис. 5.3. ЛАЧХ пружинно-масляного амортизатора

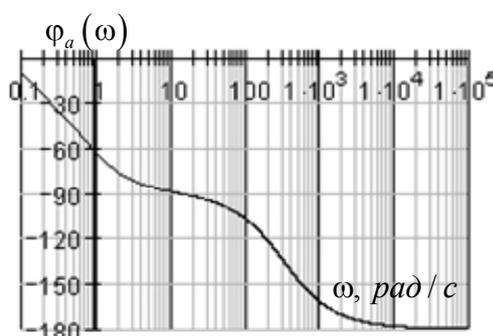


Рис. 5.4. ЛФЧХ пружинно-масляного амортизатора

Данные характеристики показывают, что рассматриваемый амортизатор (с большим значением степени демпфирования) может рассматриваться как инерционное звено первого порядка в диапазоне частот  $\omega < 20$  рад/с.

## 2. Практическая часть

Для исследования частотных и переходных характеристик пружинно-масляного амортизатора воспользуемся программой MathCAD. Для выполнения данного исследования будем следовать следующему алгоритму:

2.1. Введем исходные данные:

$l_a = 0,4$  м – длина штанги амортизатора;

$l_d = 0,2$  м – плечо демпфера;

$J_a = 0,4$  кг/м<sup>2</sup> – момент инерции амортизатора;

$V_0 = 7$  м/с – номинальное значение скорость печати;

$F_0 = 35$  Н – номинальное значение силы натяжения ленты;

$L_0 = 10$  м – длина пути ленты;

$b = 0,84$  м – ширина ленты;

$\delta = 0,78 \cdot 10^{-3}$  м – толщина ленты;

$E_b = 6,473 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup> – модуль упругости бумаги.

$\gamma = 800$  кг/м<sup>3</sup> – объемная плотность бумаги.

$\rho_0 = 0,5$  м – начальный радиус рулона

$\rho_k = 0,07$  м – конечный радиус рулона

2.2. Рассчитаем значения различных параметров по следующим формулам:

критическую скорость печати  $V_{kp} = \sqrt{\frac{2 \cdot \delta \cdot E_b}{\pi \cdot \gamma \cdot L_0}}$

средний радиус рулона  $\rho_c = \frac{\rho_0 + \rho_k}{2}$ ;

постоянную времени амортизатора  $T_a = \rho_0 / V_{kp}$ ;

номинальное значение относительного удлинения ленты  $\varepsilon_0 = \frac{F_0}{b \cdot \delta \cdot E_b}$ ;

жесткость пружины амортизатора  $C_a = \frac{J_a}{(l_a \cdot T_a)^2}$ ;

коэффициент демпфирования  $k_d(\zeta_a) = \frac{2 \cdot \zeta_a \cdot l_a \cdot \sqrt{J_a C_a}}{l_d^2}$ ;

коэффициент передачи амортизатора  $k_a = \frac{2b\delta E_b}{C_a l_a}$ .

2.3. Зададим передаточную функцию амортизатора:

$$W_a(p, \zeta_a) = \frac{k_a}{T_a^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T_a \cdot \zeta_a \cdot p + 1}$$

2.4. Рассчитаем логарифмические частотные характеристики при различных степенях демпфирования:  $\zeta_a = 0$ ;  $\zeta_a = 0.2$ ;  $\zeta_a = 0.5$ ;  $\zeta_a = 0.7$ ;  $\zeta_a = 1$ . Для этого введем в программу MathCAD следующие расчетные формулы:

$$j := \sqrt{-1}$$

$$A(\omega, \zeta_a) := |W_a(j \cdot \omega, \zeta_a)|$$

$$LA(\omega, T_a, \zeta_a) := 20 \log(A(\omega, \zeta_a))$$

$$\varphi(\omega, T_a, \zeta_a) := \arg(W_a(j \cdot \omega, \zeta_a))$$

2.5. Далее построим на основании расчетов графики ЛАЧХ и ЛФЧХ. Примерный вид графиков рассчитанных в программе MathCAD представлен на следующих рисунках (рис. 5.5 и рис. 5.6).

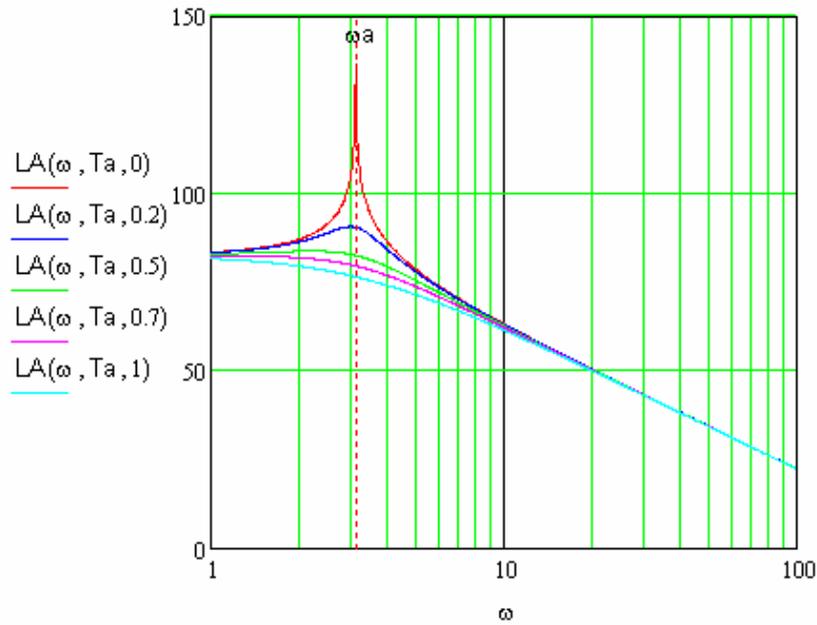


Рис. 5.5. График ЛАЧХ амортизатора при  $0 < \zeta_a < 1$ .

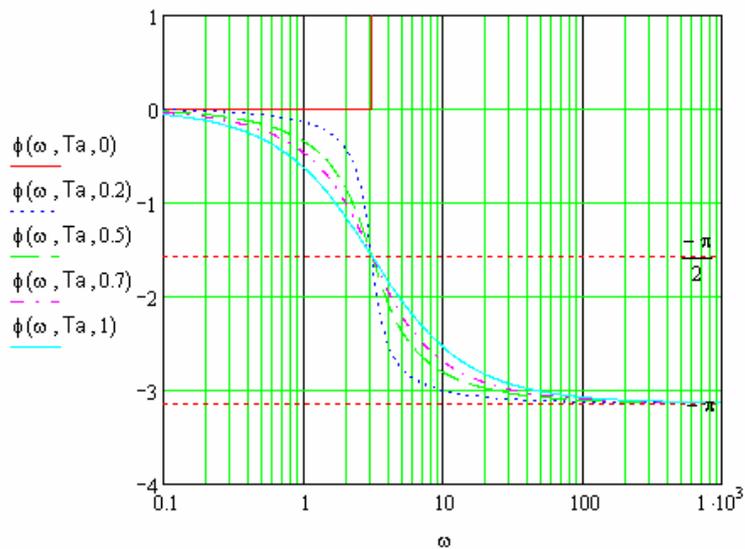


Рис. 5.6. График ЛФЧХ амортизатора при  $0 < \zeta_a < 1$ .

2.6. Теперь рассчитаем логарифмические частотные характеристики со следующими степенями демпфирования:  $\zeta_a = 2$ ;  $\zeta_a = 5$ ;  $\zeta_a = 10$ ;  $\zeta_a = 15$ ;  $\zeta_a = 20$ . А также постоянные времени амортизатора по формулам:

$$T_{a1}(\zeta_a) = \zeta_a \cdot T_a + T_a \cdot \sqrt{\zeta_a^2 - 1}$$

$$T_{a2}(\zeta_a) = \zeta_a \cdot T_a - T_a \cdot \sqrt{\zeta_a^2 - 1}$$

2.7. Построим на основании расчетов графики ЛАЧХ и ЛФЧХ. Примерный вид графиков рассчитанных в программе MathCAD представлен на следующих рисунках (рис. 5.7 и рис. 5.8).

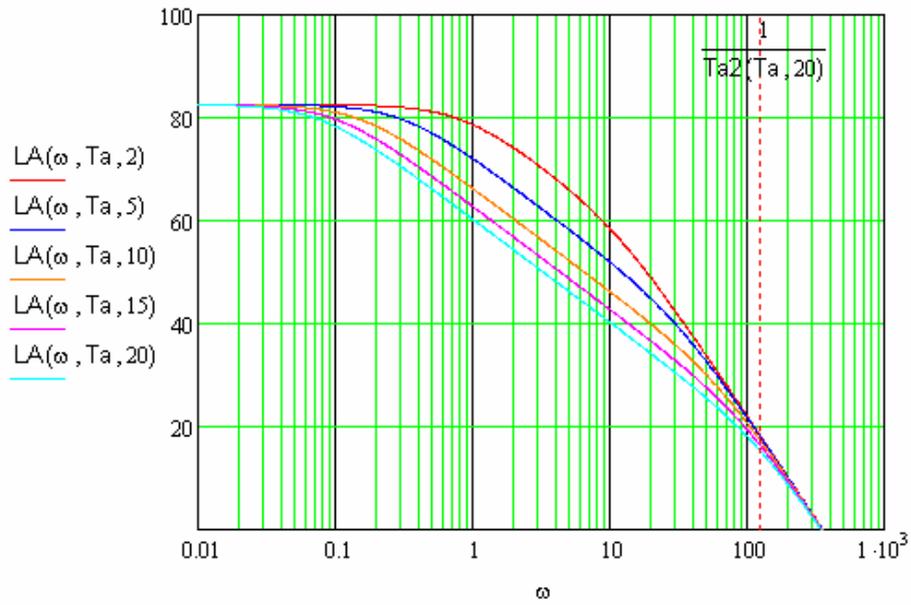


Рис. 5.7. График ЛАЧХ амортизатора при  $1 < \zeta_a < 20$ .

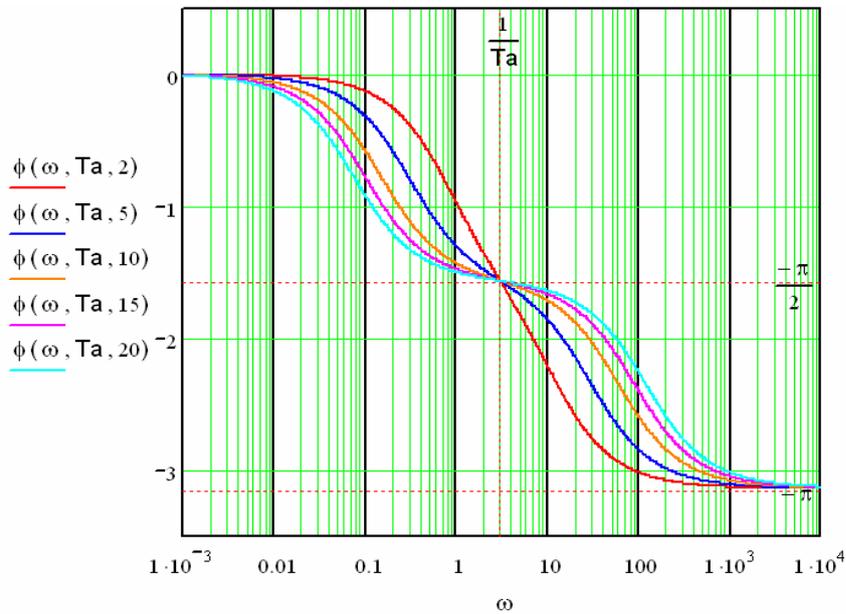


Рис. 5.8. График ЛФЧХ амортизатора при  $1 < \zeta_a < 20$ .

2.8. Далее перейдем к расчету переходных характеристик амортизатора при  $0 < \zeta_a < 1$ . Для этого введем начальные условия, дифференциальное уравнение. Решим дифференциальное уравнение с помощью функции **rkfixed** и на основании матрицы решения построим переходную характеристику амортизатора.

$$\Phi_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases} \quad \text{единично-ступенчатое воздействие } 1(t)$$

$$\varepsilon(t) := \varepsilon_0 \cdot \Phi_1(t) \quad \text{входное воздействие}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n := 0..500$$

$$Dy_1(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 0 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix} \quad Dy_2(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 0.2 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$zDy_1 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy_1) \quad zDy_2 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy_2)$$

$$Dy_3(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 0.5 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix} \quad Dy_4(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 0.7 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$zDy_3 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy_3) \quad zDy_4 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy_4)$$

$$Dy_5(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$zDy_5 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy_5)$$

Графики полученных переходных характеристик приведены на следующем рисунке (рис. 5.9)

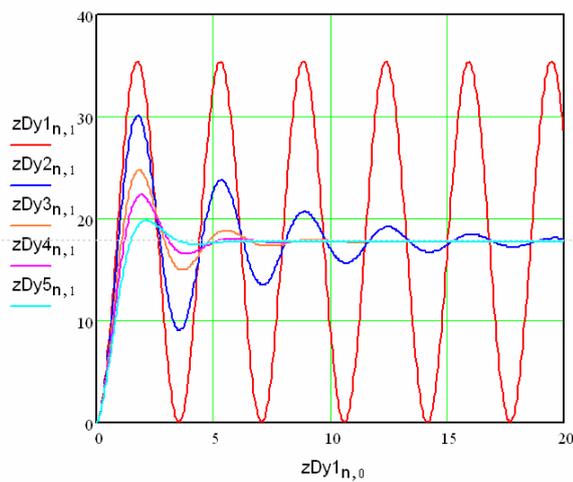


Рис. 5.9. Графики переходных характеристик амортизатора при  $0 < \zeta_a < 1$

2.9. Аналогично рассчитаем переходные характеристики амортизатора при следующих степенях демпфирования  $1 < \zeta_a < 20$ . Примерные графики расчетов приведены на рис. 5.10.

$$\Phi 1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases} \quad \text{единично-ступенчатое воздействие } 1(t)$$

$$\varepsilon(t) := \varepsilon_0 \cdot \Phi 1(t) \quad \text{входное воздействие}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n := 0..500$$

$$Dy6(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 2 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix} \quad Dy7(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 5 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$zDy6 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy6)$$

$$zDy7 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy7)$$

$$Dy8(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 10 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix} \quad Dy9(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 15 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$zDy8 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy8)$$

$$zDy9 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy9)$$

$$Dy10(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{T_a} \cdot (K_a \cdot \varepsilon(t) - 2 \cdot 20 \cdot T_a \cdot y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$zDy10 := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 500, Dy10)$$

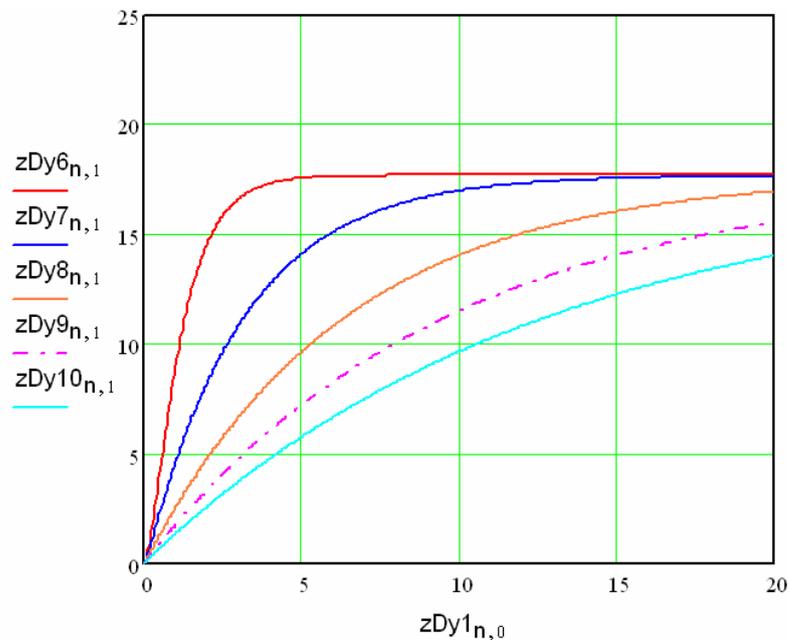


Рис. 5.10. Графики переходных характеристик амортизатора при  $1 < \zeta_a < 20$ .

Сформулировать выводы по результатам выполнения данной лабораторной работы.

**Варианты заданий к выполнению лабораторного практикума**

№ вар.	Скорость печати $V_1$ , м/с	Длина пути ленты, $L_0$ , м	Момент инерции амортизатора, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	Заданное усилие натяжения ленты, Н
1	5,2	6,4	0,4	180
2	4,5	5,6	0,35	220
3	3,3	6,8	0,45	250
4	4,8	6,2	0,32	280
5	6,4	7,2	0,38	320
6	5,7	7,6	0,42	290
7	3,4	4,2	0,34	240
8	4,2	6,7	0,39	230
9	6,7	8,2	0,44	270
10	6,2	8,4	0,43	310