Федеральное агентство по образованию

Томский государственный архитектурно-строительный университет

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Методические указания

Составители Б.А. Тухфатуллин, Р.И. Самсонова

Томск 2010

Расчет статически неопределимых систем методом сил: методические указания / Сост. Б.А. Тухфатуллин, Р.И. Самсонова. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2010. – 34 с.

Рецензент к.т.н., доцент А.Л. Иванов

Редактор Т.С. Володина

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы «Расчет статически неопределимой рамы методом сил».

Методические указания предназначены для студентов всех направлений подготовки инженеров, специалистов и бакалавров, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Механика», «Строительная механика».

Печатаются по решению методического семинара кафедры строительной механики № 9 от 22.05.2010.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе

В.В. Дзюбо

с 01.09.2010
до 01.09.2015

Оригинал-макет подготовлен Б.А. Тухфатуллиным.

Подписано в печать
Формат 60×84/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 200 экз. Заказ №

Изд.-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях рассмотрены вопросы расчета статически неопределимых систем на заданное силовое воздействие и осадку опор. Для расчета использован один из классических методов строительной механики – метод сил.

В первом разделе методических указаний кратко изложены теоретические основы метода сил: определение количества неизвестных, выбор основной системы, вычисление коэффициентов и составление канонических уравнений, построение окончательных эпюр внутренних усилий и их проверка.

Второй и третий разделы содержат примеры расчета статически неопределимой рамы и неразрезной балки на действие заданной нагрузки.

В четвертом разделе изложен расчет неразрезной балки на заданное смещение опор.

Все рассмотренные в методических указаниях задачи являются дважды статически неопределимыми Расчет систем с большим количеством неизвестных принципиально не отличается от рассмотренных.

Основная сложность расчетов связана с необходимостью строить эпюры внутренних усилий в статически определимых системах и находить перемещения с помощью метода Мора. Существенную помощь в проверке результатов ручного расчета, поиска ошибок на всех этапах решения задачи может оказать программа ***Ms***, разработанная на кафедре строительной механики ТГАСУ. По подготовленным числовым данным программа проверяет ординаты и строит на экране монитора все необходимые эпюры, контролирует правильность составления и решения канонических уравнений. Порядок подготовки исходных данных и работы с программой ***Ms*** рассмотрен в пятом разделе методических указаний.

В приложении 1 к методическим указаниям приведена таблица готовых формул для перемножения эпюр.

Контрольные вопросы по разделу «Расчет статически неопределимых систем методом сил» приведены в приложении 2.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Расчет статически неопределимых рам и неразрезных балок может быть произведен различными методами: методом сил, перемещений, смешанным [1–4]. *В методе сил за неизвестные принимают обобщенные реакции в отброшенных лишних связях системы*.

Число неизвестных, равное числу лишних связей называется *степенью статической неопределимости*.

Степень статической неопределимости можно установить исходя из того, что каждый замкнутый бесшарнирный контур имеет три лишние связи, а каждый простой шарнир или ползун, введенные в такой контур, устраняют по одной связи, то есть понижают степень статической неопределимости на единицу. Тогда формула для установления степени статической неопределимости будет иметь вид:

$$Л = 3К - Ш - П, \tag{1.1}$$

где $К$ - число замкнутых контуров;

$Ш$ - число простых шарниров;

$П$ - число ползунковых опор.

Степень статической неопределимости неразрезной балки обычно находят по формуле:

$$Л = C_0 - 3, \tag{1.2}$$

где C_0 - число опорных связей;

3 - три уравнения статического равновесия.

В статически неопределимой системе различают два вида связей*: условно необходимые* (условно лишние) и *абсолютно необходимые*. Усилия в абсолютно необходимых связях являются статически определимыми.

Для перехода от заданной статически неопределимой рамы к основной системе следует отбросить лишние условно необходимые связи и заменить их действие неизвестными обобщенными силами $X_1, X_2, ... X_n$. Выбор основной системы является важным этапом расчета, так как от него зависит простота и точность расчета.

Основная система должна работать так же, как и заданная. Условия эквивалентности основной и заданной системы выражаются в форме *канонических уравнений*:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1f} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2f} = 0, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nf} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Каждое из этих уравнений отрицает перемещение по направлению отброшенной связи от всех неизвестных и от заданной нагрузки, так как в заданной системе по каждому из этих направлений перемещение равно нулю.

Коэффициенты при неизвестных $(\delta_{11}, \delta_{12}, ... \delta_{nn})$ представляют собой перемещения в основной системе по направлению неизвестных $X_1, X_2, ... X_n$ от единичных значений этих сил. Свободные члены уравнений $(\Delta_{1f}, \Delta_{2f}, ... \Delta_{nf})$ имеют смысл перемещений по направлению неизвестных от заданной нагрузки.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы уравнений (1.3) определяются с помощью *интеграла Мора*:

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_i}{EJ} ds; \quad \delta_{iк} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_к}{EJ} ds; \quad \Delta_{if} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot M_f}{EJ} ds. \quad (1.4)$$

Предварительно необходимо построить в основной системе эпюры $\overline{M}_1, \overline{M}_2, ... \overline{M}_n$ от $\overline{X}_1 = 1, \overline{X}_2 = 1, ... \overline{X}_n = 1$ и эпюру M_f от заданной нагрузки.

Для вычисления интегралов (1.4) в случае прямолинейных стержней с постоянной по длине жесткостью используют *способ А. Н. Верещагина*.

Вычисленные коэффициенты при неизвестных и свободные члены перед решением системы уравнений (1.3) следует проверить.

Одновременная проверка всех коэффициентов при неизвестных состоит в том, что $\sum \sum \delta_{iк} = \sum \int \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} dx$, (1.5)

где $\overline{M}_\Sigma$ - суммарная единичная эпюра:

$$\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + ... + \overline{M}_n \ . \quad (1.6)$$

Построчные проверки состоят в том, что:

$$\delta_{i1} + \delta_{i2} + ... + \delta_{in} = \sum \int \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_i}{EJ} dx \ . \quad (1.7)$$

Проверка свободных членов сводится к выполнению условия:

$$\Delta_{1f} + \Delta_{2f} + ... + \Delta_{nf} = \sum \int \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot M_f}{EJ} dx. \quad (1.8)$$

После определения и проверки всех коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений последние решают совместно и находят значения реакций устраненных связей $X_1, X_2, ... X_n$.

Окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной системе можно построить двумя способами. По первому способу найденные значения сил $X_1, X_2, ... X_n$ и заданную нагрузку прикладывают к основной системе. От этих нагрузок из уравнений статического равновесия определяют реакции в опорных связях и для построения окончательной эпюры M составляются аналитические выражения для отдельных участков основной системы.

По второму способу на основании принципа независимости действия сил окончательная эпюра изгибающих моментов строится как алгебраиче-

ская сумма ординат единичных эпюр $\overline{M}_i$, умноженных на соответствующие найденные значения сил X_i и эпюры M_f:

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + ... + \overline{M}_n \cdot X_n + M_f \ . \qquad (1.9)$$

Построенная эпюра M в свою очередь должна быть проверена из условия статики и кинематики. *Статическая проверка* состоит в том, что все узлы рамы должны быть уравновешены, то есть сумма окончательных моментов в любом узле равна нулю. Такая проверка необходима, но недостаточна, так как может служить лишь контролем правильности суммирования отдельных уравновешенных эпюр согласно (1.9).

Достаточной проверкой служит *кинематическая (деформационная) проверка*, которая производится из условия деформирования заданной системы. Если эпюра M построена верно, то условное перемещение основной, или, что то же, заданной системы, по направлению всех устраненных лишних связей от всех неизвестных и нагрузки должно быть равно нулю:

$$\Delta_\Sigma = \sum \Delta_i = \sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = 0 . \qquad (1.10)$$

Точно так же должно выполняться любое из условий:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_i}{EJ} ds = 0 , \qquad (1.11)$$

где $i = 1,2,...n;$ $\overline{M}_i$ - любая единичная эпюра; n - число неизвестных в системе.

Эпюры поперечных сил Q и продольных сил N строят так же, как и в статически определимых системах. Проверки эпюр Q и N состоят в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих внешних и внутренних сил должна быть равна нулю.

В статически неопределимых системах возникают дополнительные внутренние силы от смещений опорных связей. Начальная стадия расчета методом сил на осадку опорных связей аналогична расчету на внешние нагрузки. Отличие появляется при записи канонических уравнений, в которых свободные члены от внешней нагрузки Δ_{if} заменяются перемещениями Δ_{ic}, вызванными заданной осадкой опорных связей в основной системе по направлению отброшенных лишних связей.

Для определения Δ_{ic} используется формула:

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{xi} \cdot \Delta_k , \qquad (1.12)$$

где R_{xi} - реакция в смещаемой связи от $\overline{X}_i = 1$; Δ_κ - заданная величина смещения; κ - номер смещаемой связи.

Окончательная эпюра изгибающих моментов в заданной системе состоит только из одних единичных эпюр, умноженных на найденные значения неизвестных:

$$M = M_c = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + ... + \overline{M}_n \cdot X_n . \qquad (1.13)$$

Кинематическая проверка эпюры M производится по условию:

$$\Delta_\Sigma = \int \frac{M \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds + \sum \Delta_{ic} = 0 . \qquad (1.14)$$

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Для рамы, показанной на рис. 2.1, а, построить эпюры M, Q, N и произвести промежуточные и окончательные проверки.

Заданная рама два раза статически неопределима (см. рис. 2.1, б: $К = 1$, $Ш = 1$, $П = 0$, $Л = 3 \cdot 1 - 1 - 0 = 2$). Основную систему можно получить отбрасыванием внешних (рис. 2.1, в, г) или внутренних (рис. 2.1, д, е) связей. Наиболее простую с точки зрения расчета основную систему получаем путем разреза заданной рамы по шарниру D. В результате такого разреза рама потеряла две связи, препятствующие взаимному смещению по горизонтали и по вертикали сечений, расположенных вплотную по разные стороны от шарнира D. В соответствии с этим каждое из неизвестных X_1 и X_2 состоит из двух сил, направленных в противоположные стороны (рис. 2.1, е). Канонические уравнения имеют вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} = 0,$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} = 0.$$

Канонические уравнения указывают на отсутствие взаимных смещений смежных сечений в месте разреза, так как наличие в этом месте шарнира D в заданной системе таковых смещений не допускает.

Так как оси всех стержней прямолинейны и жесткости в пределах каждого стержня постоянны, то для вычисления перемещений δ_{ik} и Δ_{if} можно воспользоваться способом А. Н. Верещагина. Последовательно загружая основную систему силами $\overline{X}_1 = 1$, $\overline{X}_2 = 1$ и внешней нагрузкой, строим единичные эпюры $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ и грузовую эпюру M_f (рис. 2.2, а - в).

Коэффициенты при неизвестных:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}733 + \frac{1}{2EJ} \cdot 2{,}2 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}466 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot 2{,}2 \cdot 3 \cdot 2{,}2 = \frac{16{,}516}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EJ} ds = -\frac{1}{2EJ} \cdot 2{,}2 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 = -\frac{1{,}815}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EJ} ds = 3 \cdot (\frac{1}{EJ} \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1) + \frac{1}{2EJ} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}5 = \frac{5{,}850}{EJ}.$$

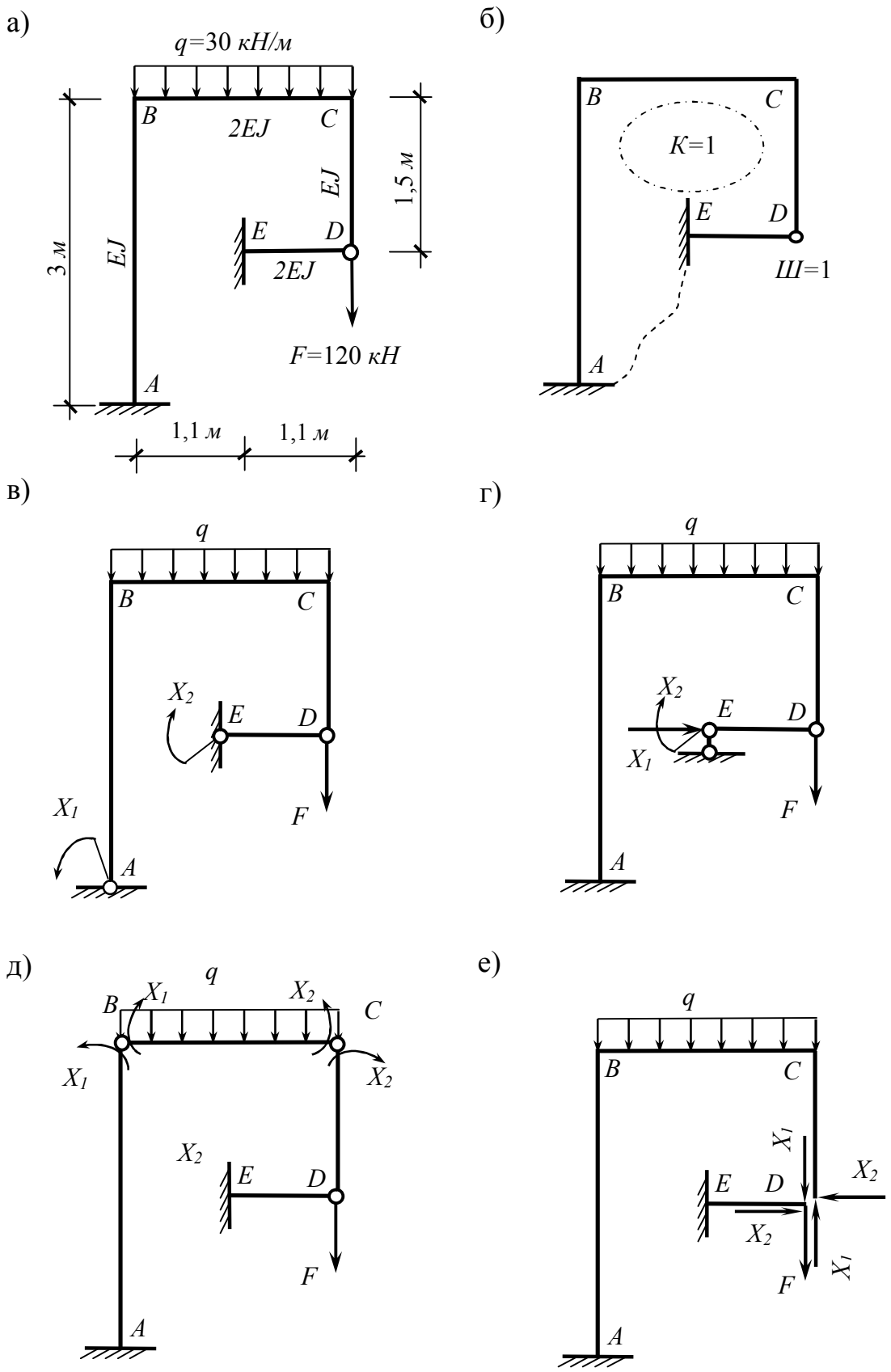

а)
q=30 кН/м
B
C
2EJ
EJ
1,5 м
E
D
3 м
EJ
2EJ
F=120 кН
A
1,1 м
1,1 м
б)
B
C
K=1
E
D
Ш=1
A
в)
q
B
C
X2
E
D
X1
F
A
г)
q
B
C
X2
E
D
X1
F
A
д)
q
B
X1
X2
C
X1
X2
X2
E
D
F
A
е)
q
B
C
X1
X2
E
D
X2
F
X1
A

Рис. 2.1

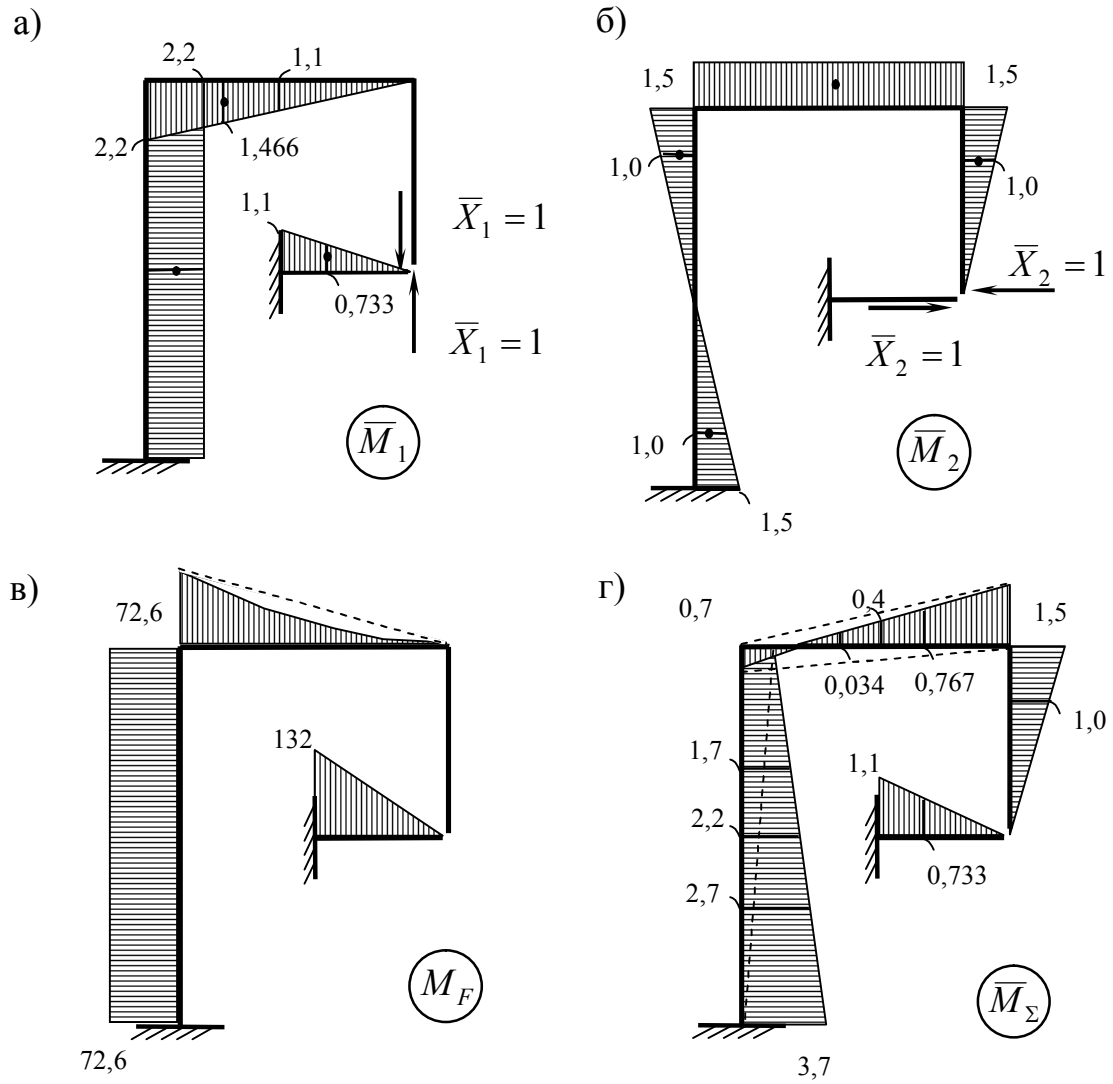


Рис. 2.2

Строим суммарную единичную эпюру $\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$ (рис. 2.2, г) и проводим универсальную проверку правильности вычисленных коэффициентов при неизвестных:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{1}{EJ}(16{,}516 + 5{,}85 - 2 \cdot 1{,}815) = \frac{18{,}736}{EJ};$$

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \sum \int \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}733 + \frac{1}{EJ} \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1 +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}767 - \frac{1}{2EJ} \cdot 0{,}7 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}034 + \frac{1}{EJ} \cdot 0{,}7 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}7 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot 3{,}7 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}7 = \frac{18{,}736}{EJ}.$$

Результаты совпали, следовательно, коэффициенты при неизвестных вычислены верно.

Определяем свободные члены:

$$\Delta_{1f} = \sum \int \frac{M_f \cdot \overline{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot 132 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}733 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{30 \cdot 2{,}2^3}{12} \cdot 1{,}1 -$$

$$- \frac{1}{2EJ} \cdot 72{,}6 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}466 - \frac{1}{EJ} \cdot 72{,}6 \cdot 3 \cdot 2{,}2 = -\frac{496{,}448}{EJ};$$

$$\Delta_{2f} = \sum \int \frac{M_f \cdot \overline{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot 72{,}6 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{30 \cdot 2{,}2^3}{12} \cdot 1{,}5 = \frac{39{,}93}{EJ}.$$

Проверяем значения свободных членов:

$$\Delta_{if} + \Delta_{2f} = \frac{1}{EJ} \cdot (-476{,}4484 + 39{,}93) = -\frac{456{,}518}{EJ};$$

$$\Delta_{\Sigma f} = \sum \int \frac{M_f \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot 132 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}733 +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot 72{,}6 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}034 -$$

$$- \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{30 \cdot 2{,}2^3}{12} \cdot 0{,}4 - \frac{1}{EJ} \cdot 72{,}6 \cdot 3 \cdot 2{,}2 = -\frac{456{,}518}{EJ}.$$

Свободные члены определены верно.

При вычислении δ_{11}, δ_{22} и $\delta_{\Sigma\Sigma}$ площади и ординаты берем из одних и тех же эпюр $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ и $\overline{M}_\Sigma$ соответственно. Трапециевидную эпюру $\overline{M}_\Sigma$ на левой стойке рамы разбиваем на два треугольника, каждый из которых при вычислении $\delta_{\Sigma\Sigma}$ умножаем на соответствующую ординату трапеции, то есть на 1,7 и 2,7. Эпюра $\overline{M}_\Sigma$ на стержне BC, имеющая форму «перекрученной» трапеции, так же представляется в виде двух треугольников, но расположенных по разные стороны от стержня BC. При умножении эпюры $\overline{M}_\Sigma$ на эпюру $\overline{M}_\Sigma$ (участок BC) площадь каждого треугольника умножается на соответствующую ординату перекрученной трапеции, то есть на 0,767 и 0,034 (рис 2.2, г).

При вычислении и проверке Δ_{if} и Δ_{2f} площадь эпюры M_f на отдельных её участках умножается на ординаты эпюр $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ и $\overline{M}_\Sigma$, расположенные против центра тяжести данного участка эпюры M_f. Эпюра M_f на ригеле BC (рис. 2.2, в), очерченная по квадратной параболе, разбивается на треугольную и симметричную параболу, расположенную ниже оси ригеля BC. Площадь параболы равна $\frac{q \cdot l^3}{12}$, где q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки, l – длина стержня BC; центр тяжести параболы расположен посередине стержня BC.

При перемножении эпюр следует придерживаться такого правила знаков: если обе эпюры отложены с одной и той же стороны стержня (перемножаемые ординаты эпюр имеют один знак), то произведение считают положительным.

При вычислении перемещений и их проверке можно использовать готовые результаты перемножения основных видов эпюр (приложение 1).

Подставляя полученные и проверенные значения перемещений в уравнения и сокращая на EJ, получим:

$$\begin{cases} 16{,}516 \cdot X_1 - 1{,}815 \cdot X_2 - 496{,}448 = 0; \\ -1{,}815 \cdot X_1 + 5{,}85 \cdot X_2 + 39{,}93 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим $X_1 = 30{,}343\ кН;\ X_2 = 2{,}589\ кН$.

Окончательную эпюру изгибающих моментов строим согласно выражению (1.9):

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + M_f = M_1 + M_2 + M_f.$$

Эпюры M_1 и M_2, полученные умножением соответствующих единичных эпюр M_1 и M_2 на найденные значения неизвестных, показаны на рис. 2.3,а, б), а окончательная эпюра M на рис. 2.3, в. Статическая проверка удовлетворяется, так как узлы B и C находятся в равновесии (рис. 2.3, г). Кинематическая проверка состоит в том, что при умножении эпюры M на эпюру M_Σ по формуле (1.10) должен получиться ноль:

$$\Delta_\Sigma = \sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} dx = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 1{,}962 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9{,}728 \cdot 0{,}7 +$$

$$+ 1{,}962 \cdot 0{,}7 + 9{,}728 \cdot 3{,}7) + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2{,}2}{6} \cdot (-2 \cdot 9{,}728 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 3{,}883 \cdot 1{,}5 +$$

$$+ 9{,}728 \cdot 1{,}5 - 3{,}883 \cdot 0{,}7) + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{30 \cdot 2{,}2^3}{24} \cdot (0{,}7 - 1{,}5) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1{,}5}{3} \cdot (3{,}883 - 1{,}5) +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1{,}1}{3} \cdot 165{,}38 \cdot 11 = \frac{38{,}078}{EJ} - \frac{38{,}068}{EJ} = \frac{0{,}01}{EJ} \approx 0.$$

Погрешность составляет всего $\frac{0{,}01}{38{,}068} \cdot 100\,\% = 0{,}026\%$, следовательно, окончательная эпюра M построена верно.

При умножении эпюры M на эпюру $\overline{M}_\Sigma$ были использованы готовые формулы, приведенные в приложении 1.

Для построения эпюры поперечных сил воспользуемся дифференциальной зависимостью между изгибающим моментом и поперечной силой:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \qquad (2.1)$$

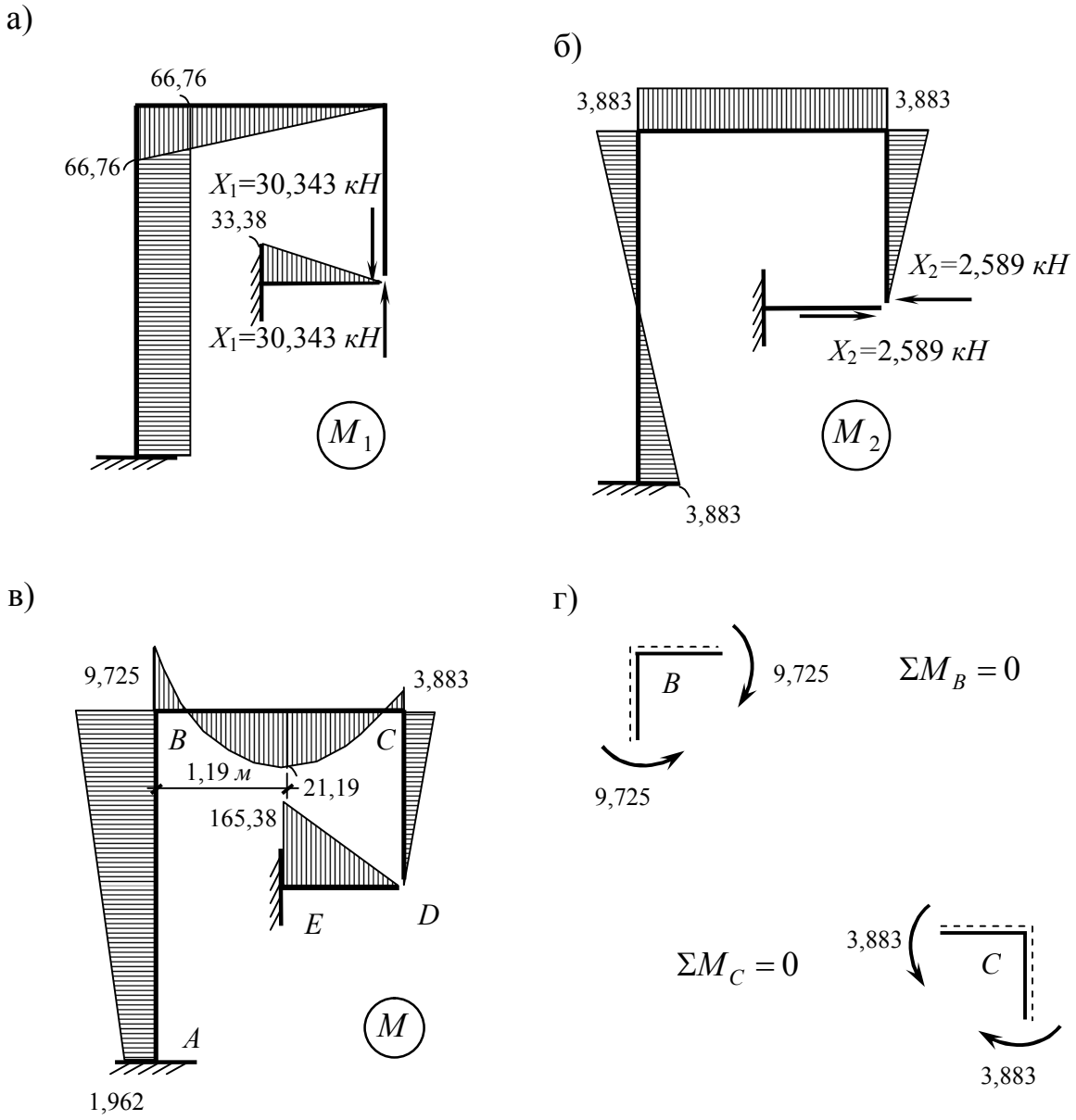


Рис. 2.3

Согласно (2.1) в пределах каждого участка с прямолинейной эпюрой M поперечная сила Q постоянна и её значение равно тангенсу угла наклона этой прямой к оси стержня рамы. *Знак поперечной силы определяется по следующему правилу: если стержень для совмещения его с прямолинейной эпюрой необходимо поворачивать по часовой стрелке, знак Q положительный, в противном случае – отрицательный.*

Рассмотрим каждый стержень отдельно:

$$Q_{AB} = -(9{,}725 - 1{,}962)/3 = -2{,}59\ кН;\ Q_{CD} = 3{,}883/1{,}5 = 2{,}59\ кН;$$
$$Q_{DE} = 165{,}38/1{,}1 = 150{,}343\ кН.$$

Для построения эпюры Q на участке BC с криволинейной эпюрой M представим стержень BC в виде однопролетной балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 30\ кН/м$, левым опорным моментом, равным $9{,}725\ кН \cdot м$ и правым опорным моментом, равным $3{,}883\ кН \cdot м$ (рис. 2.4, а). Находим опорные реакции:

$$\sum M_B = -9{,}725 + 3{,}883 + 30 \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}1 - V_C \cdot 2{,}2 = 0;\ V_C = 30{,}343\ кН;$$

$$\sum M_C = -9{,}725 + 3{,}883 - 30 \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}1 + V_B \cdot 2{,}2 = 0;\ V_B = 35{,}657\ кН.$$

Для проверки найденных реакций составляем уравнение статического равновесия $\sum_y = V_B + V_C - q \cdot 2{,}2 = 35{,}657 + 30{,}343 - 30 \cdot 2{,}2 = 0$. Эпюра Q для стержня BC показана на рис. 2.4, а. Определяем координату сечения x_0, в котором Q=0:

$$x_0 = Q_{BC} / q = 35{,}657 / 30 = 1{,}19\ м.$$

Максимальный изгибающий момент в пролете ригеля BC:

$$M_{мах} = V_B \cdot x_0 - \frac{q \cdot x_0^{\ 2}}{2} = 35{,}657 \cdot 1{,}19 - 30 \cdot 1{,}19^2 / 2 = 21{,}19\ кН \cdot м.$$

Окончательная эпюра Q показана на рис. 2.4, б.

Для построения эпюры продольных сил вырезаем узлы B, C, D и E. Взамен отброшенных стержней прикладываем известные поперечные силы и неизвестные продольные силы. При этом положительные поперечные силы направляем так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке. Продольные силы направляем от узла, то есть предварительно принимаем их растягивающими.

Для узла B (рис. 2.4, в):

$$\sum x = N_{BC} + 2{,}59 = 0;\quad N_{BC} = -2{,}59\ кН (сжатие);$$

$$\sum y = N_{AB} + 35{,}657 = 0;\ N_{AB} = -35{,}657\ кН (сжатие).$$

Для узла C (рис. 2.4, г):

$$\sum x = N_{BC} + 2{,}59 = -2{,}59 + 2{,}59 = 0;$$

$$\sum y = N_{CD} + 30{,}343 = 0;\ N_{CD} = -30{,}343\ кН (сжатие).$$

Для узла D (рис. 2.4, д):

$$\sum x = N_{DE} - 2{,}59 = 0;\ N_{DE} = 2{,}59\ кН (растяжение);$$

$$\sum y = 12{,}0 - 150{,}343 - N_{CD} = 120 - 150{,}343 + 30{,}343 = 0.$$

Эпюра N изображена на рис. 2.4, е. Для статической проверки правильности эпюр Q, M и N отбросим опорные связи и вместо них приложим к раме реакции, взятые с построенных эпюр Q, M и N (рис. 2.4, ж):

$$\sum x = 2{,}59 - 2{,}59 = 0;$$

$$\sum y = 35{,}657 + 150{,}343 - 120 - 30 \cdot 2.2 = 0;$$

$$\sum M_A = -1{,}962 - 165{,}38 - 2{,}59 \cdot 1{,}5 - 150{,}343 \cdot 1{,}1 + 120 \cdot 2{,}2 + 30 \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}1 =$$

$$= 336{,}6 - 336{,}595 \approx 0.$$

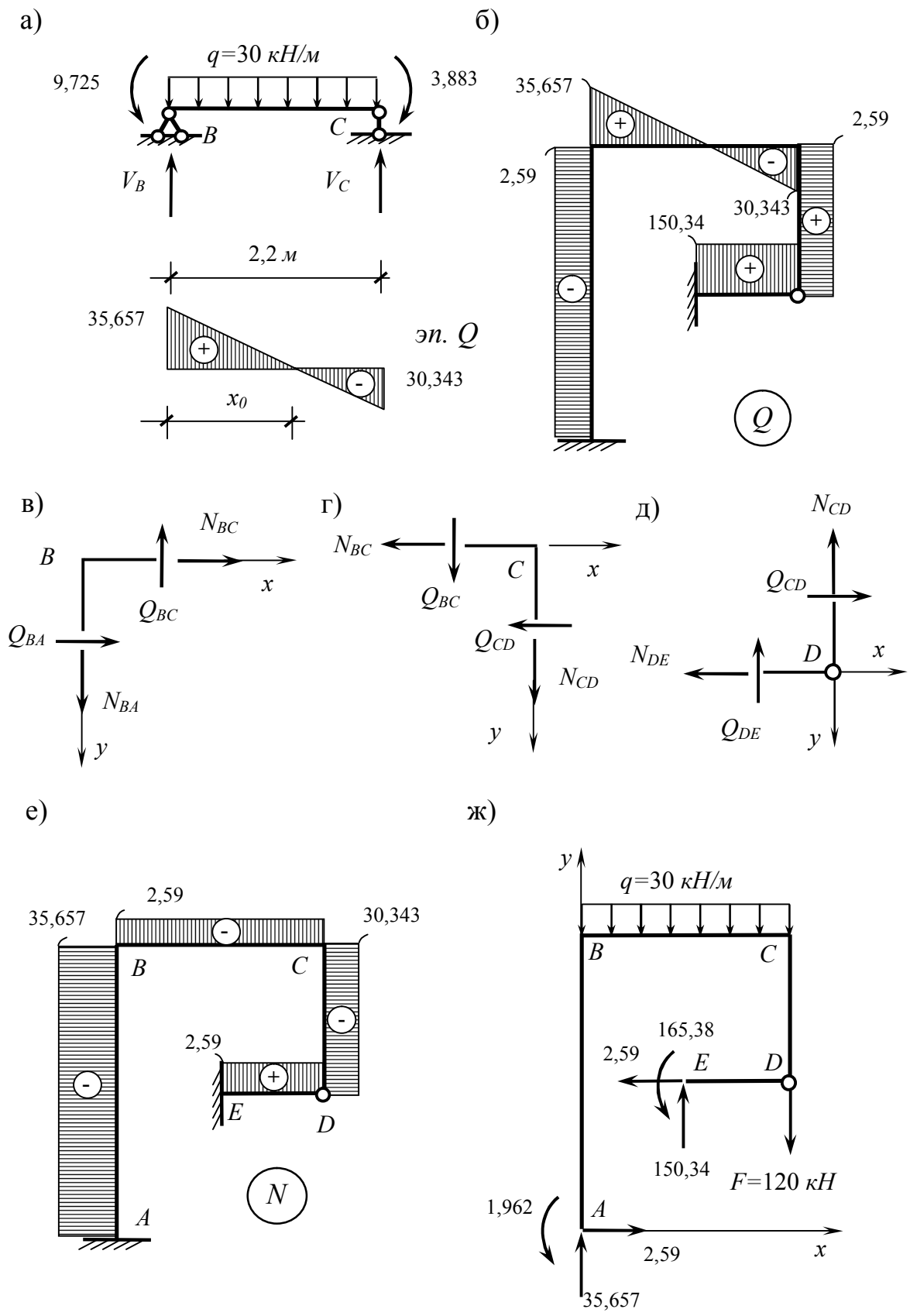

а)
б)
q=30 кН/м
9,725
3,883
B
C
V_B
V_C
2,2 м
35,657
эп. Q
30,343
x_0
35,657
2,59
2,59
30,343
150,34
Q
в)
г)
д)
N_BC
B
x
Q_BC
Q_BA
N_BA
y
N_BC
C
x
Q_BC
Q_CD
N_CD
y
N_CD
Q_CD
N_DE
D
x
Q_DE
y
е)
ж)
2,59
35,657
30,343
B
C
2,59
E
D
N
A
y
q=30 кН/м
B
C
165,38
2,59
E
D
150,34
F=120 кН
1,962
A
2,59
x
35,657

Рис. 2.4

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ СИЛ НА ДЕЙСТВИЕ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКИ

Для неразрезной балки, показанной на рис. 3.1, а, построить эпюры M и Q и произвести промежуточные и окончательные проверки.

Заданная трехпролетная балка два раза статически неопределима. Так как $C_0 = 5$, то согласно (1.2) $Л = 5 - 3 = 2$. Основную систему получаем путем введения над промежуточными опорами 1 и 2 шарниров, превратив тем самым неразрезную балку в совокупность однопролетных шарнирно опертых балок (рис. 3.1, б). Взамен отброшенных связей приложим слева и справа от каждого шарнира противоположно направленные неизвестные опорные моменты - X_1 и X_2 (рис. 3.1, б). Внешняя нагрузка, приложенная в любом пролете, вызывает появление внутренних усилий только в том пролете, где приложена эта нагрузка. Действие каждого из неизвестных в основной системе будет распространяться лишь на пролеты, примыкающие к рассматриваемой эпюре.

Эпюры изгибающих моментов от единичных реакций устраненных связей (единичных опорных моментов) и внешней нагрузки (рис. 3.1, в – д) в основной системе строятся отдельно для каждого пролета, как для однопролетной балки.

Канонические уравнения записываем из условия равенства нулю взаимного поворота сечений балки, расположенных бесконечно близко слева и справа от введенного шарнира на опоре 1 и 2, так как в заданной неразрезной балке над опорами 1 и 2 шарниров нет. Для рассматриваемой балки канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} &\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} = 0, \\ &\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} = 0. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Коэффициенты при неизвестных:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1{,}5}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2EJ} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{EJ}.$$

Строим суммарную единичную эпюру $\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$ (рис.3.1, е) и проводим универсальную проверку единичных коэффициентов:

$$\delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EJ}(4 + 2 \cdot 1{,}5 + 4) = \frac{11}{EJ};$$

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \sum \int \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{EJ}.$$

Результаты совпали, следовательно, коэффициенты δ_{11}, δ_{12} и δ_{22} вычислены верно.

Определяем свободные члены:

$$\Delta_{1f} = \sum \int \frac{M_f \cdot \overline{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{40 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} + \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} +$$
$$+ \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{900}{EJ};$$

$$\Delta_{2f} = \sum \int \frac{M_f \cdot \overline{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} +$$
$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot 120 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{810}{EJ}.$$

Проверяем значения свободных членов:

$$\Delta_{1f} + \Delta_{2f} = \frac{1}{EJ}(900 + 810) = \frac{1710}{EJ};$$
$$\Delta_{\Sigma f} = \sum \int \frac{M_f \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{40 \cdot 60^3}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot 1 +$$
$$+ \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot 120 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1710}{EJ}.$$

Свободные члены определены верно.

Подставим найденные значения перемещений в систему канонических уравнений (3.1):

$$\begin{cases} 4 \cdot X_1 + 1{,}5 \cdot X_2 + 900 = 0; \\ 1{,}5 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 810 = 0. \end{cases}$$

В результате решения этих уравнений получим:

$X_1 = -173{,}45$ *кНм* , $X_2 = -137{,}45$ *кНм*

Окончательную эпюру изгибающих моментов строим согласно выражению (1.9):

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + M_f = M_{on} + M_f.$$

Здесь M_{on} - эпюра моментов в основной системе от найденных значений опорных моментов (рис. 3.2, а). Окончательная эпюра M приведена на рис. 3.2, б.

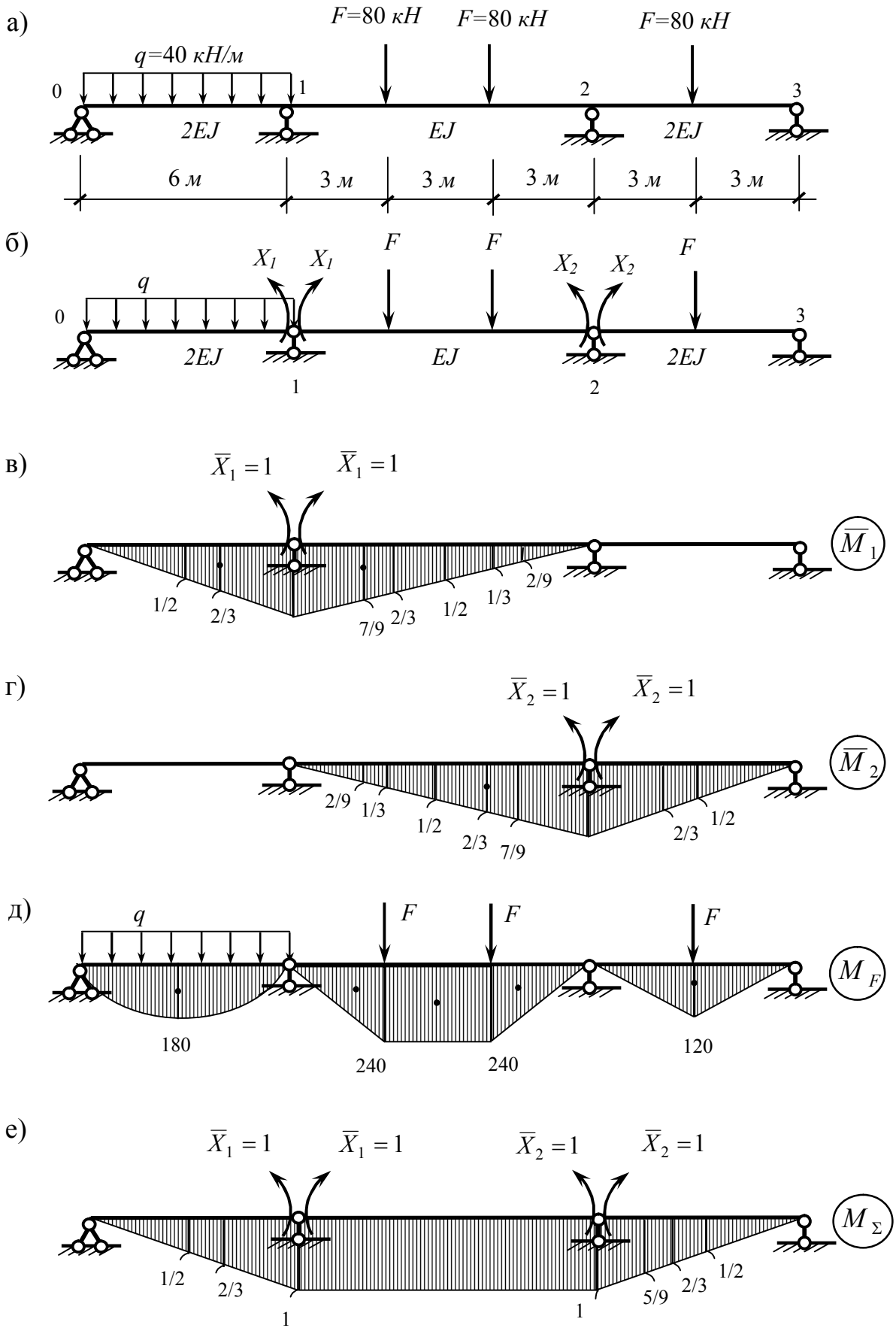

а)
F=80 кН
F=80 кН
F=80 кН
q=40 кН/м
0
1
2
3
2EJ
EJ
2EJ
6 м
3 м
3 м
3 м
3 м
3 м
б)
X1
X1
F
F
X2
X2
F
q
0
3
2EJ
EJ
2EJ
1
2
в)
X̄1 = 1
X̄1 = 1
M̄1
1/2
2/3
7/9
2/3
1/2
1/3
2/9
г)
X̄2 = 1
X̄2 = 1
M̄2
2/9
1/3
1/2
2/3
7/9
2/3
1/2
д)
q
F
F
F
MF
180
240
240
120
е)
X̄1 = 1
X̄1 = 1
X̄2 = 1
X̄2 = 1
MΣ
1/2
2/3
1
1
5/9
2/3
1/2

Рис. 3.1

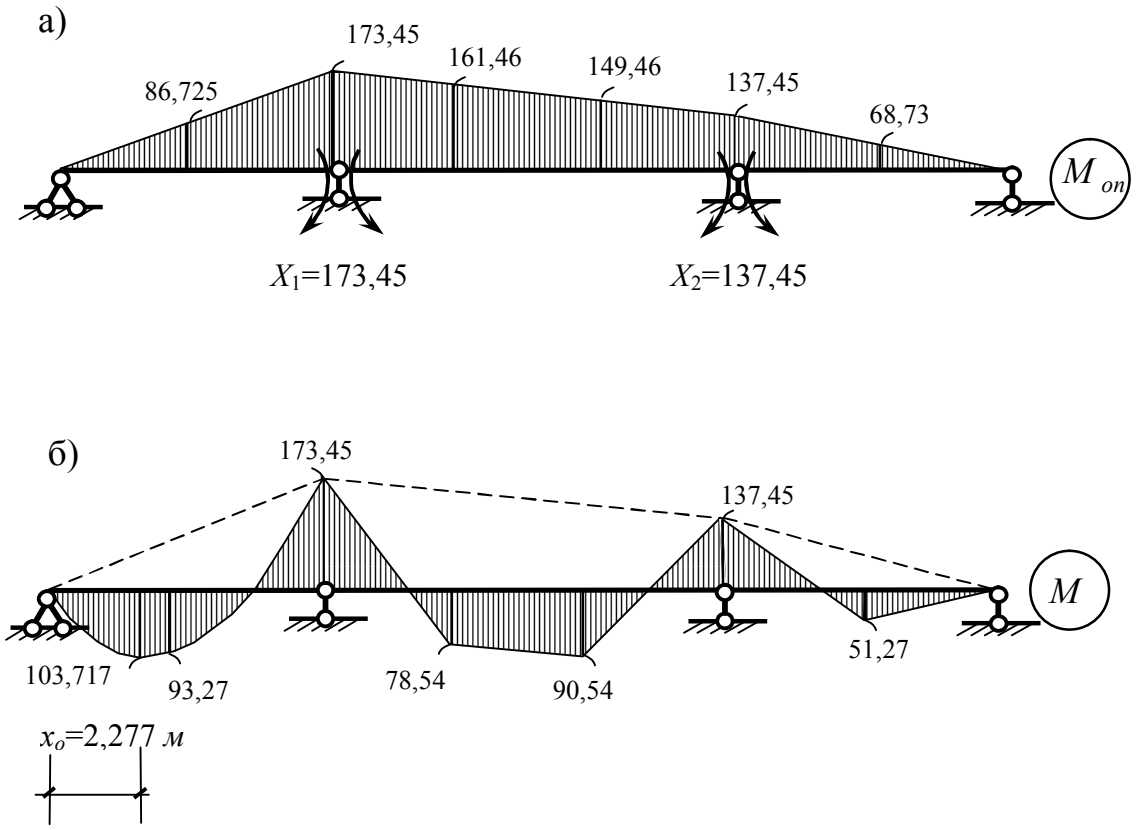


Рис. 3.2

После построения эпюры M выполняем кинематическую проверку правильности расчета балки (эпюра M_{Σ} изображена на рис. 3.1, е):

$$\Delta_{\Sigma} = \sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_{\Sigma}}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot (\frac{40 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} - 173{,}45 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}) + \frac{1}{EJ} \cdot (-173{,}45 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 +$$

$$+ 78{,}54 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{78{,}54 + 90{,}54}{2} \cdot 3 \cdot 1 - 137{,}45 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 90{,}54 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1) +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot (-137{,}45 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + 51{,}27 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{725{,}693}{EJ} - \frac{725{,}706}{EJ} = -\frac{0{,}013}{EJ} \approx 0.$$

Погрешность составляет всего $\frac{0{,}013}{725{,}693} \cdot 100\,\% = 0{,}002\,\%$.

Эпюру Q строим как сумму эпюр Q_f для однопролетных балок основной системы (рис. 3.3, а) и эпюры $Q_{оп}$ от опорных моментов (рис. 3.3, б).

Эпюра Q показана на рис 3.3, в. Определяем координату сечения в первом пролете, где $Q = 0$. Поскольку $q = \frac{dQ}{dx}$, а $q = const$, то $x_0 = Q_{лев} / q$.

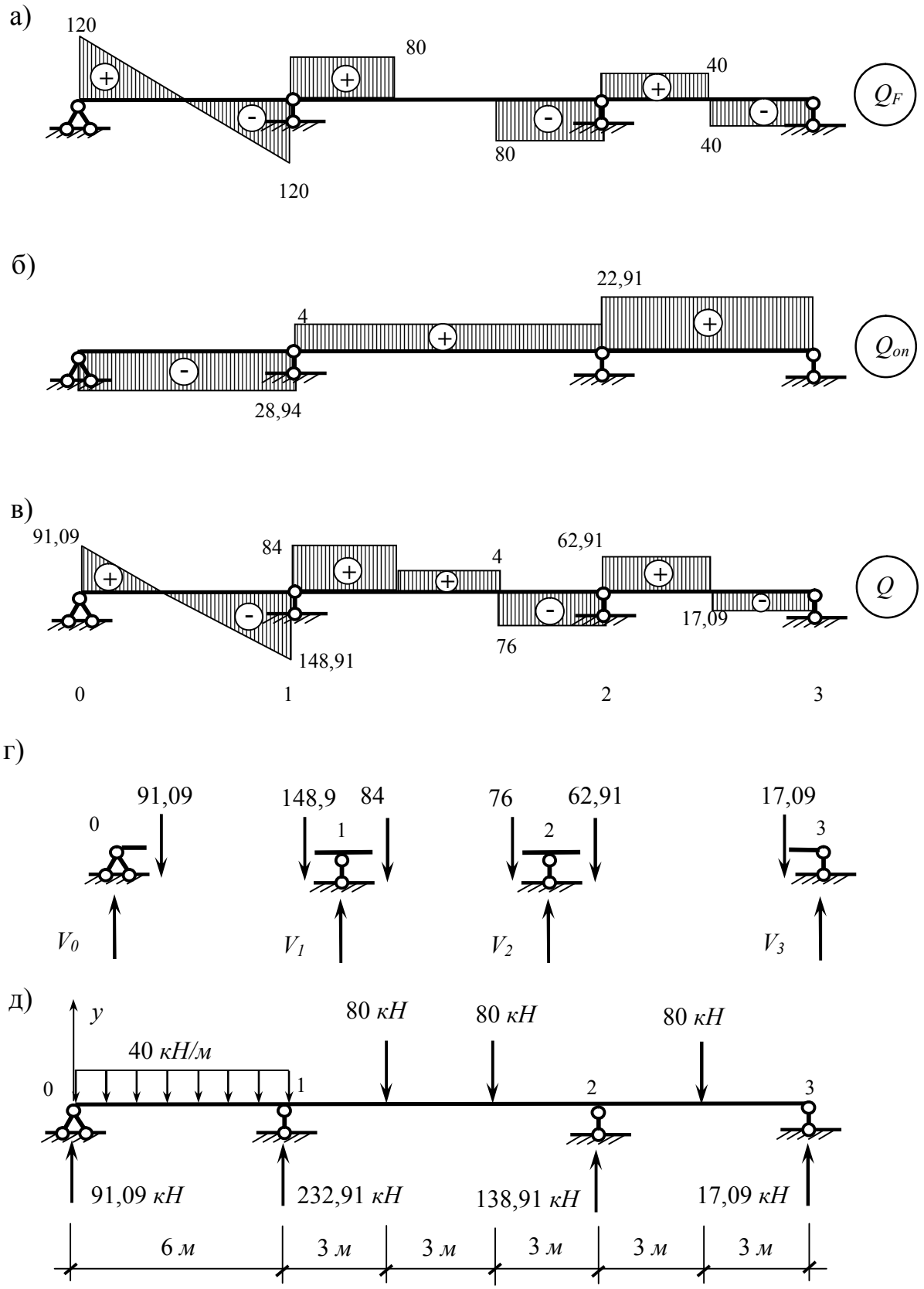

а)
120
80
40
Q_F
80
40
120
б)
22,91
4
$Q_{оп}$
28,94
в)
91,09
84
4
62,91
Q
17,09
76
148,91
0
1
2
3
г)
91,09
148,9
84
76
62,91
17,09
0
1
2
3
V_0
V_1
V_2
V_3
д)
y
80 кН
80 кН
80 кН
40 кН/м
0
1
2
3
91,09 кН
232,91 кН
138,91 кН
17,09 кН
6 м
3 м
3 м
3 м
3 м
3 м

Рис. 3.3

В нашем случае: $x_0 = 91{,}09 / 40 = 2{,}28\ м$.

На основании теоремы Журавского значение M_{max} может быть найдено из выражения: $M_{max} = \int_0^{x_0} Q\,dx + M_{лев}$,

где $\int_0^{x_0} Q\,dx$ - площадь эпюры Q на участке между левой опорой и сечением x_0.

В нашем случае $M_{лев} = M_0 = 0$, следовательно $M_{max} = 91{,}09 \cdot 2{,}78 \cdot \frac{1}{2} = 103{,}717\ кНм$.

По ординатам эпюры Q определяем опорные реакции (рис. 3.3, г):

$V_0 = 91{,}09\ кН;$

$V_1 = 148{,}91 + 84 = 232{,}91\ кН;$

$V_2 = 76 + 62{,}91 = 138{,}91\ кН;$

$V_3 = 17{,}09\ кН.$

Выполняем статические проверки правильности расчета балки (рис. 3.3, д):

$\sum y = 91{,}09 - 40 \cdot 6 + 232{,}91 - 80 - 80 + 138{,}91 - 80 + 17{,}09 = 480 - 480 = 0;$

$\sum M_0 = 40 \cdot 6 \cdot 3 - 232{,}91 \cdot 6 + 80 \cdot 9 + 8012 - 138{,}91 \cdot 15 + 80 \cdot 18 - 17{,}09 \cdot 21 =$
$= 3840 - 3840 = 0.$

4. ПРИМЕР РАСЧЕТА НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА СМЕЩЕНИЕ ОПОР

Неразрезную балку с размерами и жесткостью такими же, как в примере, рассмотренном в разделе 3, рассчитать на осадку опоры 2 на $\Delta_2 = 0{,}04\ м$; жесткость балки в среднем пролете $EJ = 14{,}200\ кНм^2$ (рис. 4.1, а).

Канонические уравнения (1.3) для расчета неразрезной балки на заданное смещение опоры 2 принимают вид:

$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1c} = 0;$

$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2c} = 0.$

Здесь Δ_{1c} и Δ_{2c} - взаимные углы поворота в основной системе сечений, расположенных вплотную по разные стороны от опор 1 и 2, вызываемые заданным смещением Δ_2, по направлению неизвестных опорных моментов X_1 и X_2 соответственно (рис. 4.1, б).

На основании выражения (1.12):

$$\Delta_{1c} = -R_{21} \cdot \Delta_2; \quad \Delta_{2c} = -R_{22} \cdot \Delta_2 . \qquad (4.1)$$

Здесь R_{21} и R_{22} - реакции в смещаемой опоре (связи) 2 от $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ соответственно.

Для определения R_{21} и R_{22} вырезаем опорный узел 2 соответственно с эпюр $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ (рис. 3.1, в, г) и направляем реакции в сторону смещения опоры 2 (вниз), то есть предварительно принимаем их положительными (рис. 4.1, в):

$$R_{21} = -\frac{1}{9}; \; R_{22} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}.$$

Тогда согласно (4.1):

$$\Delta_{1c} = -\left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 0{,}04 = 0{,}00444; \; \Delta_{2c} = -\frac{5}{18} \cdot 0{,}04 = -0{,}01111.$$

Подставим в уравнение (4.1) значения Δ_{1c}, Δ_{2c} и вычисленные в предыдущем примере (раздел 3) перемещения δ_{11}, δ_{12} и δ_{22}:

$$\begin{cases} 4 \cdot X_1 + 1{,}5 \cdot X_2 + 0{,}00444 \cdot EJ = 0; \\ 1{,}5 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 - 0{,}01111 \cdot EJ = 0. \end{cases}$$

В результате решения этих уравнений найдем:

$$X_1 = -0{,}002536 \cdot EJ = -35{,}55 \; кНм;$$

$$X_2 = 0{,}0037163 \cdot EJ = 52{,}77 \; кНм.$$

Для получения окончательной эпюры изгибающих моментов откладываем над опорами 0, 1, 2, 3 значения опорных моментов $M_0 = 0$, $M_1 = -35{,}55 \; кНм$; $M_2 = 52{,}77 \; кНм$; $M_3 = 0$, вершины ординат которых соединяем прямыми линиями (рис. 4.1, г).

Кинематическая проверка производится по формуле (1.14):

$$\sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_\Sigma}{EJ} d \cdot s + \Delta_{1c} + \Delta_{2c} = -\frac{1}{EJ} \cdot 35{,}55 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{EJ} \cdot 35{,}55 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 +$$
$$+ \frac{1}{EJ} \cdot 55{,}77 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot 52{,}77 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}00444 - 0{,}01111 = \frac{290{,}235}{EJ} -$$
$$- \frac{195{,}525}{EJ} + 0{,}00444 - 0{,}01111 = 0{,}020439 - 0{,}01137693 + 0{,}00444 -$$
$$- 0{,}01111 = 0{,}024879 - 0{,}024879 = 0.$$

Эпюра Q показана на рис. 4.1, д.

Статическая проверка (рис. 4.1, е):

$$\sum y = -5{,}925 + 15{,}738 - 18{,}608 + 8{,}795 = 24{,}533 - 24{,}533 = 0;$$
$$\sum M_5 = -5{,}925 \cdot 10{,}5 + 15{,}738 \cdot 4{,}5 + 18{,}608 \cdot 4{,}5 - 8{,}795 \cdot 10{,}5 = 154{,}557 -$$
$$- 154{,}56 \approx 0.$$

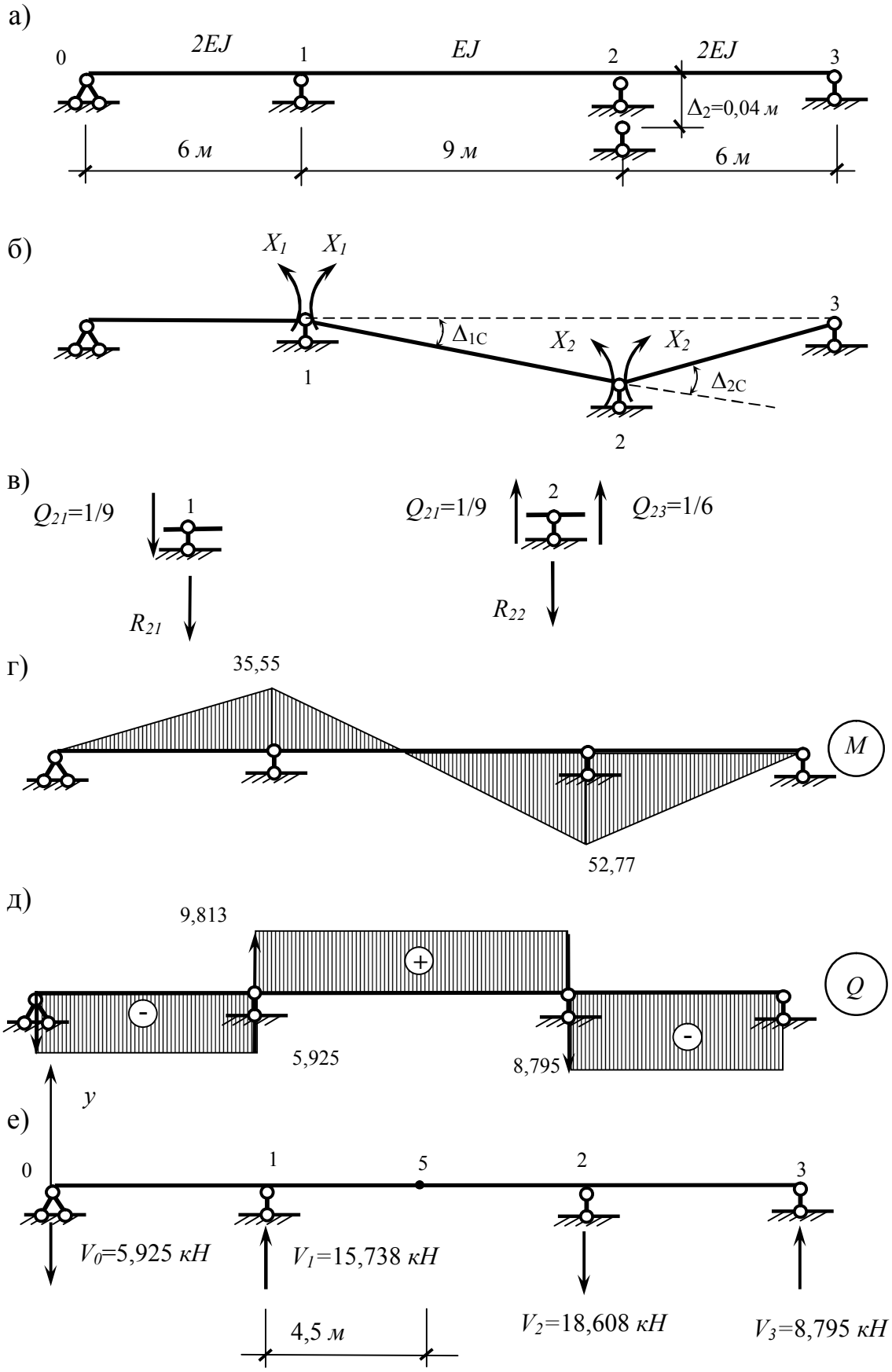

а)
0
2EJ
1
EJ
2
2EJ
3
Δ2=0,04 м
6 м
9 м
6 м
б)
X1
X1
3
Δ1C
X2
X2
1
Δ2C
2
в)
Q21=1/9
1
Q21=1/9
2
Q23=1/6
R21
R22
г)
35,55
M
52,77
д)
9,813
+
Q
-
-
5,925
8,795
y
е)
0
1
5
2
3
V0=5,925 кН
V1=15,738 кН
4,5 м
V2=18,608 кН
V3=8,795 кН

Рис. 4.1

5. ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СИЛ

Программа ***Ms*** предназначена для решения статически неопределимых задач методом сил. Программу целесообразно использовать для поиска и исправления ошибок при построении единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов, вычислении коэффициентов канонических уравнений и значений неизвестных, а также ординат окончательных эпюр внутренних усилий.

Для подготовки исходных данных необходимо расчленить основную систему на отдельные части**,** взаимодействующие между собой *в узлах***.** Узлы выбираются в следующих сечениях:

- имеющих опорные связи или шарниры; местах приложения сосредоточенных сил или моментов; начала или конца участка, загруженного равномерно распределенной нагрузкой; местах изменения геометрической оси или жесткости стержня.

Часть системы, соединяющая два узла, называется *конечным элементом*. Конечный элемент (*далее по тексту элемент*) должен иметь прямолинейную ось и постоянное поперечное сечение по длине. Узлы и элементы системы нумеруют. Элементы с одинаковыми жесткостями на растяжение – сжатие (*EA*) и изгиб (*EJ*) объединяются в группы, имеющие один *тип жесткости***.** *Каждое единичное или грузовое состояние основной системы относится к отдельному загружению***.**

В результате получают пять чисел:

- количество узлов (*Ku*), элементов (*Ke*), типов жесткости (*Kg*), узлов с опорными связями (*Ks*), загружений (*Kp*).

Всю информацию можно разделить на следующие блоки:

- «характеристика задачи», «узлы», «элементы», «типы жесткости», «опорные связи», «загружения». Каждый блок информации начинается с текстовой строки – разделителя, в которой можно писать любой комментарий.

Характеристика задачи (пять чисел): *Ku Ke Kg Ks Kp.*

Информация об узлах записывается построчно (одна строка – один узел) в последовательности: *Nu Xu Yu*,

где *Nu* – номер узла, *Xu, Yu* – координаты узла по горизонтали и вертикали.

Информация об элементах записывается построчно (одна строка – один элемент) в последовательности: *Ne Nn Nk Ng p*,

где *Ne* – номер элемента; *Nn, Nk* – номера узлов в начале и в конце элемента; *Ng* – номер типа жесткости элемента, *p* – признак присоединения элемента к узлу. *За начальный принимается узел с меньшим номером*. *Признак присоединения элемента* к узлу (целое число), равное: 0 (жесткое присоединение в начале и в конце); 1 (шарнирное в начале, жесткое в конце); 2 (жесткое в начале, шарнирное в конце); 3 (шарнирное в начале и в конце).

Каждый тип жесткости описывается одной строкой, содержащей три числа: *Ng EA EJ,*

где *Ng* – номер типа жесткости, *EA* - жесткость на растяжение (сжатие), *EJ* жесткость на изгиб.

Узлы, имеющие опорные связи, описывают по строкам (одна строка – один узел): *Nu px py pz,*

где *Nu* – номер узла; *px, py, pz* – признак наличия соответственно горизонтальной, вертикальной или связи, препятствующей повороту. Если связь есть, то признак равен единице, в противном случае признак равен нулю.

Каждый вид нагрузки (сосредоточенной или распределенной, заданного смещения узлов) описывается одной строкой, содержащей четыре числа: *Nu(Ne) t V Np*,

где *Nu(Ne)* номер узла (элемента), к которому приложена нагрузка (заданное перемещение); *t* – тип нагрузки (заданного перемещения), *V* – величина, *Np* – номер загружения. *Тип нагрузки t* (целое число) означающее: 1 (горизонтальная сила), 2 (вертикальная сила), 3 (момент, приложенный к узлу), 4 (равномерно распределенная горизонтальная нагрузка), 5 (равномерно распределенная вертикальная нагрузка), 6 (заданное горизонтальное смещение узла), 7 (заданное вертикальное смещение узла), 8 (заданный поворот узла), 10 (момент, приложенный в начале элемента), 11 (момент, приложенный в конце элемента). Величина *V* считается положительной, если нагрузка (перемещение) направлена в ту же сторону, что и соответствующая ось (1, 2, 4 ÷7) или против хода часовой стрелки (для типа 3, 8, 10, 11).

Сформированные исходные данные должны храниться в *текстовом файле* с расширением *dat* в том же каталоге, что и программа ***Ms.*** Имя файла не должно содержать больше восьми символов; например: *Primer***,** *Variant2, Схема_5***.** Для создания файла и ввода в него данных можно воспользоваться любым редактором текста.

Для создания и редактирования файла с помощью программы ***Ms*** в ответ на запрос нужно ввести имя файла, которого нет в каталоге, и после сообщения:

Нет файла Имя. dat
Подготовить файл? (Y/N)

ответить утвердительно (нажать клавишу *Y*). Затем в ответ на запрос программы следует ввести числа, характеризующие задачу: количество узлов (*Ku*), элементов (*Ke*), типов жесткости (*Kg*), узлов с опорными связями (*Ks*), загружений (*Kp*). В этом случае в текущем каталоге будет создан файл с предложенным именем, в котором разместится *шаблон для ввода исходных данных* в виде:

*** Параметры задачи *Ku Ke Kg Ks Kp* ***

3 2 1 2 1
*** Узлы *Xu Yu* ***
1
2
3
*** Элементы *Nn Nk Ng p* ***
1
2
*** Жесткости *Ng EA EJ* ***
1
*** Связи *Nu px py pz* ***

*** Загружения *Nu (Ne) t V Np* ***

При вводе исходной информации необходимо соблюдать следующие требования: число от числа отделяется одним или несколькими пробелами; наличие в поле ввода целочисленной информации символов <.>, <,>, <-> недопустимо; целая часть числа отделяется от дробной точкой; данных в строке должно быть столько, сколько предусмотрено программой; наличие в файле пустых строк, а также строк, начинающихся с нецифровых символов (кроме специально оговоренных разделителей) не допускается; после последнего числа в строке через пробел (или несколько пробелов) можно писать любой комментарий.

Пример 5.1. Произведем расчет статически неопределимой рамы (рис. 2.1, а) методом сил.

Вычертим основную систему (рис. 5.1, а) в координатных осях xOy и пронумеруем узлы и элементы (рис. 5.1, б). Для удобства изображения сместим вниз стержень *DE* (учтем это при определении координат узлов). Примем, что первый и третий элементы относятся к первому типу жесткости (*EJ*), а второй и четвертый элементы - ко второму типу (жесткость 2*EJ*). В первом загружении приложим единичную силу X_1, во втором X_2, в третьем заданную нагрузку. В результате получаем пять чисел:

количество узлов *Ku*=6, элементов *Ke*=4, типов жесткости *Kg*=2, узлов с опорными связями *Ks*=2, разновременных загружений *Kp*=3.

Подготовим исходные данные для расчета.

Определим координаты узлов системы и заполним соответствующие строки.

При заполнении строк, описывающих элементы, учтем, что все элементы присоединены к узлам жестко (признак 0).

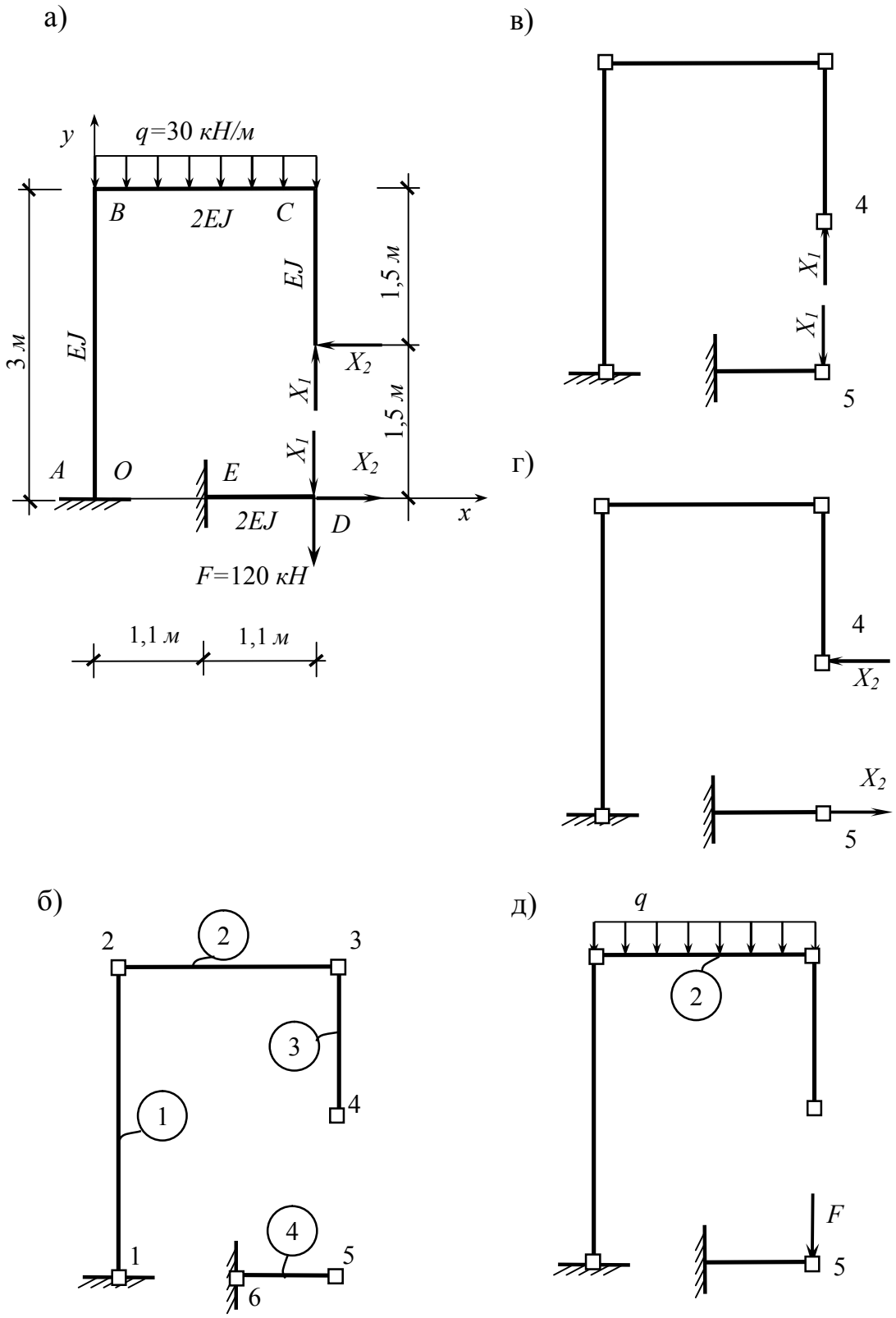

а)
y
q=30 кН/м
B
2EJ
C
EJ
1,5 м
3 м
EJ
X2
X1
1,5 м
X1
X2
A
O
E
2EJ
D
x
F=120 кН
1,1 м
1,1 м
в)
4
X1
X1
5
г)
4
X2
X2
5
б)
2
2
3
3
4
1
1
4
5
6
д)
q
2
F
5

Рис. 5.1

При определении коэффициентов канонических уравнений (перемещений) используется только жесткость на изгиб *EJ*, следовательно, *жесткость на растяжение (сжатие) EA можно задать любым положительным числом* (например, принять равной единице).

Первый и шестой узел закреплены от смещения по горизонтали, по вертикали и от поворота (после номера узла ставим 1 1 1).

В первом загружении (рис. 5.1, в) к четвертому и пятому узлу приложены соответственно вертикальная (тип 2) положительная (в направлении оси *y*) и отрицательная (противоположно оси *y*) единичная силы.

Во втором загружении (рис. 5.1, г) к четвертому и пятому узлу приложены соответственно горизонтальная (тип 1) отрицательная (противоположно оси *x*) и положительная (в направлении оси *x*) единичная силы.

В третьем загружении (рис. 5.1, д) к пятому узлу приложена вертикальная (тип 2) отрицательная сила *F*; ко второму элементу равномерно распределенная вертикальная (тип 5) отрицательная нагрузка *q*.

Файл с исходными данными для расчета:

*** Параметры задачи *Ku Ke Kg Ks Kp* ***
6 4 2 2 3
*** Узлы *Xu Yu* ***
1 0 0
2 0 3
3 2.2 3
4 2.2 1.5
5 2.2 0
6 1.1 0
*** Элементы *Nn Nk Ng p* ***
1 1 2 1 0
2 2 3 2 0
3 3 4 1 0
4 5 6 2 0
*** Жесткости *Ng EA EJ* ***
1 1 1
2 1 2
*** Связи *Nu px py pz* ***
1 1 1 1
6 1 1 1
*** Загружения *Nu (Ne) t V Np* ***
4 2 1 1
5 2 -1 1
4 1 -1 2
5 1 1 2
5 2 -120 3
2 5 -30 3

По подготовленным исходным данным программа ***Ms*** вычертит на экране монитора схемы нумерации узлов (рис.5.2, а), элементов (рис.5.2,б) и расчетную схему по каждому загружению.

Проверка единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов производится поэлементно в последовательности: ордината в начале элемента, ордината в конце элемента (рис. 5.2, в). Неправильные (в том числе и по знаку) ординаты игнорируются. После ввода правильных (с точностью до 1 %) ординат строится эпюра для проверенного элемента и производится переход к следующему элементу.

Проверка единичных и грузовых коэффициентов канонических уравнений производится по строкам (рис. 5.2, г).

Проверка окончательных эпюр внутренних усилий производится аналогично.

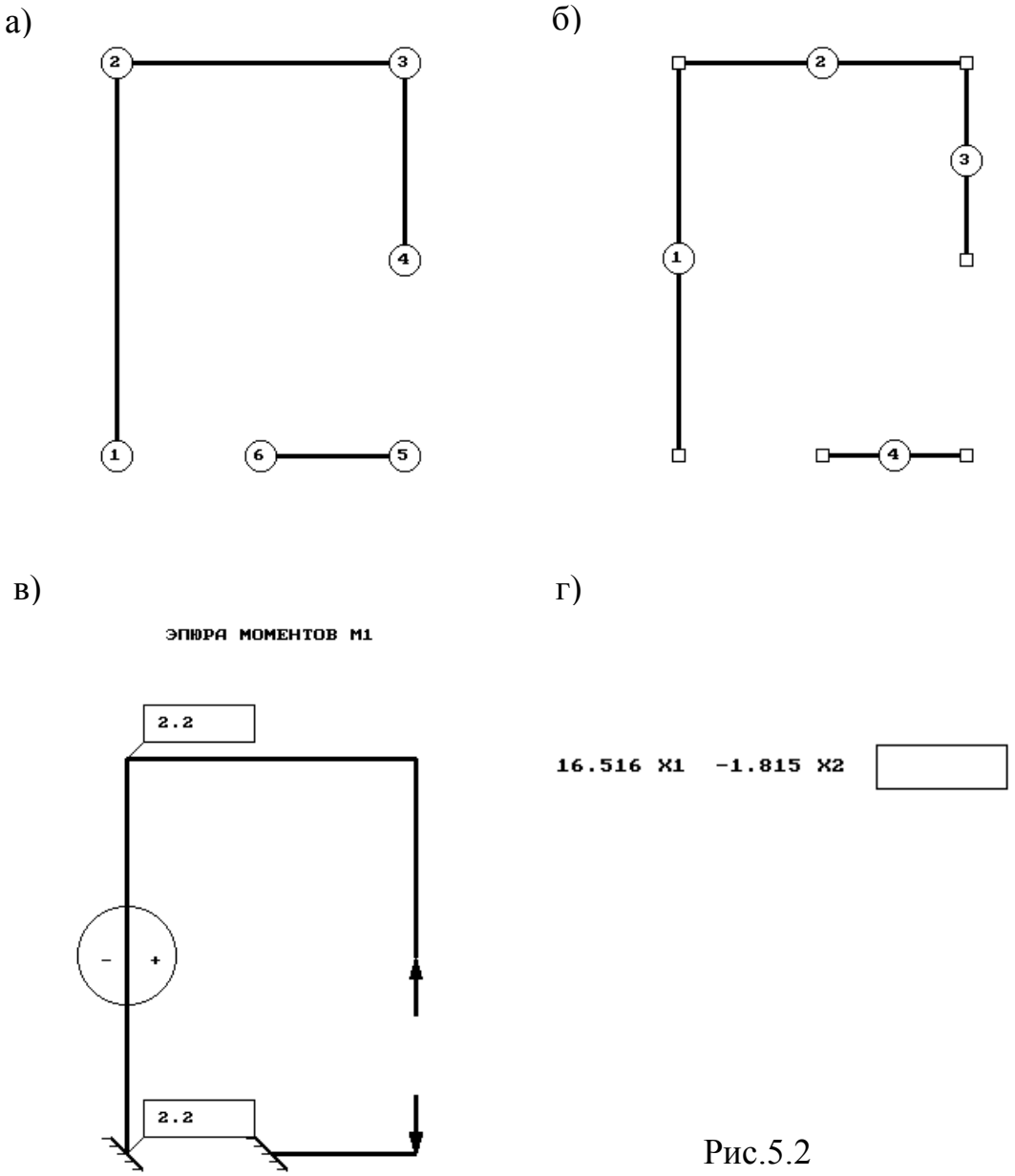


Рис.5.2

Пример 5.2. Подготовим исходные данные для расчета неразрезной балки (рис. 3.1, а).

Вычертим основную систему (рис. 5.3, а) в координатных осях xOy и пронумеруем узлы и элементы (рис. 5.3, б). В результате получим:

количество узлов *Ku*=7, элементов *Ke*=6, типов жесткости *Kg*=2, узлов с опорными связями *Ks*=4, загружений *Kp*=3.

Определим координаты узлов системы и заполним строки, описывающие узлы.

Примем, что второй, третий и четвертый элементы относятся к первому типу жесткости (*EJ*), а первый, пятый и шестой элементы - ко второму типу (жесткость 2*EJ*). Жесткость *EA* примем равной единице. Третий и шестой элементы присоединены к узлам жестко (признак 0), второй и пятый шарнирно присоединены к узлу в начале (признак 1), первый и четвертый элементы шарнирно присоединены к узлу в конце (признак 2).

В первом узле вертикальная и горизонтальная связи (признаки 1 1 0), во втором, пятом и седьмом узлах только вертикальные связи (признаки 0 1 0).

В первом загружении (рис. 5.3, в) в конце первого элемента (тип нагрузки 11) приложен положительный (направлен против часовой стрелки) единичный момент; в начале второго элемента (тип нагрузки 10) приложен отрицательный (направлен по часовой стрелке) единичный момент.

Информация о втором (рис. 5.3, г) и третьем загружении (рис. 5.3, д) составляется аналогично.

Файл с исходными данными для расчета:

*** Параметры задачи *Ku Ke Kg Ks Kp* ***
7 6 2 4 3
*** Узлы *Xu Yu* ***
1 0 0
2 6 0
3 9 0
4 12 0
5 15 0
6 18 0
7 21 0
*** Элементы *Nn Nk Ng pc* ***
1 1 2 2 2
2 2 3 1 1
3 3 4 1 0
4 4 5 1 2
5 5 6 2 1
6 6 7 2 0
*** Жесткости *Ng EA EJ* ***
1 1 1
2 1 2

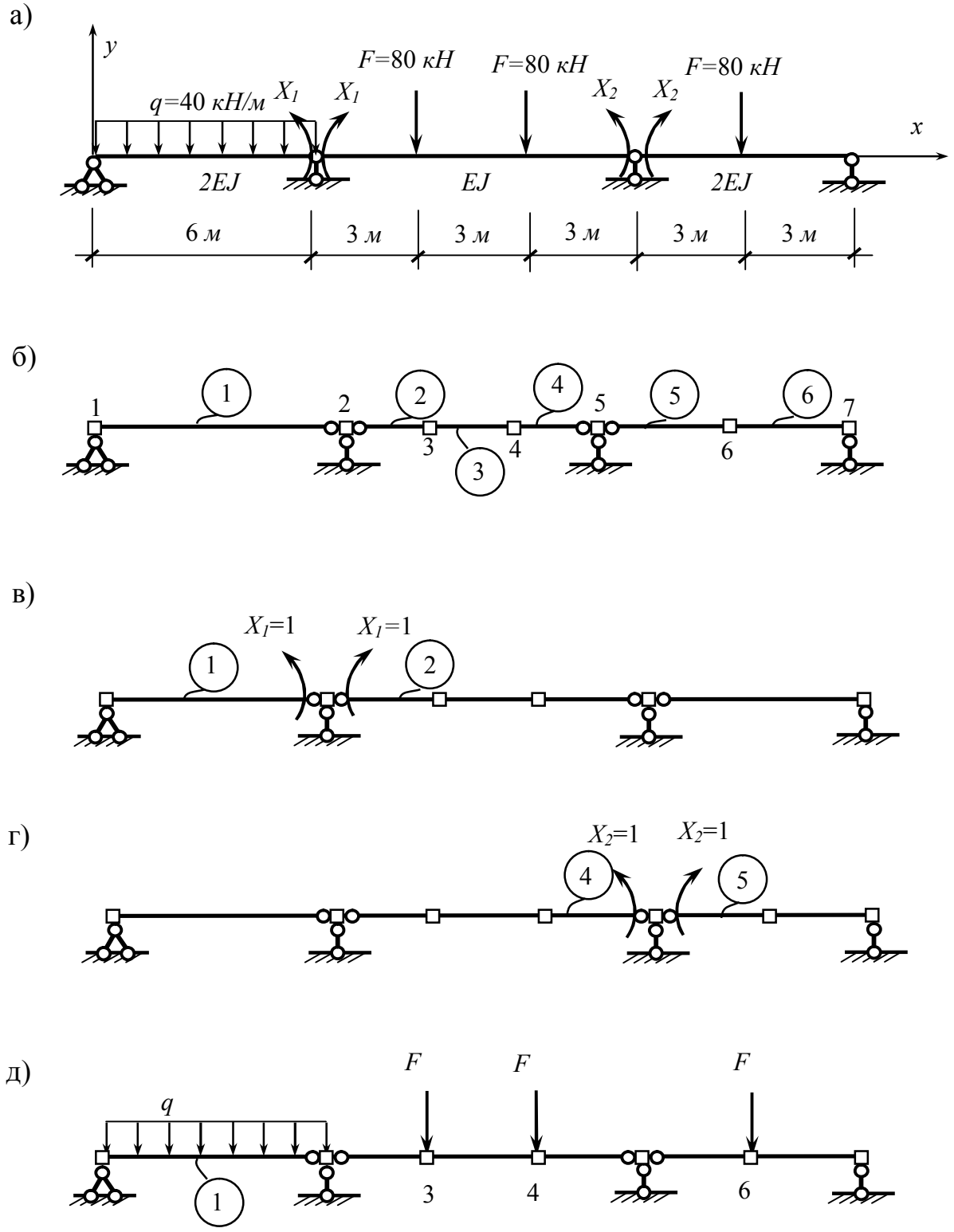

а)
y
x
q=40 кН/м
X1
X1
F=80 кН
F=80 кН
X2
X2
F=80 кН
2EJ
EJ
2EJ
6 м
3 м
3 м
3 м
3 м
3 м
б)
1
2
3
4
5
6
7
в)
X1=1
X1=1
г)
X2=1
X2=1
д)
q
F
F
F

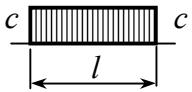
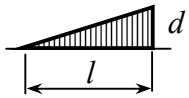
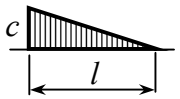
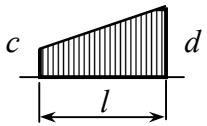
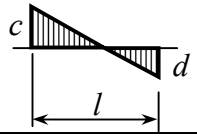
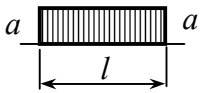
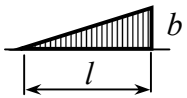
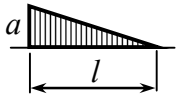
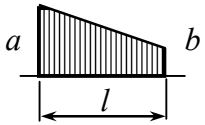
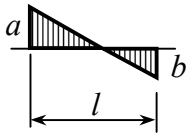
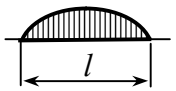
Рис. 5.3

*** Связи *Nu px py pz* ***
1 1 1 0
2 0 1 0
5 0 1 0
7 0 1 0
*** Загружения *Nu (Ne) t V Np* ***
1 11 1 1
2 10 -1 1
4 11 1 2
5 10 -1 2
1 5 -40 3
3 2 -80 3
4 2 -80 3
6 2 -80 3

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дарков, А.В.* Строительная механика: учебник для вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб.: Лань, 2008. – 656 с.
2. *Саргсян, А.Е.* Строительная механика. Механика инженерных конструкций: учебник для вузов / А.Е. Саргсян. – М. Высш. школа, 2008. – 462 с.
3. *Строительная механика*. Статика упругих систем: учебник для вузов / В.Д. Потапов, А.В. Александров [и др.]. – М.: Высш. шк., 2007. – 511 с.
4. *Анохин, Н.Н.* Строительная механика в примерах и задачах. Ч.II. Статически неопределимые системы: учебное пособие / Н.Н. Анохин. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 464 с.

Приложение 1

					
	$l \cdot a \cdot c$	$\frac{l}{2} \cdot a \cdot d$	$\frac{l}{2} \cdot a \cdot c$	$\frac{l}{2} \cdot a \cdot (c+d)$	$\frac{l}{2} \cdot a \cdot (c-d)$
	$\frac{l}{2} \cdot b \cdot c$	$\frac{l}{3} \cdot b \cdot d$	$\frac{l}{6} \cdot b \cdot c$	$\frac{l}{6} \cdot b \cdot (c+2 \cdot d)$	$\frac{l}{6} \cdot b \cdot (c-2 \cdot d)$
	$\frac{l}{2} \cdot a \cdot c$	$\frac{l}{6} \cdot a \cdot d$	$\frac{l}{3} \cdot a \cdot c$	$\frac{l}{6} \cdot a \cdot (2 \cdot c+d)$	$\frac{l}{6} \cdot a \cdot (2 \cdot c-d)$
	$\frac{l}{2} \cdot c \cdot (a+b)$	$\frac{l}{6} \cdot d \cdot (a+2 \cdot b)$	$\frac{l}{6} \cdot c \cdot (2 \cdot a+b)$	$\frac{l}{6}\begin{pmatrix} 2 \cdot a \cdot c + a \cdot d + \\ + b \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \end{pmatrix}$	$\frac{l}{6}\begin{pmatrix} 2 \cdot a \cdot c - a \cdot d + \\ + b \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \end{pmatrix}$
	$\frac{l}{2} \cdot c \cdot (a-b)$	$\frac{l}{6} \cdot d \cdot (a-2 \cdot b)$	$\frac{l}{6} \cdot c \cdot (2 \cdot a-b)$	$\frac{l}{6}\begin{pmatrix} 2 \cdot a \cdot c + a \cdot d - \\ - b \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \end{pmatrix}$	$\frac{l}{6}\begin{pmatrix} 2 \cdot a \cdot c - a \cdot d - \\ - b \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \end{pmatrix}$
	$\frac{ql^3 \cdot c}{12}$	$\frac{ql^3 \cdot d}{24}$	$\frac{ql^3 \cdot c}{24}$	$\frac{ql^3 \cdot (c+d)}{24}$	$\frac{ql^3 \cdot (c-d)}{24}$

Приложение 2

Контрольные вопросы

1. Какие системы называют статическими неопределимыми?

2. Какие методы используются для расчета статически неопределимых систем?

3. Приведите формулы для определения степени статической неопределимости для балок и рам.

4. Дайте определения связям абсолютно и условно необходимым.

5. Каким требованиям должна отвечать основная система в методе сил?

6. Какая основная система является рациональной для расчета неразрезной балки?

7. Как составляются канонические уравнения?

8. В чем заключается физический смысл коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях?

9. Как определяют единичные и грузовые коэффициенты канонических уравнений?

10. В чем заключается способ Верещагина?

11. Как проверить правильность вычисления единичных и грузовых коэффициентов?

12. Какими способами можно построить окончательные эпюры внутренних усилий?

13. Почему статическая проверка является необходимой, но недостаточной проверкой правильности построенных эпюр?

14. В чем заключается деформационная проверка?

15. Запишите канонические уравнения метода сил для случая заданного смещения опор?

16. Как вычислить перемещения, вызванные смещением опор основной системы?

17. Почему результаты расчета (внутренние усилия) при силовом воздействии не зависят от абсолютных значений жесткостей, а определяются их соотношением?

18. В каком случае внутренние усилия будут зависеть от абсолютных значений жесткостей?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение…… 3

1. Методические указания…….. 4

2. Пример расчета рамы методом сил…… 7

3. Пример расчета неразрезной балки методом сил на действие заданной нагрузки…… 15

4. Пример расчета неразрезной балки на смещение опор..... 20

5. Программа для решения задач методом сил……. 23

Список рекомендуемой литературы…….. 31

Приложение 1…….. 32

Приложение 2……... 33