Цель работы. Исследование переходных характеристик элементарных звеньев.

Теоретические сведения. Типовыми динамическими звеньями называются простейшие составные части системы, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями 0-2-го порядка:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_1\dot{g} + b_0 g, \qquad (4.1)$$

где $g = g(t)$ - входная переменная звена , $y = y(t)$ -выходная переменная; a_i, b_i - постоянные коэффициенты (параметры). С использованием оператора дифференцирования $s=d/dt$ уравнение (4.1) запишется в виде

$$a_2 s^2 y + a_1 sy + a_0 y = b_1 sg + b_0 g$$

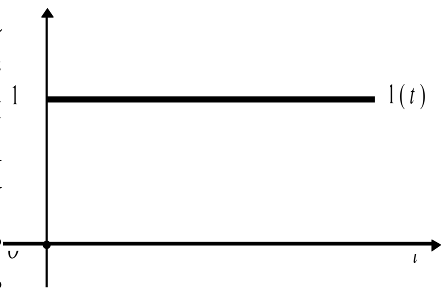
или

$$y = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \cdot g = W(s) \cdot g,$$

где $W(s)$-передаточная функция звена (4.1).

Переходным процессом называется изменение во времени переменных (сигналов) динамической системы или звена: $y = y(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$, обусловленное начальными условиями или входным воздействием.

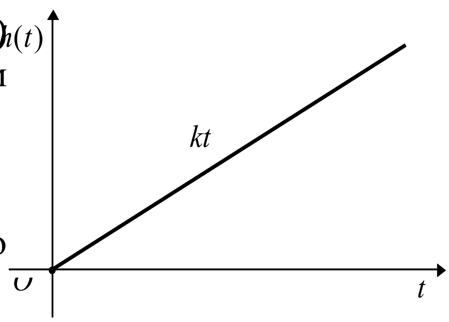
Переходной функцией системы или звена $y=h(t)$ называется переходный процесс выходной переменной при единичном входном воздействии $g=1(t)$ и нулевых начальных условиях. По графику переходной функции может быть определена математическая модель исследуемого динамического звена и ее параметры.



Интегрирующее звено (*интегратор*) описывается дифференциальным уравнением:

$\dot{y} = k \cdot g$ или $y = \frac{k}{s} \cdot g$,

где k- коэффициент усиления, а его переходная функция $h(t) = k \cdot t \cdot 1(t)$.

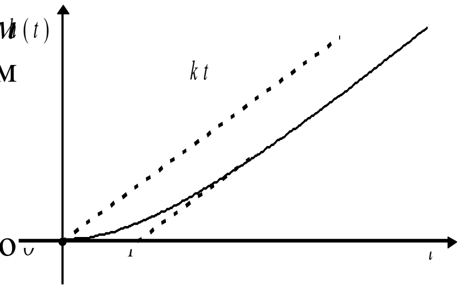


Интегрирующее звено с замедлением описывается дифференциальным уравнением:

$$T\ddot{y} + \dot{y} = kg \text{ или } y = \frac{k}{s(Ts+1)} \cdot g$$

где T- постоянная времени, а его переходная функция

$$h(t) = k \cdot [t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})] \cdot 1(t).$$

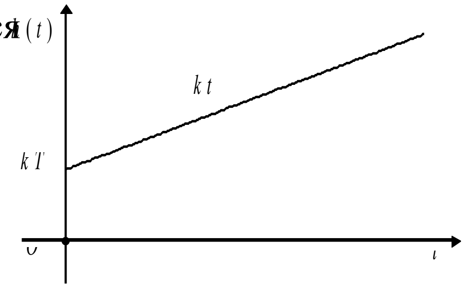


Изодромное звено описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{y} = k(T\dot{g} + g) \text{ или } y = \frac{k(Ts+1)}{s} \cdot g,$$

а его переходная функция -

$$h(t) = k \cdot (t + T) \cdot 1(t).$$

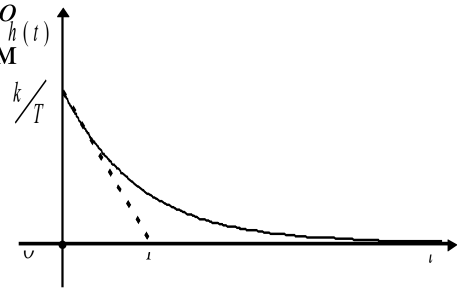


Реальное дифференцирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$T\dot{y} + y = k\dot{g} \text{ или } y = \frac{ks}{Ts+1} \cdot g$$

а его переходная функция -

$$h(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t).$$

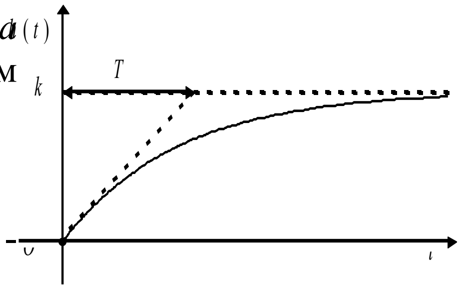


Апериодическое звено 1-го порядка описывается дифференциальным уравнением:

$$T\dot{y} + y = k \cdot g \text{ или } y = \frac{k}{Ts+1} \cdot g,$$

а его переходная функция -

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t).$$



Апериодическое звено 2-го порядка описывается дифференциальным уравнением:

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1\dot{y} + y = k \cdot g \text{ или } y = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \cdot g,$$

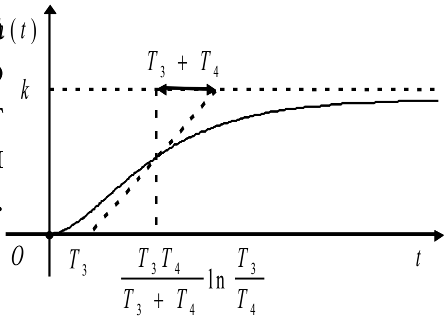
где T_1, T_2 - постоянные времени, причем $T_1 > 2T_2$. При этом корни характеристического уравнения $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$ будут вещественными и отрицательными.

Знаменатель передаточной функции апериодического звена 2-го порядка разлагается на множители:

$$y = \frac{k}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} \cdot g,$$

где $\quad T_3 = \frac{T_1}{2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}, \qquad T_4 = \frac{T_1}{2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$

Апериодическое звено второго порядка эквивалентно двум звеньям первого порядка, включенным последовательно друг за другом, с общим коэффициентом усиления k и постоянными времени T_3, T_4. Его переходная функция имеет вид

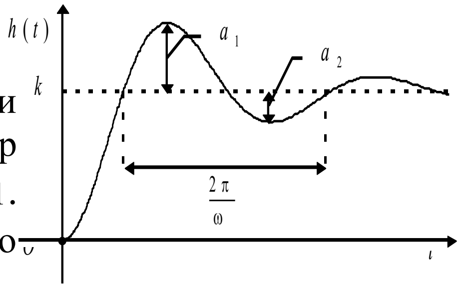


$$h(t) = k\left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}}\right) \cdot 1(t).$$

Колебательное звено описывается тем же дифференциальным уравнением, что и апериодическое звено второго порядка. Однако корни характеристического уравнения $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$ должны быть комплексными, что будет выполняться при $T_1 < 2T_2$.

Передаточная функция колебательного звена обычно представляется в виде

$$y = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot g,$$



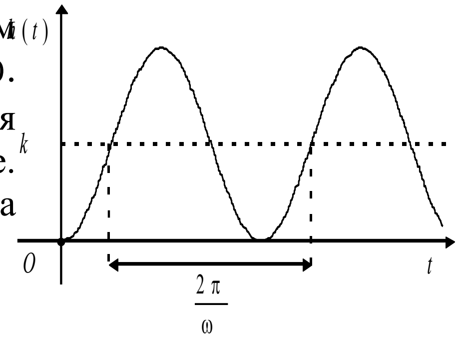
где $2\pi T$- период свободных колебаний при отсутствии затухания, ζ - параметр затухания, лежащий в пределах $0 < \zeta < 1$. Переходную функцию данного звена можно представить в виде

$$h(t) = k[1 - e^{-\sigma t}(\cos\omega t + \frac{\sigma}{\omega}\sin\omega t)] \cdot 1(t),$$

где $\sigma = \zeta / T$, $\omega = \frac{1}{T}\sqrt{1 - \zeta^2}$. Параметр ω легко определяется по графику переходной функции, а параметр σ находится посредством выражения

$$\sigma = \frac{\omega}{\pi} \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

Консервативное звено является частным случаем колебательного звена при $\zeta = 0$. Тогда корни характеристического уравнения $T^2 s^2 + 1 = 0$ будут чисто мнимые. Передаточная функция колебательного звена имеет вид

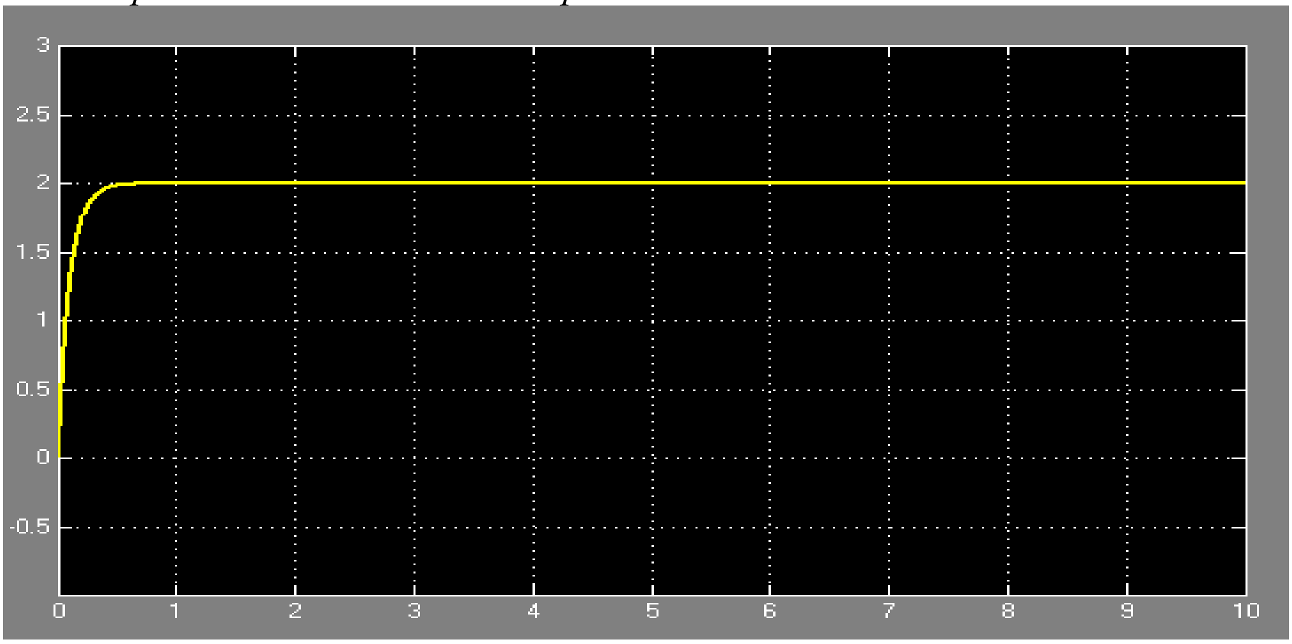


$$y = \frac{k}{T^2 s^2 + 1} \cdot g,$$

а его переходная функция - $\quad h(t) = k(1 - \cos\omega t) \cdot 1(t)$, где $\omega = \dfrac{1}{T}$.

Порядок выполнения.

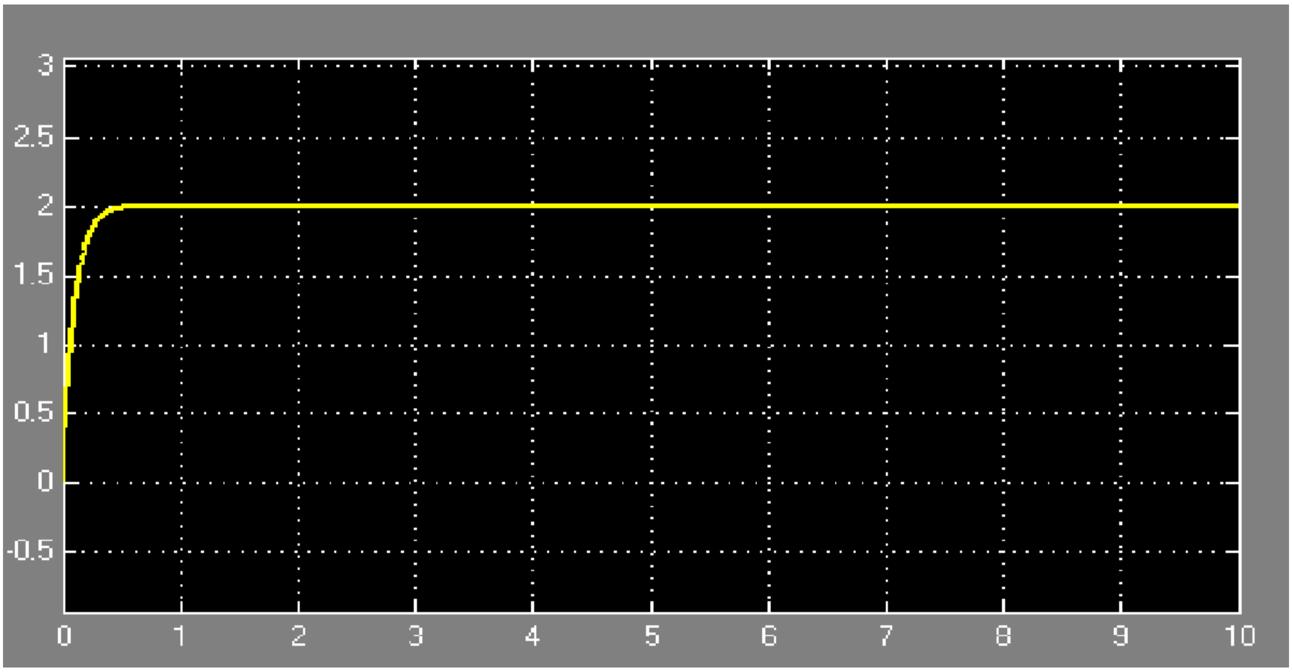
1. *Апериодическое звено 1-ого порядка.*



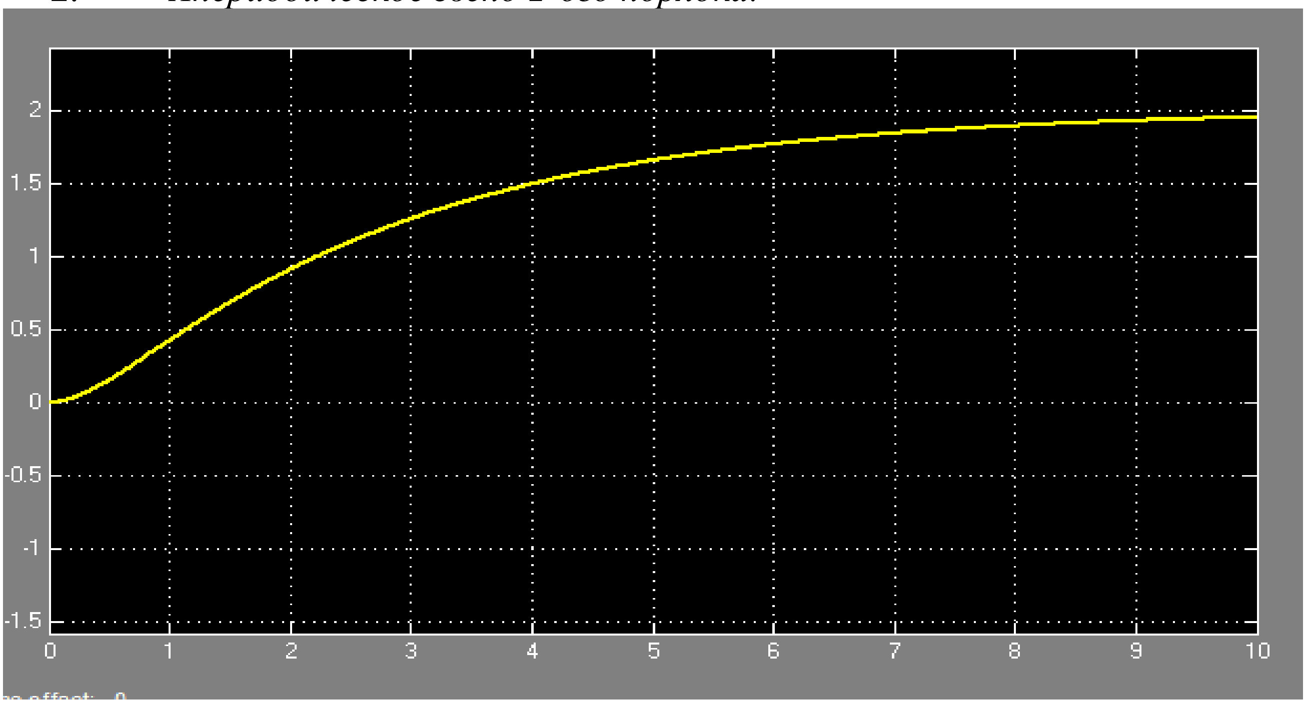
Звено описывается уравнением: $y = \dfrac{k}{Ts+1} \cdot g$, а его переходная функция - $h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$. Из графика видно, что k=2, а T=0.1. Тогда

$y = \dfrac{2}{0,1s+1} \cdot g$, $h(t) = 2(1 - e^{-\frac{t}{0,1}}) \cdot 1(t)$.

Проверка:

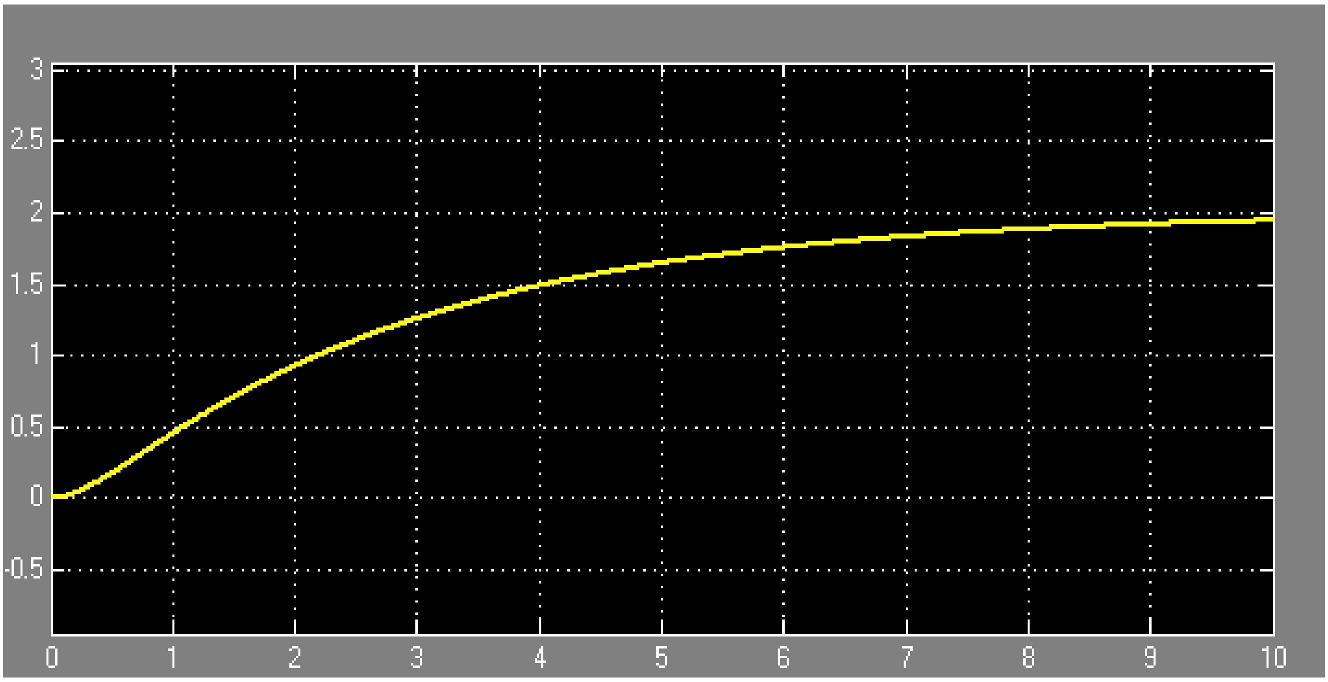


2. *Апериодическое звено 2-ого порядка.*

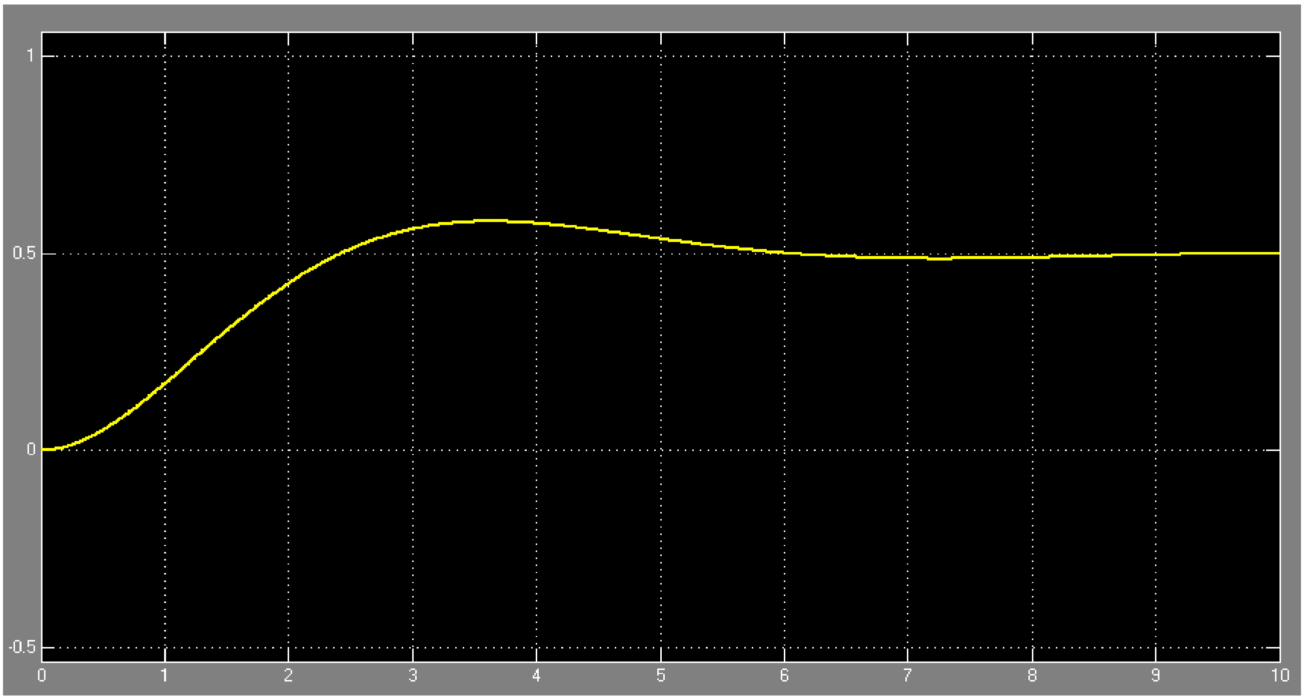


Звено описывается уравнением: $y = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \cdot g$ или $y = \frac{k}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} \cdot g$ Его переходная функция имеет вид $h(t) = k(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}}) \cdot 1(t)$. Из графика видно, что k=2.

Проверка:



3. *Колебательное звено.*



Звено записывается уравнением: $y = \dfrac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot g$ Переходную функцию данного звена можно представить в виде $h(t) = k[1 - e^{-\sigma t}(\cos\omega t + \frac{\sigma}{\omega}\sin\omega t)] \cdot 1(t)$. Из графика видно, что k=0.5. Найдем $\omega = 2\pi/(9-2{,}5) = 0{,}97$ и

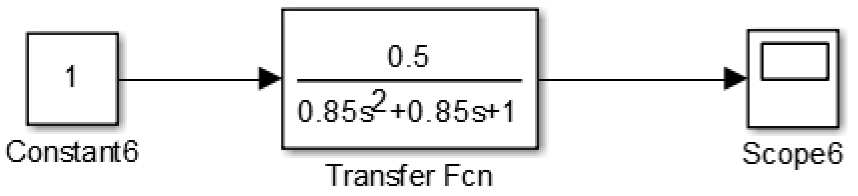
$$\sigma = \frac{\omega}{\pi}\ln\frac{a1}{a2} = \frac{0{,}97}{3{,}14}\ln\frac{0{,}75}{0{,}15} = 0{,}5$$

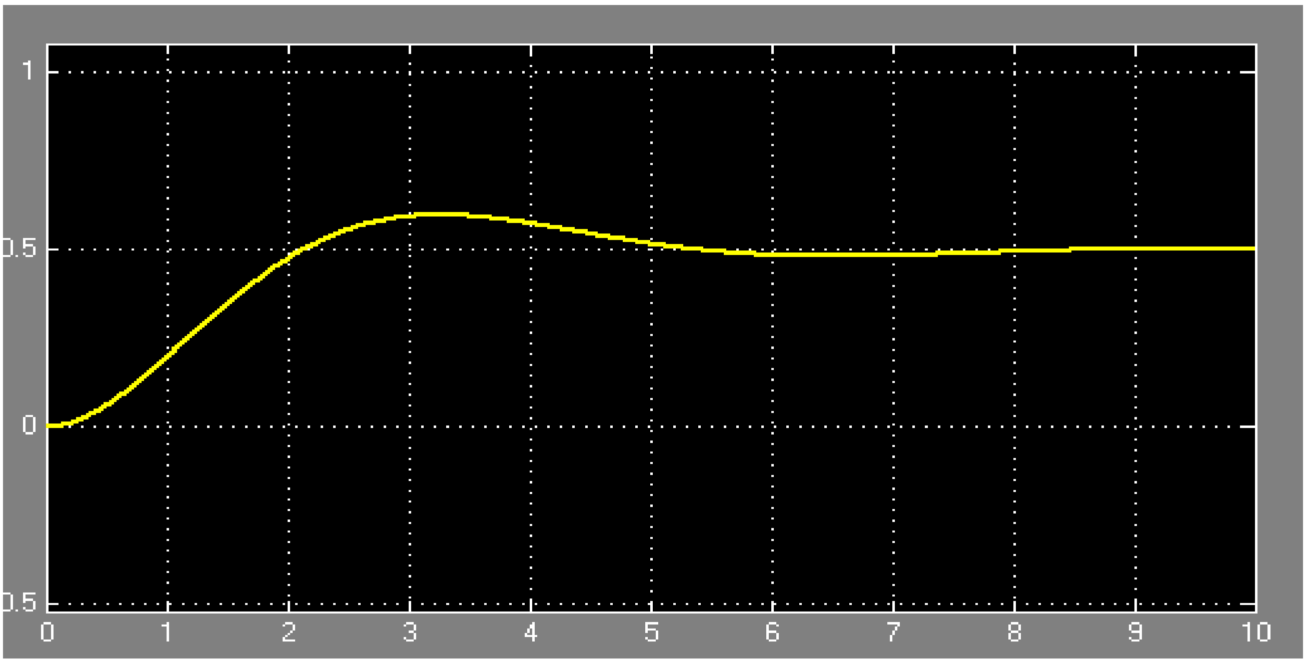
$$\begin{cases} \sigma = \zeta / T \\ \omega = \frac{1}{T}\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta = \sigma T \\ T^2 = \sqrt{\frac{1}{\omega^2+\sigma^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta \approx 0{,}46 \\ T \approx 0{,}92 \end{cases}$$

Тогда

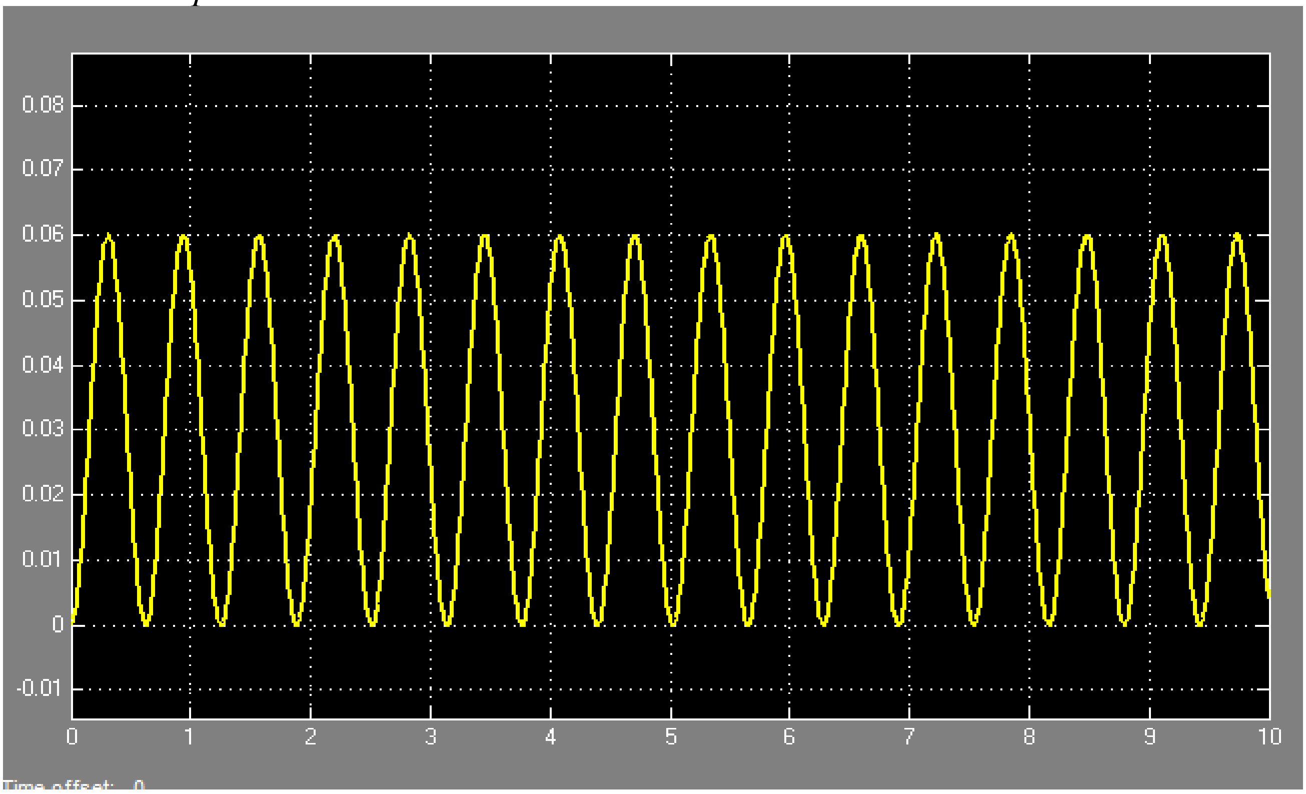
$$y = \frac{0{,}5}{0.85s^2 + 0.85s + 1} \cdot g, \quad h(t) = 0{,}5\,[1 - e^{-0{,}5t}(\cos 0.97t + \frac{0{,}5}{\omega}\sin 0.97\,t)] \cdot 1(t),$$

Проверка:





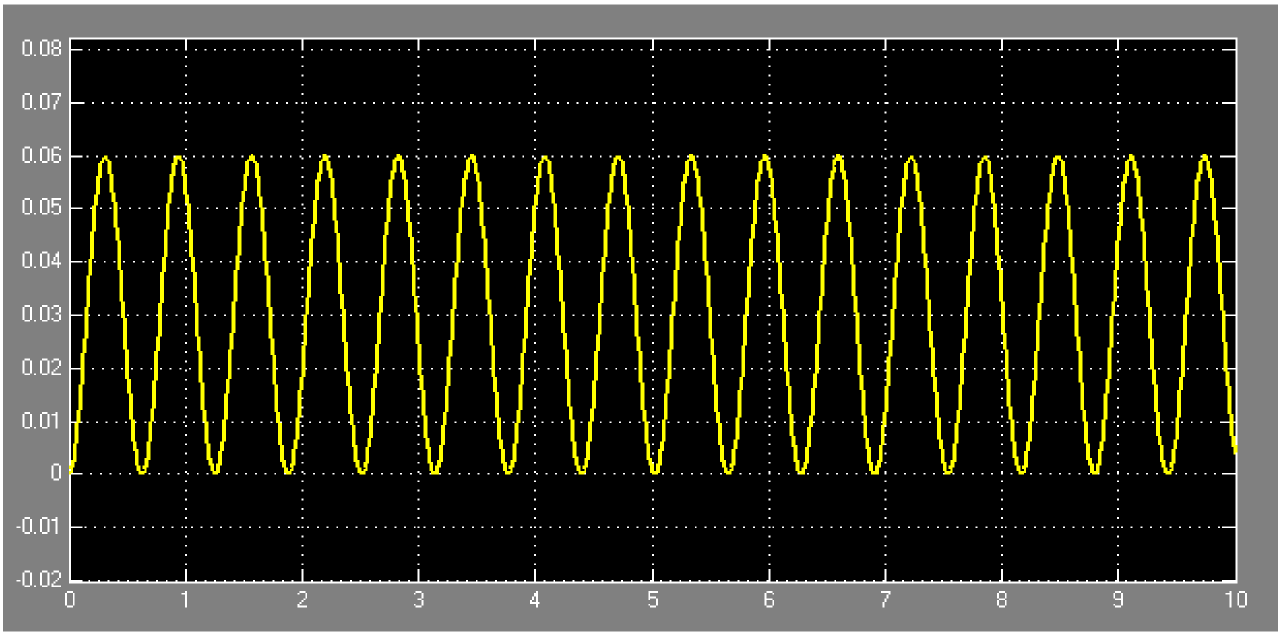
4. *Консервативное звено.*



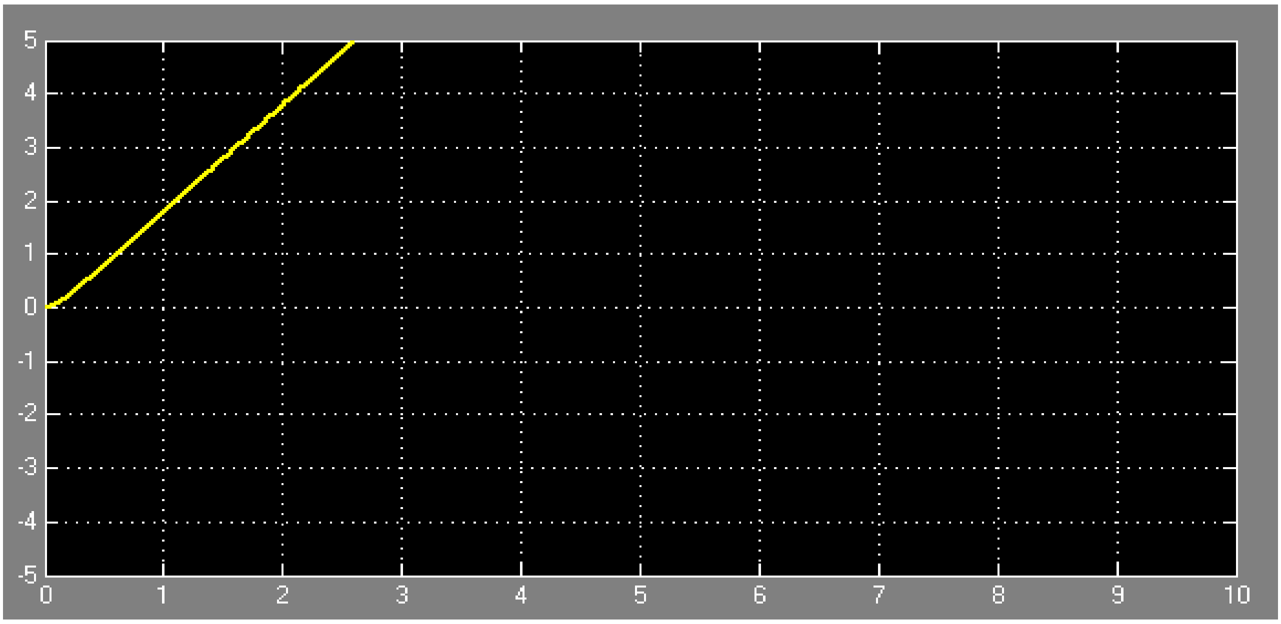
Звено записывается уравнением: $y = \frac{k}{T^2 s^2 + 1} \cdot g$, а его переходная функция - $h(t) = k(1 - \cos\omega t) \cdot 1(t)$. Из графика видно, что k=0.03. Найдем $\omega = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{0,65} = 9,66$, тогда $T = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{9,66} = 0,1$. Получаем

$y = \frac{0,03}{0,009 s^2 + 1} \cdot g$, $h(t) = 0,03\,(1 - \cos 10,5t) \cdot 1(t)$,

Проверка:



5. Изодромное звено.



Звено записывается уравнением: $y = \frac{k(Ts+1)}{s} \cdot g$, а его переходная функция

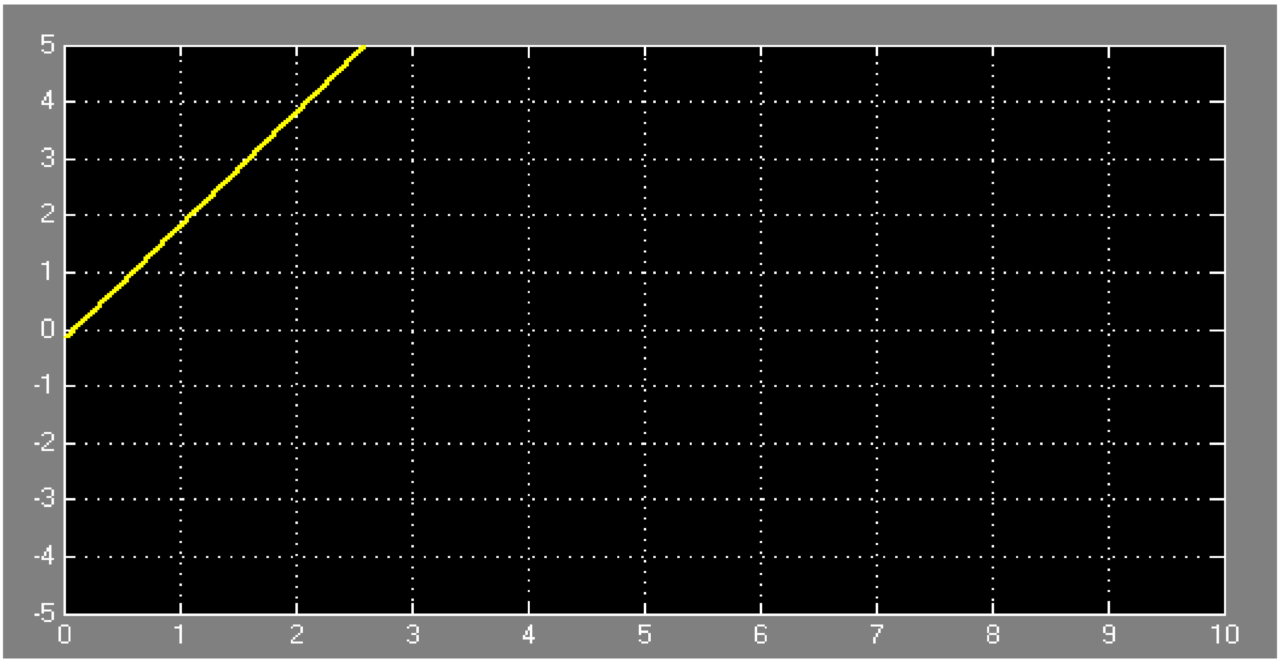
$h(t) = k \cdot (t + T) \cdot 1(t)$. Составим систему

$$h(t)=k(t+T)$$

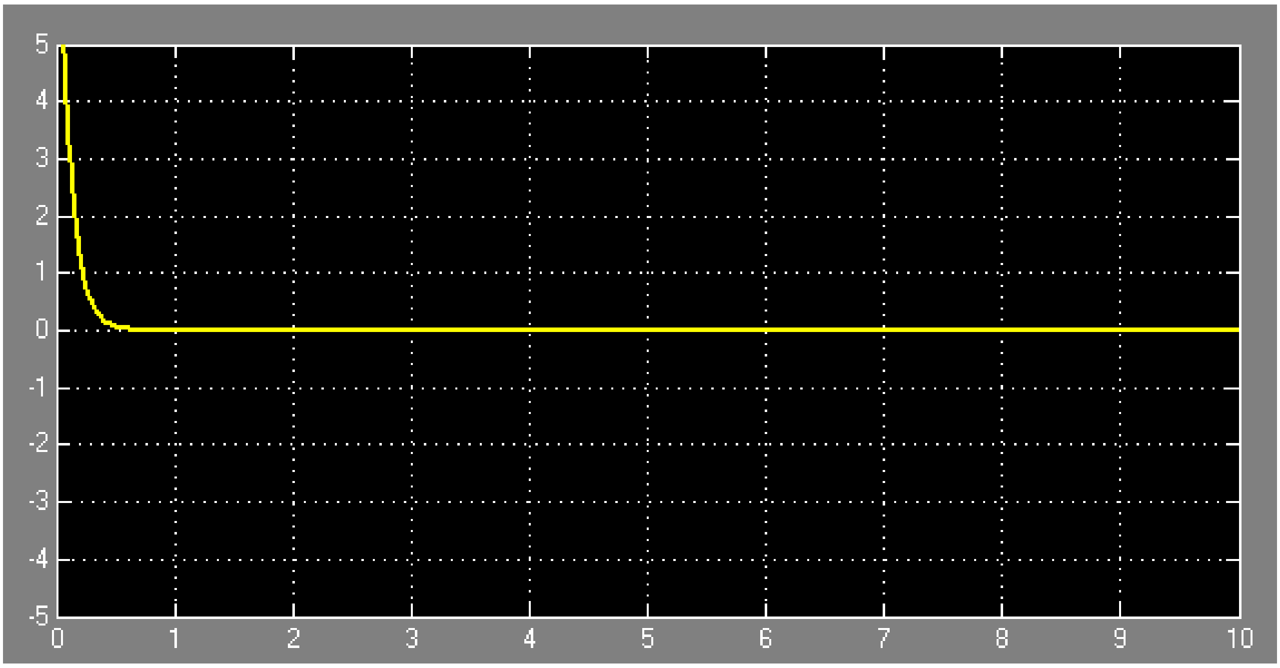
$$\begin{cases} 1=k(0.6+T) \\ 3=k(1.6+T) \end{cases} \qquad \begin{cases} T=-0.1 \\ k=2 \end{cases}$$

Тогда $y = \frac{2(-0,01s+1)}{s} \cdot g$, $h(t) = 2 \cdot (t - 0,01) \cdot 1(t)$.

Проверка:



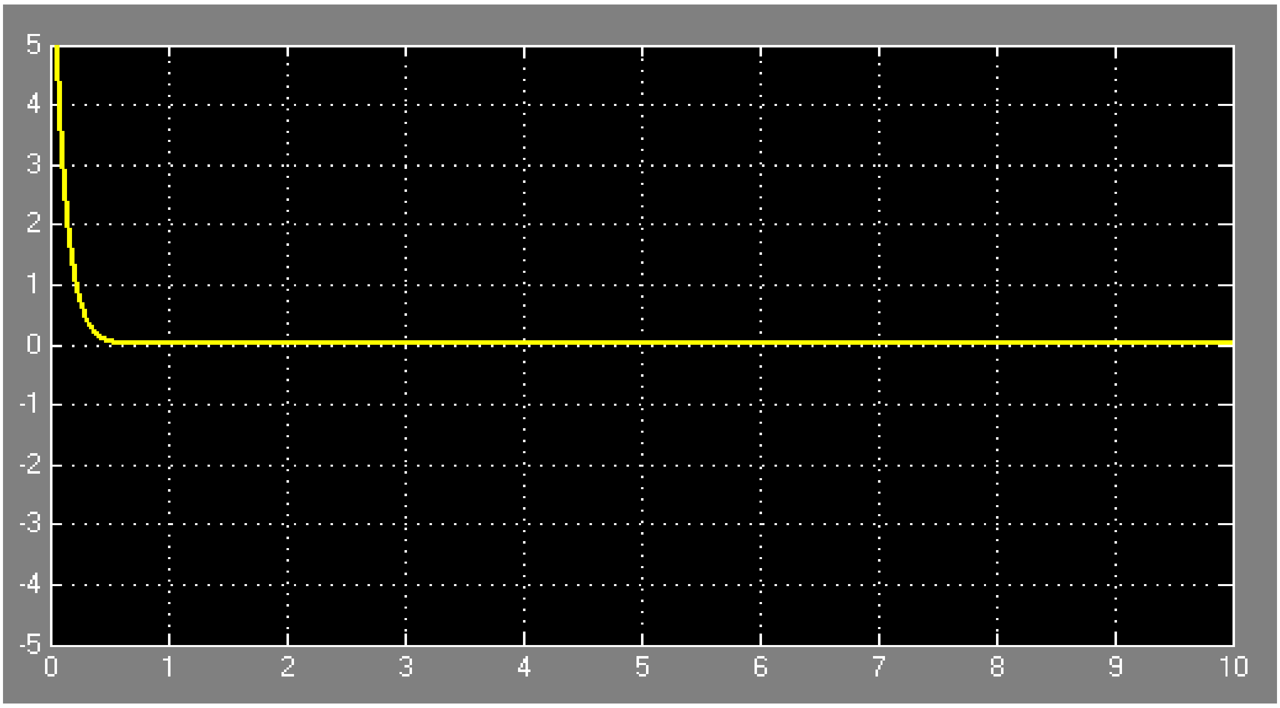
6. Реальное дифференцирующее звено.



Звено записывается уравнением: $y = \frac{ks}{Ts+1} \cdot g$, а его переходная функция

$h(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$. Из графика видно, что Т=0,1, тогда $k = 10 * 0{,}1 = 1$.

Проверка:



Вывод: исследовали переходные характеристики элементарных звеньев. Убедились, что данные характеристики найдены верно.