Петровский колледж

#### ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

# Методическое пособие

для выполнения контрольных заданий по математике

для студентов заочного отделения

средних специальных учебных заведений

специальность 40.02.01 «Право и СО»

**Гармашов А.В.**

##### Санкт-Петербург - 2017

###### ББК 65.9(2)27 К90

## Методическое пособие для выполнения контрольных заданий по математике

Автор:

А.В.Гармашов, к.ф.-м.н.

- СПб: 2017г., 64с.

Методическое пособие предназначено для выполнения контрольных заданий по математике студентами заочного отделения средних специальных учебных заведений. Настоящее пособие составлено в соответстии с действующим Государственным стандартом и типовой программой 2014 года для специальности 40.02.01 «Право и СО». По каждому разделу курса математики приведены краткие теоретические сведения. В пособие включены такие разделы как дифференциальное и интегральное исчисления, элементы теории вероятностей, основы математической статистики. В заключение каждого параграфа даны решения типичных примеров и контрольные задания.

© Петровский колледж, 2017.

**Предисловие**

Основной целью курса "Математика" является ознакомление студентов с основами современного математического аппарата как средства решения теоретических и практических задач в профессиональной сфере.

Одним из важных этапов подготовки высококвалифицированных специалистов в системе заочного обучения является самостоятельная работа студентов.

Самостоятельная работа студентов-заочников состоит из самостоятельного изучения теоретического материала и выполнения контрольных заданий.

**Общие рекомендации для студентов-заочников при изучении курса математики.**

Первая часть курса базируется на математических дисциплинах общеобразовательной средней школы.

Основным видом работы студентов-заочников является самостоятельное изучение теоретического материала, решение задач и примеров, самопроверка и выполнение контрольных заданий.

Изучение математики следует начинать с ознакомления с программой. При работе с литературой необходимо строго придерживаться такого порядка изучения материала, который рекомендован в приведенной ниже программе.

При изучении материала целесообразно в специальной тетради вести конспект. В конспект рекомендуется записывать определения, формулировки теорем, формулы.

Изучение теоретического материала должно сопровождаться решением примеров и задач. К выполнению контрольных заданий следует приступать только после тщательной проработки необходимого теоретического материала.

Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который определяется индивидуальными параметрами.

Выполнение каждой задачи (примера) следует начинать с новой страницы. Решение задач и примеров необходимо излагать подробно, с объяснениями и ссылками на теорию.

**Методические указания по выполнению контрольных заданий по математике.**

Контрольное задание выполняется в отдельной тетради. Титульный лист контрольного задания студента заочного отделения заполняется по следующей форме:

|  |
| --- |
| ПЕТРОВСКИЙ КОЛЛЕДЖЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕКонтрольное заданиепо математике.Вариант № \_\_\_\_\_\_Студент \_\_\_\_\_\_\_ группыПроверил \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Ф.И.О. полностью в родительном падеже \_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

Для облегчения выполнения контрольного задания студентами-заочниками ниже приводятся краткие теоретические сведения и примеры решения задач по разделам математики, включенным в контрольные задания*.*

***Основы математического анализа.***

*Часть 1. Дифференциальное исчисление*

1.1. Функция. Предел функции

Определение 1. Переменная величина y называется функцией от переменной величины x, если они связаны между собой так, что каждому допустимому значению величины x соответствует единственное, вполне определенное значение величины y.

Определение 2. Совокупность всех значений независимой переменной (аргумента) **x**, для которых функция y определена, называется областью определения или областью существования функции.

Функцию можно задать *тремя* способами:

а) аналитически с помощью одной или нескольких формул (явно, неявно, параметрически);

б) с помощью таблицы, где для определенных значений аргумента приводятся числовые значения функции;

в) с помощью графика.

К *основным элементарным функциям* относятся:

1. Степенная функция y=xn, где n - целое число (n∈Z)

а) Для n≥0 областью определения служит (-∞, +∞). Графики степенной функции с n≥0 представляют собой параболы различных порядков.

б) для n<0 областью определения степенной функции служат интервалы (-∞,0)∪(0,+∞), а графики представляют собой гиперболы различных порядков.

2. *Показательная функция y=аx*, где а>0, а≠1.

Областью определения показательной функции является (-∞,+∞). Функция имеет положительные значения и монотонно возрастает от 0 до +∞ при а>1 и монотонно убывает от +∞ до 0 при 0<а<1.

3. *Логарифмическая функция y=log ax,* a>0; a≠1

Областью определения логарифмической функции является (0,+∞), областью значений (-∞,+∞). При а>1 логарифмическая функция строго возрастает, при 0<a<1 - строго убывает. Логарифмическая функция обратна показательной функции.

4. *Тригонометрические функции.*

а) y=*sinx*. Область определения функции – (-∞,+∞), множеством значений функции является отрезок [-1,+1]. Функция *sinx* - нечетная функция при любом x, т.е. *sin(-x)* = -*sinx*. Функция *sinx* - периодическая с основным периодом 2π.

б) y=*cosx*. Область определения функции (-∞, +∞), множеством значений функции [-1,+1]; y=*cosx* - четная функция (*cos(-x)=cosx*), Функция y=*cosx* - периодическая с основным периодом 2π.

в) y=*tgx*, y=*ctgx*. Функции y=*tgx* и y=*ctgx* не рассматриваем более подробно, т.к. при описании различных физических процессов они встречаются очень редко.

5. *Обратные тригонометрические функции* y=*arcsinx*, y=*arccosx*, y=*arctgx*, y=*arcctgx*. Сведений об этих функциях не приводим по той же причине, что и для функций tgx и ctgx.

Определение 3. Число А называется пределом функции y=f(x) в точке x0 (при x→x0), если для любого числа ε>0 найдется такое число δ(ε)>0, что для любого x≠x0, удовлетворяющего неравенству |x-x0|<δ, выполняется соотношение |f(x)-A|< ε.

То, что функция f(x) в точке x0 имеет предел, равный А, обозначают так:

Геометрически существование предела : означает, что каково бы ни было число ε›0, найдется δ›0 такое, что для всех ***х***, заключенных между точками х0-δ и х0+δ (кроме, быть может, самой точки х0), график функции y=f(x) лежит в полосе, ограниченной прямыми y=A+ε и y=A-ε. (Рис. 1).



Рис. 1

Определение 4. Функция y=f(x) называется бесконечно малой при x→x0, если для любого числа ε>0 найдется такое число δ>0, что для любого x≠x0, удовлетворяющего неравенству |x-x0|<δ, выполняется неравенство |f(x)|< ε.

Иначе говоря, функция y=f(x) называется бесконечно малой при x→x0, если .

Теорема о связи понятий бесконечно малой и предела.

1. Если функция f(x) при x→x0 имеет предел, равный числу А, то она может быть представлена в виде суммы предела и бесконечно малой функции, т.е. если , то f(x)= A+α(x), где α(x) - бесконечно малая при x→x0.

2. Если функция может быть представлена в виде суммы постоянного числа А и бесконечно малой α(x), то число А является пределом функции f(x), т.е. если f(x) = А+ α(x), где А=const, α(x) - бесконечно малая при x→x0, то .

Бесконечно малые функции могут отличаться порядком малости. Порядок малости характеризует "скорость" стремления бесконечно малых к нулю. Бесконечно малую функцию, которая стремится к 0 быстрее другой, называют бесконечно малой высшего порядка малости.

Чтобы сравнить две бесконечно малые α(x) и β(x) по порядку малости, нужно найти предел их отношения.

1. Если , то α(x) и β(x) одного порядка малости.

2. Если , то α(x) имеет высший порядок малости, чем β(x).

Определение 5. Функция y=f(x) называется бесконечно большой при x→x0, если для любого числа M>0 существует такое число δ>0, что для всех x≠x0, удовлетворяющих неравенству |x-x0|<δ выполняется неравенство |f(x)|>M.

Обозначается это так: 

Лемма 1) Если функция f(x)-бесконечно большая при x→x0, то (f(x))-1 бесконечно малая при x→x0.

2) Если α(x)- бесконечно малая функция при x→x0, то (α(x))-1 бесконечно большая при x→x0.

Теоремы о пределах:

*Теорема 1*. Предел постоянной равен самой постоянной: 

*Теорема 2*. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме их пределов при условии, что эти пределы существуют:

 

*Теорема 3*. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, при условии, что эти пределы существуют.

 

Теорема справедлива для любого конечного числа сомножителей.

*Следствие 1*: Если  существует при x→x0 и n-натуральное число, то 

*Следствие 2*: Постоянный множитель можно вынести за знак предела: 

*Теорема 4.* Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют, и предел знаенателя не равен 0.

,если 

*Теорема 5*. Если функция y=f(g(x)) является сложной функцией, то для всех элементарных функций в области их определения



*Теорема 6.* Если , то в некоторой окрестности точки x0 знак функции совпадает со знаком числа A.

*Первый замечательный предел:* 

*Второй замечательный предел:* 

Некоторые приемы вычисления пределов.

*Пример 1. Вычислить *

*Решение.* Вначале найдем предел знаменателя; применяем теоремы 1,2, следствие 1 из (3)



Применяем теоремы 1,2,3,4:

   .

*Пример 2. Вычислить* 

*Решение:* Непосредственное применение теорем о пределах приводит к неопределенному выражению вида 0/0. Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители, и сократим дробь на множитель (x+3):

   

=

*Пример 3*. В*ычислить *

*Решение.* Непосредственное применение теорем о пределах к числителю дает значение его предела = 0. Предел знаменателя также 0. Получили неопределенное выражение 0/0. Для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель данной дроби умножаем на .

  =  =

 *Пример 4. Вычислить* 

*Решение.* Найдем предел знаменателя: - бесконечно большая величина. Тогда 1/(4x+3) - бесконечно малая при x→∞, значит и 2/(4x+3) бесконечно малая при x→∞, т.е. 

*Пример 5. Вычислить *

*Решение:* Применив теоремы о пределах, получим неопределенное выражение вида ∞/∞. Для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель дроби почленно разделим на наивысшую степень аргумента в знаменателе:

   

т.к. при x→∞ величины 7/x2 и 2/x2 -бесконечно малые и .

*1.2. Производная и дифференциал функции*

Рассмотрим функцию y=f(x).

Определение 1*.* Разность двух значений аргумента(x0 и x) называется приращением аргумента ∆x: ∆x=x-x0 => x=x0+∆x.

Определение 2. Разность двух значений функции y0=f(x0) и y=f(x) называется приращением функции y: ∆y=y-y0= f(x)-f(x0)=f(x0+∆x)-f(x0).

Определение 3. Функция y=f(x) называется непрерывной в точке x0, если

1) функция определена в точке x0 и ее окрестности;

2) бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. 

Определение 4. Функция называется непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Все основные элементарные функции непрерывные в своей области определения.

Определение 5. Производной функции y=f(x) в данной точке называется предел (если он существует) отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

  

Физический смысл производной состоит в следующем: производная функции y= f(x) по аргументу x есть *мгновенная скорость изменения* функции при данном значении аргумента, если независимой переменной являетсявремя и есть *градиент* функции, если независимой переменной является координата.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции y=f(x) при данном значении аргумента x равна *угловому коэффициенту "k" касательной к графику функции* в точке x: f'(x) = tgα = k, где α - угол между касательной к графику в точке x и положительным направлением оси Ox (Рис.2). Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке М0(x0,y0) можно записать так: y-y0 = k(x-x0) или, учитывая, что k=f'(x0), получим y-y0 = f'(x0)(x-x0).

 y

 M1 y =f (x)

 M0 φ Δy

 Δx

 φ α x Рис.2

 0 x0 x0+Δx

Если функция в данной точке имеет производную, то ее называют *дифференцируемой* в этой точке, а процесс нахождения производной - *дифференцированием* функции.

Формулы дифференцирования.

1. Производная постоянной величины равна нулю С'=0.

2. Производная независимой переменной равна 1: X'x =1.

3. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций:

(U(x) + V(x) - W(x))'x = U'x (x) + V'x(x) - W'x(x)

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и производной второй функции на первую: (U(x)·V(x))'x = U'x(x)·V(x) + V'x(x)·U(x)

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

(C·U(x))'x= C·U'x(x) или  

5. Производная функции, представляющей частное двух функций, равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя данной функции, а числитель есть разность между произведениями производной числителя на знаменатель и производной знаменателя на числитель:

 

Определение 6: Сложной функцией называется функция, аргументом которой служит функция: y=f(u), где u=g(x), т.е. y=f[g(x)]. Аргумент "*u*" называют промежуточным, а x - конечным.

6. Производная сложной функции по конечному аргументу равна произведению производной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по конечному:

yx'=yu'·ux'.

Таблица производных основных элементарных функций приведены в таблице.



Производную f''(x) называют производной первого порядка, или первой производной.

Определение 7: Производную от первой производной называют второй производной или производной второго порядка:

y"xx= (yx')'x или f"(x)= (f'(x))'x

*1.3. Дифференциал функции.*

Согласно теореме о связи предела и бесконечно малой функции приращение функции y=f(x) можно представить в виде суммы двух слагаемых: ∆y=y'·∆x+α(x)∆x, где α(x) - бесконечно малая при ∆x→0.

Второе слагаемое - бесконечно малая высшего порядка малости в сравнении с первым. Слагаемое y'·∆x составляет главную часть приращения функции.

Определение 8: Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента, называется дифференциалом функции (dy): dy = y'·∆x

Учитывая, что при y=x имеем dx=x'∆x, т.е. dx=∆x, получаем

dy=y'·dx,

т.е. дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал ее аргумента. Отсюда y'=dy/dx.

Решение типовых задач.

*Задача: найти производную функций*

*а)* y=(x5+x+8)·ctg3x

*Решение.* Воспользуемся правилом 4 дифференцирования произведения двух функций y'=(x5+x+8)'·ctg3x+(x5+x+8)·(ctg3x)'. Далее используем правило 3 дифференцирования суммы и правило 6 дифференцирования сложной функции: (ctgu)'x=-(1/sin 2u)·u'x, где u=3x.

Получаем: y'=(5x4+1)∙ctg3x-(x5+x+8)∙ = (5x4+1)∙ctg3x - .

*б) *

 *Решение.* Представим данную функция в виде степени y=[ln(2+sin5x)]1/3 и применим правило дифференцирования сложной функции:
(un)'x=n·un-1·u'x. В нашем примере u=ln(2+sin5x), n=1/3.

Получаем: y'=1/3 [ln(2+sin5x)]-2/3·[ln(2+sin5x)]'. Далее применим формулу (*ln*u)'=u'/u, где u=2+sin5x

Тогда y’ =1/3 [ln(2+sin5x)]-2/3·.

Используем далее правило 3 и формулу: (sinu)'=cosu·u', где u=5x получаем:

y'=1/3 [ln(2+sin5x)]-2/3· .

*Задача: найти вторую производную функции* y=e 2x+1.

*Решение.* Найдем y', используя формулу: (eu)'x =e u·u'x

В нашем примере u=2x+1. y'=e 2x+1·(2x+1)' = 2e 2x+1

y"=(y')'=(2e 2x+1)'=2(e2x+1)'=4e 2x+1.

*Задача: найти дифференциал функции .*

*Решение.* Запишем функцию в виде: y=2(cos 2x)-2. Используем правило: dy=y'x·dx.

dy= [2(cos 2x)-2]'·dx=2[(cos2x)-2]'·dx= =-4·(cos2x)-3 (cos2x)'·dx=-4(cos2x)-3·(-sin2x)·(2x)'·dx

.

*Задача: Составить уравнение касательной к графику функции* y*=3*x4+7 *в точке* x0=2.

*Решение.* Найдем ординату точки касания y0=f(x0): y0=3·24+7=55. Найдем угловой коэффициент касательной k=f'(x0) f'(x)=12x3, f'(2)=12·23=96, т.е. k=96.

Запишем уравнение касательной в виде y=y0=k(x-x0): y-55=96(x-2) или y=96x-137.

*1.4. Применение производных и исследование функций*

Определение 1. Функция y=f(x) называется возрастающей на интервале (a,b), если для любых двух точек x1 и x2 этого интервала из неравенства x2>x1 следует неравенство f(x2)≥f(x1), т.е. приращение аргумента и приращение функций имеют одинаковые знаки. Если из x2>x1 следует f(x2)>f(x1), то функцию называют строго возрастающей. (рис.3)

Определение 2. Функция y=f(x) называется убывающей на интервале (a,b), если для любых двух точек x1 и x2 этого интервала из неравенства x2>x1 следует неравенство f(x2)≤f(x1), т.е. приращение аргумента и приращение функции имеют противоположные знаки. (рис.3)

 y

 y y=f (x) убывающая функция

f (x2) возрастающая f (x1)

f (x1) функция f (x2) y=f (x)

0 x1 x2 X 0 x1 x2 X

Рис.3.

*Теорема 1* (о необходимых условиях невозрастания и неубывания функции на интервале)

Если дифференцируемая функция f(x) не убывает на (a,b), то в любой точке этого интервала f''(x)≥0;

Если дифференцируемая функция f(x) не возрастает на (a,b), то в любой точке этого интервала f''(x)≤0.

Если дифференцируемая функция f(x) на (a,b) не изменяется, то ее производная f''(x)=0.

*Теорема 2.* (о достаточных условиях строгого возрастания и убывания функции на интервале)

Если производная f''(x) функции y=f(x) на интервале (a,b) отрицательна, то функция на этом интервале строго убывает.

Если производная f''(x) функции y=f(x) на интервале (a,b) положительна, то функция на этом интервале строго возрастает.

Если производная f''(x) функции y=f(x) на интервале (a,b) равна нулю, то функция на этом интервале сохраняет постоянное значение.

Определение 3. Значение функции f(x0) называется локальным максимумом функции y=f(x) на интервале (a,b), если существует такая β-определенность ]x0-β,x0+β[ точки x0, что для всех x≠x0 этой окрестности выполняется неравенство: f(x)<f(x0). (рис.4)

Определение 4. Значение функции f(x0) называется локальным минимумом функции y=f(x) на интервале (a,b), если существует такая β-определенность ]x0 -β,x0+ β[ точки x0, что для всех x≠x0 этой окрестности выполняется неравенство: f(x)>f(x0). (рис.4)

Точку x0 называют, соответственно определению 3 (определению 4), точкой максимума (точкой минимума). Максимум и минимум функции называются локальным экстремумом функции.

**y** **y**

 f (x0) • f (x) < f (x0) f (x) > f (x0)

f (x) максимум минимум

 f (x)

 f(x0) •

 0 x0 x **x** 0 x0 x **x**

**Рис. 4.**

Теорема 3 (о необходимом условии существования экстремума дифференцируемой функции)

Если функция y=f(x), дифференцируемая на интервале (a,b), имеет в точке x0є(a,b) экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю.

Теорема 4 (о достаточных условиях экстремума функции)

Если производная функции y=f(x) в точке x0 обращается в нуль (f'(x0)=0), и при переходе через эту точку в направлении возрастания аргумента меняет знак с плюса на минус, то в точке x0 эта функция имеет максимум; если знак производной меняется с минуса на плюс, то в точке x0 функция имеет минимум; если же при переходе через точку x0 производная f'(x) не меняет знак, то в точке x0 функция экстремума не имеет.

Определение 5. Кривая y=f(x) называется выпуклой на интервале (a,b), если она лежит ниже касательной, проведенной к этой кривой в любой точке x этого интервала (рис. 5).

Определение 6. Кривая y=f(x) называется вогнутой на интервале (a,b), если она лежит выше касательной, проведенной к этой кривой в любой точке x этого интервала (Рис. 5.).

 y y

 вогнутость выпуклость

0 a b x 0 a b x

Рис. 5.

Теорема 5 (о достаточных условиях выпуклости и вогнутости кривой)

Если вторая производная f"(x) функции y=f(x) на интервале (a,b) положительна, то график функции на этом интервале вогнутый, а если вторая производная f"(x) отрицательна, то график функции выпуклый.

Определение 7. Точка непрерывной кривой, отделяющая участок выпуклости от участка вогнутости или наоборот, называется точкой перегиба (рис. 6).

**y**

 Рис. 6.

 0 x0 **x**

Теорема 6 (о достаточных условиях наличия точки перегиба)

Если вторая производная f"(x) функции y=f(x) в некоторой точке x0 обращается в нуль и при переходе через нее меняет свой знак на обратный, то точка (x0,f(x0)) является точкой перегиба графика функции.

Правило 1 исследования функции на возрастание, убывание и экстремумы.

1. Указать область определения функции y=f(x).

2. Найти производную y'=f'(x).

3. Составить уравнение f'(x)=0 и найти его корни (критические значения).

4. Разбить область определения критическими значениями аргумента *x* на интервалы монотонности и найти знак производной на каждом интервале.

5. На основании теоремы 2 сделать вывод о возрастании или убывании функции на интервалах.

6. На основании теоремы 4 сделать вывод о наличии экстремумов в критических точках, разделяющих интервалы монотонности.

Правило 2 исследования функции на выпуклость, вогнутость и наличие точек перегиба.

1. Указать область определения функции y=f(x).

2. Найти вторую производную y"=f"(x).

3. Составить уравнение f"(x)=0 и найти его корни.

4. Разбить область определения функции найденными корнями на интервалы и найти знак второй производной на каждом интервале.

5. На основании теоремы 5 сделать вывод о выпуклости или вогнутости графика функции на интервалах.

6. На основании теоремы 6 сделать вывод о наличии точек перегиба.

Решение типовой задачи.

*Задача. Дана функция* 

*Провести ее исследование на возрастание, убывание, экстремумы, выпуклости, вогнутость и точки перегиба.*

*Решение.* Используем правила 1 и 2.

1. Область определения функции (-∞, +∞).

2. Найдем 

3. Составим уравнение 

Получим квадратное уравнение x2-3x-10=0. Корни этого уравнения x1=-2 и x2= 5 являются критическими точками.

4. Разбиваем область определения функции критическими точками на интервалы монотонности: (-∞,-2); (-2,5); (5,+∞).

5. Выбираем в каждом интервале произвольную точку и определяем в ней знак производной: f'(-3)>0; f'(0)<0; f'(6)>0.

6. Из теоремы 2 следует: на первом и третьем интервалах функция возрастает, а на втором - убывает.

7. Из теоремы 4 следует, что в точке x=-2 функция имеет максимум: ymax=f(-2)=. В точке x=5 функция имеет минимум: ymin=

8. Найдем y"= 

9. 2x-3=0, x=3/2.

10. Точка x=3/2 - разбивает область определения на два интервала:
(-∞,3/2) и (3/2,+∞)

11. Найдем знак второй производной в произвольных точках этих интервалов f"(0)<0; f"(2)>0

12. На основании теоремы 5 делаем вывод: на интервале (-∞,3/2) график функции выпуклый, а на интервале (3/2,+∞) - вогнутый.

13. На основании теоремы 6 получаем: при переходе через точку x=3/2 вторая производная меняет знак. Это значит, что x=3/2 является абсциссой точки перегиба графика. Ордината точки перегиба f(3/2)= -13/4.

***Контрольное задание №1.***

Номера задач, соответствующие каждому варианту, определяются последней цифрой электронного пропуска. Допустим, пропуск имеет номер 12304057, следовательно, студенту необходимо решить все задачи, номера которых заканчиваются цифрой7, т.е. задачи 7, 17, 27, 37, ... .

В задачах 1.1-1.2 найти заданные пределы.

* 1. Вычислить предел .
	2. Вычислить предел .

*m – число букв в Имени (8)*

*n – число букв в Фамилии (7)*

*k – число гласных букв в Отчестве (5)*

В задачах 11-20 требуется найти производные заданных функций.

11.  12. 

13.  14. 

15.  16. 

17.  18. 

19.  20. 

*m – число букв в Имени (8)*

*n – число букв в Фамилии (7)*

*k – число согласных букв в Отчестве (8)*

В задачах 21-30 требуется найти дифференциалы заданных функций.

21. y=  22. y=cos3kx

23. y= x·nx 24. y=ln(ln*kx*)

25. y=lntg(nx) 26. y=sinn(3x+5)

27. y=lnk(x/m) 28. y=ln(ksinx+mcosx)

29. y=sinnx·cosmx 30. y=+ arctg 

***Задание на исследование.*** Требуется исследовать данные функции и построить их графики в соответствии со следующей схемой:

1. Область определения
2. Множество значений
3. Точки пересечения с осями координат
4. Четность
5. Периодичность
6. Асимптоты
7. Возрастание, убывание, наличие точек экстремумов
8. Выпуклость, вогнутость, наличие точек перегиба
9. Составление таблицы и дополнительные вычисления
10. Построение графика функции не по точкам, а по результатам исследования.

 



*m* – число букв в Фамилии (7)

*n* – число гласных букв в Имени (3)

*k* – число букв в Отчестве студента (13)

*Часть 2. Интегральное исчисление*

*2.1. Неопределенный интеграл*

Определение 1. Первообразной функцией для данной функции f(x) на данном промежутке называется такая функция F(x), производная которой равна данной функции f(x) или дифференциал которой равен f(x)dx на рассматриваемом промежутке.

Определение 2. Совокупность первообразных F(x)+C для данной функции f(x) или данного дифференциала f(x)dx называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначают *∫*f(x)dx.

Вычисление интеграла от данной функции называют *интегрированием* этой функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

10 Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению,апроизводная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:d∫f(x)dx=f(x)·dx; (∫f(x)dx)'=f(x).

20 Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого: ∫dF(x)=F(x)+C.

30 Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла: ∫kf(x)dx=k∫f(x)dx.

40 Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

∫[f1(x)+f2(x)-f3(x)]dx=∫f1(x)dx+∫f2(x)dx-∫f3(x)dx

*2.2. Таблица интегралов*



*2.3. Основные методы интегрирования.*

1. Непосредственное интегрирование.

Этот способ основан на использовании свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличной форме путем тождественных преобразований.

2. Интегрирование подстановкой (замена переменной).

Этот способ заключается в переходе от данной переменной интегрирования к другой переменной для упрощения подынтегрального выражения и приведения его к табличной форме.

В интеграле ∫f(g(x))g’(x)dx заменим t=g(x), dt= g'(x)dx, тогда ∫f(g(x))g’(x)dx=∫f(t)dt.

1. Интегрирование по частям.

При этом способе используют формулу ∫udv=uv-∫vdu (\*)

К числу интегралов, вычисляемых по частям, относятся, например, интегралы вида ∫P(x)·f(x)dx, где P(x)- многочлен (в частности, степенная функция), а f(x)- одна из следующих функций: ex, *sin*ax, *cos*ax, *ln*x, *arcsin*x, *arccos*x, *arctg*x, *arcctg*x. При этом для интегралов вида ∫P(x)·eaxdx, ∫P(x)*sin*axdx, ∫P(x)*cos*axdx, в качестве “u” принимают многочлен P(x), а для интегралов вида ∫P(x)*arcsin*xdx, ∫P(x)*arccos*xdx, *∫*P(x)*arctg*xdx, *∫*P(x)*arcctg*xdx*,* ∫P(x)*ln*xdx в качестве “u” принимается *ln*x, *arcsin*x, *arccos*x, *arctg*x, *arcctg*x.

Решение типовых задач.

*Задача1. Решить методом непосредственного интегрирования*



*Решение.* Сначала преобразуем подынтегральное выражение и получим ∫(x2-6x-8+ 9/x -5x-2)dx.

Воспользуемся свойствами 4 и 3 неопределенного интеграла:

∫(x2-6x-8+ 9/x -5x-2)dx=∫x2dx-6∫xdx-8∫dx+9∫dx/x -5∫x-2dx

Все полученные интегралы табличные, поэтому, применяя формулы интегрирования, получаем:



*Задача 2. Решить методом непосредственного интегрирования* ∫tg2xdx.

*Решение.* Воспользуемся соотношением tg2x =1/cos2x -1 и преобразуем заданный интеграл:



Воспользуемся свойством 4 неопределенного интеграла и формулами интегрирования:



*Задача 3. Решить методом подстановки ∫*(x3+5)4·x2·dx

*Решение.* Заменим x3+5=t и продифференцируем это равенство: d(x3+5)=dt; 3x2·dx=dt. Сделаем замены в заданном интеграле: ∫(x3+5)4·x2·dx=

Возвращаясь к первоначальной переменой x, получаем: ∫(x3+5)4·x2dx = (x3+5)5/15 + C

*Задача 4. Решить методом подстановки* ∫sin7x cosx·dx.

Решение. Заменим в подынтегральном выражении sinx=t и продифференцируем это равенство: cosxdx=dt. Делаем замену в заданном интеграле: ∫sin7x cosx dx = ∫t7·dt = t8/8 + C или ∫sin7xcosxdx =sin8x/8+C.

Решение интеграла способом подстановки оформляют так:

∫sin7x cosx·dx==∫t7·dt=.

*Задача 5. Решить методом интегрирования по частям ∫*xlnxdx.

*Решение.* Согласно данным выше рекомендациям, заменим lnx=u, а оставшееся выражение xdx=dv. Найдем du=d(lnx)=dx/x и функцию v из равенства dv=xdx. Тогда ∫dv=∫xdx, откуда v=x2/2 (полагаем С=0). Теперь, зная u=lnx, v=x2/2 и du=dx/x, применим формулу интегрирования по частям ∫udv = uv-∫vdu. В нашем примере имеем:

∫lnx·xdx=  или ∫xlnxdx=.

Примечание: В некоторых случаях для приведения интеграла к табличному виду формулу интегрирования по частям применяют последовательно несколько раз.

*Задача 6. Решить методом интегрирования по частям ∫*x2·exdx

*Решение:* Согласно данным выше рекомендациям обозначим x2=u, а оставшееся выражение е2dx=dv. Найдем du=d(x2)=2xdx и функцию v из равенства dv=exdx, тогда ∫dv=∫exdx, откуда v=ex.

Зная u=x2, v=ex и du=2xdx, применив формулу (\*), получаем: ∫x2exdx=x·ex-2∫xexdx.

Полученный в правой части интеграл ∫xexdx проще данного, но не табличный. Поэтому решаем его, вновь применяя формулу (\*). Обозначим x=u и dv=exdx. Найдем du=dx; v=∫exdx=ex.

Решаем ∫xexdx=x·ex-∫exdx=xex-ex+С. Окончательно получаем: ∫x2exdx=x2·ex-2(xex-ex)+C=ex(x2-2x+2)+С.

При решении интегралов по частям рекомендуется следующая форма записи: ∫x2exdx= x2·ex-2∫xexdx=x2ex-2(xex-∫exdx)= =x2ex-2xex+2ex+C = ex(x2-2x+2)+С.

*2.4. Определенный интеграл*

Рассмотрим функцию y=f(x), непрерывную на отрезке [a,b]. Разобьем [a,b] на n элементарных отрезков∆xi произвольной длины, возьмем на каждом отрезке ∆xi произвольную точку ci и вычислим значение функции f(ci) в этих точках (см. Рис.7).

Определение 1. Интегральной суммой для функции y=f(x) на отрезке [a,b] называется сумма произведений длины элементарных отрезков ∆xi на значения функции f(ci) в произвольных точках этих отрезков: .

Определение 2. Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b] называется предел (если он существует) интегральной суммы для функции f(x) на отрезке [a,b], не зависящий от способа разбиения отрезка [a,b] и выбора точек ci, найденный при условии, что длины элементарных отрезков (включая и максимальный ∆xmax) стремятся к нулю.



 y

 f(ci)

 Рис.7.

 a xi ci xi+1 b x

Геометрически определенный интеграл dx (a<b и f(x)>0) равен a площади криволинейной трапеции SaABb, ограниченной кривой y=f(x), отрезком [a,b] оси Ox и прямыми x=a и x=b (рис. 8).

 y

 y = f (x)

 x = a x = b Рис. 8.

 y = 0 x

Формула Ньютона-Лейбница. Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

F(x) =F(b)-F(a), где  - знак двойной подстановки.

Основные свойства определенного интеграла.

Свойство 10 Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:



Свойство 20 Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:



Свойство 30. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный:



Свойство 40(свойство аддитивности). Если промежуток интегрирования [a,b] разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку [a,b], равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам: если , то



Формула верна и в случае, если точка c лежит вне отрезка [a,b] и функция f(x) непрерывна на отрезках [a,b] и [c,b].

Свойство 50 Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:



Свойство 60 Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:



Свойство 70(свойство монотонности). Если подынтегральная функция f(x) на отрезке интегрирования сохраняет постоянный знак, то определенный интеграл представляет собой число того же знака, что и функция, при условии b>a: если f(x)≥0, то и 

Свойство 80(о среднем значении функции). Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой промежуточной точке x=c отрезка интегрирования [a,b] на длину отрезка b-a:

f(c) (b-a), откуда µ=f(c)=.

f(c) называется средним значением функции на отрезке [a,b] (Рис. 9).

 y

 D

 C +

 \_ E

 B Рис. 9.

 A F

 a с b x

*2.5. Основные методы решения определенных интегралов.*

1. Непосредственное интегрирование.

Этот способ основан на использовании свойств определенного интеграла, приведении подынтегрального выражения к табличной форме путем тождественных преобразований и применении формулы Ньютона-Лейбница.

2. Интегрирование подстановкой.

Для решения определенного интеграла  методом подстановки заменяют g(x)=t; dt=g'(x)dx и находят пределы изменения переменной t при изменении x от a до b из соотношений: g(a)=α и g(b)=β.

Тогда =,где F(t)-первообразная функции f(g(x))=f(t).

3. Интегрирование по частям.

При этом способе используют формулу:  (\*\*)

Подробные рекомендации по решению интегралов по частям даны в описании этого метода применительно к неопределенным интегралам.

Решение типовых задач

*Задача 1. Вычислить* 

*Решение.* Данный интеграл решим непосредственным интегрированием. Сначала преобразуем подынтегральное выражение:

= .

Применим свойства 6 и 5, в результате чего получим



Так как оба интеграла табличные, записываем первообразные функции и применяем формулу Ньютона-Лейбница:



 *Задача 2. Вычислить* 

*Решение.* Решаем интеграл методом подстановки. Введем новую переменную t=4-x и продифференцируем данное равенство: dt=d(4-x); dx=-dt. Найдем новые пределы интегрирования из соотношения t= 4-x: при x1=0 получаем t1=4,

при x2=2 получаем t2=2.

Делаем замену переменной в заданном интеграле:

  

Избавимся от знака минус перед интегралом, воспользовавшись свойством 3:

    

*Задача 3. Вычислить* 

*Решение.* Будем решать интеграл методом интегрирования по частям. Обозначим lnx=u, dx=dv и найдем du=d(lnx)=dx/x и v=∫dx=x. Применяя к заданному интегралу формулу интегрирования по частям, получим

   .

*Контрольное задание № 2*

В задачах 41-50 требуется вычислить указанные неопределенные интегралы способом непосредственного интегрирования.

41. 42.

43. 44. 

45. 46.

47. 48.

49. 50.

В задачах 51-60 вычислить указанные неопределенные интегралы методом подстановки.

51. 52.

53.  54. 

55. 56.

57. 58. 

59.  60. 

*m – число гласных букв в Фамилии (3)*

*n – число гласных букв в Имени (3)*

*k – число гласных букв в Отчестве (5)*

Задача на применение определенного интеграла

Построить схематичный чертеж и найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций (“*параболический сегмент*”):

, 

*m – число согласных букв в Имени (5)*

*n – число согласных букв в Отчестве (8)*