Цель работы. Ознакомление с пакетом прикладных программ SIMULINK и основными приемами моделирования линейных динамических систем.

Теоретические сведения. Математическая модель линейной стационарной системы может быть представлена в виде скалярного дифференциального уравнения n-го порядка (модель *вход-выход*) или в виде системы из n дифференциальных уравнений 1-го порядка (модель *вход-состояние-выход*). Модель вход-выход имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u, \qquad (1.1)$$

где y — выходная переменная, u — входной сигнал, n — порядок системы, m — порядок производной выходной переменной, в явном виде зависящей от u ($m \le n$), a_j, b_j — постоянные коэффициенты. При условии, что $m \le n$, модель вход-состояние-выход может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 u, \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 u, \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n u, \\ \quad y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n, \end{cases} \qquad (1.2)$$

где x_j — координаты вектора состояния, α_{ij} и β_j — постоянные коэффициенты. С использованием обозначений

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{vmatrix}, \quad C^T = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

система (1.2) может быть представлена в компактной векторно-матричной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \qquad (1.2a)$$

где A — $n \times n$ матрица постоянных коэффициентов, B — $n \times 1$ вектор-столбец постоянных коэффициентов, C — $1 \times n$ вектор-строка постоянных коэффициентов, а x — n-мерный вектор состояния.

Напомним, что решением дифференциального уравнения (1.1) (или, соответственно, системы (1.2)) является функция времени $y(t)$ (или вектор-функция $x(t)$), обращающая данное уравнение (систему) в тождество и удовлетворяющая заданным *начальным условиям.* Для дифференциального уравнения (1.1) начальные условия накладываются на переменную y и ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно:

$$y^{(j)}(0) = y_{j0}, \quad j = 0,1,\ldots,n-1,$$

а для системы (1.2) — на координаты вектора состояния: $x_j(0) = x_{jo}$, $j = 1,2,\ldots,n$. Особо отметим, что в теории управления под начальными условиями понимают условия, которые существовали до момента приложения входного сигнала. Поэтому для любой функции $f(t)$ ее начальное значение понимается в смысле предела

$$f(0) = \lim_{\tau\to 0} f(\tau), \qquad (1.3)$$

где переменная τ стремится к нулю, оставаясь отрицательной ($\tau < 0$). При этом говорят, что предел (1.3) задает *начальные условия слева,* т.е. в начальный момент $t = -0$. В соответствии с принятой трактовкой начальных условий, имеем $u^{(i)}(0) = u^{(i)}(-0) = 0$ для всех $i = 0,1,2,\ldots$.

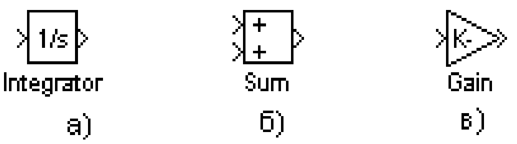


Рис. 1.1. Блоки элементарных

операций: а) интегратор; б)

С помощью блоков элементарных операций — *интегратора, сумматора и блока усиления* (см. рис.1.1) — могут быть составлены схемы моделирования уравнений (1.1) и (1.2). Указанные блоки легко реализуются физически (например, в виде электронных схем на основе операционных усилителей) и составляют элементную базу аналоговых вычислительных машин (АВМ).Для составления схемы моделирования дифференциальных уравнений (1.2) необходимо использовать n интеграторов (число интеграторов определяется числом дифференциальных уравнений). При этом полагается, что на выходе j-го интегратора действует величина x_j, а на его входе, соответственно, $\dot{x}_j$. Далее, в соответствии со структурой правых частей уравнений (1.2) вводятся прямые и обратные связи, формирующие сигналы $\dot{x}_j$.

Порядок выполнения работы.

1. *Исследование модели вход-выход***.**

1.1. $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$

Вариант	Порядок модели n	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1	3	9	6	3	12	2	0,1

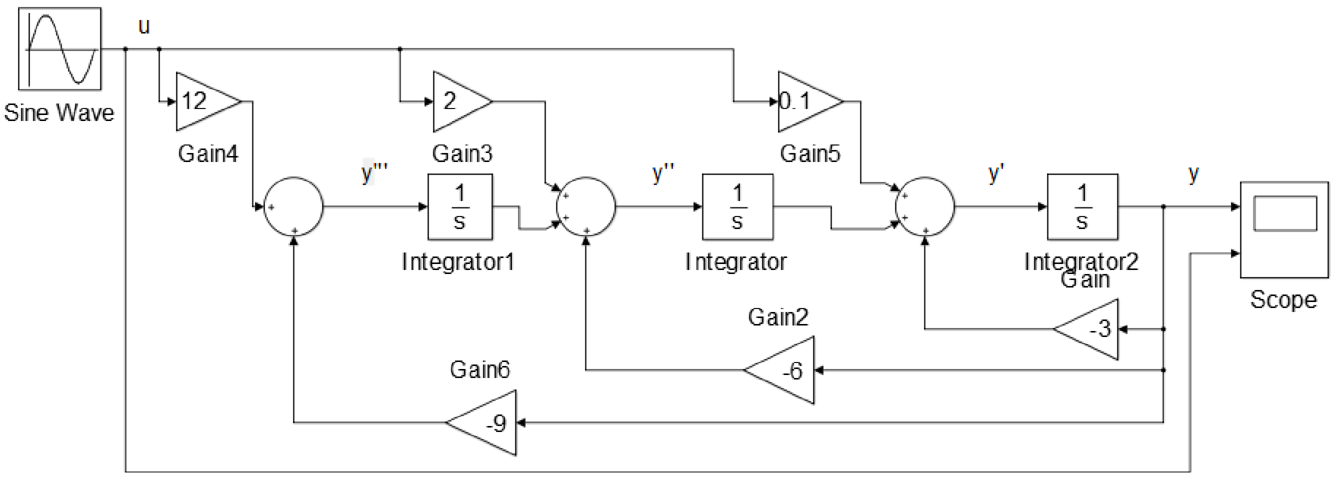
$$y''' + 3y'' + 6y' + 9y = 0{,}1u'' + 2u' + 12u$$

$$s^3Y + 3s^2Y + 6sY + 9Y = 0{,}1s^2U + 2sU + 12U \quad :1/s^3$$

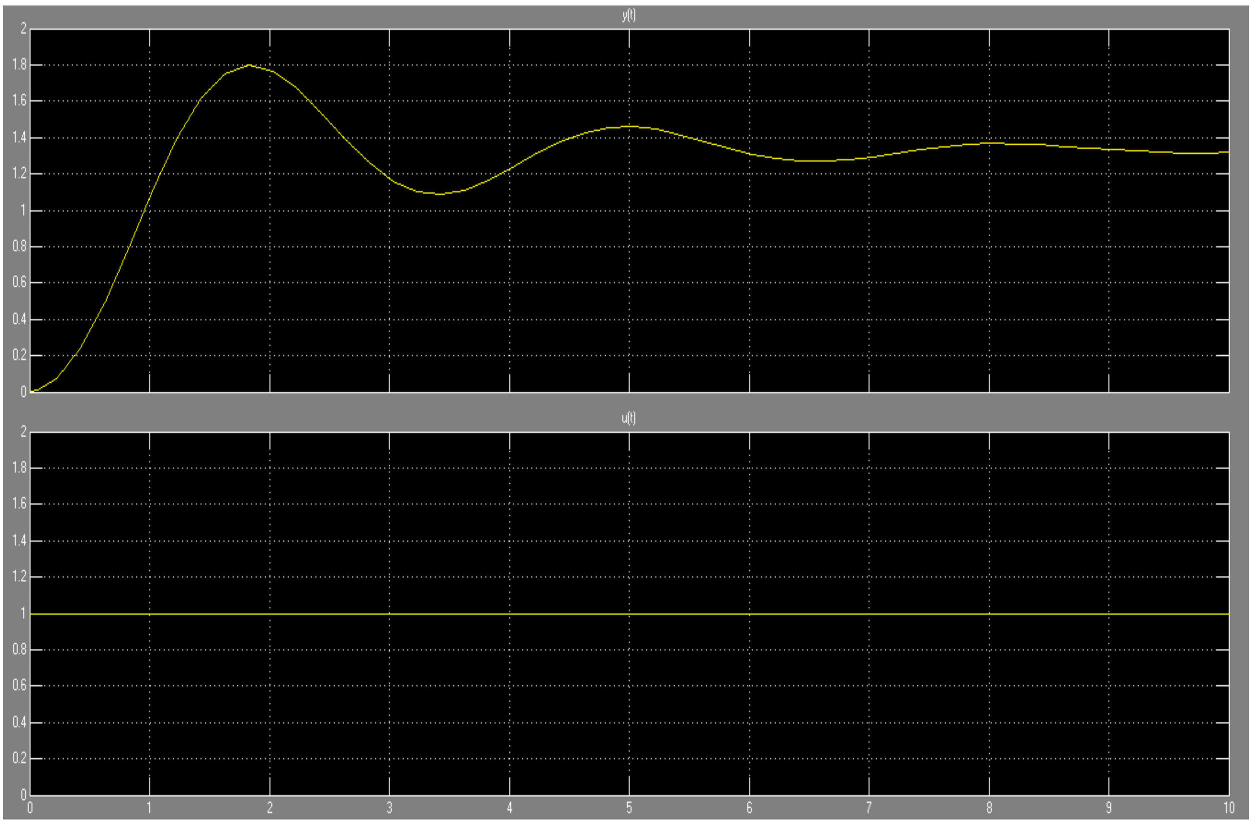
$$Y + 3Y*1/s + 6Y*1/s^2 + 9Y*1/s^3 = 0{,}1U*1/s + 2*1/s^2U + 12U\,1/s^3$$

$$Y = 1/s(0{,}1U - 3Y) + 1/s^2(2U - 6Y) + 1/s^3(12U - 9Y)$$

Схема моделирования линейной динамической системы.

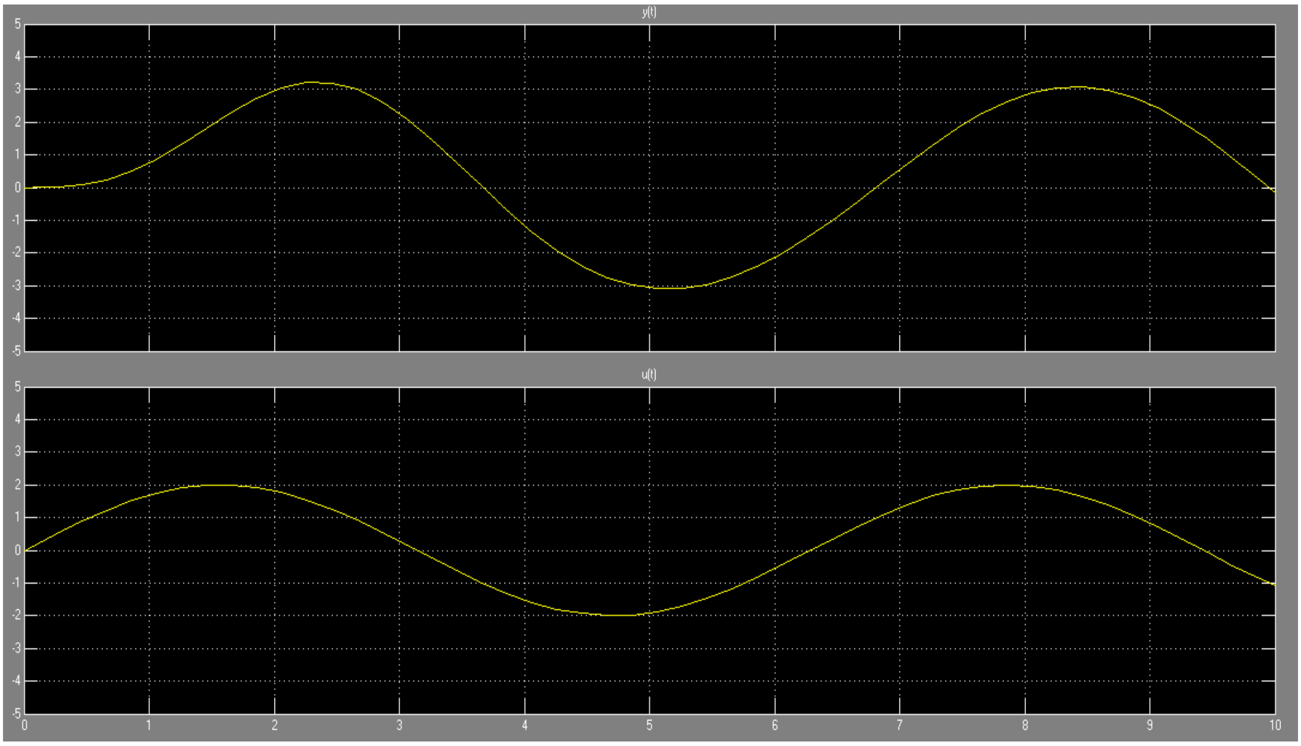


1.2. Моделирование системы при двух видах входного воздействия — $u = 1(t)$ и $u = 2\sin t$ — и нулевых начальных условиях.



а) Сигнал y(t) при входном воздействии u=1(t)

б) Сигнал u=1(t)



а) Сигнал y(t) при входном воздействии u=2sin(t)
б) Сигнал u=2sin(t)

1.3. Моделирование свободного движения системы, т.е. с нулевым входным воздействием и ненулевыми начальными условиями.

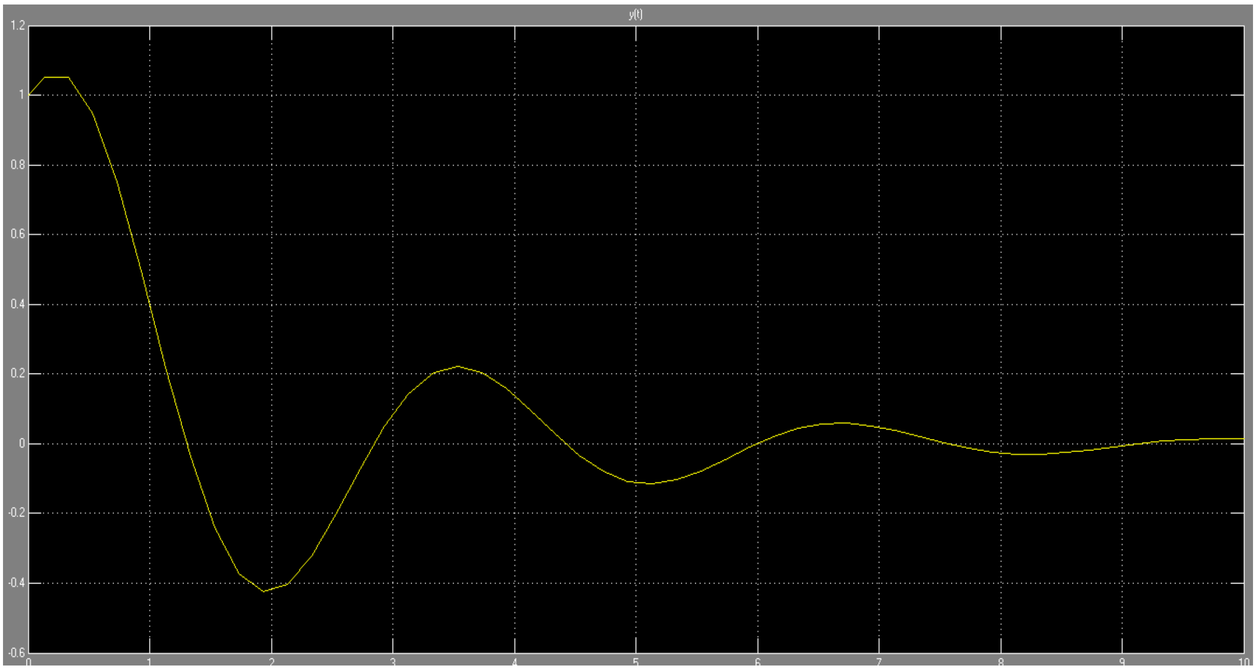
Вариант	Порядок модели n	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	$\ddot{y}(0)$
1	3	1	0,5	0

Рассчитаем начальные условия интеграторов.
Обозначим выходные сигналы интеграторов z1, z2, z3 справа налево.
u(0)=u'(0)=0

$$z_1 = y \rightarrow z1(0) = y(0) = 1$$

$$y' = z1' = 0{,}1\,u + z2 - 3y \rightarrow z2(0) = y'(0) - 0{,}1\,u + 3y = 0{,}5 - 0 + 3 = 3{,}5$$

$$y'' = z2' = 2u + z3 - 6y \rightarrow z3(0) = y'' - 2u + 6y = 0 - 0 + 6 * 1 = 6$$



Сигнал y(t) при свободном движении системы

2. *Исследование модели вход-состояние-выход***.**

2.1.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

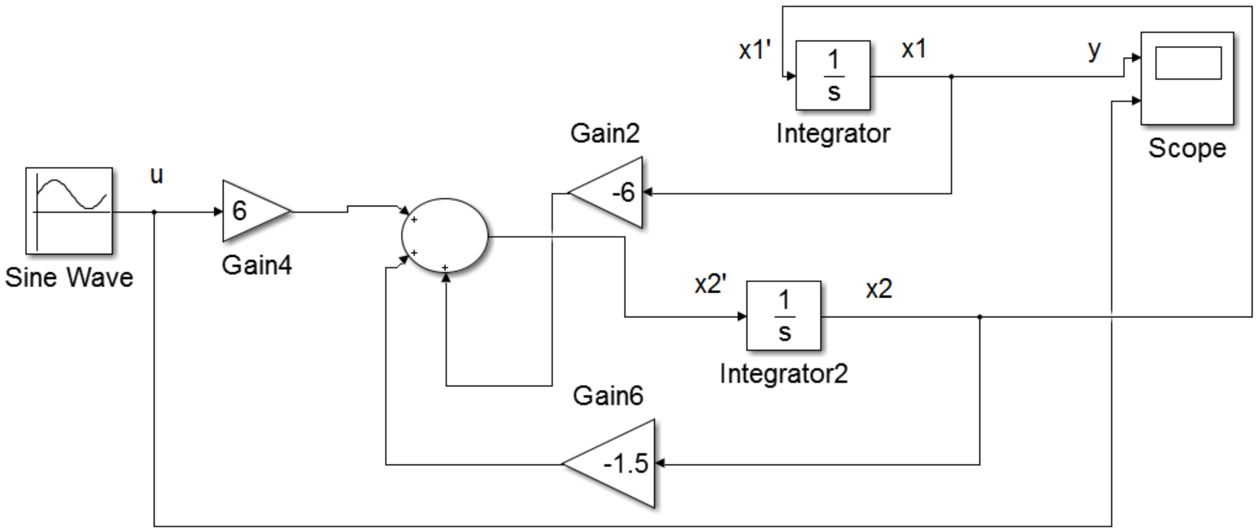
Вариант	n	*A*	*B*	C^T
1	2	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$x'_1 = x_2$$

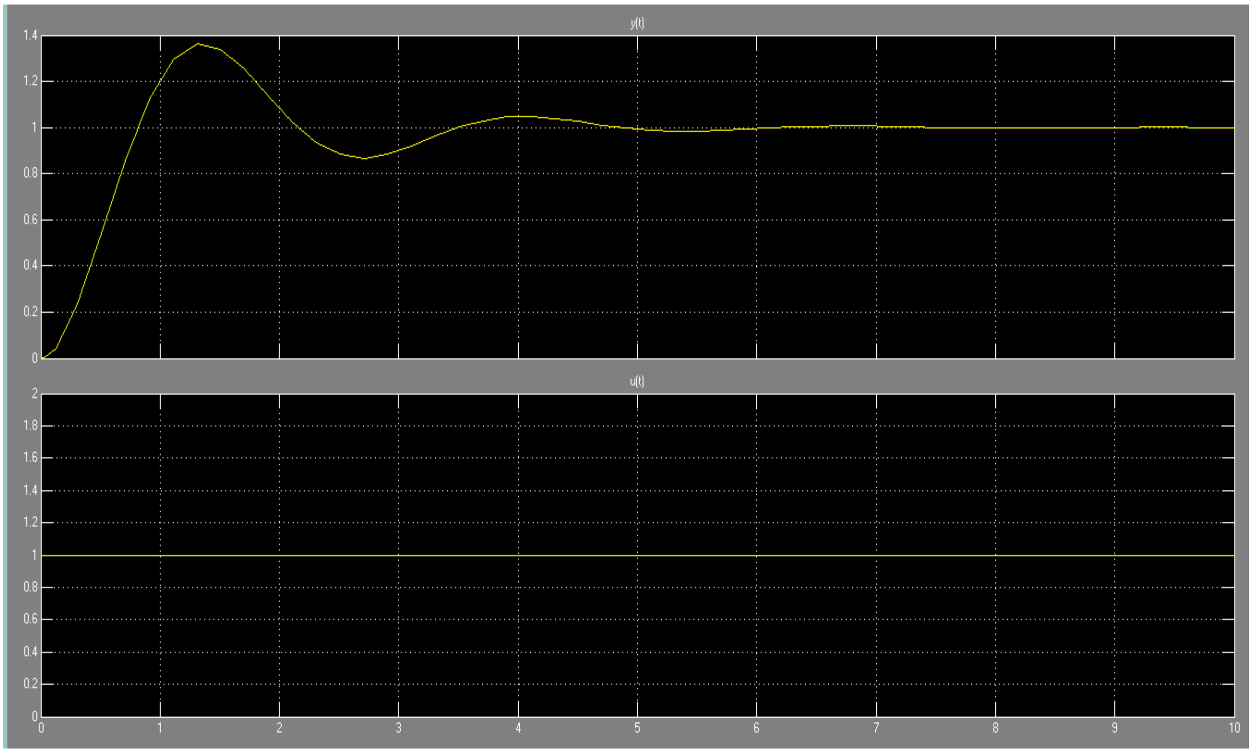
$$x'_2 = -6x_1 - 1{,}5\,x_2 + 6u$$

$$y = x_1$$

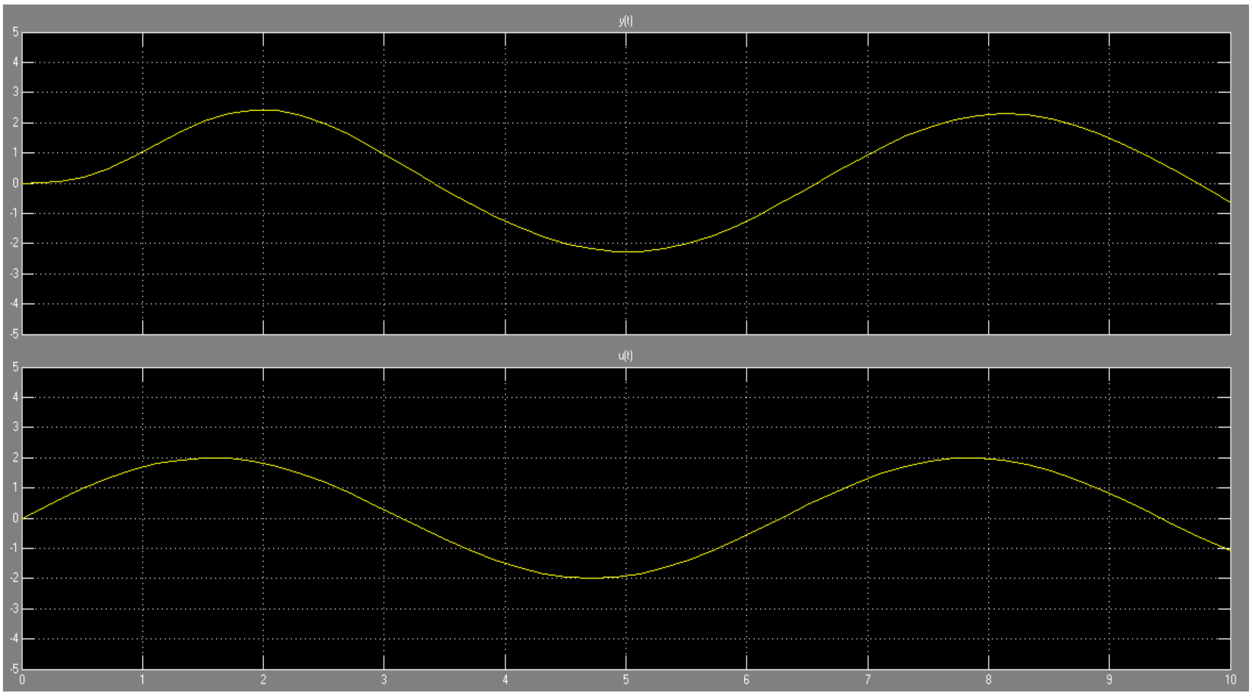
Схема моделирования линейной динамической системы.



2.2. Моделирование линейной динамической системы при двух видах входного воздействия: $u = 1(t)$ и $u = 2\sin t$. Для всех вариантов начальное значение вектора состояния нулевое.



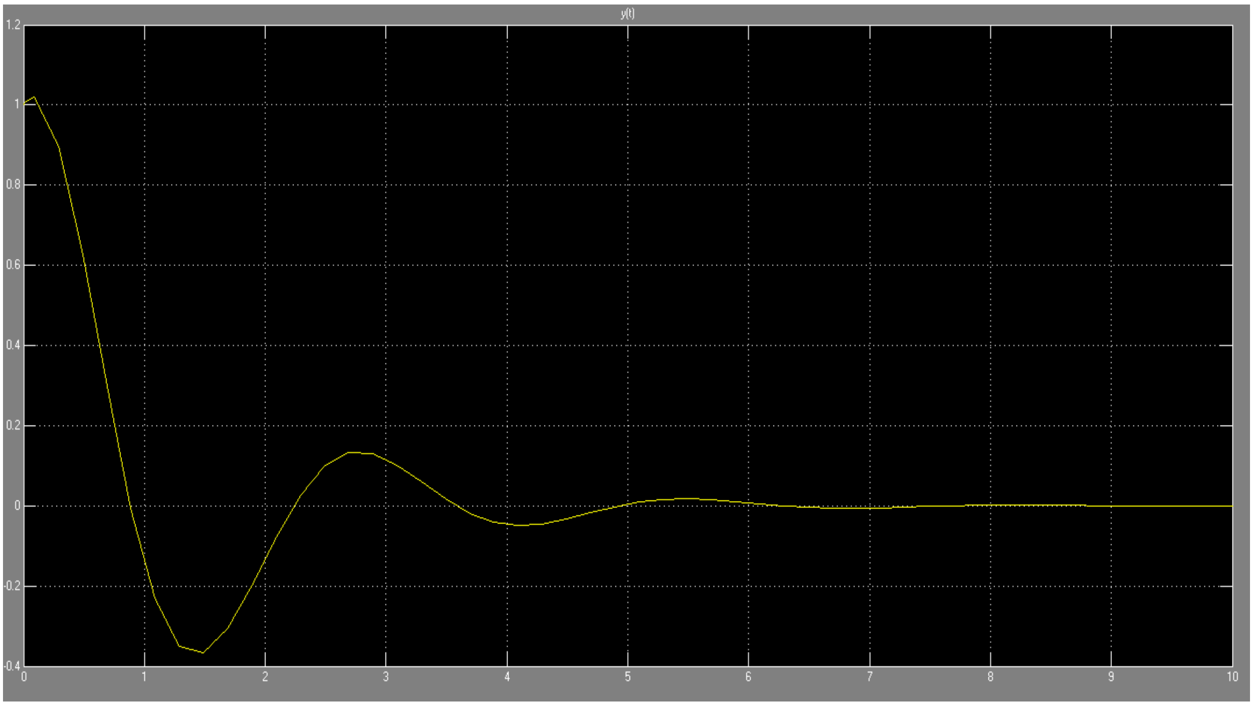
а) Сигнал y(t) при входном воздействии u=1(t)
б) Сигнал u=1(t)



а) Сигнал y(t) при входном воздействии u=2sin(t)
б) Сигнал u=2sin(t)

2.3. Моделирование свободного движения системы с начальными условиями.

Вариант	$x_1(0)$	$x_2(0)$
1	1	0,5



Сигнал y(t) при свободном движении системы

Вывод: научились моделировать в пакете прикладных программ SIMULINK две формы (вход-выход, вход-состояние-выход) моделей линейных динамических систем при различных начальных условиях и входных воздействиях. Были получены графики входных и выходных сигналов (u(t) и y(t)).