Негосударственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Центросоюза Российской Федерации

СИБИРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа, методические указания и задания
контрольной и самостоятельной работы
для студентов заочной формы обучения
направления 080100.62*Экономика*

Новосибирск 2013

Кафедра статистики и математики

Математический анализ: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы для студентов заочной формы обученияпо направлению 080100.62 *Экономика*/ [сост.: Н.Г. Орлова, канд.физ.-мат.наук, доцент]; НОУ ВПО Центросоюза РФ СибУПК.– Новосибирск, 2013. –85с.

Рецензент С.А. Шинкаренко, доцент

Рекомендовано к изданию кафедрой статистики и математики, протокол от 21января2013г. № 6.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Математика – наука о количественных соотношениях и пространственных формах реального мира, понимаемых в самом широком смысле. Длительный исторический путь развития науки привел к проникновению математических методов во все сферы научной и практической деятельности человека. Математика стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Эта наука предоставляет мощные средства для решения разнообразных практических задач.

Математический анализ является одним из основных разделов математики. Цель дисциплины «Математический анализ»: освоить необходимый математический аппарат, который позволяет моделировать, решать и анализировать прикладные экономические задачи, с применением, в случае необходимости, компьютера.

Программой названной дисциплины предусмотрено изучение студентами первого курса таких разделов математического анализа, как: введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды и др.

Предлагаемоеиздание содержит задания контрольных работ и методические указания к их выполнению (основные теоретические положения и образцы решениязадач контрольной работы).

В раздел «Задания самостоятельной работы студентов» включены самые важные вопросы и приведены типовые задачи по каждой теме, входящей в программу дисциплины.Ответы на вопросы студент может найти в любом учебнике из«Списка рекомендуемой литературы» илив данной методической разработке.

2. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы по срокам обучения (ч)

Срок обучения – 4 года 6 мес.

Вид занятия	1 курс
Аудиторные занятия:	30
лекции	14
практические	16
Контрольная работа	+
Самостоятельная работа	258
Зачетные единицы: всего,	9
в том числе без экзамена	8
Общая трудоемкость	288
Вид итогового контроля	Экзамен

Срок обучения – 3 года 6 мес.

Вид занятия	1 курс
Аудиторные занятия:	20
лекции	8
практические	12
Контрольная работа	+
Самостоятельная работа	268
Зачетные единицы: всего,	9
в том числе без экзамена	8
Общая трудоемкость	288
Вид итогового контроля	Экзамен

2.2. Тематический план

Заочная форма обучения

№ п/п	Темы дисциплины	Срок обучения							
		4 года 6 месяцев				3 года 6 месяцев			
		Количество часов на изучение							
		всего	в том числе			всего	в том числе		
			лекции	практи-ческие	СРС		лекции	практи-ческие	*СРС*
1	2	3	4	5	7	8	9	10	12
1	Числовая последовательность	12			12	12			12
2	Функция	8			8	8			8
3	Предел и непрерывность	18	2	2	14	18	2	2	14
4	Производная	30	2	2	26	30	2	2	26
5	Приложения производной	28	2	2	24	30	2	2	26
6	Неопределенный интеграл	30	2	2	26	28	2	2	24
7	Определенный интеграл	28	2	2	24	28		2	26
8	Дифференциальные уравнения первого порядка	22	2	2	18	24		2	22
9	Дифференциальные уравнения высших порядков	18			18	16			16
10	Числовые ряды	18		2	16	16			16
11	Степенные ряды	14			14	14			14
12	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	24	2	2	20	24			24

13	Приложения дифференциального исчисления функции нескольких переменных.	20			20	20			20
14	Двойные и тройные интегралы	18			18	20			20
	Итого	288	14	16	258	288	8	12	268

2.3. Разделы дисциплины

Раздел 1. Введение в анализ.
Раздел 2. Дифференциальное исчисление.
Раздел 3. Интегральное исчисление.
Раздел 4. Дифференциальные уравнения.
Раздел 5. Ряды
Раздел 6. Функции нескольких переменных
Раздел 7. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

2.4. Темы и их краткое содержание

Раздел 1. Введение в анализ

Тема 1. Числовая последовательность

Понятие множества. Операции над множествами. Числовые множества. Понятие окрестности точки.

Числовая последовательность. Виды последовательностей. Предел числовой последовательности, свойства предела. Свойства числовых множеств и последовательностей.

Тема 2. Функция

Функциональная зависимость. Основные элементарные функции, их использование в экономике. Функции спроса и предложения, однофакторная производственная функция, функция издержек, налоговая ставка. Свойства функций. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства и взаимосвязь.

Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Основные типы неопределённостей, раскрытие неопределенностей.

Тема 3. Предел функции

Односторонние пределы функций. Непрерывность функции, точки разрыва и их классификация. Асимптоты графика функции, их нахождение. Глобальные свойства непрерывных функций.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление

Тема 4. Производнаяфункции

Производная функции, её геометрический и физический смысл. Применение производной в экономике. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Производные *2*-го и высших порядков. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Оценка погрешностей измерения (наблюдения) с помощью дифференциала функции.Свойства дифференцируемых функций. Основные теоремы о дифференцируемых функциях: Ферма, Ролля, Лагранжа.

Тема 5. Приложения производной

Формула Тейлора и ее приложения. Правило Лопиталя.Признаки монотонности функции. Локальный экстремум функции, необходимое условие экстремума, достаточные условия экстремума. Применение экстремума в экономических исследованиях (формула Уилсона, задача об установлении налоговой ставки). Выпуклые множества. Закон убывающей доходности. Выпуклость функции, точки перегиба.Глобальный экстремум функции. Общая схема исследования функций и построения графиков.

Раздел 3. Интегральное исчисление

Тема 6. Неопределенный интеграл

Первообразная функция и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Интегрирование путем замены переменной и интегрирование по частям. Интегрирование простейших рациональных дробей, иррациональных функций, тригонометрических функций.

Тема 7. Определенный интеграл

Определённый интеграл, его геометрический смысл. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Геометрические приложения определенного интеграла. Экономическая интерпретация определенного интеграла (выпуск продукции, расход электроэнергии, издержки хранения). Задача о распределении благ, кривая Лоренца и коэффициент Джинни.Понятие несобственного интеграла, сходимость несобственных интегралов.

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

Тема 8. Дифференциальные уравнения первого порядка

Обыкновенные дифференциальные уравнения, их общее и частные решения. Задача Коши.Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Уравнение в полных дифференциалах. Линейные уравнения первого порядка. Метод Бернулли решения линейного уравнения первого порядка.

Тема 9. Дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия, связанные с уравнениями высших порядков. Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка.

Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения ЛОДУ второго порядка. ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения (ЛНДУ) второго порядка. ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Раздел 5. Ряды

Тема 10. Числовые ряды

Числовые ряды. Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Тема 11. Степенные ряды

Степенные ряды, их области сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Раздел 6. Функции нескольких переменных

Тема 12. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Точечные множества в n – мерном пространстве. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных, линии уровня. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных, их экономический смысл. Частные производные высших порядков.

Тема 13.Приложения дифференциального исчисления функции нескольких переменных

Дифференциал функции нескольких переменных. Применение дифференциала к приближённым вычислениям.

Функция нескольких переменных как скалярное поле. Производная по направлению и градиент функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных. Условный экстремум, множители Лагранжа. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области. Экономические приложения: кривые безразличия, функции спроса и предложения, функция полезности.

Раздел 7. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Тема 14. Двойные и тройные интегралы

Двойной интеграл. Геометрический и физический смысл двойного интеграла, его основные свойства. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Приложения двойного интеграла.

Определение тройного интеграла. Некоторые приложения тройного интеграла.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Правила оформления контрольной работы

1. Выполнятьконтрольную работу в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради разборчиво написать фамилию, инициалы, учебный шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. В конце работы указать использованную литературу, дату выполнения и расписаться.
3. Работа обязательно должна содержать все задачи именно вашего варианта.
4. Решения задач нужно располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи следует записать полностью ее условие.

6. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в межсессионный период и представлена на проверку в методкабинет.

8. После получения проверенной работы следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

Внимание!*Работа должна быть выполнена от руки, распечатки на проверку не принимаются***.

9. Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо в короткий срок исправить указанные ошибки и недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

10. По итогам выполнения контрольной работы со студентом проводится собеседование, по результатам которого выставляется оценка «зачтено» или «незачтено». Защита контрольных работ осуществляется в межсессионный период во время субботних консультаций или во время сессии.

Внимание!*Если контрольная работа имеет оценку «незачтено», то студент к экзамену не допускается.Студент обязан выполнить и защитить контрольную работу до сдачи экзамена*.

Правило выбора задач контрольной работы

Номера задач контрольной работы определяются с помощью приведенной ниже таблицы по двум последним цифрам номера личного дела (шифра) студента.

В верхней строке (по горизонтали), где помещены цифры от 0 до 9, следует выбрать цифру, являющуюся *последней* в номере вашего шифра.

В левой графе таблицы (по вертикали), где также помещены цифры от 0 до 9, необходимо выбрать цифру, являющуюся *предпоследней* в номере вашего шифра.

На пересечении вертикальной и горизонтальной линий вы найдете номера задач своей контрольной работы.

Например, если шифр ЭБ-10102-Д, то номера задач выбираем по последней цифре шифра 2 и предпоследней цифре 0. Контрольная работа должна включать задачи 2, 13, 29, 34, 49, 56 64,76

Будьте внимательны при выборе варианта задания. Если какая-нибудь задача не соответствует варианту задания, то контрольная работа возвращается на доработку.

По всем вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, студент может обратиться на кафедру статистики и математики по адресу: 630087, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 26. СибУПК, корп. 1, к.104, тел. кафедры 8(383)3462187

ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

		Последняя цифра шифра									
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***0***	4	3	2	1	8	9	10	6	5	7
		14	15	13	12	17	16	11	20	19	18
		26	28	29	30	21	22	23	24	25	27
		32	31	34	35	36	37	38	33	39	40
		47	48	49	50	42	43	44	45	46	41
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
		65	63	64	67	69	66	62	68	61	70
		71	74	76	78	80	79	72	77	73	75
	1	5	4	3	2	1	10	7	9	8	6
		15	14	13	12	11	16	20	19	18	17
		25	27	28	30	29	21	22	23	24	26
		40	32	33	34	35	36	37	31	38	39
		48	47	50	49	44	45	46	41	43	42
		51	55	60	52	59	57	53	58	56	54
		62	65	68	64	70	67	66	69	63	61
		72	74	76	78	80	71	73	75	77	79
	2	6	10	8	9	7	1	2	3	4	5
		16	15	14	13	12	20	18	19	17	11
		24	26	27	28	29	30	21	22	23	25
		36	37	40	31	32	33	34	35	39	38
		49	50	41	42	43	44	45	46	47	48
		54	60	57	55	53	58	52	59	56	51
		64	70	63	67	65	62	66	68	61	69
		73	75	77	79	80	71	72	74	76	78

Продолжение табл.

Последняя цифра шифра											
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***3***	7	6	9	10	3	2	1	8	5	4
		17	18	19	16	20	11	12	14	13	15
		23	24	25	26	27	28	29	30	22	21
		37	38	31	32	33	34	35	36	40	39
		49	50	48	47	41	42	43	44	45	46
		54	55	58	56	60	52	59	53	51	57
		62	69	66	65	64	63	68	70	61	67
		75	77	79	80	71	73	76	78	72	74
	4	8	7	10	5	4	6	2	1	9	3
		18	19	17	20	12	14	13	15	11	16
		22	23	24	25	21	27	28	29	30	26
		38	31	32	33	34	35	36	37	39	40
		42	46	45	49	48	47	50	41	43	44
		58	56	57	60	52	59	53	55	51	54
		65	69	66	61	63	62	68	64	67	70
		77	79	80	71	74	72	75	73	76	78
	5	3	2	1	4	5	7	9	10	6	8
		13	17	15	16	14	12	18	11	20	19
		27	29	30	21	22	24	25	26	28	23
		31	33	32	34	35	36	39	37	40	38
		46	45	47	48	50	49	41	42	43	44
		51	56	57	54	55	53	60	52	58	59
		70	62	69	67	66	64	68	66	65	61
		75	73	77	72	79	80	78	76	74	71
	6	1	2	3	10	4	5	6	7	8	9
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		30	21	28	29	27	26	24	25	23	2
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		44	41	46	45	49	47	50	48	43	42
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
		67	68	69	62	61	65	64	63	70	66
		72	76	80	71	74	78	73	75	79	77

Окончание табл.

Последняя цифра шифра											
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***7***	4	2	8	10	1	9	6	7	3	5
		14	13	20	12	15	11	16	17	19	18
		25	22	24	21	27	26	28	30	23	29
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		41	44	47	45	49	42	50	48	43	46
		55	59	56	54	51	52	53	60	57	58
		67	66	69	68	61	62	64	65	70	63
		71	72	75	77	74	73	76	80	78	79
	8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
		43	44	45	46	47	48	49	50	41	42
		54	56	55	60	57	53	51	58	59	52
		68	66	61	63	62	64	70	65	67	69
		79	80	77	71	75	76	74	72	73	78
	9	2	1	6	7	3	8	4	5	10	9
		12	13	14	11	19	16	15	17	20	18
		28	30	22	23	24	25	26	27	29	21
		40	38	39	36	31	37	32	33	34	35
		45	46	42	41	43	44	50	47	48	49
		51	54	58	53	55	59	52	57	56	60
		66	67	63	68	69	70	65	61	62	64
		80	76	73	71	78	77	74	72	79	75

4.ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Предел функции

Задачи 1–10

Вычислить пределы функций.

1. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$; $\quad x_0=1;\ 2;\ -1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x^2}{x\sin x}$; $\quad$ *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+3}{3n-2}\right)^{2n+4}$.

2. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-1}$; $\quad x_0=-2;\ 0,5;\ -1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\ln(1+4x)}$; $\quad$ *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-4}{4n-2}\right)^{3n+3}$.

3. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-2x-3}$; $\quad x_0=1;\ -1,5;\ -1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x^2}{2x^2}$; $\quad$ *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n-5}\right)^{2n-1}$.

4. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-2x}$; $\quad x_0=5;\ 2;\ -\dfrac{1}{3};\ 0;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^3}{\operatorname{tg}5x^3}$; $\quad$ *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{5n+2}\right)^{3n-5}$.

5. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-9x-5}$; $\quad x_0=5;\ 2;\ -1;\ -0,5;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{4x}$; $\quad$ *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n-5}\right)^{9n-6}$.

6. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-x}{4x^2+3x-1}$; $x_0=1;\ 0;\ -1;\ \dfrac{1}{4};\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

7. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+4x-5}$; $x_0=1;\ -5;\ -\dfrac{5}{2};\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-7}{3n+5}\right)^{-3n}$.

8. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-12x+4}{x^2+x-6}$; $x_0=-3;\ 2;\ -1;\ \dfrac{2}{5};\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{4n-2}\right)^{-n+5}$.

9. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-13x+12}$; $x_0=-1;\ \dfrac{4}{3};\ 1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{2x}-1}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n-1}\right)^{-n+4}$.

10. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2+x-28}$; $x_0=-4;\ 2;\ \dfrac{7}{2};\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\arcsin 4x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{-n+3}$.

Методические указания к решению задач 1 –10

Пределы функций, основные теоремы о пределах

Пределом функции $f(x)$ называется число A, к которому неограниченно приближаются значения функции при указанном стремлении аргумента x.

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B;$

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A\cdot B;$

- $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = cA,$ где c – число;

- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B},$ если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$

Замечательные пределы,
эквивалентные бесконечно малые функции

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e,$

или, в другой форме, $\lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$

где $e = 2,718...$ – иррациональное число.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малойфункцией при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$

Если значения функции *f(x)* неограниченно возрастают по абсолютной величине при $x \to x_0$, то такую функцию называют *бесконечно большой при* $x \to x_0$. Предел этой функции обозначают знаком бесконечности ∞: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $(\pm\infty)$.

Теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty.$

$$\text{Если } \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \text{ то } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Утверждения всех вышеприведённых теорем также справедливы, если $x \to \infty (+\infty$ или $-\infty)$.

Эквивалентные бесконечномалые функции. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to x_0$, если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. В этом случае пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.

Наиболее часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых функций при $\alpha(x) \to 0$:

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x);$ $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);$
$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x);$ $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x);$
$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$ $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x).$

Задача. Вычислить пределы функции

$$\lim_{x \to x_0} \frac{3x^2 + 10x - 8}{4x^2 + 15x - 4}; \quad x_0 = 1;\ -4;\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ \infty.$$

Решение. В задаче следует найти предел частного. С этой целью необходимо вычислить пределы числителя и знаменателя дроби, подставив в них предельное значение аргумента x.

$$1.\ \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 10x - 8}{4x^2 + 15x - 4} = \frac{3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 8}{4 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 4} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$2.\ \lim_{x \to -4} \frac{3x^2 + 10x - 8}{4x^2 + 15x - 4}.$$

При подстановке $x = -4$ в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их значения равны нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь не применима. В данном случае говорят, что имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ *при* $x \to x_0$ *может быть раскрыта сокращением дроби на множитель вида*$(x–x_0)$*, который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль,* в данном случае на (x+4). Поэтому следует разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

$3x^2+10x-8=0;$

$D=10^2-4\cdot 3\cdot(-8)=196;$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3}=\frac{-10\pm 14}{6};$$

$x_1=-4;\quad x_2=\frac{2}{3}.$

$3x^2+10x–8 = 3(x+4)(x–2/3) =$

$= (x+4)(3x–2).$

$4x^2+15x-4=0;$

$D=15^2-4\cdot 4\cdot(-4)=289;$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{289}}{2\cdot 4}=\frac{-15\pm 17}{8};$$

$x_1=-4;\quad x_2=\frac{1}{4}.$

$4x^2+15x-4 = 4(x+4)(x–1/4) =$

$= (x+4)(4x–1).$

Таким образом,

$$\lim_{x\to -4}\frac{3x^2+10x-8}{4x^4+15x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(3x-2)}{(x+4)(4x-1)}=\lim_{x\to -4}\frac{3x-2}{4x-1}=\frac{-14}{-17}=\frac{14}{17}.$$

3. $$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+10\cdot\frac{2}{3}-8}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+15\cdot\frac{2}{3}-4}=\frac{0}{70/9}=0.$$

Здесь применима теорема о пределе частного, так как предел знаменателя существует и не равен нулю.

4. $$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\frac{1}{16}+10\cdot\frac{1}{4}-8}{4\cdot\frac{1}{16}+15\cdot\frac{1}{4}-4}=\left(\frac{-85/16}{0}\right)=\infty.$$

Здесь использована теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$.

Пределы числителя и знаменателя дроби равны ∞. В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида «бесконечность на бесконечность». Теорема о пределе частного здесь не применима.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *при* $x\to\infty$, *каждый член числителя и знаменателя дроби делят на x в наивысшей степени (в нашем примере на* x^2*), отчего величина дроби не изменится, но исчезнет неопределенность.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{10x}{x^2}-\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{15x}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{10}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{4+\dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15}{x}=0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$

(по теореме о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Ответ. 1. $\dfrac{1}{3}$; 2. $\dfrac{14}{17}$; 3. 0; 4. ∞; 5. $\dfrac{3}{4}$.

Задача. Вычислить пределы: *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}=\left(\frac{\operatorname{tg}0}{\ln 1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}3x\sim 3x;\\ \ln(1+5x)\sim 5x\\ \text{при } x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5};$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 6x}{2x}=\left(\frac{\arcsin 0}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\arcsin 6x\sim 6x\\ \text{при } x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3.$$

В рассматриваемых задачах неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ была раскрыта после замены бесконечно малых функций на эквивалентные им и сокращения полученных дробей на x.

Ответ. *а)* $\frac{3}{5}$; *б)* 3.

Задача. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}$.

Решение. Очевидно, что

$$\frac{3n-2}{3n+5}=\frac{3n+5-5-2}{3n+5}=\frac{(3n+5)-7}{3n+5}=1-\frac{7}{3n+5}=1+\frac{-7}{3n+5}.$$

Далее воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{\frac{3n+5}{-7}}\right]^{\frac{-7}{3n+5}\cdot(4n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-7\cdot(4n+1)}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28n-7}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28-\frac{7}{n}}{3+\frac{5}{n}}}=e^{-\frac{28}{3}}.$$

Ответ. $e^{-\frac{28}{3}}$.

Производная функции

Задачи 11–20

Найти производные данных функций и их дифференциалы.

11. *а)* $y=3x^4-\frac{5}{\sqrt[4]{x}}+2$; *б)* $y=\frac{2x^2}{1-3x}$;

в) $y=2\cos x\cdot\ln x+\sqrt{1-4x^2}$; *г)* $y=\ln^3(2x-x^2)$.

12. $а)\ y = 5x^2 + 4\sqrt[3]{x^5} + 3;$ $б)\ y = \dfrac{x^3 - 2x}{3x};$

$в)\ y = \operatorname{arctg} x^4 - x \cdot \ln x.$ $г)\ y = \operatorname{tg}^2(e^x + 5x).$

13. $а)\ y = \dfrac{1}{4}x^8 + 8\sqrt[8]{x^3} - 1;$ $б)\ y = \dfrac{4x^2 - 1}{1 - x^2};$

$в)\ y = \cos(\ln x) + x^2 \cdot \operatorname{tg} x.$ $г)\ y = \sqrt{\cos(x^2 + 3x^3)}.$

14. $а)\ y = \dfrac{1}{5}x^5 - 3x \cdot \sqrt[3]{x} - 4;$ $б)\ y = \dfrac{x + 3}{2x - 5};$

$в)\ y = \ln\sqrt{x - 1} + x^3 \cdot \operatorname{arctg} x.$ $г)\ y = \sqrt[3]{x^2 + \cos 2x}.$

15. $а)\ y = 3x^8 + 5\sqrt[5]{x^2} - 3;$ $б)\ y = \dfrac{3x^4}{x - 3};$

$в)\ y = \operatorname{tg} e^x + \sin x \cdot \ln x.$ $г)\ y = \cos^2(x^2 + 9x).$

16. $а)\ y = 5x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3;$ $б)\ y = \dfrac{2x - 1}{x^5};$

$в)\ y = \ln(\sin x) - x^6 \cdot \operatorname{tg} x.$ $г)\ y = e^{\sqrt{1-x}}.$

17. $а)\ y = 4x^3 + \dfrac{3}{x \cdot \sqrt[3]{x}} - 2;$ $б)\ y = \dfrac{1 - 6x^2}{1 + x};$

$в)\ y = \sqrt{\sin x} - x \cdot \operatorname{ctg} x.$ $г)\ y = \arccos\sqrt{4x - 6x^3}.$

18. $а)\ y = 7x^5 - 3x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 6;$ $б)\ y = \dfrac{2x + 4}{1 + x^2};$

$в)\ y = \sqrt{\ln x} - (1 - 2x^2) \cdot \sin x.$ $г)\ y = \ln^2(6 - 3x^5).$

19. $а)\ y = 3x^4 - \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3;$ $б)\ y = \dfrac{x^6 - 1}{2x + 1};$

в) $y=\operatorname{tg}x^2+\sin x\cdot e^x$. *г*) $y = e^{\operatorname{arctg}2x}$.

20. *а*) $y=8x^2-\dfrac{9}{x^2\cdot\sqrt{x}}+6$; *б*) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$;

в) $y=\arcsin x^3+\ln x\cdot\cos x$. *г*) $y = \ln(\operatorname{tg}5x)$.

Методические указания к решению задач 11 –20

Производная и дифференциал функции одной переменной

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю и указанный предел существует:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Производная $f'(x_0)$ показывает скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0. Геометрически $f'(x_0)=tg\alpha$, где α – угол наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Нахождение производной функции $f(x)$ называется её дифференцированием.

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной $dx=\Delta x$:

$$dy=f'(x)dx.$$

Правила дифференцирования. Пусть даны дифференцируемые функции u(x) и v(x), тогда справедливы формулы:

$$(u+v)'=u'+v';$$

$$(u-v)'=u'-v';$$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Отметим также, что:

а) производная от независимой переменной равна единице: $x' = 1$;
б) производная постоянной величины *с* равна нулю: $c' = 0$;
в) постоянный множитель выносится за знак производной:
$(cu)' = c \cdot u'$.

Производная сложной функции.Сложная функция (суперпозиция функций) – это функция вида *y = f(u),* где *u = u(x)* , то есть это-функция от функции. Например,

- функция $y = \sin 2x$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = 2x$;
- функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = e^{u}$, где $u = \operatorname{tg} x$.

Производную сложной функции находят по правилу

$$\left[f(u(x)) \right]' = f'_u \cdot u'_x \ .$$

Таблица производных.

Производные основных элементарных функций	Производные сложныхфункций
1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
2. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$ $(e^{x})' = e^{x}$	2. $(a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$ $(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
4. $(\sin x)' = \cos x$	4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
9. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	10. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	11. $(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{-1}{1+u^2}\cdot u'$

Задача. Найти производные данных функций и их дифференциалы.

Решение. *а)* $y = 4x^3 - \dfrac{6}{x^3\cdot\sqrt{x}} + 3.$

Приведем функцию y к виду, удобному для дифференцирования, используя правила действия со степенями:

$$y = 4x^3 - \frac{6}{x^3\cdot x^{\frac{1}{2}}} + 3 = 4x^3 - \frac{6}{x^{\frac{7}{2}}} + 3 = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3.$$

По правилу дифференцирования суммы и разности функций:

$$y' = \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3\right)' = \left(4x^3\right)' - \left(6x^{-\frac{7}{2}}\right)' + 3' =$$

$$= 4\cdot 3x^{3-1} - 6\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot x^{-\frac{7}{2}-1} + 0 = 12x^2 + 21x^{-\frac{9}{2}} = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

Тогда дифференциал функции y:

$$dy = f'(x)dx = \left(12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}\right)dx.$$

б) $y = \dfrac{1+9x}{x^3+3}.$

Воспользуемся правилом дифференцирования частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}, \quad \text{где } u = 1+9x, \quad v = x^3+3.$$

$$y' = \left(\frac{1+9x}{x^3+3}\right)' = \frac{(1+9x)'\cdot(x^3+3) - (1+9x)\cdot\left(x^3+3\right)'}{(x^3+3)^2} =$$

$$= \frac{9\cdot(x^3+3) - (1+9x)\cdot 3x^2}{(x^3+3)^2} = \frac{9x^3+27-3x^2-27x^3}{(x^3+3)^2} = \frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}.$$

Тогда дифференциал функции y:

$$dy = f'(x)dx = \frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}\,dx.$$

в) $y = \sqrt{\cos x} - \operatorname{tg} x\cdot \ln x.$

Функция $\sqrt{\cos x}$ - сложная. Ее можно представить в виде $y = \sqrt{u}$, где $u = \cos x$. Применим формулу $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

$$\left(\sqrt{\cos x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(\cos x)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Производную функции $\operatorname{tg} x\cdot \ln x$ находим по правилу дифференцирования произведения:

$$(uv)' = u'\cdot v + u\cdot v', \text{ где } u = \operatorname{tg} x, \quad v = \ln x.$$

$$(\operatorname{tg} x\cdot \ln x)' = (\operatorname{tg} x)'\cdot \ln x + \operatorname{tg} x\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot \ln x + \operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$y'=\left(\sqrt{\cos x}\right)'-\left(\operatorname{tg} x\cdot\ln x\right)'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{\ln x}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy=f'(x)dx=\left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{\ln x}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)dx.$$

г) $y=\sin^4(x-\operatorname{tg} x)$.

Перепишем данную функцию в виде

$$y=\sin^4(x-\operatorname{tg} x)=(\sin(x-\operatorname{tg} x))^4.$$

Функция $(\sin(x-\operatorname{tg} x))^4$ – сложная. Ее можно представить в виде $y=u^4$, где $u=\sin(x-\operatorname{tg} x)$.

Применим формулу $\left(u^4\right)'=4u^3\cdot u'$. Тогда

$$y'=\left((\sin(x-\operatorname{tg} x))^4\right)'=4(\sin(x-\operatorname{tg} x))^3\cdot(\sin(x-\operatorname{tg} x))'.$$

Функция $(\sin(x-\operatorname{tg} x))$ также сложная. Ее можно представить в виде $\sin u$, где $u=x-\operatorname{tg} x$. Применим формулу $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$. Име-
ем $(\sin(x-\operatorname{tg} x))'=\cos(x-\operatorname{tg} x)\cdot(x-\operatorname{tg} x)'=\cos(x-\operatorname{tg} x)\cdot\left(1-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right).$

Таким образом,

$$y'=\left((\sin(x-\operatorname{tg} x))^4\right)=4(\sin(x-\operatorname{tg} x))^3\cdot\cos(x-\operatorname{tg} x)\cdot\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Следовательно, дифференциал функции *y*:

$$dy=4(\sin(x-\operatorname{tg} x))^3\cdot\cos(x-\operatorname{tg} x)\cdot\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx.$$

Приложения производной

Задачи21–30

Исследовать функцию $y = f(x)$ средствами дифференциального исчисления и построить её график.

21. $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$.

22. $y = -2x^3 + 6x^2$.

23. $y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4$.

24. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

25. $y = \frac{1}{25}(5x^4 - x^5)$.

26. $y = -2x^3 - 8x^2 - 8x$.

27. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$.

28. $y = x^3 + 3x^2$.

29. $y = \frac{1}{50}(x^5 - 5x^4)$.

30. $y = 2x^3 + 12x^2 + 18x$.

Методические указания к решению задач 21 –30

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любых x из области определения функции справедливо равенство $f(-x)= f(x)$, причём область определения также симметрична относительно точки 0, в этом случае график функции симметричен относительно оси Oy.

Для *нечётной* функции для любых x из области определения справедливо равенство $f(-x)= -f(x)$, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T > 0$ такое, что для любых x из области определения функции справедливо $f(x+T)= f(x)$.

Проиллюстрируем *на примере некоторые важные свойства графика функции* (рис. 1).

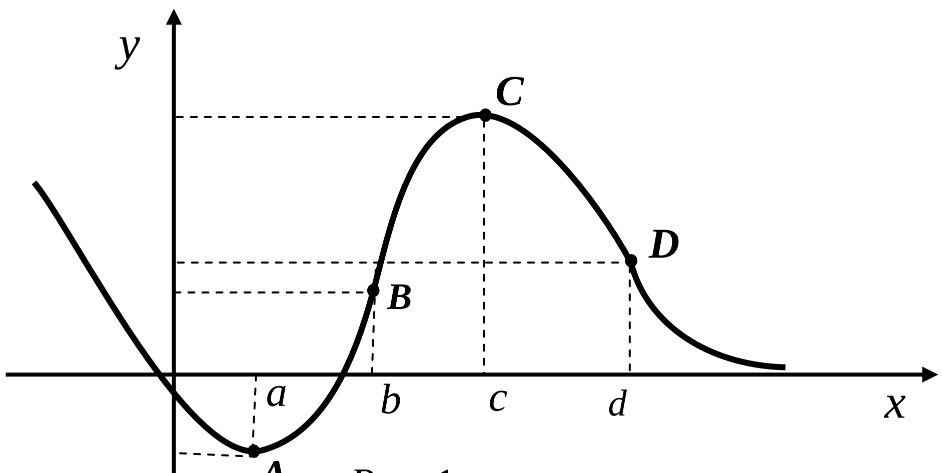


Рис. 1

Интервалы монотонности:

- функция возрастает при $x \in (a;c)$;
- функция убывает при $x \in (-\infty;a)$ и $x \in (c;+\infty)$.

Точки экстремума: C – точка максимума (max); A – точка минимума (min).

Интервалы выпуклости и вогнутости:

- функция выпуклая при $x \in (b;d)$;
- функция вогнутая при $x \in (-\infty;b)$ и при $x \in (d;+\infty)$.

Точки B и D являются точками перегиба, так как в них происходит смена выпуклости и вогнутости.

Правило исследования функции y = f(x) на монотонность и точки экстремума.

а) Вычислить первую производную $f'(x)$.

б) Найти *критические* точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

в) Определить знак производной на интервалах между критическими точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках монотонности функции согласно *признакам монотонности:*

если $f'(x) < 0$ на $(a;b)$, то функция убывает при $x \in (a;b)$,
если $f'(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция возрастает при $x \in (a;b)$.

д) Сделать выводы о наличии точек экстремума согласно *достаточному признаку существования экстремума:*
если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Правило исследования функции y = f(x) на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

а) Вычислить вторую производную $f''(x)$.

б) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, эти точки называются подозрительными на перегиб.

в) Определить знак второй производной на интервалах между найденными точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках выпуклости и вогнутости согласно *признакам выпуклости и вогнутости:*

если $f''(x) > 0$ на *(a;b)*, то график вогнутый при $x \in (a;b)$,
если $f''(x) < 0$ на *(a;b)*, то график выпуклый при $x \in (a;b)$

д) Сделать выводы о наличии точек перегиба согласно *достаточномуусловию существования точек перегиба:* если при переходе через подозрительную на перегиб точку вторая производная меняет знак, то в этой точке имеется перегиб графика функции.

Задача. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ и построить ее график**.**

Решение. Исследование будем проводить по следующей схеме.
1. *Область определения функции*.
В нашем примере это множество всех действительных чисел, то есть$x \in (-\infty;+\infty)$.
2. *Четность и нечетность функции*.

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 - 4(-x)^2 + 8(-x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \pm f(x).$$

Функция не обладает свойствами четности или нечетности. Следовательно, график функции не будет симметричен ни относительно оси О*y*, ни относительно начала координат.
3. *Периодичность функции*.
Данная функция непериодическая, так как является многочленом.
4. *Непрерывность функции*.
На всей области определения данная функция непрерывна как многочлен.
5. *Поведение функции на концах области определения.*
Концами области определения являются $-\infty$ и $+\infty$, так как $x \in (-\infty;+\infty)$. Найдем пределы функции при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = -\infty \cdot \frac{1}{2} = -\infty.$$

Таким образом, слева, при $x \to -\infty$, график функции уходит неограниченно вниз, а справа, при $x \to +\infty$, – неограниченно вверх.
6. *Интервалы монотонности и точки экстремума*.
Вычислим производную функции и найдем критические точки.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 8 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8.$$

Производная существует при любых *x*. Решим уравнение $y' = 0$.

$$\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = 0.$$

$$3x^2 - 16x + 16 = 0.$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64;$$

$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{64}}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{16 + \sqrt{64}}{6} = 4.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 4).$$

Точки $x_1 = \dfrac{4}{3}$ и $x_2 = 4$ − критические. Они делят область определения функции на интервалы: $\left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$, $(4;\ +\infty)$. Изобразим эти интервалы на числовой оси (рис. 2).

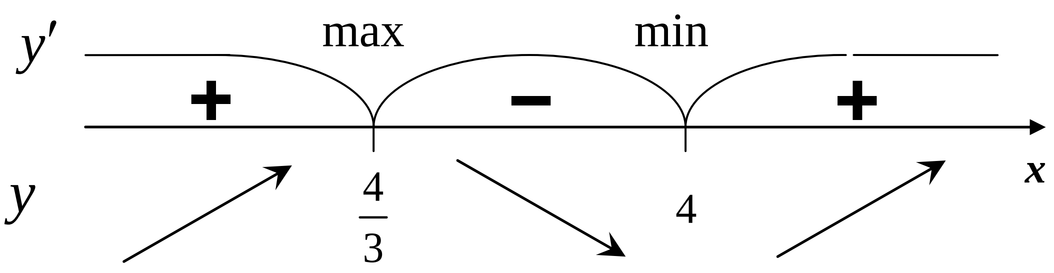


*Рис.*2

Поведение функции на каждом интервале определяется знаком производной. Для определения знака y' на интервале достаточно взять любое значение *x* из рассматриваемого интервала и подставить его в производную y'.

а) На интервале $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$ выберем число, например, $x=0$, и подставим его в производную: $y'(0)=\frac{3}{2}(0-4)\left(0-\frac{4}{3}\right)>0$.

Так как на интервале $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$ производная $y'>0$, следовательно, функция y возрастает на этом интервале (см. признаки монотонности).

б) На интервале $\left(\frac{4}{3};\ 4\right)$ возьмем $x=3$, подставим в производную, получим $y'(3)=\frac{3}{2}(3-4)\left(3-\frac{4}{3}\right)<0$. Следовательно, на интервале $\left(\frac{4}{3};\ 4\right)$ функция убывает.

в) На интервале $(4;+\infty)$ возьмем значение $x=5$. Видим, что $y'(5)=\frac{3}{2}(5-4)\left(5-\frac{4}{3}\right)>0$, следовательно, на интервале $(4;\ +\infty)$ функция возрастает.

Знаки первой производной проставим на рис. 3.При переходе через точку $x=\frac{4}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, $x=\frac{4}{3}$ является точкой максимума (см. признак экстремума).

Найдем значение функции yв этой точке:

$$y_{\max}=y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+8\cdot\frac{4}{3}=\frac{128}{27}=4\frac{20}{27}.$$

Таким образом, график имеет максимум в точке$A\left(1\frac{1}{3};\ 4\frac{20}{27}\right)$.

При переходе через точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс (рис. 2). Это означает, что $x=4$ – точка минимума.

$$y_{\min}=y(4)=\frac{1}{2}\cdot 4^3-4\cdot 4^2+8\cdot 4=0.$$

В точке $B(4;0)$ график функции имеет минимум.

7. *Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*
Найдем производную второго порядка от рассматриваемой функции $y=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x$. Так как $y'=\frac{3}{2}x^2-8x+8$, то $y''=3x-8$. Вторая производная существует при любых значениях x. Найдем точки, где $y''=0$:

$$3x-8=0 \Rightarrow \quad x=\frac{8}{3}.$$

Значение $x=8/3$ является единственным, подозрительным на перегиб. Эта точка делит область определения $(-\infty;+\infty)$ на интервалы $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ и $\left(\frac{8}{3};\ +\infty\right)$ (см. рис. 4).

а) На интервале $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ выберем любое число, например, $x=0$ и подставим его во вторую производную $y''=3x-8$. Получим $y''(0)=3\cdot 0-8<0$, значит, на этом интервале график функции выпуклый (см. признак выпуклости и вогнутости).

б) На интервале $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$ возьмем, например, $x=5$ и подставим во вторую производную. Получим $y''(5)=3\cdot 5-8>0$, значит, на этом интервале график функции вогнутый. Знаки второй производной проставим на рис. 3.

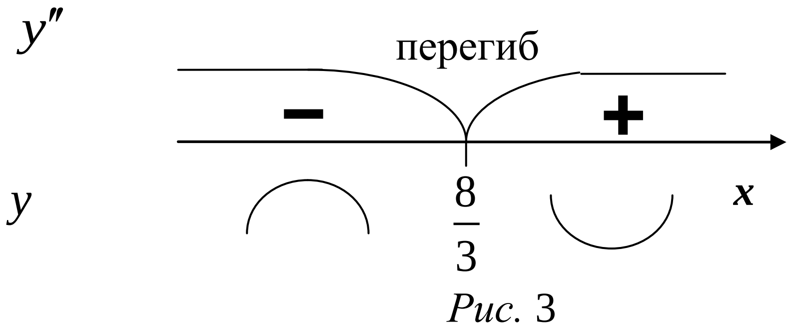


Рис. 3

Так как при переходе через точку $x=\dfrac{8}{3}$ вторая производная y'' меняет знак, то $x=\dfrac{8}{3}$ – точка перегиба (см. условие перегиба).

$$y_{перегиб}=y\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}.$$

Таким образом, точка$C\left(2\dfrac{2}{3};\ 2\dfrac{10}{27}\right)$ – единственная точка перегиба.

8. *Точки пересечения графика с осями координат*.

На оси Оyдля всех точек выполнено условие x = 0,поэтому $y(0)=\dfrac{1}{2}\cdot0^3-4\cdot0^2+8\cdot0=0.$ Получена точка пересечения с осью Оy:(0;0). Для всех точек на оси Оxвыполняется условие $y=0$, тогда

$$\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x=0, \quad \text{то есть} \quad x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)=0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, в нашем случае $x=0$ или $\dfrac{1}{2}x^2-4x+8=0.$Решим это квадратное уравнение: $D=4^2-4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot8=0;$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{0}}{1}=4.$

Значения функции в точках $x=0$ и $x=4$ были найдены ранее: $y(0)=0,\quad y(4)=0.$Таким образом, график функции пересекает ось Оx в точках (0;0) и (4;0).

9. *Дополнительные точки*.

Для более точного построения графика можно найти дополнительные точки. Например, найдем значение функции yпри $x=5$:

$$y(5)=\frac{1}{2}\cdot5^3-4\cdot5^2+8\cdot5=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

$D(5;\ 2{,}5)$ – дополнительная точка для построения графика.

Выпишем результаты исследования функции $y=\dfrac{1}{2}x^3-4x^2+8x$.

1. Область определения $(-\infty;+\infty)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty.$

3. Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty;\ 1\frac{1}{3}\right)$ и $(4;\ +\infty)$,

убывает на промежутке $\left(1\frac{1}{3};\ 4\right)$.

4. Максимум функции в точке $A\left(1\frac{1}{3};\ 4\frac{20}{27}\right)$, минимум – в точке $B(4;0)$.

5. График выпуклый на интервале $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right)$ и вогнутый на интервале $\left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.

6. Точка перегиба $C\left(2\frac{2}{3};\ 2\frac{10}{27}\right)$

7. Точки пересечения с осями координат: (0;0), (4;0).

8. Дополнительная точка $D(5;\ 2{,}5)$.

Построим график функции (рис. 4). На плоскости О*xy* отметим все характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки экстремумов, точку перегиба, а также дополнительную точку.

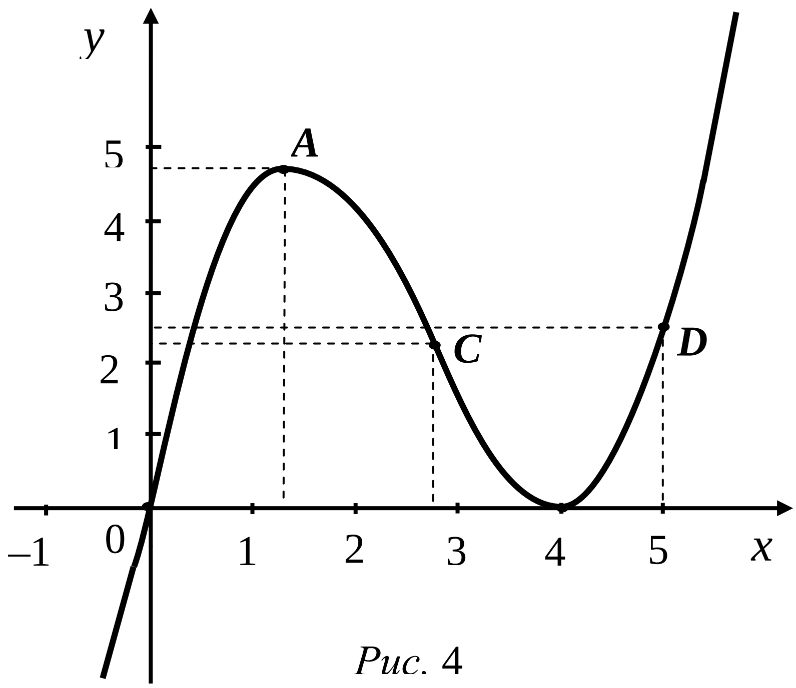


Рис. 4

В силу непрерывности функции соединим все отмеченные точки плавной кривой, продолжив график влево вниз и вправо вверх согласно поведению функции на концах области определения и учитывая характер монотонности и выпуклости графика функции.

Неопределенный интеграл

Задачи 31– 40

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

31. *а)* $\int \frac{x^3-9x-1}{\sqrt{x}}dx;$

б) $\int \cos\left(\frac{2x-5}{7}\right)dx;$

в) $\int x^2\cdot\sqrt{4-5x^3}\;dx;$

г) $\int (2x-4)e^{-7x}dx.$

32. *а)* $\int \frac{x^4+2x+10}{\sqrt[3]{x}}dx;$

б) $\int \sqrt{4-6x}\;dx;$

в) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx;$

г) $\int x^2\ln(3x)dx.$

33. *а)* $\int \frac{2+3x^2+x\sqrt{x}}{x}dx;$

б) $\int \cos(2x-1)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$

г) $\int (3x-2)\cos 7x dx.$

34. *а)* $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx;$

б) $\int e^{3-2x}dx;$

в) $\int \frac{x^2}{(3-2x^3)^2}dx;$

г) $\int (5-x)\sin 6x dx.$

35. *а)* $\int \frac{x^2-x^3\cdot\sqrt{x}+1}{x^2}dx;$

б) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{5}dx;$

в) $\int x^3e^{x^4+2}dx;$

36. *а)* $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}-x^2-3}{x}dx;$

б) $\int \frac{1}{(3+2x)^5}dx;$

в) $\int \frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)}dx;$

г) $\int \frac{\ln 6x}{x^3}dx.$

г) $\int (3-2x)\sin 5x dx.$

37. *а)* $\int \frac{x^5 - x + 1}{\sqrt[3]{x}}dx;$

б) $\int (9x+5)^4 dx;$

в) $\int x\cos(x^2 - 1)dx;$

г) $\int (4x-1)\ e^{-3x}dx.$

38.*а)* $\int \frac{x^4 - 9\ \sqrt[3]{x} - 5}{x^2}dx;$

б) $\int \cos(2-3x)\,dx;$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx;$

г) $\int (5x+2)\cos 5x dx.$

39.*а)* $\int \frac{x^6 + 1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$

б) $\int e^{-0{,}5x+1}dx;$

в) $\int \frac{x^2 - e^{3x}}{x^3 - e^{3x}}dx;$

г) $\int x^4 \ln(6x)\,dx.$

40.*а)* $\int \frac{x^2 + 3\sqrt[3]{x} + 4}{x}dx;$

б) $\int \sin\left(\frac{1-3x}{4}\right)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx;$

г) $\int (2-x)\ e^{-5x}dx.$

Методические указания к решению задач 31 –40

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – произвольное число, и называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

2. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$,

где k – постоянная, отличная от нуля.

Таблица интегралов.

1. $\int dx = x + C$; 2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;

3. $\int x^{\alpha}\cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \ne -1$;

4. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$; 5. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$; 6. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$; 7. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$;

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$; 9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$;

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$; 11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

12. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$; 13. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

14. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|\ x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

Примечание. Формулы верны, когда переменная x является независимой переменной, а также когда x является функцией другой переменной: $x = x(t)$.

Идея всех методов интегрирования заключается в приведении искомого интеграла к табличному интегралу или сумме табличных интегралов.

1) *Непосредственное интегрирование.*

Интеграл приводится к табличному виду путем алгебраических или тригонометрических преобразований.

2) *Замена переменной (интегрирование подстановкой).*

Сведение интеграла к табличному виду осуществляется с помощью подстановки $t = \varphi(x)$. Тогда дифференциал dt равен

$$dt = \varphi'(x)dx.$$

Рекомендации по введению новой переменной даны ниже в примерах.

Обратите внимание! Интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Если интеграл взят правильно, то производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Задача. Найтинеопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Решение. В контрольной работе интеграл, обозначенный буквой*а* берется методом непосредственного интегрирования. При этом используются табличные интегралы от степенных функций:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C.$$

Используются также правила действий со степенями.

$$a)\ \int \frac{3\sqrt[3]{x}-2+6x^4}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \int\left(\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{6x^4}{x^{\frac{4}{3}}}\right)dx =$$

$$=\int\left(3x^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}-2x^{-\frac{4}{3}}+6x^{4-\frac{4}{3}}\right)dx=\int\left(3x^{-1}-2x^{-\frac{4}{3}}+6x^{\frac{8}{3}}\right)dx=$$

$$=\int\frac{3}{x}\,dx-\int 2x^{-\frac{4}{3}}dx+\int 6x^{\frac{8}{3}}dx=3\int\frac{dx}{x}-2\int x^{-\frac{4}{3}}dx+6\int x^{\frac{8}{3}}dx=$$

$$=3\ln|x|-2\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+6\frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1}+C=3\ln|x|-2\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}+6\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}+C=$$

$$=3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^{3\frac{2}{3}}+C=3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^{3}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}+C.$$

Проверка.

$$\left(3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^{3}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}+C\right)'=\left(3\ln|x|\right)'+\left(6x^{-\frac{1}{3}}\right)'+\left(\frac{18}{11}x^{\frac{11}{3}}\right)'+C'=$$

$$=3\frac{1}{x}+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}+\frac{18}{11}\cdot\frac{11}{3}x^{\frac{11}{3}-1}+0=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}+6x^{\frac{8}{3}}=$$

$$=\frac{3x^{\frac{1}{3}}-2+6x^{\frac{8}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{x}-2+6x^{4}}{\sqrt[3]{x^{4}}}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

Интеграл*б* в контрольной работе берется методом замены переменной (подстановкой). Приведем ряд примеров.

1*б*. $\int\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx.$

За новую переменную возьмем *аргумент подынтегральной функции* $t = \frac{1-2x}{3}$ и найдем dt по формуле:

$$dt = t'(x)dx = \left(\frac{1-2x}{3}\right)' dx = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x\right)' dx = \left(0 - \frac{2}{3}\cdot 1\right)dx = -\frac{2}{3}dx.$$

Тогда

$$\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{1-2x}{3} \\ dt = -\dfrac{2}{3}dx \\ dx = -\dfrac{3}{2}dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \left(-\frac{3}{2}dt\right) = -\frac{3}{2}\int \sin t \cdot dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(-\cos t\right) + C = \frac{3}{2}\cos t + C = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C.$$

В последнем действии осуществлен переход к исходной переменной x с учетом, что $t = \frac{1-2x}{3}$.

Проверка.

$$\left(\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C\right)' = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)\right)' + C' =$$

$$= -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)\cdot\left(\frac{1-2x}{3}\right)' + 0 = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right).$$

Что и требовалось показать.

2 *б.* $\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx$.

За новую переменную возьмем *показатель степени* $t = 1 - \frac{1}{3}x$.

Тогда

$$\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-\frac{1}{3}x \\ dt = -\frac{1}{3}dx \\ dx = -3dt \end{array} \right| = \int e^{t}\left(-3dt\right) = -3\int e^{t}dt = -3e^{t} + C =$$

$$-3e^{1-\frac{1}{3}x} + C.$$

Проверка.

$$\left(-3e^{1-\frac{1}{3}x} + C\right)' = -3\left(e^{1-\frac{1}{3}x}\right)' + C' = -3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(1-\frac{1}{3}x\right)' + 0 =$$

$$= -3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{1-\frac{1}{3}x}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

3*б*. $\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx.$

За новую переменную возьмем *функцию, стоящую в основании степени* $t = 4-3x$. Тогда

$$\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx = \left| \begin{array}{l} t = 4-3x \\ dt = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^{-7}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-7}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-7+1}}{-7+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot(-6)}\cdot t^{-6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{t^6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6} + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6} + C\right)' = \frac{1}{18}\left((4-3x)^{-6}\right)' + C' =$$

$$=\frac{1}{18}(-6)(4-3x)^{-6-1}(4-3x)'+0=-\frac{1}{3}(4-3x)^{-7}(-3)=\frac{1}{(4-3x)^7}.$$

Получена подынтегральная функция.

Интегралпод буквой *в*в контрольной работе также берется методом замены переменной (подстановкой). Ознакомимся с примерами таких подстановок.

1*в*. $\int x\sin(2-3x^2)dx$.

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометриической функции,* если к тому же под интегралом присутствует производная этого аргумента в качестве множителя.

$$\int x\sin(2-3x^2)dx=\left|\begin{array}{l} t=2-3x^2 \\ dt=-6xdx \\ xdx=-\frac{1}{6}dt \end{array}\right|=\int\sin t\left(-\frac{1}{6}dt\right)=-\frac{1}{6}\int\sin tdt=$$

$$=\frac{1}{6}\cos t+C=\frac{1}{6}\cos(2-3x^2)+C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{6}\cos(2-3x^2)+C\right)'=\frac{1}{6}\Big(-\sin(2-3x^2)\Big)(-6x)+0=x\sin(2-3x^2).$$

2*в*. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Здесь за новую переменную удобно принять *показатель степени*, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этого показателя (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array} \right| = \int e^t(2dt) = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Проверка.

$$\left(2e^{\sqrt{x}}+C\right)' = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)' + C' = 2e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

3*в*. $\int \sin 3x \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\; dx.$

За новую переменную удобно взять *подкоренное выражение*, так как под интегралом присутствует также его производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \sin 3x \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\; dx = \left| \begin{array}{l} t = 3-4\cos 3x \\ dt = -4(-\sin 3x)\cdot 3dx \\ \sin 3x\cdot dx = \dfrac{1}{12}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[6]{t}\cdot\frac{1}{12}dt =$$

$$= \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}}\cdot dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^{7/6}}{7/6} + C = \frac{1}{14}\sqrt[6]{(3-4\cos 3x)^7} + C.$$

Проверка.

$$\left[\frac{1}{14}(3-4\cos 3x)^{\frac{7}{6}} + C\right]' = \frac{1}{14}\cdot\frac{7}{6}\cdot(3-4\cos 3x)^{\frac{1}{6}}\cdot(3-4\cos 3x)' =$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\left(3-4\cos 3x\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left[0-4\cdot\left(-\sin 3x\right)\cdot\left(3x\right)'\right]=\sin 3x\sqrt[6]{3-4\cos 3x}.$$

Получена подынтегральная функция,что и требовалось показать.

4*в*. $\displaystyle\int\frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx.$

За новую переменную берем функцию, стоящую в *основании степени*, так как подынтегральное выражение содержит производную этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int\frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=2+x^4 \\ dt=4x^3dx \\ x^3dx=\frac{1}{4}dt \end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{4}dt}{t^2}=\frac{1}{4}\int t^{-2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{4t}+C=-\frac{1}{4(2+x^4)}+C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{1}{4(2+x^4)}+C\right)'=-\frac{1}{4}(-1)\left(2+x^4\right)^{-2}\left(2+x^4\right)'+C'=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2+x^4\right)^{-2}\cdot 4x^3+0=\frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}.$$

Интеграл под буквой *г* берется методом интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

1*г*. $\displaystyle\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}dx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = \ln x; & du = \dfrac{1}{x}dx; \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; & v = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{1}{3}} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int v du = \ln x \cdot 3\sqrt[3]{x} - \int 3x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}dx = 3\sqrt[3]{x} \cdot \ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= 3\sqrt[3]{x} \cdot \ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt[3]{x} \cdot \ln x - 3 \cdot 3\sqrt[3]{x} + C = 3\sqrt[3]{x}(\ln x - 3) + C.$$

Проверка.

$$\left(3\sqrt[3]{x}(\ln x - 3) + C\right)' = 3\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)'(\ln x - 3) + \sqrt[3]{x}(\ln x - 3)'\right) + C' =$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\ln x - 3) + \sqrt[3]{x}\frac{1}{x}\right) + 0 = x^{-\frac{2}{3}}(\ln x - 3) + 3x^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= x^{-\frac{2}{3}}\ln x - 3x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Что и требовалось показать.

2*г*. $\int (x-2)\sin 5x\,dx$.

$$\int \underbrace{(x-2)}_{u}\underbrace{\sin 5x\,dx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = x - 2; & du = dx; \\ dv = \sin 5x\,dx; & v = \int \sin 5x\,dx = -\dfrac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int v du = (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right) - \int -\frac{1}{5}\cos 5x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x\,dx = -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x +$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int \cos 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C.$$

Решения задач *г*.2 и *г*.3 даны без проверки. Студент может выполнить её самостоятельно.

3*г.* $\int (3-x)e^{\frac{x}{5}}dx.$

$$\int \underbrace{(3-x)}_{u}\underbrace{e^{\frac{x}{5}}dx}_{dv} = \left|\begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = 3-x; & du = -dx; \\ dv = e^{\frac{x}{5}}\,dx; & v = \int e^{\frac{x}{5}}\,dx = 5\int e^{\frac{x}{5}}d\left(\frac{x}{5}\right) = 5e^{\frac{x}{5}} \end{array}\right| =$$

$$= uv - \int v du = (3-x)\cdot 5e^{\frac{x}{5}} - \int 5e^{\frac{x}{5}}(-dx) = 5(3-x)e^{\frac{x}{5}} + 5\int e^{\frac{x}{5}}dx =$$

Определенный интеграл

Задачи 41 – 50

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

41.	$xy = -3;$	$x - y - 4 = 0.$
42.	$y = 3x^2 - 2;$	$y = 3x + 4.$
43.	$xy = 3;$	$x + y - 4 = 0.$
44.	$y = x^2 + 4x + 3;$	$y = -x + 3.$

45. $xy=6;$ $x+y-7=0.$

46. $y=2x-x^2;$ $x+y=0.$

47. $xy=8;$ $x+y-9=0.$

48. $y=x^2-3x-4;$ $y=2x-4.$

49. $xy=-7;$ $y=x+8.$

50. $y=x^2+x+1;$ $y=x+2.$

Методические указания к решению задач 41 – 50

Определенный интеграл – это число, которое находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$; a, b – нижний и верхний пределы интегрирования, показывающие, как меняется переменная интегрирования x.

Формула Ньютона-Лейбница связывает определенный и неопределенный интегралы. Чтобы ею воспользоваться, следует взять сначала неопределенный интеграл, т.е. найти первообразную, причем удобно взять произвольную постоянную равной нулю: $C=0$, а затем вычислить разность значений этой первообразной в верхнем и нижнем пределах.

Например:

$$\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

Геометрический смыслопределенного интеграла.

Если функция $y=f(x)$ неотрицательная на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

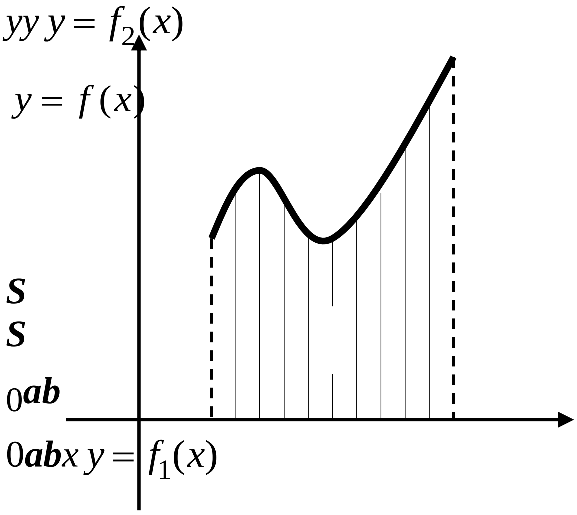
где S– площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 5).

Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

при этом $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a;b]$ (рис. 6).



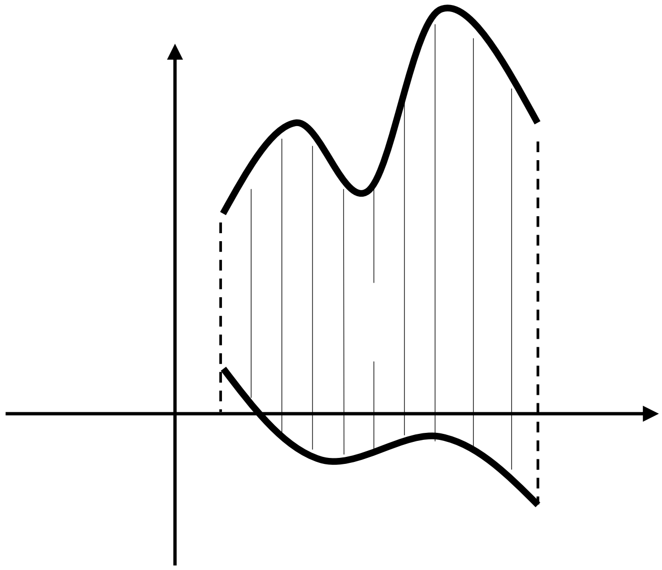


Рис. 5*Рис*. 6

Задача.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2 - 6x + 5$ и $y = x - 1$. Сделать чертеж.

Решение. Выполним чертеж.

Первое уравнение определяет параболу, а второе – прямую линию.Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат. Если уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, то вершина параболы находится в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

В данной задаче $x_0 = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$, $y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$. Итак, вершина параболы – точка (3;– 4).

Точки пересечения параболы с осями:

С осью Ox: $y = 0$, тогда $x^2 - 6x + 5 = 0$. Решив квадратное уравнение (прил.1, п. 2), получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Точки пересечения параболы с осью Ox есть точки (1;0) и (5;0).

С осью Oy: $x = 0$, тогда $y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$. Точка пересечения параболы с осью Oy есть точка (0;5).

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх, т.к. $a = 1 > 0$ (рис. 10).Прямую $y = x - 1$ строим по двум точкам, например, при $x = 0, y = -1$; при $x = 1$ $y = 0$.Получены точки: $(0;-1)$, $(1;0)$.

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5, \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 1; x_2 = 6.$$

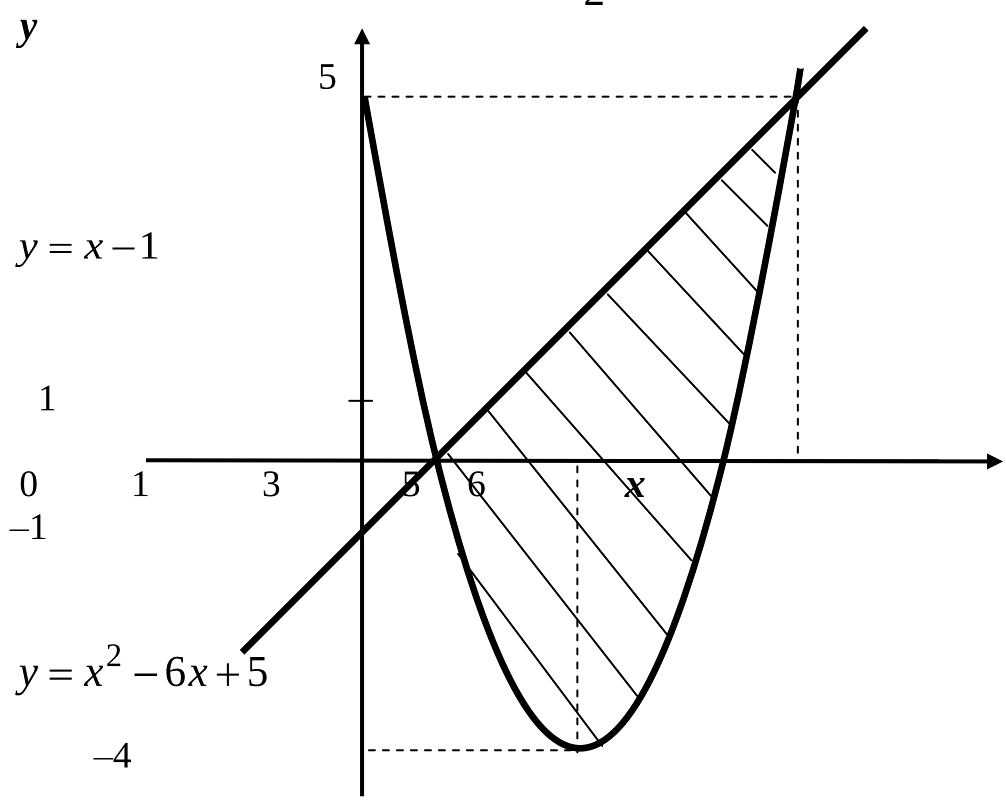


*Рис.*7

Найдем соответствующие ординаты $y_{1,2}$ из уравнения $y = x-1$: $y_1 = 1-1 = 0$; $y_2 = 6-1 = 5$. Итак, точки пересечения параболы и прямой есть точки $(1;0)$ и $(6;5)$.

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой (рис. 7). Здесь функции $f_1(x) = x^2 - 6x + 5$ и $f_2(x) = x - 1$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $x \in [1;6]$.

Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int_1^6 \left(x - 1 - (x^2 - 6x + 5)\right)dx = \int_1^6 \left(-x^2 + 7x - 6\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_1^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + 7\cdot\frac{6^2}{2} - 6\cdot 6\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 7\cdot\frac{1^2}{2} - 6\cdot 1\right) =$$

$$= \left(-\frac{216}{3} + 7\cdot\frac{36}{2} - 36\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6\right) = \frac{125}{6}.$$

Ответ. Искомая площадь равна: $S = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$ *кв. ед.*

*Замечание.*Если одна из линий – гипербола, например, $xy = -6$, то ее можно построить по точкам. Удобно взять точки с абсциссами $x = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3; \ldots$ и вычислить соответствующие им ординаты y, в нашем случае по формуле $y = -\frac{6}{x}$.

Если в ответе задачи получен логарифм числа, то значение логарифма можно взять из прил.1, п. 9.

Дифференциальные уравнения

Задачи 51–60

Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

51. $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$; $x_0 = 2$, $y_0 = 0$.

52. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; $x_0 = 0$, $y_0 = -4$.

53. $y' + \frac{4}{x} y = 3x + 5$; $x_0 = -2$, $y_0 = -\frac{1}{4}$.

54. $y' + \frac{1}{x+2} y = \frac{5e^{5x}}{x+2}$; $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{3}{2}$.

55. $y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$; $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = -3$.

56. $y' + y = 2e^x$; $x_0 = 0$, $y_0 = -3$.

57. $y' - \frac{2}{x+4} y = (x+4)^2$; $x_0 = 4$, $y_0 = 0$.

58. $y' - y = (2x-3)e^x$; $x_0 = 0$, $y_0 = -4$.

59. $y' + \frac{1}{x+1} y = 1$; $x_0 = 0$, $y_0 = -4$.

60. $y' - 2y = xe^{2x}$; $x_0 = 0$, $y_0 = -4$.

Методические указания к решению задач 51 – 60

Дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка – это уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x; y)$, содержащее производную y' от неизвестной функции $y = y(x)$.

Решением ДУ называется функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, решением уравнения $y' = 2x$ является функция $y = x^2$ или $y = x^2 + C$,гдеC – произвольная постоянная. Решением уравнения $y' = y$ является функция $y = e^x$ или $y = Ce^x$.

Общим решением ДУ называется функция $y = y(x, C)$, зависящая от произвольной постояннойC и удовлетворяющая ДУ при любом значении C.

Частное решение получается из общего при конкретных значениях C. Чтобы выделить частное решение из общего задают начальное условие: $y = y_0$ при $x = x_0$ или $y(x_0) = y_0$.

Совокупность дифференциального уравнения и начального условия

$y' = f(x; y),\ \ y(x_0) = y_0$

называется *задачей Коши* (для ДУ первого порядка).

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = h(x)g(y)$$

называется уравнением *с разделяющимися переменными.*

Это уравнение можно привести к виду:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

где переменные x и y содержатся в разных слагаемых (разделены).

Чтобы разделить переменные нужно производную y' представить как отношение дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и выполнить ряд дополнительных преобразований (см. примеры ниже).

После разделения переменных производится интегрирование обеих частей равенства. Интегралы берутся с помощью таблицы интегралов с учетом их зависимости от произвольной постоянной C. Затем, выражая y, находят общее решение ДУ: $y = y(x; C)$.

Например, найдем общее решение уравнения $y' = 2xy$.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \qquad dy = 2xydx \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = 2xdx.$$

Переменные разделились, производим интегрирование.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_0 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x^2 + C_0;$$

$$|y| = e^{x^2 + C_0} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{x^2} \cdot e^{C_0}.$$

Обозначим $C = \pm e^{C_0}$, получим $y = Ce^{x^2}$ – общее решение ДУ.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

ДУ первого порядка называется *линейным*, если его можно привести к виду: $y' + P(x)\,y = Q(x)$, гдеискомая функция y и ее производная y' содержатся в первых степенях (в разных слагаемых).

Разделить переменные для такого уравнения не удается, если правая часть $Q(x)$ отлична от нуля.

Линейные ДУ можно решать *методом Бернулли*. При этом неизвестную функцию y представляют в виде произведения двух функций: $y = u(x)\cdot v(x)$, для каждой из которых получают ДУ с разделяющимися переменными. Решая первое из этих уравнений, берут его частное решение, например, полагая, чтоC= 0. Для второго уравнения находят его общее решение (с учетом зависимости от C).

Алгоритм применения метода Бернулли показан ниже на примерах.

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, если

$$\text{а)}\quad y' - 2y = e^{2x}; \qquad x_0 = 0, \quad y_0 = 2.$$

$$\text{б)}\ y' + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1}; \qquad x_0 = 1; \quad y_0 = 2.$$

Решение.

$a)\, y' - 2y = e^{2x}; \qquad y(0) = 2.$

Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение:

$$u'v + uv' - 2uv = e^{2x}.$$

Сгруппируем слагаемые, имеющие общий множитель u:

$$u'v + u\left(v' - 2v\right) = e^{2x}.$$

Подберем функцию v так, чтобы обратилось в нуль выражение, стоящее в скобках:

$$v' - 2v = 0.$$

Тогда уравнение примет вид

$$u'v = e^{2x}.$$

Два последних уравнения решаются разделением переменных, поочередно.

1. $v' - 2v = 0$; $v' = \dfrac{dv}{dx}$;

$\dfrac{dv}{dx} = 2v; \quad \big|\cdot dx$

$dv = 2vdx; \; |: v \neq 0$

$\dfrac{dv}{v} = 2dx;$

$\int \dfrac{dv}{v} = 2\int dx;$

$\ln|v| = 2x + C; \quad (C = 0)$

$\ln|v| = 2x \Rightarrow v = e^{2x}.$

2. Подставим $v = e^{2x}$ в уравнение $u'v = e^{2x}$.

$u' \cdot e^{2x} = e^{2x}; \quad |: e^{2x} \neq 0$

$u' = 1;$

$\dfrac{du}{dx} = 1; \quad \big|\cdot dx$

$du = dx;$

$\int du = \int dx \Rightarrow u = x + C.$

Поскольку $y = uv$, то $y = (x+C)e^{2x}$ – общее решение уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальному условию: $y_0 = 2$ при $x_0 = 0$. Подставим эти значения в общее решение дифференциального уравнения:

$$2 = (0 + C) \cdot e^0.$$

Так как $e^0 = 1$, то $C = 2$.

Подставляя найденное значение $C = 2$ в общее решение уравнения, находим частное решение:

$$y = (x+2)e^{2x}.$$

Ответ. $y=(x+C)\mathrm{e}^{2x}$ – общее решение уравнения;
$y=(x+2)e^{2x}$– частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

б) $y' + \dfrac{4x}{x^2+1}y = \dfrac{1}{x^2+1}; \qquad y(1) = 2.$

Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в данное уравнение:

$$u'v+uv'+\frac{4x}{x^2+1}uv=\frac{1}{x^2+1}.$$

Группируем 2-е и 3-е слагаемые:

$$u'v+u\left(v'+\frac{4x}{x^2+1}v\right)=\frac{1}{x^2+1}.$$

Потребуем, чтобы $v'+\frac{4x}{x^2+1}v=0$, тогда исходное уравнение примет вид: $u'v=\frac{1}{x^2+1}.$

Решим последовательно оба уравнения, причем для первого из них берем лишь частное решение приC= 0.

1. $v'+\frac{4x}{x^2+1}v=0; v'=\frac{dv}{dx};$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{4x}{x^2+1}v;\quad |\cdot dx$$

$$dv=-\frac{4x}{x^2+1}vdx;\quad |:v\neq 0$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{4x}{x^2+1}dx;$$

$$\ln|v|=-2\int\frac{2x}{x^2+1}dx;$$

$$\ln|v|=-2\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1};$$

$$\ln|v|=-2\ln(x^2+1);\qquad (C=0)$$

$$\ln|v|=\ln(x^2+1)^{-2};$$

$$v=(x^2+1)^{-2}=\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

2. Подставим $v=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ в уравнение $u'v=\frac{1}{x^2+1}.$

$$u'\frac{1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1};$$

$$u'\frac{1}{x^2+1}=1;\quad |\cdot(x^2+1)$$

$$u'=x^2+1;\quad u'=\frac{du}{dx};$$

$$\frac{du}{dx}=x^2+1;\quad |\cdot dx$$

$$du=(x^2+1)dx;$$

$$\int du=\int(x^2+1)dx;$$

$$u=\frac{x^3}{3}+x+C.$$

Так как $y = uv$, то $y = \left(\frac{x^3}{3} + x + C \right) \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ – общее решение исходного уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальным условиям: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$ – и подставим их в найденное общее решение:

$$2 = \left(\frac{1^3}{3} + 1 + C \right) \cdot \frac{1}{\left(1^2+1\right)^2};$$

$$2 = \left(\frac{4}{3} + C \right) \cdot \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 8 = \frac{4}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

Искомое частное решение получим из общего, подставив в него найденное значение $C = \frac{20}{3}$, $\quad y = \left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{20}{3} \right) \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Ответ. $y = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \left(\frac{x^3}{3} + x + C \right)$ – общее решение уравнения;

$y = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{20}{3} \right)$ – частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Замечание. Чтобы проверить правильность найденного решения (общего или частного), нужно подставить его в исходное уравнение и убедиться, что получилось верное равенство (тождество).

Функции нескольких переменных

Задачи 61–70

Для функции $z = f(x; y)$ найти:

а) полный дифференциал;

б) градиент функции z в точке $M(x_0; y_0)$;

в) производную функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ по направлению вектора $\vec{a} = \{a_x;a_y\}$.

61. $z = x^2 \cdot \ln(4x+3y)$, $M(1;–1)$, $\vec{a} = \{-3;4\}$.

62. $z = x^3 \cdot e^{xy^2}$, $M(1;1)$, $\vec{a} = \{5;12\}$.

63. $z = 2^y \cdot \sqrt{6x+3y}$, $M(2;–1)$, $\vec{a} = \{4;-3\}$.

64. $z = \dfrac{5y}{x^2+3}$, $M(0;0)$, $\vec{a} = \{5;-12\}$.

65. $z = x^2 \cdot e^{-3x+2y}$, $M(1;2)$, $\vec{a} = \left\{1;-\dfrac{4}{3}\right\}$.

66. $z = y \cdot \ln(x^2 - y - 2)$, $M(2;1)$, $\vec{a} = \{-4;3\}$.

67. $z = xy \cdot e^{2x^2-y}$, $M(1;1)$, $\vec{a} = \{4;3\}$.

68. $z = y^2 \cdot \mathrm{arctg}(3x - y^2)$, $M(3;3)$, $\vec{a} = \left\{-6;\dfrac{5}{2}\right\}$.

69. $z = 2y \cdot e^{5x-y^2}$, $M(2;1)$, $\vec{a} = \{3;-4\}$.

70. $z = \sqrt{x} \cdot \arcsin(x^2+2y)$, $M(2;–2)$, $\vec{a} = \left\{6;-\dfrac{5}{2}\right\}$.

Методические указания к решению задач 61 –70

Частные производные, полный дифференциал

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$, где x и y – независимые переменные.

Для нахождения частных производных используют таблицу производных и правила дифференцирования для функций одной переменной.

Частная производная по x функции $z = f(x;y)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной x в предположении, что y – постоянная величина. Обозначения частной производной по x: $z'_x(x;y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, или $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Частная производная по y функции $z = f\,(x;y)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной y в предположении, что x – постоянная величина. Обозначения частной производной по y: $z'_y(x;y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Полный дифференциал функции двух переменных находим по формуле

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

где z'_x, z'_y – частные производные функции z; dx и dy – дифференциалы независимых переменных.

Градиент функции, производная по направлению

Вектор – это направленный отрезок. Его можно задать в координатной форме: $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$. Числа a_x, a_y называются координатами вектора – это проекции вектора на оси *Ox* и *Oy* соответственно (рис. 8).

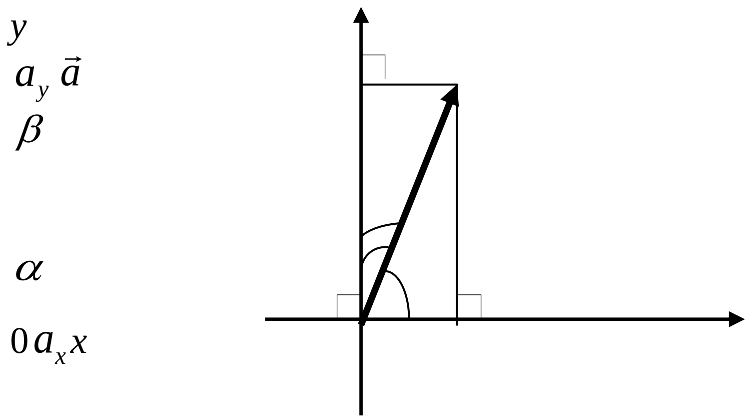


Рис. 8

Пусть α - это угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси *Ox,* а β – угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси *Oy*. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ и вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

где $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ – длина вектора $\vec{a}$.

Градиентом функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ называется вектор, координаты которого равны значениям частных производных функции z, вычисленным в точке $M(x_0;y_0)$:

$$\text{grad } z = \{z'_x; z'_y\} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Этот вектор указывает направление скорости *наибольшего роста* функции z в точке *M*, а его модуль $|\text{grad}\, z(M)|$ указывает величину этой скорости.

Производная функции $z = f(x;y)$ *по направлению* вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ в точке $M(x_0;y_0)$ показывает скорость изменения функции z в точке $M(x_0;y_0)$ в направлении вектора $\vec{a}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{d\vec{a}} = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta,$$

где z'_x и z'_y – частные производные, вычисленные в точке$M(x_0;y_0)$,$\cos\alpha$, $\cos\beta$–направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Если $\frac{dz}{d\vec{a}}>0$, то функция z возрастает в точке *M* в направлении вектора $\vec{a}$.Если окажется, что $\frac{dz}{d\vec{a}} < 0$, то функция z убывает в точке *M* в направлении вектора $\vec{a}$.

Задача.Для функции $z = f(x;y) = y^2 e^{x^3 y}$ найти:

а) полный дифференциал;

б) градиент функции z в точке $M(0;1)$;

в) производную функции z в точке $M(0;1)$ по направлению вектора $\vec{a} = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$.

Решение.а) Сначалавычислим частные производные:

$$z'_x = \left(y^2 \cdot e^{x^3 y}\right)'_x = y^2 \cdot \left(e^{x^3 y}\right)'_x =$$

$$= y^2 \cdot e^{x^3 y}(x^3 y)'_x = y^2 \cdot e^{x^3 y} \cdot 3x^2 y = 3x^2 y^3 e^{x^3 y},$$

здесь $y = const$ и использована формула $\left(e^u\right)'_x = e^u \cdot u'_x$;

$$z'_y = \left(y^2 \cdot e^{x^3 y}\right)'_y = \left(y^2\right)'_y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot \left(e^{x^3 y}\right)'_y =$$

$$= 2y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot e^{x^3 y}(x^3 y)'_y = 2y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot e^{x^3 y} \cdot x^3 = y(2 + x^3 y)e^{x^3 y},$$

здесь $x = const$ и использована формула $\left(e^u\right)'_y = e^u \cdot u'_y$.

Полный дифференциал:

$$d\,z = 3x^2 y^3 e^{x^3 y}\,dx + y(2 + x^3 y)e^{x^3 y} dy.$$

б) Найдем градиент функции z в точке $M(0;1)$.

$$z'_x(0;1) = 3 \cdot 0^2 \cdot 1^3 \cdot e^{0^3 \cdot 1} = 0;\ z'_y(0;1) = 1 \cdot (2 + 0^3 \cdot 1) \cdot e^{0^3 \cdot 1} = 2;$$

$$grad\, z(0;1) = \left\{z'_x(0;1); z'_y(0;1)\right\} = \left\{0;2\right\}.$$

в) Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Подставим все найденные значения в формулу для производной по направлению:

$$\frac{dz}{d\vec{a}} = z'_x(0;1) \cdot \cos\alpha + z'_y(0;1) \cdot \cos\beta = 0 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}.$$

Ряды

Задачи 71–80

Найти область сходимости степенного ряда.

71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-1}x^n.$

72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}x^n.$

73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n+1}x^n.$

74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}x^n.$

75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n\cdot n}x^n.$

76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot(2n-1)}x^n.$

77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}x^n.$

78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}x^n.$

79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot\sqrt{n}}x^n.$

80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot(5n+1)}x^n.$

Методические указания к решению задач 71 – 80

Числовые ряды

Числовым рядом называется бесконечная сумма вида

$$u_1+u_2+u_3+\cdots u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

Числа u_1, u_2, … называются *членами* ряда. Ряд считается заданным, если известен n-й или общий член u_n, являющийся функцией его номера n: $u_n=f(n)$.

Сумма первых n членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется n-й *частичной суммой* ряда и обозначается:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число Sназывается суммой ряда и записывается

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S .$$

В случае, когда предел последовательности частичных сумм не существует или он бесконечен, ряд называется расходящимся.

*Теорема (необходимое условие сходимости числового ряда).*Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$ равен нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Определить сходится ряд или нет, используя определение сходимости ряда достаточно трудно, поэтому используют признаки сходимости рядов.

Признаки сходимости числовых рядов

1. *Признак сравнения*. Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем для любого номера nвыполняется неравенство

$$u_n \le v_n .$$

Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

2. *Предельныйпризнак сравнения*. Пусть даны два знакоположительных ряда$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.Если существует конечный, отличный от 0, предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < \infty),$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

3. *Признак Даламбера*. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует предел отношения (n+ 1)-го члена ряда к n-му члену

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при k< 1 и расходится при k> 1. Если k = 1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым, следует воспользоваться другим признаком.

4. *Признак Коши*. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k .$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при k< 1и расходится при k> 1. Если k = 1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым, следует воспользоваться другим признаком.

Большую роль в прикладных исследованиях играют следующие ряды.

а)*Ряд геометрической прогрессии*:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots.$$

Данный ряд сходится при$|q| < 1$ и расходится при$|q| \geq 1$.

б)*Гармонический ряд*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ расходится.

в)*Обобщенный гармонический ряд.* Ряд вида

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

называется обобщенным гармоническим рядом. Можно показать, что данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Ряд называется *знакочередующимся*, если члены ряда попеременно то положительны, то отрицательны:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad u_n > 0.$$

5. *Признак Лейбница.* Знакочередующийся ряд сходится, если выполняются два условия:

1. последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, то есть
$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots;$$
2. общий член ряда стремится к нулю
$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

При этом сумма знакочередующегося ряда Sне превосходит первого члена u_1: $0 < S \le u_1$.

Ряд называется *знакопеременным*, если члены ряда могут быть как положительными, так и отрицательными.

6. *Признак сходимости знакопеременного ряда*. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

сходится, то сходится и данный знакопеременный ряд.

Ряд называется *абсолютно* сходящимся, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Ряд называется *условно* сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

*Замечание.*Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать, перемножать, переставлять местами члены ряда. Если же в условно сходящемся ряде переставить члены ряда, то сумма такого ряда может существенно отличаться от первоначальной, или даже получится расходящийся ряд.

Степенные ряды

Ряд, членами которого являются функции, называется *функциональным.*Особую роль в математике и ее приложениях играют функциональные ряды, членами которых являются степенные функции.

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{где} \quad c_n \in R.$$

называется *степенным* рядом. Числа c_0, c_1, c_2, … называются коэффициентами степенного ряда.

Заметим, что при фиксированном $x = x_0, x_0 \in R$ мы получаем числовой ряд

$$c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_n x_0^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n .$$

Этот числовой ряд может как сходиться, так и расходиться.

Множество всех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости*.

Можно доказать (теорема Абеля), что существует такое число $R \geq 0$ что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, интервал $(-R;R)$ – интервалом сходимости. На концах интервала сходимости, то есть в точках $x = R$, $x = -R$, ряд может как сходиться, так и расходиться. Данные точки требуют отдельного исследования. Заметим, что R может принимать любые неотрицательные значения, в том числе 0 и ∞ Если $R = 0$, то интервал сходимости вырождается в точку $x_0 = 0$, если $R = \infty$ интервалом сходимости является вся числовая прямая.

Радиус сходимости R степенного ряда можно найти, воспользовавшись признаком Даламбера или радикальным признаком Коши, по формулам

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \qquad \text{или} \qquad R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} .$$

Задача. Найти область сходимости степенных рядов:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} \cdot 4^n} x^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}} x^n$.

Решение.1. Найдем радиус сходимости ряда по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 4^n}\cdot\frac{\sqrt[3]{n+1}\cdot 4^{n+1}}{(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4\cdot\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}\cdot}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\cdot\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}4\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}=4.$$

Следовательно, наинтервале(–4;4) ряд сходится, на интервале $(-\infty;-4)\bigcup(4;+\infty)$– расходится. Исследуем сходимость ряда в точках x = – 4, x = 4.

Пусть x = – 4. Тогда заданный степенной ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 4^n}(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 4^n}(-1)^n 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/ n^{1/3}$ является обобщенным гармоническим рядом с параметром $\alpha=1/3<1$ и, следовательно, расходится.

Пусть x = 4. В этом случае имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 4^n}\cdot 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

Воспользуемся признаком Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Действительно, последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, то есть

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right|>\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}\right|,\qquad (u_n>u_{n+1});$$

общий член ряда стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}=0.$$

Следовательно, условия признака Лейбница выполнены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ сходится.

Таким образом, областью сходимости исходного степенного ряда является интервал (–4;4].

2. Найдем радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}x^n$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}\cdot\frac{(2(n+1)+1)\sqrt{n+1}}{1}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Таким образом, степенной ряд сходится на интервале (–1;1) ряд и расходится на интервале $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Исследуем граничные значенияx = – 1, x = 1.

Пусть x =1. В этом случае имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}1^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}.$$

Воспользуемся предельным признаком сравнения. Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/((2n+1)\sqrt{n})$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}1/(2n\sqrt{n})$.

Действительно,отношение общих членов этих рядов равно 1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}:\frac{1}{2n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}=1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/(2n\sqrt{n})=0,5\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{1,5}$ является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, так как $\alpha=1,5>1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/((2n+1)\sqrt{n})$ также сходится.

Пусть x = – 1. В этом случае имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{n}}$.

Применим признак сходимости знакопеременного ряда. Составим ряд из модулей членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}.$$

Как показано выше, данный ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \big/ ((2n+1)\sqrt{n})$ также сходится.

Таким образом, областью сходимости исходного степенного ряда является отрезок$[-1;1]$.

5. ЗАДАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Тема 1. Числовая последовательность.

Основные вопросы

1. Понятие множества. Операции над множествами.
2. Числовая последовательность.
3. Монотонная последовательность.
4. Ограниченная последовательность.
5. Предел последовательности.
6. Единственность предела последовательности.

Типовые задачи.

1. Установить, какая из двух записей верна:

а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

2. Даны множества: Z – целых чисел, M – отрицательных чисел,P – положительных чисел. Найти для этих множеств
$$(Z-M)\cap P;\ \ M\cap P; M\cup P; Z\cup M.$$
3. Вычислить пределы последовательностей:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n}{n+12}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-6n}{3n^3-5n+18}.$$

Тема 2. Функция

Основные вопросы

1. Область определения и область значения функции.
2. Элементарные и сложные функции.

3. Четные, нечетные функции.
4. Монотонные, периодические функции

Типовые задачи

1. Найти область определения функций:

1. $y=\sqrt{x^2-2x-8}$ 2. $y=3\sqrt{5-x}-\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}$

3. $y=\lg\left(x^2-3\right)$ 4. $y=\arccos\dfrac{x-1}{5}$

2. Данные функции записать в виде цепи равенств, каждое звено которой содержит основную элементарную функцию (степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрическую):

1. $y=\left(3x-1\right)^7$ 2. $y=\lg\left(\sin 3x\right)$

3. $y=3^{2x-x^2}$ 4. $y=\sin\left(2^{-x^2}\right)$

3. Вычислить частное значение функций:

а) $f(x)=\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|$ при $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$.

б) $f(x)=2x\cdot\left(2x-2\right)\cdot\left(2x+6\right)\cdot\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)$ при $x=0$, $x=1$.

в) $f(x)=e^x+1$при $x = 0$, $x = 1$, $x=\dfrac{a}{2}$, $x =-1$.

Тема 3. Предел функции

Основные вопросы

1. Понятие предела функции в точке и на бесконечности, их графические пояснения. Односторонние пределы.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и взаимная связь.
3. Первый и второй замечательные пределы. Число *e*.

4. Определение эквивалентных бесконечно-малых, привести примеры эквивалентных бесконечно-малых.
5. Понятие непрерывности функции в точке. Точки разрыва, их виды.

Типовые задачи

1.Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^7 - 5x^5 + 2}{7x^6 - 3x - 4}$; *б*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 7\sqrt{x} + 2}{5x^2 + 6x - 4}$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3}{x+2}$; *г*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin^3 x} - 1}{x^2 - x^3}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg^2 2x}{x \sin 5x}$; *е*) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n+4}$;

2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{2x}{x-1}$, изобразить схематически ее график.

Тема 4. Производная функции

Основные вопросы

1. Понятие производной и дифференциала функции.
2. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
3. Производные второго порядка и выше.

Типовые задачи

1. Найти производные функций:

а) $y = 5x - \dfrac{4}{x^3}$;*б*) $y = arctg(2x+3)$

в) $y = \dfrac{3 - x^2}{5x+1}$;*г*) $y = x^2 \ln(3x-1)$.

д) $y = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2}.}$ *е)* $y = (2x+1)^{10}$.

ж) $y = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2}.}$ *з)* $y = e^x x^a$.

Тема 5. Приложения производной

Основные вопросы

1.Признаки возрастания и убывания функции.
2. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.
3. Признаки выпуклости и вогнутости графика функции.
4. Необходимые и достаточные условия перегиба графика функции.

Типовые задачи

1. Исследовать функции средствами дифференциального исчисления и построить их графики:

   а) $y = x^3 - 9x^2$; *б)* $y = xe^{-x}$; *в)* $y = xlnx$..

2. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = 4x - x^2$ в точке $x = 1$. Результаты изобразить графически.
3. Найти пределы функций по правилу Лопиталя:

$$а)\lim_{x\to 6}\frac{2x^2-15x+18}{x^2-4x-12};\ б)\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{sin2x}.$$

Тема 6. Неопределенный интеграл

Основные вопросы

1. Первообразная. Неопределенный интеграл
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Формула интегрирования по частям.

Типовые задачи

1. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

   а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-5}}$; *б*) $\int \frac{2x^3+5\sqrt{x}-x}{x^2}dx$; *в*) $\int x\cos(4x^2)dx$;

   г) $\int \frac{x+2,5}{x^2+5x-6}dx$; *д*) $\int x^2 \sin x dx$; *е*) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$.

Тема 7. Определенный интеграл

Основные вопросы

1. Определённый интеграл, его геометрический смысл.
2. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Нахождение площади плоской фигуры.
4. Основные методы интегрирования.

Типовые задачи

1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

   а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$;
   б) $y = x^3$, $y = 8$;

2. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

   а) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;
   б) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Тема 8. Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные вопросы

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, их общее и частные решения.
2. Задача Коши для ДУ первого порядка.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
4. Линейные уравнения первого порядка. Метод Бернулли решения линейного уравнения первого порядка.

Типовые задачи

1. Решить дифференциальные уравнения:

а)	$y' - 3\dfrac{y}{x} = x$	*г*)	$y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$
б)	$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x$	*д*)	$(2x+1)y' + y = x$
в)	$y' + y\cos x = \sin 2x$	*е*)	$xy' + y - e^x = 0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$:

а) $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x,\quad y_0 = 3,\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},\quad y_0 = 5,\quad x_0 = 0.$

в) $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2},\quad y_0 = 2,\quad x_0 = 0.$

г) $y' - 3\dfrac{y}{x} = x^3e^x,\quad y_0 = e,\quad x_0 = 1.$

д) $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2},\quad y_0 = 1,\quad x_0 = 3.$

Тема 9. Дифференциальные уравнения высших порядков

Основные вопросы

1. ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения (ЛНДУ) второго порядка.

3. ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Типовые задачи

1. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=3.$

б) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(2)=1, \quad y'(2)=0.$

в) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

г) $y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(1)=7, \quad y'(1)=0.$

д) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

а) $y'' + y' - 2y = 6x^2$

б) $y'' - 5y' + 4y = x^2 - 1$

в) $y'' - y = 6x^3 - 24x$

Тема 10. Числовые ряды

Основные вопросы

1. Числовые ряды.
2. Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости.
3. Признаки сходимости рядов с положительными членами.
4. Знакопеременные ряды.
5. Абсолютная и условная сходимость.

Типовые задачи

1. Исследовать сходимость рядов, используя признаки сравнения.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{4n}$; *г*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^3+n}$; *е*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$.

Тема 11. Степенные ряды

Основные вопросы

1. Степенные ряды, их области сходимости.
2. Ряды Тейлора и Маклорена.
3. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Типовые задачи

Найти область сходимости степенных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{2n+1}$.

Тема 12. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Основные вопросы

1. Понятие функции двух переменных, её графическое изображение.
2. Линии уровня для функции двух переменных.
3. Понятие частных производных, их смысл.

4. Полный дифференциал для функции двух и трёх переменных.

Типовые задачи

1. Найти уравнение линий уровня и построить несколько линий уровня для функции:

$$а)\ z = x - 2y; \qquad б)\ z = xy.$$

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции:

$$а)\ z = x^4 e^y + \sqrt[3]{x^2 y}; \quad б)\ z = x^3 e^{x^2+y^2}.$$

Тема 13. Приложения дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Основные вопросы

1. Производная по направлению, её смысл.
2. Вектор-градиент, его смысл.
3. Понятие экстремума для функции двух переменных.
4. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Типовые задачи

1. Найти градиент функции $z = x^4 + y^3 + 2xy$ в точке $M(2;1)$.
2. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2)$ в точке $M(2;3)$ в направлении вектора $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.
3. Найти экстремум функции во всей её области определения:

$$а)\ z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1; \qquad б)\ z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy,$ в области $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2.$
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4.$

Тема 14. Двойные и тройные интегралы

Основные вопросы

1. Двойной интеграл.
2. Геометрический и физический смысл двойного интеграла.
3. Сведение двойного интеграла к двукратному.
4. Приложения двойного интеграла.
5. Определение тройного интеграла. Некоторые приложения тройного интеграла.

Типовые задачи

1. В двойном интеграле перейти к двукратному, вычислить площадь области D:

   1) D: $x = 0$, $x + y = 2$, $x = 1$, $y = -x^2$.

   2) D: $y = 0$, $y = 1$, $y = 4 - x$, $x = y^2$.

   3) D: $x = 0$, $x = 1$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2x$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

   1) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

   2) $z = 2 - (x^2 + y^2)$, $x + 2y = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

6.1. Основная литература

1. Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум для вузов. Ч 1,2 / под. Ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., прераб. и доп. – М.: Высш. образование, 2008. – 893 с.
2. Малыхин В.И. Высшая математика: учебник / И. В. Малыхин; – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА–М, 2006. – 364 с.
3. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: учебник /В. Л. Клюшин; Рос.ун-т. дружбы народов. – М.:ИНФРА–М, 2006.– 447 с.

6.2 Дополнительная литература

4. Математический анализ для экономистов: учебник для вузов / О. И. Ведина[идр.]; под ред. А. А. Гриба – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Лань, 2004. – 343 с.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие для вузов / под ред. В.И. Ермакова; Рос.экон. акад. им Г. В. Плеханова. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 574 с.: ил.
6. Красс,М.С. Математика для экономистов: учебн. пособие для вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2008. – 464 с.
7. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: тридцать шесть лекций. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айриспресс, 2006. – 280 с.: ил.
8. Просветов, Г. И. Математика в экономике. Задачи и решения: учебник для вузов / Г. И. Просветов; Рос.акад. экономики и права. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Экзамен, 2008. – 446 с.
9. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – 14-е изд., исправл. – М.: Физмалит, 2003. – 336 с.
10. Математика для экономистов. Задачник: учебно-практ. пособие для вузов / под ред. С. И. Макарова и М. В. Мищенко. – М.: КноРус, 2008. – 358 с.
11. Высшая математика для экономистов: учебник / под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006/2007. – 479 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Справочный материал по элементарной математике

1. Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

2. Формулы для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант уравнения.

3. Формула разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Действия со степенями:

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0); \; x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}; \qquad x^{-p} = \frac{1}{x^p};$$

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}; \qquad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}; \qquad \left(x^p\right)^q = x^{pq};$$

$$(xy)^p = x^p \cdot y^p; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}.$$

Здесь $n \in$ □; $m \in$ □; $p,q \in$ □.

5. Некоторыетригонометрическиеформулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

6. Значения тригонометрических функций для некоторых углов α:

Угол α / Функция	0^0	30^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

7. Значения некоторых обратных тригонометрических функций:

$$\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \arcsin 0 = 0;$$

$$\cos 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \arccos 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} 0 = 0 \qquad \text{и т.п.}$$

8. Логарифмы:

$$\boxed{\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x.}$$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$ $\qquad\qquad$ $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$

$\log_a x^p = p\log_a x;$ $\qquad\qquad$ $\log_{a^p} x = \dfrac{1}{p}\log_a x;$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

Здесь $a > 0,\quad a \neq 1,\quad x > 0,\quad y > 0,\quad p \in \mathbb{R},\quad c > 0,\quad c \neq 1$.

9. Десятичные и натуральные логарифмы, их значения:

x	$\lg x$	$\ln x$
1	0	0
2	0,3010	0,6931
$e \approx 2{,}718$	0,4343	1
3	0,4772	1,0986
4	0,6021	1,3863
5	0,6990	1,6094
6	0,7782	1,7918
7	0,8451	1,9459
8	0,9031	2,0794
9	0,9542	2,1972
10	1	2,3026

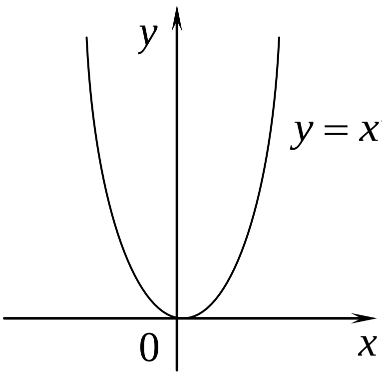
$\lg x = \log_{10} x;$

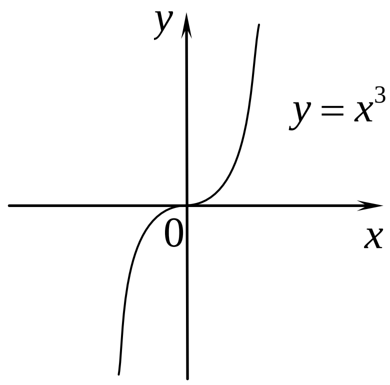
$\ln x = \log_e x,$ $\qquad$ где e=2,711828...

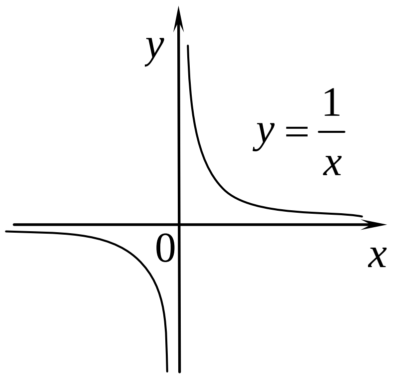
$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0,4343} \approx 2,3026 \cdot \lg x.$$

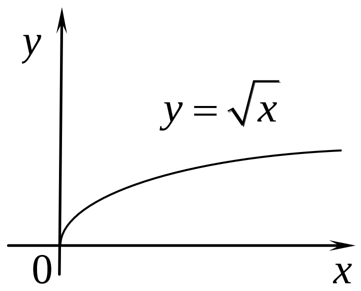
Графики основных элементарных функций

1. Степенные функции

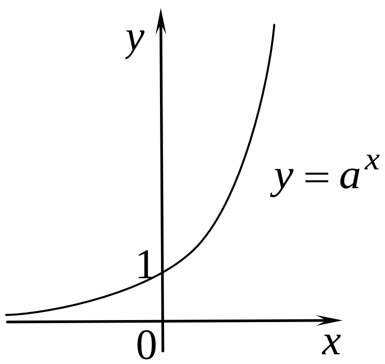




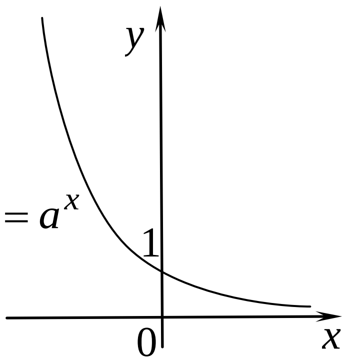




2. Показательныефункции

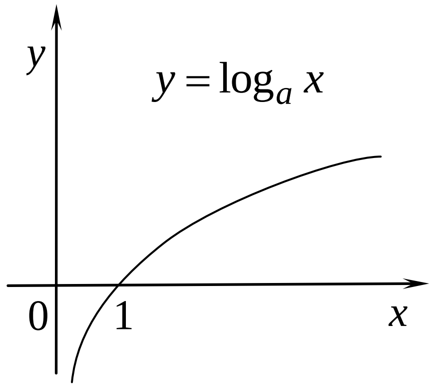


$a > 1$

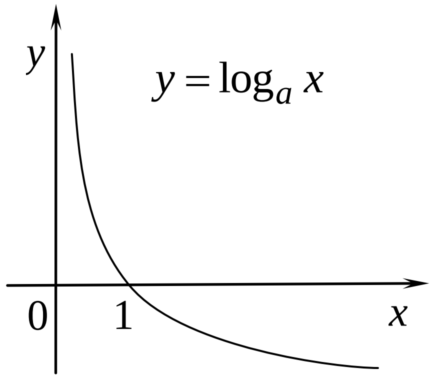


$0 < a < 1$

3. Логарифмическиефункции



$a > 1$



$0 < a < 1$

4. Тригонометрическиефункции