Цель работы. Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

Теоретические сведения. Математическая модель одной и той же линейной динамической системы может быть представлена в различных формах: в форме скалярного дифференциального уравнения n-го порядка (модель вход-выход) или в форме системы из n дифференциальных уравнений 1-го порядка (модель вход-состояние-выход). Следовательно, между различными формами представления математических моделей существует определенная взаимосвязь, т.е. модель вход-состояние-выход может быть преобразована к модели вход-выход и наоборот. При этом модели будут эквивалентными в том смысле, что они определяют одно и то же преобразование входного сигнала u в выходной y.

Модель вход-выход динамической системы описывается уравнением (подробнее — см. лабораторную работу № 1)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \ , \qquad (2.1)$$

где y и u — выходная и входная переменные, соответственно. При $m < n$, модель вход-состояние-выход имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Причем координаты вектора состояния x и коэффициенты матриц A, B и C зависят от выбора базиса в пространстве состояний. Преобразование вектора состояния, связанное с заменой базиса, задается выражениями

$$x = M\hat{x}, \qquad \hat{x} = M^{-1}x\,, \qquad (2.3)$$

где $\hat{x}$ —вектор состояния в "новом" базисе, M — неособая $n \times n$ матрица *преобразования координат*. Преобразование (2.3) обеспечивает переход от модели (2.2) к подобной модели

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \\ y = \hat{C}\hat{x}. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Матрицы подобных моделей связаны соотношениями:

$$\hat{A} = M^{-1}AM, \qquad \hat{B} = M^{-1}B, \qquad \hat{C} = CM\ .$$

Если известно, что модели (2.2) и (2.4) являются различными формами описания одной и тойже динамической системы, то матрица преобразования координат M может быть найдена из выражения

$$M = N_y \hat{N}_y^{-1},$$

где $N_y = [b \vdots Ab \vdots \ldots \vdots A^{n-1}b]$ — *матрица управляемости* модели (2.2), $\hat{N}_y = [\hat{b} \vdots \hat{A}\hat{b} \vdots \ldots \vdots \hat{A}^{n-1}\hat{b}]$ —матрица управляемости модели (2.4).

Переход от модели вход-состояние-выход (2.2) к модели вход-выход (2.1) является однозначным и определяется соотношением

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

где $W(s)$ — передаточная функция системы. Очевидно, что по известной передаточной функции может быть легко записано дифференциальное уравнение (2.1).

Переход от модели вход-выход (2.1) к модели вход-состояние-выход (2.2) является неоднозначным, что связано с возможностью достаточно произвольного назначения вектора состояния. На практике наиболее часто используются следующие две, так называемые, канонические формы представления моделей вход-состояние-выход: *каноническая наблюдаемая форма* и *каноническая управляемая форма*. Удобство канонических форм состоит в возможности непосредственного определения параметров матриц *A*, *B* и *C* на основе коэффициентов a_i и b_j дифференциального уравнения (2.1) без каких-либо дополнительных вычислений. Кроме того, использование канонических форм позволяет упростить решение целого ряда прикладных задач анализа и синтеза систем управления.

Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход удобнее всего совершать через схему моделирования. При этом в качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов, а уравнения состояния записываются в соответствии со структурой схемы моделирования.

Порядок выполнения работы.

1. *Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход.*

1.1. Математические модели вход-состояние-выход в канонической управляемой и канонической наблюдаемой формах. Передаточную функцию системы.

Вариант	Порядок модели *n*	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1	3	9	6	3	12	2	0,1

КНФ:

$$y''' + 3y'' + 6y' + 9y = 0{,}1u'' + 2u' + 12u$$

$$s^3Y + 3s^2Y + 6sY + 9Y = 0{,}1s^2U + 2sU + 12U \quad :1/s^3$$

$$Y + 3Y*1/s + 6Y*1/s^2 + 9Y*1/s^3 = 0{,}1U*1/s + 2*1/s^2U + 12U\,1/s^3$$

$$Y = 1/s(0{,}1U - 3Y) + 1/s^2(2U - 6Y) + 1/s^3(12U - 9Y)$$

$$\dot{x}_1 = -9x_3 + 12u$$

$$\dot{x}_2 = -6x_3 + 2u + x_1$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + x_2 + 0{,}1u$$

$$y = x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

КУФ:

$$y''' + 3y'' + 6y' + 9y = 0{,}1u'' + 2u' + 12u$$

$$s^3Y + 3s^2Y + 6sY + 9Y = 0{,}1s^2U + 2sU + 12U$$

$$\frac{Y}{0{,}1s^2 + 2s + 12} = \frac{U}{s^3 + 3s^2 + 6s + 9} = Z$$

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

$$x'_3 = -9x_1 - 6x_2 - 3x_3 + u$$

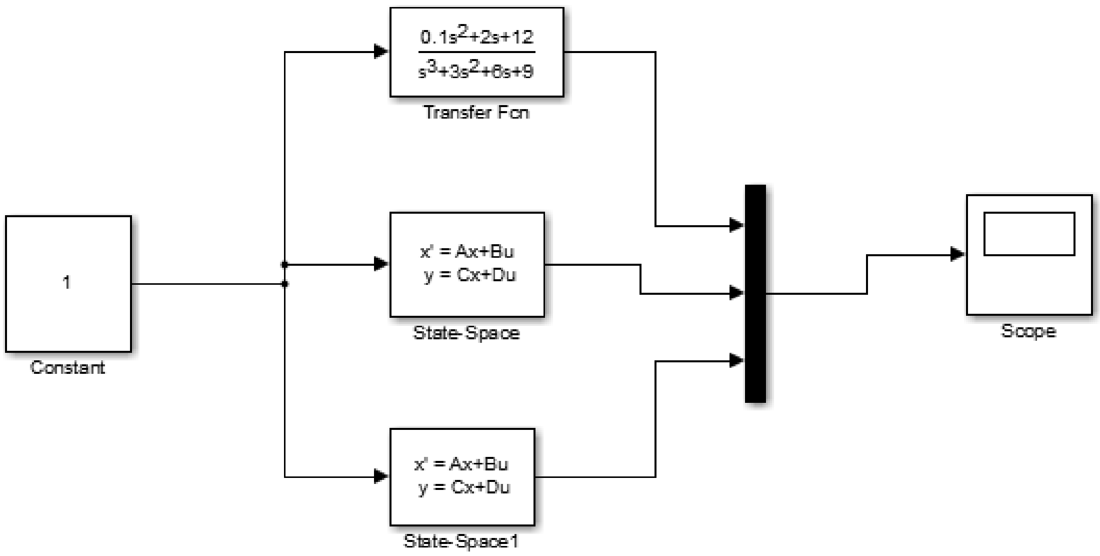
$$y = 0{,}1x_3 + 2x_2 + 12x_1$$

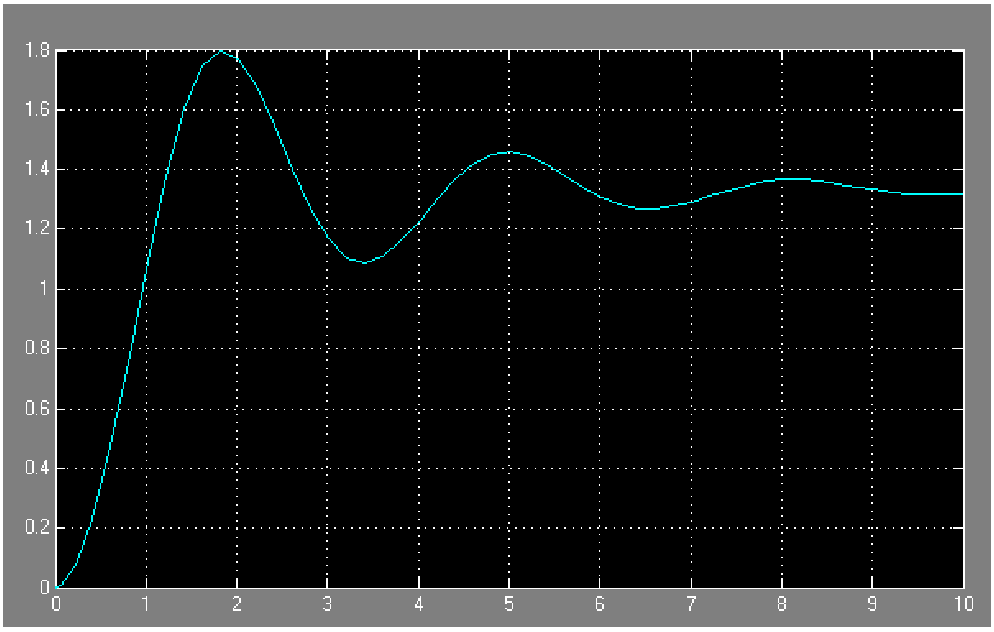
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Передаточная функция системы:

$$W(s) = \frac{Y}{U} = \frac{0{,}1s^2 + 2s + 12}{s^3 + 3s^2 + 6s + 9}$$

1.2. Моделирование моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. *Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход.*





2.1. Расчет передаточной функции системы, а также канонических моделей вход-состояние-выход.

Номер варианта	n	A	B	C^T
1	2	$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0{,}5 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \left(s * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0.5 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+8}{s^2+6s+6}$$

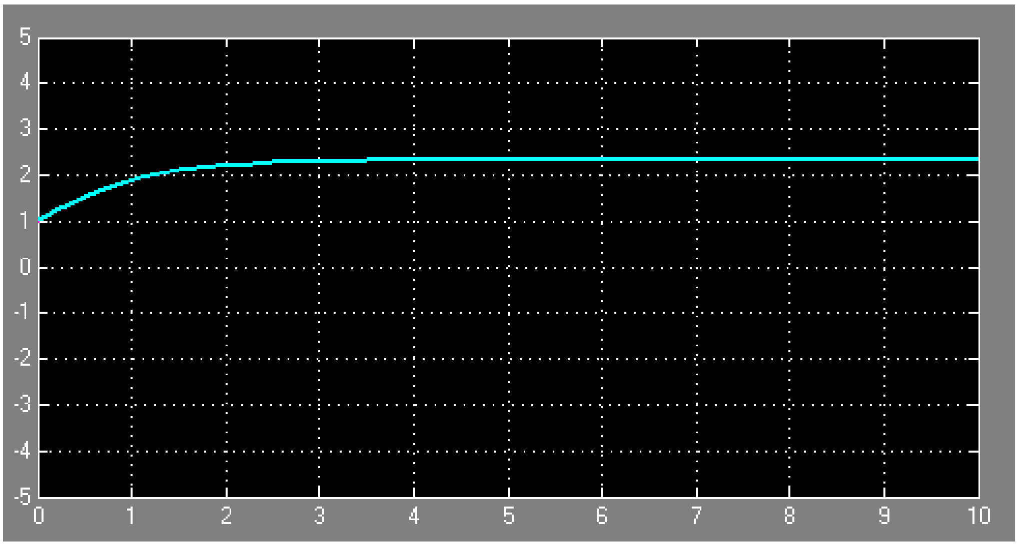
КНФ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

КУФ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Моделирование исходной модели и полученных моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме, при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.



2.3. Рассчитать матрицы преобразования исходной модели к каноническим формам.

$$M = N_y \hat{N}_y^{-1},$$

КНФ:

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0,5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,33 & -2 \\ 3,92 & -4 \end{bmatrix}$$

КУФ:

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0,5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0,33 \\ 4,5 & 0,67 \end{bmatrix}$$

3. *Замена базиса в пространстве состояний.*

3.1. В соответствии с вариантом матрицы преобразования координат (см. табл.2.2), построить модель, подобную модели из п.2.1.

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

Вариант	m_{11}	m_{12}	m_{21}	m_{22}
1	2	1	0	4

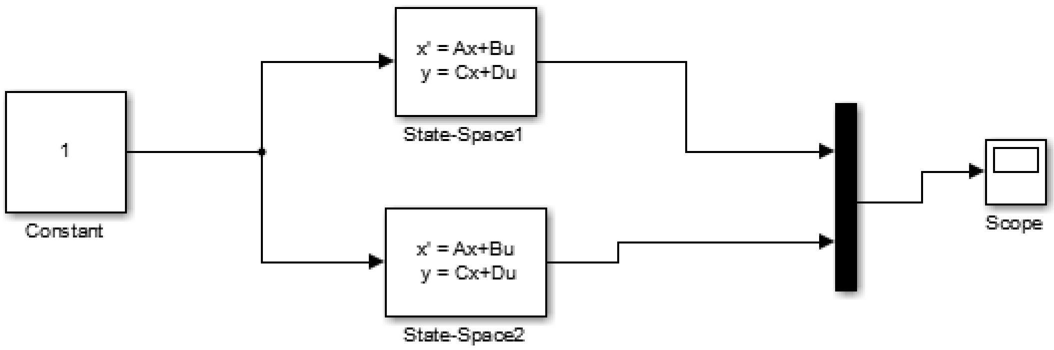
$$\hat{A} = M^{-1}AM, \qquad \hat{B} = M^{-1}B, \qquad \hat{C} = CM\,.$$

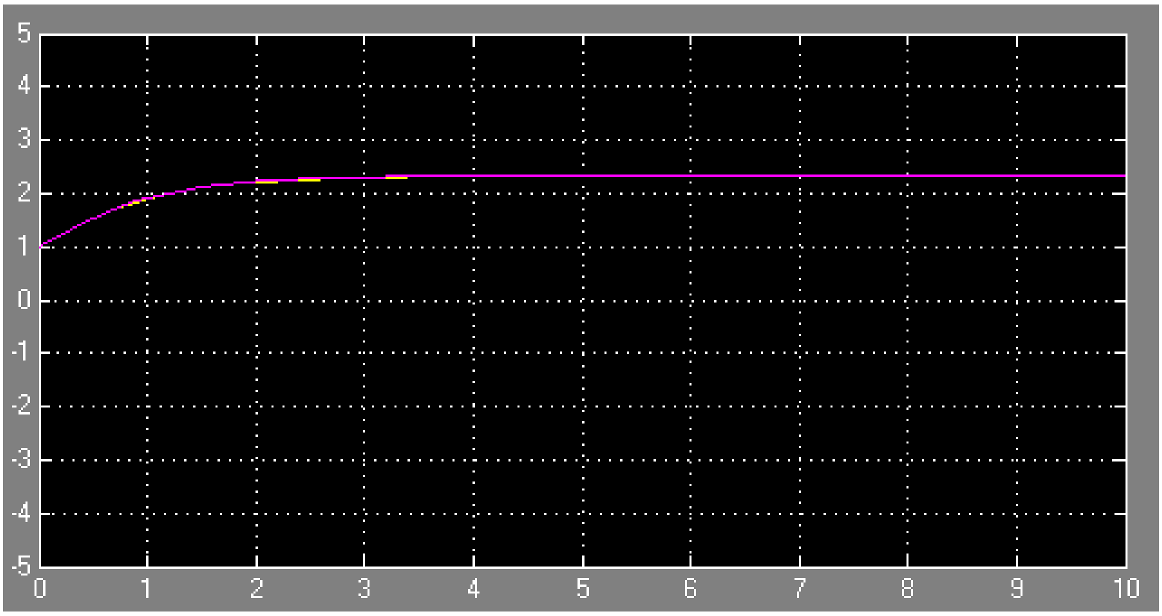
$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0{,}5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}13 & 8{,}94 \\ 0{,}25 & -3{,}88 \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2. Моделирование исходной и преобразованной систем при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.





Вывод: познакомились с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход. Убедились, что независимо от того, какой формой представляем модель, входные и выходные сигналы остаются теми же.