Цель работы. Ознакомление с принципами построения моделей внешних воздействий — сигналов задания и возмущений.

Теоретические сведения. В ряде задач анализа и синтеза систем управления требуется построить дифференциальное уравнение по известному частному решению, заданному в виде функции времени. Такая задача возникает, например, при построении динамических *моделей внешних воздействий* (так называемых, *командных генераторов*) — сигналов задания и возмущений. Особо отметим, что, в известном смысле, данная задача является *обратной* по отношению к задаче нахождения решения дифференциального уравнения (см. лабораторную работу № 1).

Командный генератор (КГ) внешнего воздействия $g(t)$, как правило, описывается моделью в пространстве состояний вида

$$\begin{cases} \dot{z} = Gz, \\ g = Hz, \end{cases} \qquad (3.1)$$

где z — n-мерный вектор состояния командного генератора, G — $n \times n$ матрица постоянных коэффициентов, H — $1 \times n$ вектор-строка постоянных коэффициентов. Модель (3.1) определяет класс внешних воздействий вида

$$g(t) = H e^{Gt} z(0).$$

При этом изменение начальных условий $z(0)$ модели (3.1) обеспечивает генерирование различных реализаций воздействия $g(t)$.

Основной метод построения моделей внешних воздействий (командных генераторов) — *метод последовательного дифференцирования*. Проиллюстрируем данный метод двумя примерами.

Пусть требуется построить командный генератор гармонического сигнала

$$g(t) = A\sin\omega t,$$

где A и ω — известные константы. Выберем в качестве первой координаты вектора состояния КГ сам сигнал g, т.е. $z_1 = g$. Дифференцируя z по времени, находим

$$\dot{z}_1 = \omega A\cos\omega t.$$

Выберем в качестве второй координаты вектора состояния КГ производную сигнала g, т.е. $z_2 = \dot{g}$. Тогда

$$\dot z_2 = -\omega^2 A \sin\omega t = -\omega^2 z_1 .$$

Учитывая, что $\dot g = \dot z_1 = z_2$, окончательно получаем

$$\dot z_1 = z_2, \quad \dot z_2 = -\omega^2 z_1, \quad g = z_1. \qquad (3.2)$$

Для векторно-матричной формы (3.1) имеем

$$z = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^T = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

При этом легко видеть, что $z_1(0) = g(0) = 0$ и $z_2(0) = \dot g(0) = \omega A$.

Пусть теперь требуется построить командный генератор задающего сигнала с трапецеидальным графиком скорости (см. рис.3.1). На рисунке через V и Δ обозначены амплитуды скорости и ускорения задающего воздействия g, а через F — конечное значение сигнала g. Вводя первую координату вектора состояния в виде $z_1 = g$, получаем $\dot z_1 = v$.

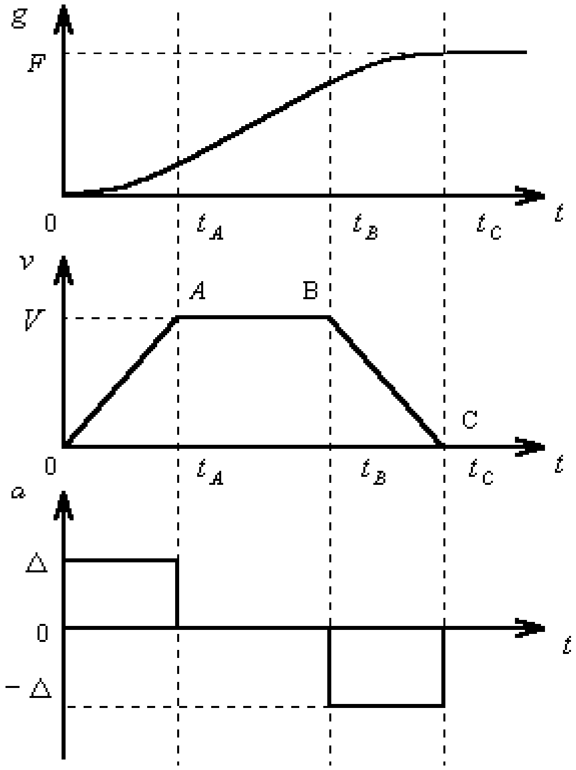


Рис.3.1 Вид задающего воздействия g и его производных: скорости $v = \dot g$ и ускорения $a = \ddot g$

Обозначая $z_2 = v$ и продолжая процедуру дифференцирования, имеем $\dot z_2 = a$. Наконец, вводя третью координату вектора состояния КГ $z_3 = a$, получаем $\dot z_3 = 0$ для всех участков графика задающего воздействия. Таким образом, окончательно можно записать

$$\dot z_1 = z_2, \quad \dot z_2 = z_3, \quad \dot z_3 = 0, \quad g = z_1,$$

или в векторно-матричной форме (3.1), где

$$z = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^T = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Порядок выполнения работы.

1. *Исследование командного генератора гармонического сигнала.*

1.1. Математическую модель командного генератора сигнала сканирования.

Вариант	1
Угол сканирования φ	40
Частота сканирования f, c^{-1}	1

$$g(t) = A\sin\omega t$$

$$w = 2\pi f = 2\pi 1 = 6{,}28$$

$$A = \frac{tg\,\varphi}{w} = \frac{tg\,40^o}{6{,}28} = 0{,}1336$$

$$\begin{cases} \dot{z} = Gz \\ g = Hz \end{cases} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

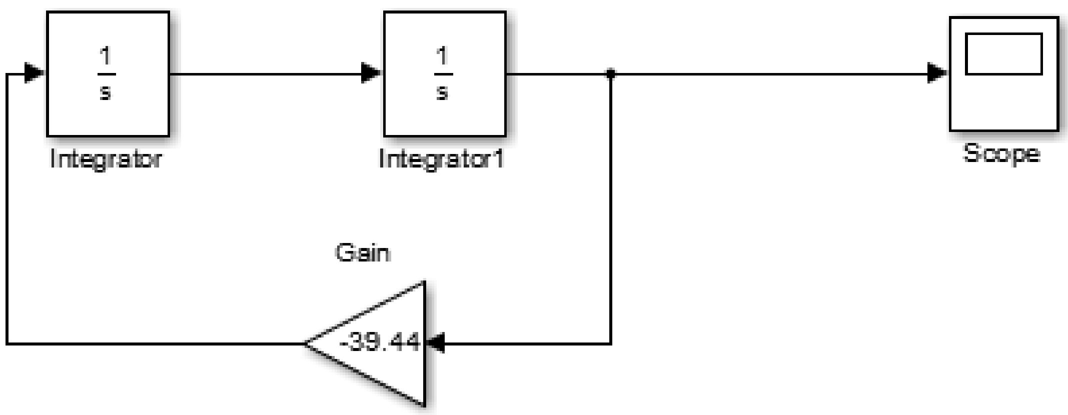
$$\dot{Z1} = Z2$$

$$\dot{Z2} = -w^2 Z1$$

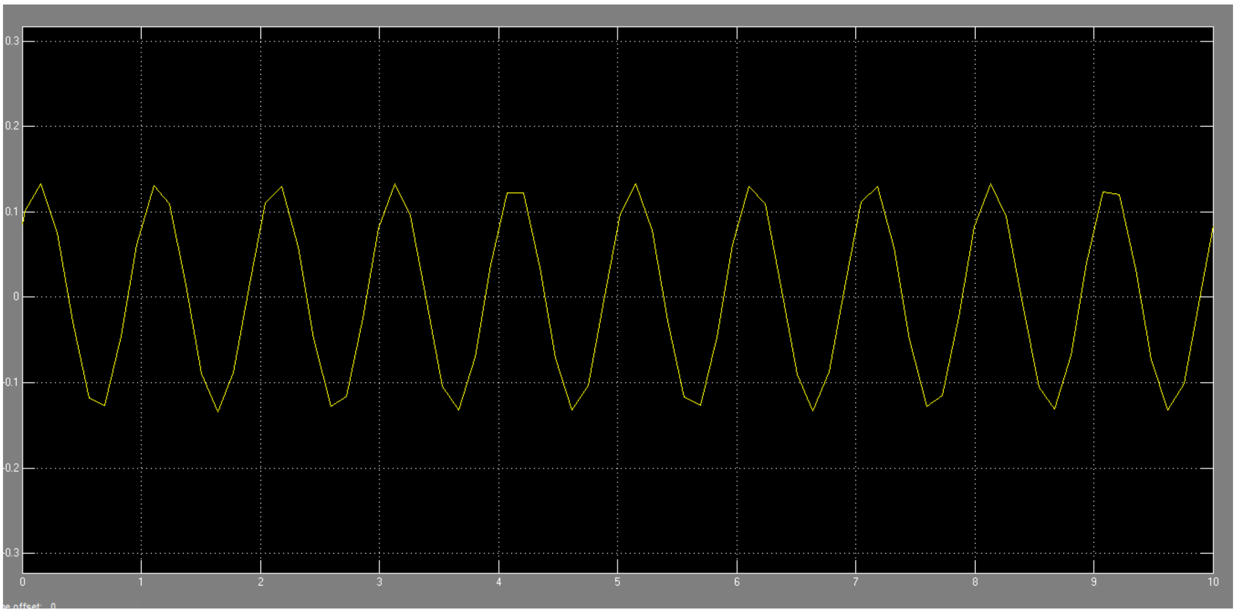
$$g = Z1$$

$$Z(0) = \begin{bmatrix} Asin\varphi \\ Awcos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0859 \\ 0.6436 \end{bmatrix}$$

1.2. Схема моделирования командного генератора.



1.3. Осуществить моделирование работы командного генератора. На экран выводить сигнал $g(t)$.



2. *Исследование командного генератора сигнала с трапецеидальным графиком скорости.*

2.1. Математическую модель командного генератора сигнала с трапецеидальным графиком скорости.

Вариант	1
Δ	1
V	1
F	5

$$a = \begin{cases} \Delta, & t \in [0; t_a) \\ 0, & t \in [t_a, t_b) \\ -\Delta, & t \in [t_b, t_c) \\ 0, & t \in [t_c, \infty) \end{cases}$$

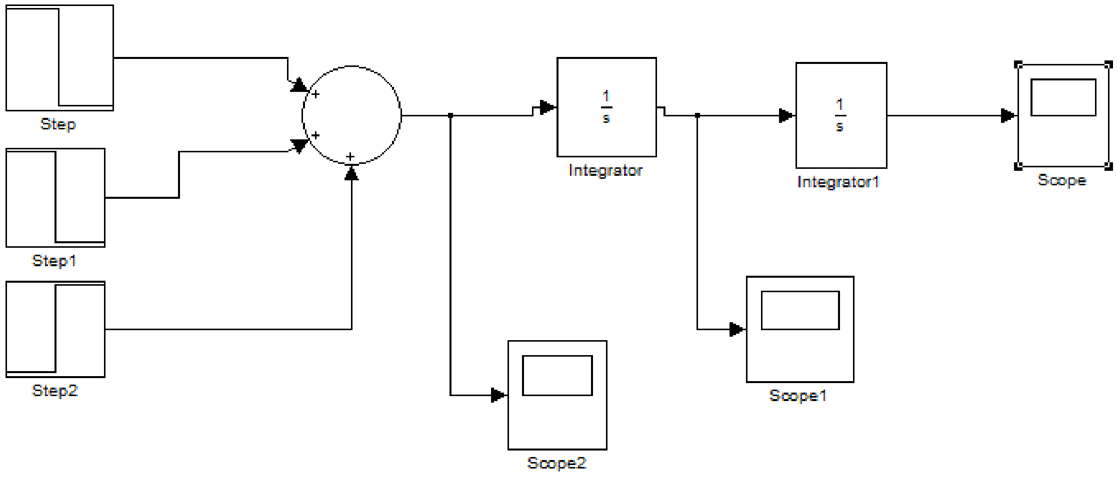
$$v = \int V dt = \begin{cases} \Delta t, & t \in [0; t_a) \\ V, & t \in [t_a, t_b) \\ -\Delta(t - t_b) + V, & t \in [t_b, t_c) \\ 0, & t \in [t_c, \infty) \end{cases}$$

$$g = \int v\ dt = \begin{cases} \Delta \frac{t^2}{2}, & t \in [0; t_a) \\ V(t - t_a) + \Delta \frac{t_a^2}{2}, & t \in [t_a, t_b) \\ -\Delta \frac{t^2}{2} + \Delta t_b t + Vt - \Delta \frac{t_b^2}{2} + \Delta \frac{t_a^2}{2} - Vt_a, & t \in [t_b, t_c) \\ F, & t \in [t_c, \infty) \end{cases}$$

$t_a = 1, t_b = 5, t_c = 6$

$$z_1 = g \qquad \begin{cases} \dot{z} = Gz \\ g = Hz \end{cases} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$z_2 = \dot{g} = v$$
$$z_3 = \ddot{g} = a$$

2.2. Схема моделирования командного генератора.



2.3. Моделирование работы командного генератора.

График $v(t)$

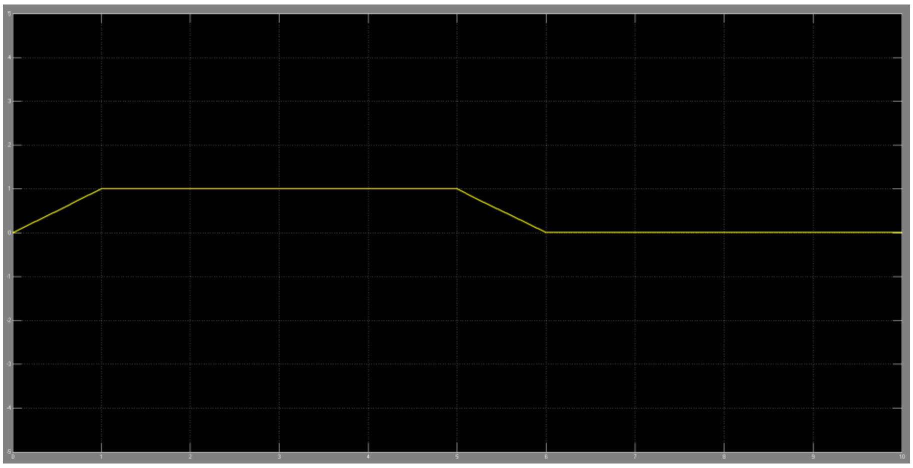


График $a(t)$

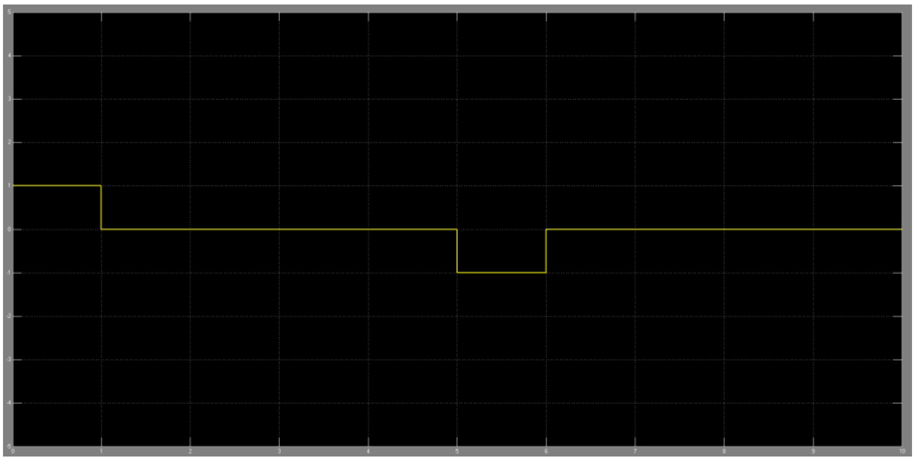
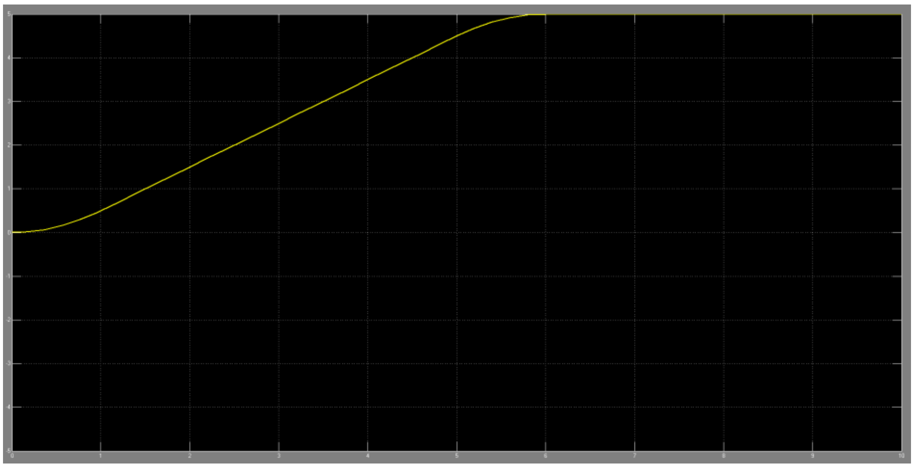


График $g(t)$



3. *Исследование командного генератора возмущения.*

3.1. Математическую модель командного генератора возмущения.

$$2e^{-t}\sin(3t) + 0.5t = g(t)$$

$$g(t) = z_1$$

$$\dot{z}_1 = 2e^{-t}\sin(3t) + 6e^{-t}\cos(3t) + 0.5 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -16e^{-t}\sin(3t) - 12e^{-t}\cos(3t) = z_3$$

$$\dot{z}_3 = 52e^{-t}\sin(3t) - 36e^{-t}\cos(3t) = z_4$$

$$\dot{z}_4 = 56e^{-t}\sin(3t)\ 192e^{-t}\cos(3t)$$

$$\dot{z}_4 = A\dot{z}_3 + B\dot{z}_2$$

$$\begin{cases} 56 = 52A - 16B \\ 192 = -36A - 12B \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -2 \\ B = -10 \end{cases}$$

$$\dot{z}_4 = -2\dot{z}_3 - 10\dot{z}_2$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}; \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}; \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1(0) = g(0) = 0$$
$$z_2(0) = 6.5$$
$$z_3(0) = -12$$
$$z_4(0) = -36$$

3.2. Выполнить пункты 1.2 и 1.3.
Схема моделирования командного генератора возмущения.

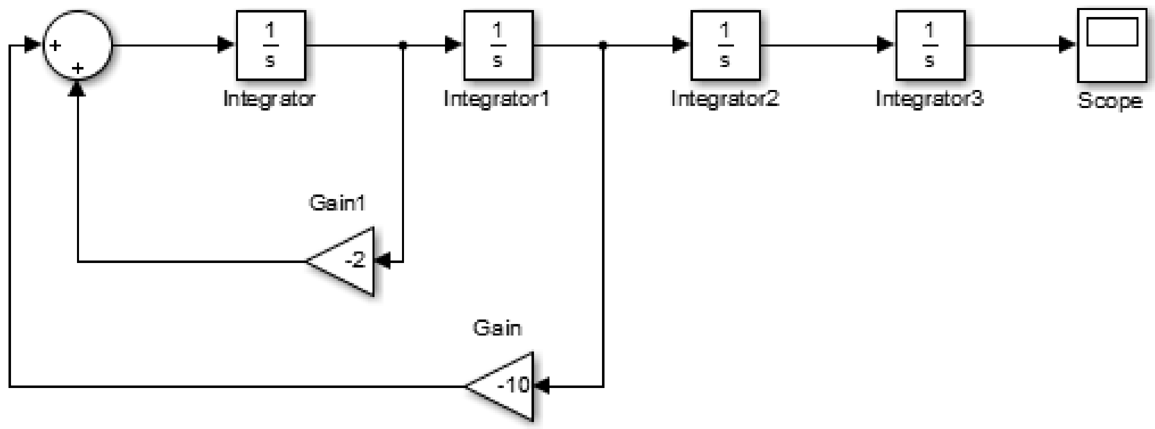
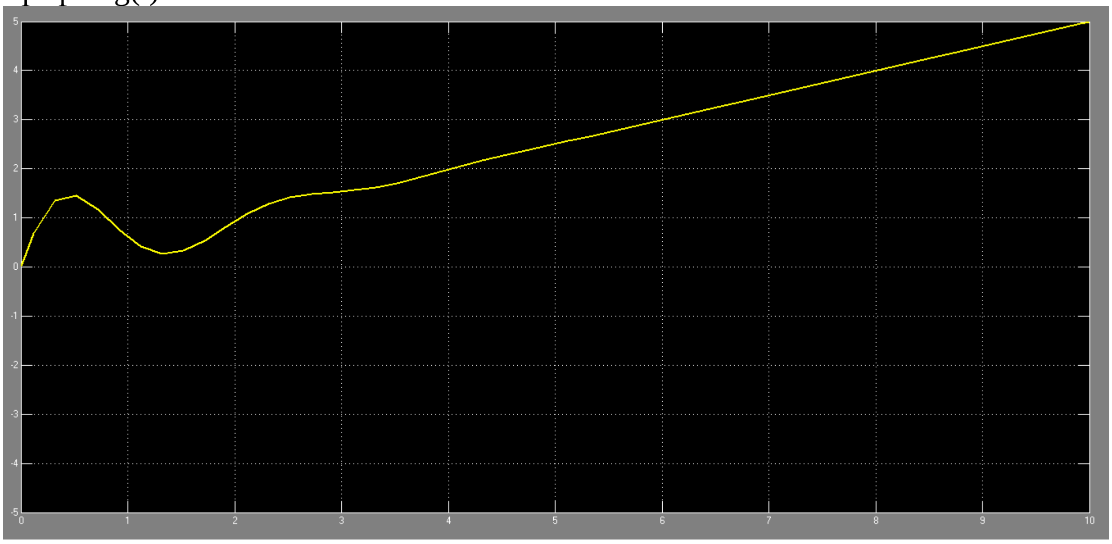


График g(t).



Вывод: познакомились с принципами построения моделей внешних воздействий — сигналов задания и возмущений.