Практическое задание 2

Упростить выражение (левую часть):

1. $\neg((\neg A\vee B)\&(\neg A\vee C)\&(\neg B\vee C)\&\neg C)=A\vee B\vee C$
2. $(A\vee A\&\neg B\vee \neg A\&B)\&(A\vee \neg A\&C\vee \neg A\&B\vee A\&B\&\neg C)=A\vee B$
3. $(A\vee B\vee C\&\neg(A\vee B)\vee B\&\neg(A\vee D))\&(A\vee C\&\neg A\vee A\&B\&C)=A\vee C$
4. $(A\&B\vee\neg(A\&B)\&C\vee A\&\neg C)\&(A\vee C\&\neg A\vee B\&\neg(A\vee C))=A\vee C$
5. $(\neg A\vee A\&B\vee\neg B\&C\&D\vee A\&D)\&(B\vee\neg B\&D\vee B\&C\&(A\vee D))= B\vee D$
6. $(\neg A\vee B\vee C)\&A\&B\&\neg C\&(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)\&(A\vee B\&C)\&(A\&B\vee C\&D) = A\&B\&\neg C$
7. $(\neg A\vee A\&B\&C\vee\neg C)\&A\&B\&C\&(A\&\neg C\vee C\&\neg D\vee D)\&(A\&C\vee B\&D) =A\&B\&C$
8. $(\neg A\vee A\&B\vee B\&(C\vee D))\&(B\&D\vee\neg A\&\neg B\&\neg D\vee\neg A\&B\vee A\&B)\&B\&C = B\&C$
9. $\neg A\&C\vee\neg A\&\neg C\&D\vee B\&C\&\neg D\vee A\&\neg(B\&C)\vee C\&D = A\vee C\vee D$
10. $A\&D\vee A\&B\&\neg D\vee\neg A\&C\&D\vee\neg(A\&B)\&D\vee B\&\neg D = B\vee D$
11. $A\&B\vee A\&\neg B\&C\vee A\&\neg B\&\neg C\vee A\&\neg C = A$
12. $\neg A\&C\&\neg D\vee\neg C\&D\vee A\&C\vee\neg A\&C\&D = C\vee D$
13. $(A\&C\vee A\&\neg B\&\neg C\vee A\&B\&\neg C\vee\neg A\&C)\&(C\&D\vee C\&\neg D\vee A\&B\&C) = C$
14. $(\neg A\&B\vee\neg A\&C\vee A\&B\vee\neg A\&\neg B\&\neg C)\&(\neg A\&\neg B\vee B\&\neg(A\&C)\vee A\&C\&D\vee A\&C\neg D) = \neg A\vee B$
15. $\neg(\neg(\neg A\&B)\vee\neg(B\&C)\vee A\&C) = \neg A\&B\&C$
16. $\neg(A\&(A\&B\vee\neg A\&\neg B) = \neg A\vee\neg B$
17. $\neg(\neg(B\vee C)\vee\neg(A\vee C)\vee A\&B) = C\&\neg A\vee C\&\neg B$
18. $\neg(\neg A\vee\neg B\&(A\vee C)\vee B\&\neg(A\vee C)) = A\&B$
19. $\neg(\neg(\neg A\vee\neg B\vee C)\vee\neg(A\vee C)\vee A\&\neg B) = \neg A\&C\vee B\&C$
20. $\neg(\neg(A\&C\vee B)\vee\neg B\vee B\&\neg(A\vee C)) = A\&B\vee B\&C$

Пример решения задачи

Упростить выражение $A\&\neg B\vee A\&\neg C\vee B\&\neg C\vee C$

Решение

1) $A\&\neg B\vee A\&\neg C\vee\underline{B\&\neg C}\vee\underline{C} = A\&\neg B\vee A\&\neg C\vee B\vee C$

К последним двум слагаемым (подчеркнуты) применяем тождество $A\vee\neg A\&B = A \vee B$ (приведено ниже):

$B\&\neg C \vee C$ заменяем равносильной формулой $B\vee C$

2) $A\&\neg B\vee A\&\neg C\vee B\vee C = A\&\neg B\vee B \vee A\&\neg C \vee C = A \vee B \vee A \vee C$

Для наглядности меняем местами слагаемые. Затем два раза используем тождество 4: $A\&\neg B\vee B$ заменяем на $A \vee B$; $A\&\neg C \vee C$ заменяем на $A \vee C$.

3) $A \vee B \vee A \vee C$ равносильно $A \vee B \vee C$ (поскольку $A \vee A = A$)

4) Ответ $A\&\neg B \vee A\&\neg C \vee B\&\neg C \vee C = A \vee B \vee C$

Для самостоятельного выполнения преобразований формул Исчисления высказываний необходимо знать ряд **тождеств.**

Определение. Две формулы Исчисления высказываний называются равносильными, если их значения (И, Л) совпадают **на всех интерпретациях**. Между такими формулами ставится знак равенства.

Примеры равносильных формул:

$A \to B = \neg A \vee B$

$A \vee B = B \vee A$

$A\&\neg A =$ Л (0)

Наиболее важные равносильные формулы принято называть тождествами.

Основные тождества.

Пусть A, B, C – атомарные высказывания.

1.

$A\&A\&A \ldots \&A = A \quad A\&A = A$

$A\&1 = A$

$A\&0 = 0$

$A\& \neg A = 0$

$A\vee A \vee A \vee A \ldots \vee A = A \quad A\vee A = A$

$A\vee 1 = 1$

$A\vee 0 = A$

$A\vee\neg A = 1$

$\neg\neg A = A$

2.

$A \vee B = B \vee A \qquad A \& B = B \& A$

$A \vee (B\vee C) = (A \vee B) \vee C \qquad A \& (B\&C) = (A \&B) \& C$

3.

Правило раскрытия скобок:

$A \& (B\vee C) = (A \&B) \vee (A\& C) = A \&B \vee A\& C$

Правило внесения в скобки:

$A \vee (B\&C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$

$A\vee\neg A\&B = A \vee B$

Правило поглощения: $A \vee A\&B = A$

4.

Правила Де-Моргана даны в лекционном материале.

Любое из приведенных тождеств можно доказать а) построением таблицы истинности; б) выполнением преобразований, аналогичных алгебраическим, с использованием тождеств.

Рассмотрим доказательство тождества $A\vee\neg A\&B = A \vee B$

а) Построим таблицу истинности:

A	**B**	$\neg A$	$\neg A \& B$	$A \vee \neg A \& B$		$A \vee B$
0	0	1	0	0	=	0
0	1	1	1	1	=	1
1	0	0	0	1	=	1
1	1	0	0	1	=	1

Мы видим, что в каждой строке значения формул совпадают. Тождество верно.

б) Для доказательства тождества $A \vee \neg A \& B = A \vee B$
воспользуемся правилом внесения в скобки
(тождество $A \vee B \& C = (A \vee B) \& (A \vee C)$)
Тогда $A \vee \neg A \& B = (A \vee \neg A) \& (A \vee B) = 1 \& (A \vee B) = A \vee B$

Здесь мы используем приведенные выше правила:
$A \vee \neg A = 1$,
затем $X \& 1 = X$ где $X = A \vee B$