Н. М. БЕЛЯЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

При участии

Л. А. БЕЛЯВСКОГО, В. К. КАЧУРИНА,
Я. И. КИПНИСА, И. А. КОЖЕВНИКОВА,
Н. Ю. КУШЕЛЕВА и А. К. СИНИЦКОГО

Под общей редакцией

В. К. КАЧУРИНА

ИЗДАНИЕ ОДИННАДЦАТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

6.05
Б 44
УДК 620.10 (076.1)

$\frac{3-1-4}{29-68}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При составлении второго издания сборника задач коллектив авторов поставил себе целью, насколько возможно, сохранить основное направление, принятое покойным Н. М. Беляевым в первом издании, обеспечив в то же время соответствие сборника современному состоянию науки о сопротивлении материалов.

В связи с этим первое издание подверглось большой переработке и существенным дополнениям. Наряду с использованием значительной части задач предыдущего издания в сборник включено на основе опыта советской школы известное количество новых задач. Кроме того, авторы сочли необходимым пополнить сборник новыми разделами, отражающими развитие науки о сопротивлении материалов за последние годы. В частности, введены такие разделы: расчет статически неопределимых систем по допускаемым нагрузкам; расчет тонкостенных стержней; расчет элементов конструкций и машин на ползучесть; определение деформаций и расчет статически неопределимых балок по методу начальных параметров.

Получили известное развитие в сборнике такие разделы, как расчеты на устойчивость, колебания, удар, усталость и др.

При подборе материала авторы стремились располагать задачи в порядке нарастающей трудности, ориентируясь на наиболее целесообразные для проведения практических занятий и при выполнении самостоятельной домашней работы студентов. Некоторые задачи даны с расчетом использования их для контрольных и индивидуальных домашних заданий.

Особенно сложные задачи в сборник не включены.

Для одной-двух задач каждого типа приведены решения, подавляющее большинство задач дано с ответами.

При решении задач рекомендуем пользоваться указаниями Н. М. Беляева, которые были им даны в предисловии к первому изданию: «Чтобы избежать механического применения учащимися готовых формул, во многих задачах пропущены буквенные выражения для исходных данных. В этих случаях перед началом решения задачи учащийся сам должен ввести эти обозначения и решать задачу в алгебраической форме до тех пор, пока это не вызовет излишних усложнений. Только после этого следует перейти к численному решению и довести его до конца в числовом виде. Правильность полученного результата необходимо оценить по существу, сопоставляя его с исходными данными».

В. К. Качурин

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем третьем издании сборник почти по всем разделам пополнен новыми задачами. В то же время устранены некоторые дублирования, имевшие место в предыдущем издании.

Материал задачника перераспределен. Рубрикация значительно упрощена.

По ряду задач добавлены ответы. В приложениях добавлена таблица коэффициентов снижения допускаемых напряжений. Устранены дефекты, обнаруженные во втором издании.

Авторы неоднократно получали от специалистов критические замечания по предыдущему изданию. Особенно много ценных замечаний было получено от старшего преподавателя кафедры сопротивления материалов Архангельского Лесотехнического института Л. П. Биричевского. Авторы целиком учли эти замечания и выражают искреннюю благодарность товарищу Л. П. Биричевскому.

Между отдельными авторами материал был распределен следующим образом: Л. А. Белявским составлены §§ 22—24; В. К. Качуриным — § 35; Я. И. Кипнисом §§ 14—21 и 34; И. А. Кожевниковым §§ 10—13 и 29; Н. Ю. Кушелевым §§ 1—7; 9; 33 и приложения; А. К. Синицким §§ 7; 8; 25—28; 30—32 и 36—40.

В. К. Качурин

В девятом издании заменены таблицы прокатного сортамента согласно новым ГОСТам и приведены в соответствие с ними условия и решения задач.

ОБЩИЕ ДЛЯ ВСЕХ ЗАДАЧ ДАННЫЕ

Если нет специальных указаний в условии задачи, то при решении задач необходимо принимать следующие значения указанных величин:

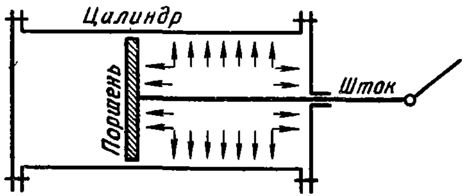
Модуль упругости стали при растяжении или сжатии . .	$E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*
Модуль упругости алюминия и дюралюмина	$E = 0{,}7 \cdot 10^6$ *кг/см²*
Модуль упругости чугуна	$E = 1{,}2 \cdot 10^6$ *кг/см²*
Модуль упругости меди	$E = 1 \cdot 10^6$ *кг/см²*
Модуль упругости дерева вдоль волокон	$E = 1 \cdot 10^5$ *кг/см²*
Модуль упругости стали при сдвиге	$G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см²*
Температурный коэффициент линейного расширения стали	$\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$
Температурный коэффициент линейного расширения меди	$\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$
Коэффициент поперечной деформации стали	$\mu = 0{,}30$
Объемный вес стали	$\gamma = 7{,}8$ *г/см³*

ГЛАВА 1

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 1. Статически определимые системы

1.1. Поршень цилиндра паровой машины (см. рисунок) имеет диаметр 40 *см*, а шток поршня — диаметр 5,6 *см*. Давление пара равно 10 *ат* (1 *ат* = 1 *кг/см²*). Найти наибольшее напряжение



К задаче 1.1.

в штоке и соответствующее изменение его длины во время одного хода машины. Длина штока равна 75 *см*, материал штока — сталь.

Решение. Обозначим: диаметр цилиндра $D\,(=40$ *см*), диаметр штока $d\,(=5{,}6$ *см*), длину штока $l\,(=75$ *см*), давление пара $q\,(=10$ *ат* $=10$ *кг/см²*), модуль упругости $E\,(=2\cdot 10^6$ *кг/см²*).

Рабочая площадь поршня равна

$$F_1=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)=0{,}785\,(40^2-5{,}6^2)=1230\ \textit{см}^2.$$

Усилие в штоке составит

$$P=F_1q=1230\cdot 10=12\,300\ \textit{кг}.$$

Площадь сечения штока равна

$$F_2=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi\cdot 5{,}6^2}{4}=24{,}65\ \textit{см}^2.$$

Напряжение в штоке получится следующим:

$$\sigma=\frac{P}{F_2}=\frac{12\,300}{24{,}65}=500\ \textit{кг/см}^2,$$

а удлинение штока будет равно

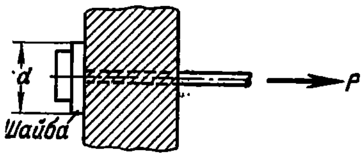
$$\Delta l=\frac{Pl}{EF_2}=\frac{12\,300\cdot 75}{2\cdot 10^6\cdot 24{,}65}=0{,}0187\ \textit{см}=187\cdot 10^{-4}\ \textit{см}.$$

1.2. Какую наибольшую нагрузку может выдержать деревянный столб сечением 16×16 *см*² при сжимающем напряжении не более 100 *кг/см*²?

Ответ: 25,6 *т*.

1.3. Чугунная колонна кольцевого поперечного сечения имеет наружный диаметр 25 *см* и толщину стенки 25 *мм*. Каковы относительное и абсолютное укорочения колонны при нагрузке 50 *т*. Найти напряжения в поперечном сечении. Высота колонны 3 *м*.

Ответ: $\varepsilon = 2{,}36 \cdot 10^{-4}$, $\Delta l = 0{,}71$ *мм*, $\sigma = -283$ *кг/см*².



К задаче 1.4.

1.4. Стяжка диаметром 25 *мм* растянута усилием P (см. рисунок), вызывающим в ней напряжение 1000 *кг/см*². Чему должен равняться диаметр шайбы d, чтобы давление, передаваемое ею на стену, не превышало 14 *кг/см*²?

Ответ: 213 *мм*.

1.5. Медная проволока диаметром 1,2 *мм* удлиняется на 0,25 *мм* под нагрузкой 9 *кг*. Определить длину проволоки.

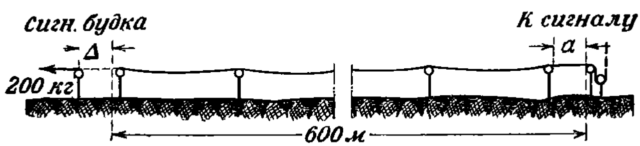
Ответ: 31,4 *см*.

1.6. Чугунная колонна кольцевого поперечного сечения имеет наружный диаметр 30 *см* и нагружена силой 200 *т*. Определить необходимую толщину стенки при допускаемом напряжении на сжатие, равном 800 *кг/см*².

Ответ: 2,9 *см*.

1.7. Проволока диаметром 5 *мм* и длиной 600 *м*, приводящая в движение железиодорожный сигнал, расположена на роликах, как указано на рисунке.

Определить, какое перемещение Δ при усилии в 200 *кг* надо дать концу проволоки в сигнальной будке, если перемещение другого



К задаче 1.7.

ее конца у сигнала должно быть равио $a = 17{,}5$ *см*. Провесом проволоки между роликами и силой трения между проволокой и роликами пренебречь.

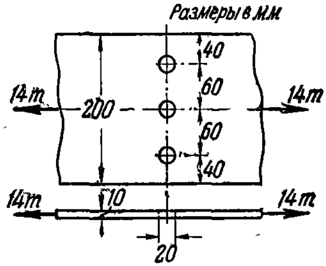
Ответ: 48 *см*.

1.8. Стержень из малоуглеродистой стали шириной 30 *см* и толщиной 15 *мм* ослаблен заклепочным отверстием диаметром 23 *мм*, расположенным на оси стержня. Какое растягивающее усилие этот стержень может выдержать, если допускаемое напряжение равно 900 *кг/см²*?

Ответ: 37,4 *т*.

1.9. Стальная полоса (см. рисунок) растянута продольными силами. Она ослаблена круглыми заклепочными отверстиями, как показано на рисунке. Определить среднюю величину напряжений в опасном сечении.

Ответ: 1000 *кг/см²*.



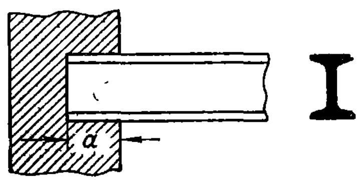
К задаче 1.9.

1.10. Затяжка арочной фермы длиной 10 *м* испытывает растягивающее усилие 60 *т*. Затяжка состоит из двух стальных швеллеров № 18а. Насколько удлинится затяжка?

Ответ: 6,75 *мм*.

1.11. Двутавровая балка № 30а заложена концами в кирпичную стену (см. рисунок). Через каждый конец балки равномерно передается на кладку давление $Q=6$ *т*. Определить, на какую длину a следует заложить в стену конец балки, если допускаемое напряжение на сжатие для кирпичной кладки равно $[\sigma]=9$ *кг/см²*. Ширину балки взять из сортамента.

Ответ: 46 *см*.



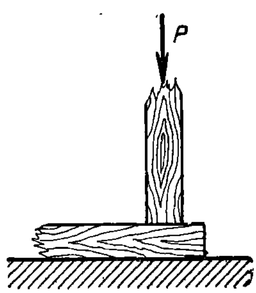
К задаче 1.11.

1.12. Две проволоки, одна стальная, другая медная, имеют одинаковую длину и нагружены одинаковыми осевыми растягивающими усилиями. Медная проволока имеет диаметр 1 *мм*. Чему равен диаметр стальной проволоки, если обе проволоки удлиняются на одинаковую величину?

Ответ: 0,71 *мм*.

1.13. Сосновая стойка сечением 20×20 *см* опирается на дубовую подушку, как указано на рисунке. Допускаемое напряжение на смятие для сосны вдоль волокон равно $[\sigma_{\parallel}]=100$ *кг/см²*, а для дуба поперек волокон $[\sigma_{\perp}]=30$ *кг/см²*. Определить предельную нагрузку на стойку.

Ответ: 12 *т*.

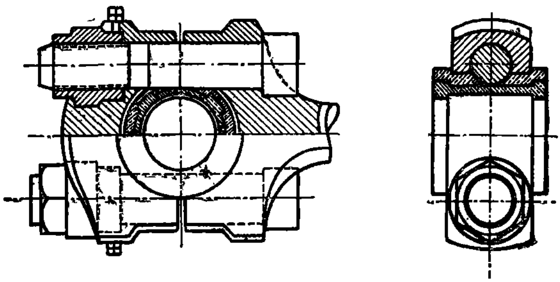


К задаче 1.13.

1.14. К нижнему концу троса, закрепленного верхним концом, подвешен груз $P=7,5$ *т*. Трос составлен из проволок диаметром $d=2$ *мм*. Допускаемое напряжение для материала троса равно $[\sigma]=3000$ *кг/см²*. Из какого количества проволок должен быть составлен трос?

Ответ: 80 проволок.

1.15. Определить диаметр каждого из двух болтов, соединяющих обе части разъемной головки шатуна (см. рисунок); усилие в шатуне

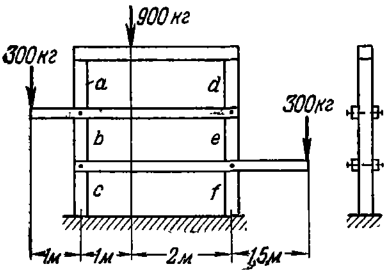


К задаче 1.15.

$P = 12\,800$ *кг*; допускаемое напряжение для материала болтов равно $[\sigma] = 600$ *кг/см²*.

Ответ: 37 *мм*.

1.16. Две деревянные стойки сечением 10×10 *см* каждая нагружены, как указано на рисунке. Определить напряжения в различных сечениях обеих стоек.



К задаче 1.16.

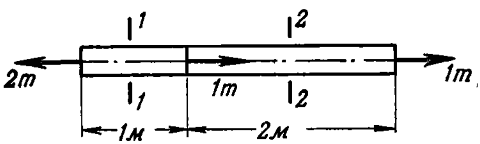
Ответ: В *кг/см²*:

$\sigma_a = -6, \quad \sigma_b = -10, \quad \sigma_c = -8{,}5,$

$\sigma_d = -3, \quad \sigma_e = -2, \quad \sigma_f = -6{,}5.$

1.17. Определить напряжения в сечениях *1—1* и *2—2* и полное удлинение стального стержня, нагруженного, как показано на рисунке, если площадь его поперечного сечения равна 4 *см²*.

Решение. Мысленно рассекаем стержень сечением *1—1* и отбрасываем хотя бы правую часть. Для того чтобы уравновесить силу 2 *т*, приложенную к оставшейся левой части, равнодействующая внутренних сил в сечении



К задаче 1.17.

1—1 должна равняться тоже 2 *т* и быть направленной вправо, в наружную сторону от оставшейся части. Таким образом, в сечении *1—1* усилие растягивающее и равно $S_1 = 2$ *т*. Путем подобных рассуждений устанавливаем, что в сечении *2—2* усилие тоже растягивающее и равно $S_2 = 1$ *т*.

Теперь мы можем определить напряжения. В сечении *1—1* оно равно

$$\sigma_{1-1}=\frac{S_1}{F}=\frac{2000}{4}=500\ кг/см^2,$$

а в сечении *2—2*

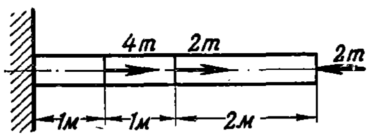
$$\sigma_{2-2}=\frac{S_2}{F}=\frac{1000}{4}=250\ кг/см^2.$$

Так как усилие в левом участке (длиной 1 *м*) не равно усилию в правом участке (длиной 2 *м*), то деформации каждого участка надо определить отдельно. Полная деформация стержня получится путем суммирования (алгебраического, если они разных знаков) деформаций отдельных участков. В нашем случае

$$\Delta l=\Delta l_1+\Delta l_2=\frac{S_1 l_1}{EF}+\frac{S_2 l_2}{EF}=\frac{2000\cdot 100}{2\cdot 10^6\cdot 4}+\frac{1000\cdot 200}{2\cdot 10^6\cdot 4}=$$

$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}=0{,}05\ см=0{,}5\ мм.$$

1.18. Определить напряжения во всех участках изображенного на рисунке стального стержня и полную его деформацию, если поперечное сечение равно 10 $см^2$.



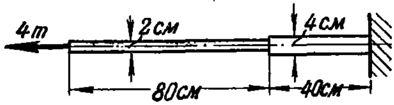
К задаче 1.18.

Ответ:
В левом участке $\sigma=400\ кг/см^2$;
в среднем » $\sigma=0$;
в правом » $\sigma=-200\ кг/см^2$;
$\Delta l=0$.

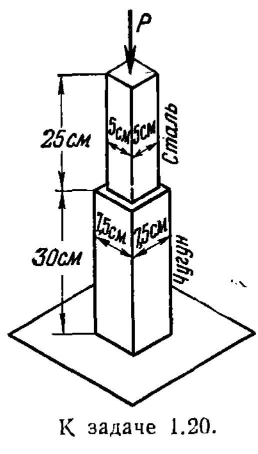
1.19. Определить напряжения в обеих частях изображенного на рисунке стержня, а также полное его удлинение. Материал стержня — сталь, сечение круглое.

Ответ:
В левой части $\sigma=1276\ кг/см^2$;
в правой » $\sigma=319\ кг/см^2$;
$\Delta l=0{,}575\ мм$.

1.20. На рисунке представлен стержень, верхняя часть которого стальная,



К задаче 1.19.

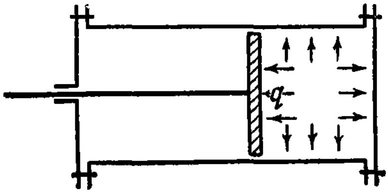


К задаче 1.20.

а нижняя чугунная. Осевая нагрузка *P* укорачивает весь стержень на 0,2 *мм*. Определить величину нагрузки *P*.

Ответ: 21,2 *т*.

1.21. Рабочее давление в цилиндре паровой машины $q = 10$ *ат* (превышение над наружным); внутренний диаметр цилиндра $D = 350$ *мм* (см. рисунок). Сколько болтов диаметром $d = 18$ *мм* необходимо,



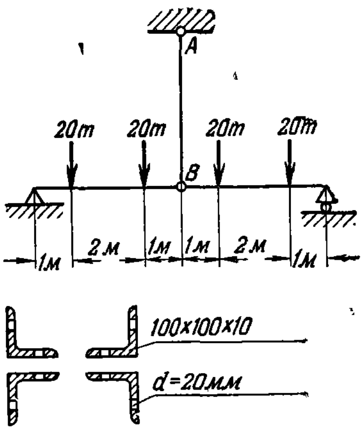
К задаче 1.21.

чтобы прикрепить крышку к телу цилиндра, если допускаемое напряжение для материала болтов $[\sigma] = 400$ *кг/см²*?

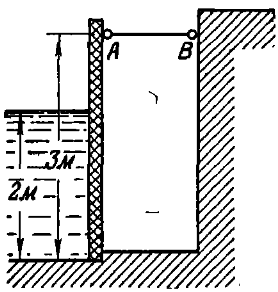
Ответ: 10 болтов.

1.22. Сечение подвески AB (см. рисунок) состоит из четырех стандартных уголков размером $100 \times 100 \times 10$ *мм*, ослабленных восемью заклепочными отверстиями диаметром 20 *мм*. Определить напряжение в опасном сечении подвески.

Ответ: 659 *кг/см²*.



К задаче 1.22.



К задаче 1.23.

1.23. Водонепроницаемый щит удерживается деревянными распорками AB (см. рисунок) от опрокидывания давлением воды. Распорки поставлены через каждые три метра. Подобрать круглое сечение распорки, если для дерева допускаемое напряжение на сжатие в нашем случае равно $[\sigma] = 30$ *кг/см²*.

Решение. Выделим часть щита длиной (перпендикулярно к плоскости чертежа), равной 3 *м*. На эту длину приходится одна распорка. Гидростатическое давление воды, действующее на выделенную часть щита, равно $3 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 6$ *т*. Оно направлено горизонтально и приложено на высоте, равной $^1/_3$ глубины воды, т. е. на $^2/_3$ *м* от дна.

Давление щита на распорку в точке A, равное сжимающему усилию в распорке, находим по правилу рычага:

$$P = 6 \cdot \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}\ m.$$

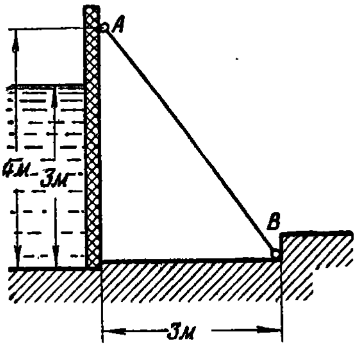
Необходимая площадь поперечного сечения распорки равна

$$F = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{4000}{3 \cdot 30} = 44{,}5\ см^2.$$

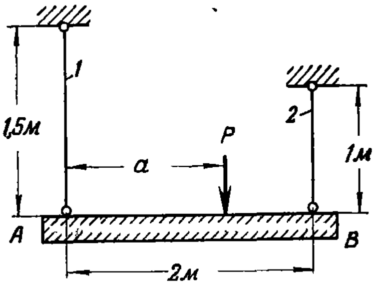
Диаметр распорки равен $d \geqslant 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{44{,}5}{3{,}14}} = 7{,}5\ см.$

1.24. Водонепроницаемый щит удерживается от опрокидывания деревянными подкосами AB (см. рисунок) круглого поперечного сечения диаметром 15 *см*. Допускаемое напряжение для материала подкосов принято равным 20 *кг/см*². Определить наибольшее расстояние между подкосами.

Ответ: 1,88 *м*.



К задаче 1.24.



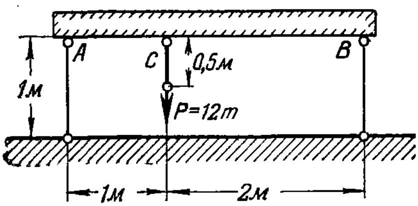
К задаче 1.25.

1.25. Жесткий брус AB, деформацией которого можно пренебречь, горизонтально подвешен на тягах *1* и *2*. Тяга *1* — стальная, круглого сечения, диаметром 20 *мм*, тяга *2* — медная, тоже круглого сечения, диаметром 25 *мм*. На каком расстоянии a от узла A (см. рисунок) нужно поместить груз P, чтобы и после деформации брус AB остался горизонтальным? Чему в этом случае будут равны напряжения в тягах, если $P = 3\ m$?

Ответ: $a = 1{,}08$ *м*, $\sigma_{(1)} = 440$ *кг/см*², $\sigma_{(2)} = 330$ *кг/см*².

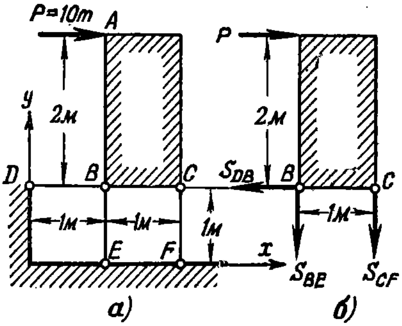
1.26. Жесткая балка AB, деформацией которой пренебрегаем, опирается на стойки и нагружена, как указано на рисунке. Стойка A — стальная, сечением 10 *см*², стойка B — деревянная, сечением 100 *см*², стержень C — медный, сечением 30 *см*². Определить опускание точки подвеса груза.

Ответ: $\Delta = 0{,}6$ *мм*.



К задаче 1.26.

1.27. Три стержня, прикрепляющие к фундаменту жесткую конструкцию (см. рисунок *а*)), выполнены из стали и имеют одинаковое поперечное сечение площадью 20 *см*². Определить напряжения в стержнях, а также горизонтальное, вертикальное и полное перемещения точки *B* под действием горизонтальной силы.



К задаче 1.27.

Решение. Для определения усилий в стержнях мысленно разрезаем стержни и в местах разрезов прикладываем неизвестные нам пока усилия, предполагая их все растягивающими (см. рисунок *б*)). После этого составляем уравнения равновесия для этих усилий и нагрузки *P*:

$$\sum X = P - S_{DB} = 0,$$

откуда $S_{DB} = P$,

$$\sum m_B = P\cdot 2 + S_{CF}\cdot 1 = 0,$$

откуда $S_{CF} = -2P$,

$$\sum m_C = P\cdot 2 - S_{BE}\cdot 1 = 0,$$

откуда $S_{EB} = 2P$.

Таким образом, для стержней *DB* и *BE* наше предположение о знаке усилий оказалось правильным, для стержня *CF* — неправильным.

Имея значения усилий, можно подсчитать напряжения в стержнях:

$$\sigma_{DB} = \frac{S_{DB}}{F} = \frac{P}{F} = \frac{10\,000}{20} = 500\ \text{кг/см}^2,$$

$$\sigma_{BE} = \frac{S_{BE}}{F} = \frac{2P}{F} = \frac{2\cdot 10\,000}{20} = 1000\ \text{кг/см}^2,$$

$$\sigma_{CF} = \frac{S_{CF}}{F} = -\frac{2P}{F} = -\frac{2\cdot 10\,000}{20} = -1000\ \text{кг/см}^2.$$

Горизонтальное перемещение точки *B* равно удлинению стержня *BD*. Следовательно,

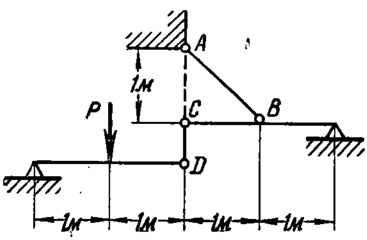
$$\Delta l_{\text{гор}} = \Delta l_{BD} = \frac{S_{BD}l}{EF} = \frac{10\,000\cdot 100}{2\cdot 10^6\cdot 20} = 0{,}025\ \text{см} = 0{,}25\ \text{мм}.$$

Вертикальное перемещение точки *B* равно удлинению стержня *BE*. Следовательно,

$$\Delta l_{\text{верт}} = \Delta l_{BE} = \frac{S_{BE}l}{EF} = \frac{20\,000\cdot 100}{2\cdot 10^6\cdot 20} = 0{,}05\ \text{см} = 0{,}5\ \text{мм}.$$

Полное перемещение точки *B* получится геометрическим суммированием горизонтального и вертикального перемещений:

$$\Delta = \sqrt{\Delta^2_{\text{гор}} + \Delta^2_{\text{верт}}} = \sqrt{0{,}25^2 + 0{,}5^2} = 0{,}56\ \text{мм}.$$



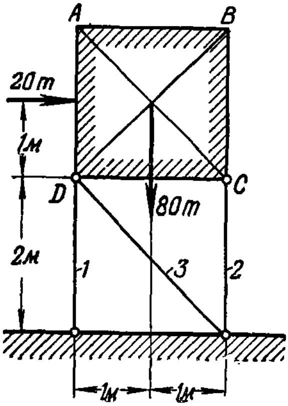
К задаче 1.28.

1.28. Подобрать диаметр круглого сечения стальных тяг *AB* и *CD* (см. рисунок), если нагрузка $P = 10$ *т*, а допускаемое напряжение для материала тяг $[\sigma] = 1000$ *кг/см*².

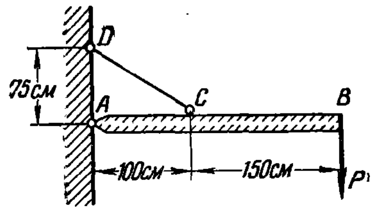
Ответ: $d_{AB} = 42{,}4$ *мм*, $d_{CD} = 25{,}2$ *мм*.

1.29. Жесткая конструкция *ABCD* поддерживается стойками *1* и *2* и раскосом *3*, соединенными шарнирно (см. рисунок). Конструкция весит 80 *т* и испытывает боковое давление 20 *т*. Подобрать сечение стоек и раскоса из четырех равнобоких стандартных уголков каждое, если $[\sigma_-] = 1000$ *кг/см²*.

Ответ: Сечение стойки *1* должно состоять из уголков размером $32 \times 32 \times 4$, сечение стойки 2 — из уголков размером $80 \times 80 \times 8$ и сечение раскоса *3* — из уголков $63 \times 63 \times 6$.



К задаче 1.29.

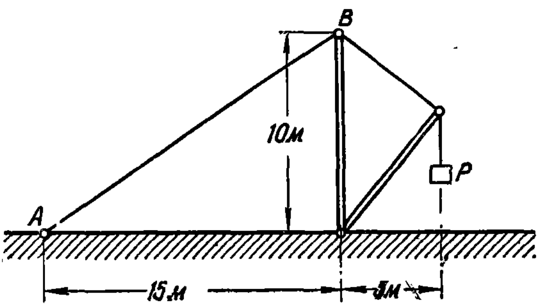


К задаче 1.30.

1.30. Жесткий стержень *AB* (см. рисунок) нагружен силой *P* и поддерживается стальной тягой *DC* круглого поперечного сечения диаметром 20 *мм*. Определить наибольшую допустимую нагрузку *P* и опускание точки *B*. Допускаемое напряжение для материала стержня *CD* равно 1600 *кг/см²*.

Ответ: $P = 1{,}2$ *т*, $\delta_B = 4{,}17$ *мм*.

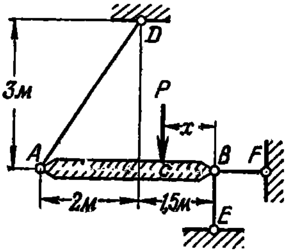
1.31. Оттяжка *AB* подъемного крана (см. рисунок) представляет собой трос с поперечным сечением 500 *мм²*. Допускаемое напряжение для материала троса равно 400 *кг/см²*. Какой груз *P* может быть поднят краном из условия прочности оттяжки?



К задаче 1.31.

Ответ: 3,33 *т*.

1.32. Жесткий брус AB закреплен, как указано на рисунке. Тяга AD — стальная, круглого сечения, диаметром 25 *мм*, стойка BE — деревянная, длиной 1 *м*, квадратного сечения 20×20 *см*. На каком расстоянии x от опоры B нужно поместить силу P, чтобы опускание точки B было в два раза больше опускания точки A? Какое значение должна иметь сила P, чтобы в этом случае опускание точки C равнялось 1 *мм*? Чему тогда будут равны напряжения в тяге AD и в стойке BE? Деформацией горизонтального стержня BF пренебречь.

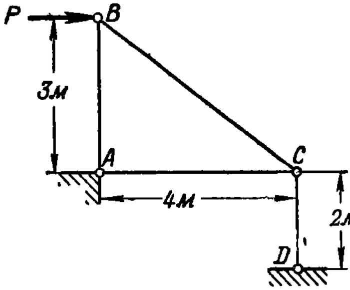


К задаче 1.32.

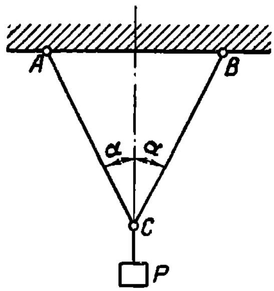
Ответ: $x = 0{,}081$ *м*, $P = 41{,}4$ *т*, $\sigma_{AD} = 234$ *кг/см²*, $\sigma_{BE} = 101$ *кг/см²*.

1.33. В изображенной на рисунке конструкции все стержни стальные, одинакового поперечного сечения, площадью 30 *см²*. Сила $P = 10$ *т*. Определить напряжения в стержнях.

Ответ: $\sigma_{AB} = 250$ *кг/см²*, $\sigma_{AC} = 333$ *кг/см²*, $\sigma_{BC} = -417$ *кг/см²*, $\sigma_{CD} = -250$ *кг/см²*.



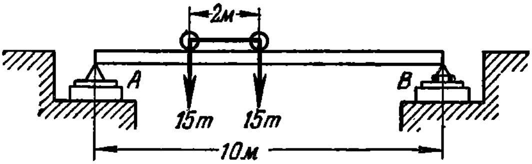
К задаче 1.33.



К задаче 1.34.

1.34. Груз P подвешен на двух стержнях, как изображено на рисунке. Угол $\alpha = 30°$. Стержень AC — стальной, круглого поперечного сечения, диаметром 30 *мм*, с допускаемым напряжением для материала $[\sigma]_c = 1600$ *кг/см²*, стержень CB — алюминиевый, диаметром 40 *мм* и с $[\sigma]_a = 600$ *кг/см²*. Какой наибольший груз P можно подвесить на этих стержнях?

Ответ: 13 *т*.



К задаче 1.35.

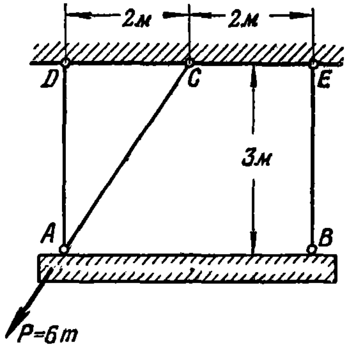
1.35. Жесткая балка опирается на «подферменные камни» A и B. По балке перемещаются два связанных между собой груза по 15 *т* каждый (см. рисунок). Сечение подферменников в плане — квадратное. Определить их размеры в плане при самом невыгодном положении нагрузки на балке, если допускаемое напряжение для кладки под подферменниками равно 10 *кг/см²*.

Ответ: 52 × 52 *см*.

1.36. Жесткий брус AB подвешен на трех стальных стержнях одинакового поперечного сечения $F = 10$ *см²* (см. рисунок). Определить напряжения в стержнях, а также вертикальное и горизонтальное перемещения точки A.

Ответ:

$$\sigma_{AD} = \sigma_{BE} = 0, \quad \sigma_{AC} = 600 \text{ кг/см}^2,$$
$$\Delta_{\text{верт}} = 0, \quad \Delta_{\text{гор}} = 1{,}95 \text{ мм}.$$



К задаче 1.36.

1.37. Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием 10 *т*. Относительное удлинение не должно превышать $\frac{1}{2000}$, а напряжение не должно быть больше 1200 *кг/см²*. Найти наименьший диаметр стержня, удовлетворяющий этим условиям.

Решение. Выразим относительную деформацию через нагрузку P, площадь поперечного сечения $\frac{\pi d^2}{4}$ и модуль упругости E и приравняем ее заданной допускаемой относительной деформации $[\varepsilon]$:

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} E} \leqslant [\varepsilon].$$

Отсюда найдем необходимый диаметр, удовлетворяющий данному условию:

$$d = 2\sqrt{\frac{P}{\pi E [\varepsilon]}} = 2\sqrt{\frac{10^4 \cdot 2 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^6}} = 3{,}57 \text{ см}.$$

Теперь независимо от предыдущего решения напишем условие прочности через P, $\frac{\pi d^2}{4}$ и $[\sigma]$:

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leqslant [\sigma],$$

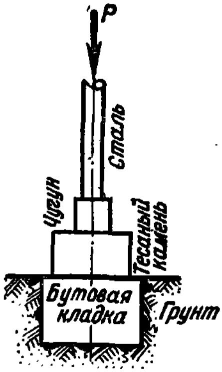
откуда

$$d = 2\sqrt{\frac{P}{\pi [\sigma]}} = 2\sqrt{\frac{10^4}{3{,}14 \cdot 1200}} = 3{,}25 \text{ см}.$$

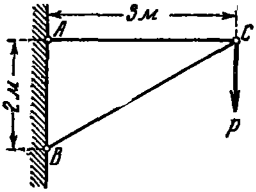
Из двух найденных диаметров необходимо взять больший, т. е. 3,57 *см*, так как меньший диаметр не будет удовлетворять условию жесткости.

1.38. Подобрать квадратные поперечные сечения отдельных частей колонны, изображенной на рисунке, если $P = 100$ *т*, а допускаемые напряжения на сжатие следующие:

для стали	$[\sigma_с] = 1400$ *кг/см*²,
для чугуна	$[\sigma_ч] = 1000$ *кг/см*²,
для тесаного камня	$[\sigma_к] = 40$ *кг/см*²,
для бутовой кладки	$[\sigma_б] = 15$ *кг/см*²,
для грунта (песок)	$[\sigma_г] = 5$ *кг/см*².



К задаче 1.38.



К задаче 1.39.

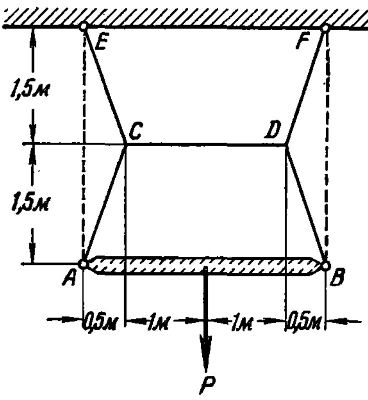
Собственный вес частей колонны не учитывать.

Ответ: Сечение стальной колонны 10×10 *см*, сечение чугунного башмака 50×50 *см*, сечение тесаного каменного цоколя 82×82 *см*, сечение бутового фундамента 142×142 *см*.

1.39. Кронштейн (см. рисунок) нагружен силой $P = 6$ *т*. Стержень AC — стальной, допускаемое напряжение для материала $[\sigma]_с = 1600$ *кг/см*², стержень BC — деревянный, допускаемое напряжение $[\sigma]_д = 40$ *кг/см*². Подобрать круглое сечение стального стержня и квадратное сечение деревянного и определить горизонтальное, вертикальное и полное смещения узла C.

Ответ: $d = 27$ *мм*, $a = 16{,}4$ *см*, $\delta_{гор} = 2{,}4$ *мм*,

$$\delta_{верт} = 6{,}2 \text{ мм}, \quad \delta = 6{,}64 \text{ мм}.$$



К задаче 1.40.

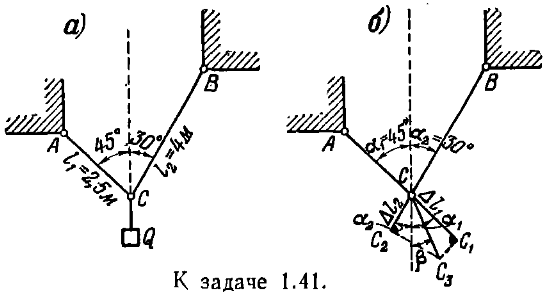
1.40. Жесткий брус AB подвешен, как указано на рисунке, к системе пеньковых канатов. Определить наибольшую возможную нагрузку P, если допускаемое напряжение для материала канатов принято равным 100 *кг/см*², все канаты одного сечения диаметром $d = 25$ *мм*, а полезная площадь сечения составляет 75% от площади, заключенной в периметре каната.

Ответ: 695 *кг*.

1.41. Два стержня AC и BC (см. рисунок *а*)) шарнирно прикреплены к опорам и соединены в точке C шарниром, к которому подвешен груз $Q = 5$ *т*. Стержень AC изготовлен из дюралюмина, стержень BC — из стали. Допускаемое напряжение для материала обоих стержней одинаково и равно $[\sigma] = 1500$ *кг/см²*. Найти необходимые площади поперечных сечений стержней, а также вертикальное и горизонтальное перемещения точки C.

Ответ: $F_{AC} = 1{,}73$ *см²*, $F_{BC} = 2{,}44$ *см²*, $\Delta_в = 5$ *мм*, $\Delta_г = 2{,}6$ *мм*.

Указание. Для определения перемещения точки C разъединим в ней стержни и изобразим их новые длины AC_1 и BC_2, увеличив старые на

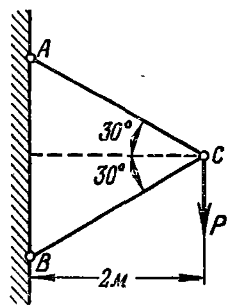


К задаче 1.41.

$\Delta l_1 = CC_1$ и $\Delta l_2 = CC_2$ (см. рисунок *б*)). Для того чтобы найти новое положение точки C, сведем вместе удлиненные стержни, вращая их вокруг точек A и B. Точки C_1 и C_2 будут перемещаться по дугам C_1C_3 и C_2C_3, которые по их малости могут быть приняты за прямые, перпендикулярные к AC_1 и BC_2. Тогда отрезок CC_3 и будет искомым перемещением Δ. Обозначая угол, составленный этим отрезком с вертикалью, через β, получаем систему уравнений:

$$\Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \frac{\Delta l_2}{\cos(\alpha_2 + \beta)}.$$

Из этих уравнений определяем β, а затем Δ и его вертикальную и горизонтальную проекции.



К задаче 1.42.

1.42. Кронштейн ABC (см. рисунок) состоит из двух стержней AC и BC. Он нагружен силой P. Стержень AC — стальной, из двух швеллеров № 12, стержень BC — тоже стальной, из двутавра № 24. Допускаемое напряжение для стержня AC равно 1600 *кг/см²*, для стержня BC — 1000 *кг/см²*. Определить наибольшую допустимую нагрузку P и вертикальное перемещение узла C.

Ответ: $P = 34{,}8$ *т*, $\delta = 2{,}70$ *мм*.

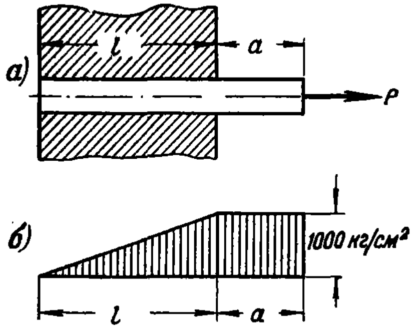
1.43. Заделанный в бетон железный стержень держится в нем силами сцепления, равномерно распределенными по его длине. Для выдергивания стержня к одному из его концов прикладывают силу $P = 2$ *т* (см. рисунок *а*) на стр. 22). Площадь сечения стержня $F = 2$ *см²*; длина $l = 40$ *см*, длина $a = 15$ *см*. Построить эпюру (график) изменения напряжений в разных сечениях по длине стержня и определить его удлинение.

Решение. В любом сечении на части стержня длиной a напряжения одинаковы и равны

$$\sigma=\frac{P}{F}=\frac{2000}{2}=1000\ кг/см^2.$$

На части стержня длиной l равнодействующая сил сцепления из условия равновесия должна равняться силе P. По условиям задачи эта сила распределена равномерно на длине l, следовательно, на единицу этой длины придется сила

$$p=\frac{P}{l}.$$



К задаче 1.43.

Возьмем сечение на расстоянии x от левого конца стержня. Тогда левее сечения равнодействующая сил сцепления будет равна

$$S=px=\frac{P}{l}x.$$

Отбросив правую часть стержня, из условия равновесия левой оставшейся части получаем, что усилие в сечении равно S. Тогда напряжения в сечении на расстоянии x от левого конца стержня будут равны

$$\sigma(x)=\frac{S}{F}=\frac{Px}{lF}.$$

На левом конце стержня при $x=0$ они равны нулю, на расстоянии l от левого конца напряжения

$$\sigma_l=\frac{Pl}{lF}=\frac{P}{F}=1000\ кг/см^2.$$

Эпюра напряжений по длине стержня представлена на рисунке *б*) (линейный закон).

Удлинение части стержня длиной a будет равно

$$\Delta l_a=\frac{Pa}{EF}=\frac{2000\cdot 15}{2\cdot 10^6\cdot 2}=7{,}5\cdot 10^{-2}\ см.$$

Для определения удлинения части стержня длиной l выделим на расстоянии x от левого его конца бесконечно малую часть стержня длиной dx. Усилие в этом сечении было определено ранее. Тогда удлинение этой бесконечно малой части длины стержня будет равно

$$d\,\Delta l=\frac{S\,dx}{EF}=\frac{Px\,dx}{lEF}.$$

Удлинение всей части длины стержня l получим путем интегрирования:

$$\Delta l_l=\int_0^l d\,\Delta l=\int_0^l \frac{Px\,dx}{lEF}=\frac{Pl}{2EF}=\frac{2000\cdot 40}{2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2}=1\cdot 10^{-2}\ см.$$

Полное удлинение Δl всего стержня будет равно

$$\Delta l=\Delta l_l+\Delta l_a=1\cdot 10^{-2}+7{,}5\cdot 10^{-3}=17{,}5\cdot 10^{-3}\ см=0{,}175\ мм.$$

1.44. Груз подвешен к стальной проволоке, размеры которой до деформации были следующими: $l = 3$ *м* и $d = 1,6$ *мм*. Удлинение проволоки оказалось равным 1,5 *мм*. Затем тот же груз был подвешен к медной проволоке длиной $l_1 = 1,8$ *м* и диаметром $d_1 = 3,2$ *мм*. Ее удлинение получилось равным 0,39 *мм*. Определить модуль упругости медной проволоки, если модуль стальной — $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*.

Ответ: $1,15 \cdot 10^6$ *кг/см²*.

1.45. К тросу диаметром $d = 10$ *мм* подвешена клеть шахтного подъемника весом 100 *кг*. Длина троса, нагруженного лишь весом самой клети, равна 100 *м*; его длина, когда клеть загружена еще 400 *кг* руды, на 3 *см* больше. Определить модуль упругости троса.

Ответ: $1,7 \cdot 10^6$ *кг/см²*.

1.46. На стальном стержне диаметром 2,5 *см* были нанесены две риски (небольшие черточки) на взаимном расстоянии в 25 *см*. Когда стержень был растянут усилием в 10 000 *кг*, расстояние между рисками стало равным 25,027 *см*. Каково будет расстояние между рисками, если: а) растягивающее усилие будет равно 5 *т*, б) растягивающее напряжение будет равно 800 *кг/см²*? Чему равен модуль E материала?

Ответ: В случае а) 25,0135 *см*; в случае б) 25,011 *см*; модуль $E = 1,88 \cdot 10^6$ *кг/см²*.

1.47. Стальной стержень круглого поперечного сечения ($d = 32$ *мм* и $l = 35$ *см*) был растянут на испытательной машине усилием 13,5 *т*. Было замерено уменьшение диаметра, равное 0,0062 *мм*, и на длине 5 *см* удлинение, равное 0,040 *мм*. Определить модуль упругости и коэффициент поперечной деформации.

Ответ: $E = 2,1 \cdot 10^6$ *кг/см²*, $\mu = 0,242$.

1.48. Стальной стержень длиной 6 *м* растянут силой 20 *т*; модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*, коэффициент поперечной деформации $\mu = 0,25$. Определить увеличение объема стержня.

Ответ: 3 *см³*.

1.49. При испытании пробной нагрузкой раскоса стальной стропильной фермы разность показаний тензометра оказалась равной 10 *мм*. База тензометра (длина, на которой производится измерение деформаций) равна 20 *мм*, его коэффициент увеличения 1000. Чему равны напряжения в раскосе?

Решение. Определяем напряжения по закону Гука. Абсолютная деформация равна разности показаний тензометра, деленной на его увеличение:

$$\Delta l = \frac{\Delta}{k} = \frac{10}{1000} = 0,01 \text{ мм}.$$

Относительная деформация равна отношению абсолютной деформации к базе прибора:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,01}{20} = 0,0005.$$

Напряжения равны

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,0005 = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

1.50. На деталь, работающую на растяжение, поставлен тензометр с базой 100 *мм* и коэффициентом увеличения 500. Поперечное сечение детали имеет площадь 10 $см^2$. При нагрузке в 10 *т* разность отсчетов тензометра оказалась равной 25 *мм*. Чему равен модуль упругости материала этой детали?

Ответ: $E = 2{,}07 \cdot 10^6$ $кг/см^2$.

1.51. Какую следует выбрать базу у тензометра, предназначенного для испытания стальной колонны, если его увеличение равно 1000, точность отсчета не превышает 0,1 *мм*, а напряжение необходимо измерить с точностью не ниже 10 $кг/см^2$?

Ответ: $l = 20$ *мм*.

1.52. При испытании стального стержня диаметром 2,5 *см* были получены следующие результаты (см. табл. А):

Таблица А

Нагрузка, *т*	Отсчет по тензометру, *мм*
0	28,0
1	38,0
2	48,8
3	58,2
4	69,2
5	79,3
6	89,4
7	99,2
8	110,0
9	119,4
9,2	121,4
9,4	123,8
9,6	127,0
9,8	132,8

Таблица Б

Приращение нагрузки, *т*	Приращение отсчетов, *мм*
1	10,0
1	10,8
1	9,4
1	11,0
1	10,1
1	10,1
1	9,8
1	10,8
1	9,4
0,2	2,0
0,2	2,4
0,2	3,2
0,2	5,8

Деформации измерялись на длине в 20 *см* при помощи зеркального тензометра с увеличением, равным 500. Определить предел пропорциональности, модуль упругости и начертить диаграмму растяжения.

Решение. Составим таблицу приращений отсчетов по тензометру на каждую ступень нагрузки (см. табл. Б).

Из этой таблицы мы видим, что пропорциональность между нагрузкой и деформацией нарушилась после значения нагрузкн, равного 9,2 *т*. Следовательно, предел пропорциональности равен

$$\sigma_п = \frac{P_п}{F} = \frac{9200}{3{,}14 \cdot 1{,}25^2} = 1870 \ кг/см^2.$$

От нулевой нагрузки до нагрузки $P_п$, соответствующей пределу пропорциональности, полная разность отсчетов по тензометру составила

$$\Delta = 121{,}4 - 28{,}0 = 93{,}4 \ мм.$$

Соответствующее абсолютное удлинение равно

$$\Delta l = \frac{\Delta}{k} = \frac{93,4}{500} = 186,8 \cdot 10^{-3}\ мм = 186,8 \cdot 10^{-4}\ см,$$

а относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{186,8 \cdot 10^{-4}}{20} = 93,4 \cdot 10^{-5}.$$

Модуль упругости равен

$$E = \frac{\sigma_п}{\varepsilon} = \frac{1870}{93,4 \cdot 10^{-5}} = 2,0 \cdot 10^{6}\ кг/см^2.$$

Построение диаграммы растяжения по данным таблицы не представляет затруднений.

1.53. Бетонная призма с ребром квадратного основания 10 *см* была испытана на сжатие; были получены следующие результаты:

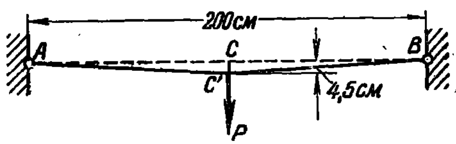
Нагрузка в *кг*	400	1300	2300	2800	4000	4500
Укорочение в *см* (на длине 20 *см*)	0,000386	0,00139	0,00250	0,00312	0,00450	0,00490

Построить кривую сжатия и определить значение модуля E при напряжении 40 $кг/см^2$.

Ответ: $E = 1,78 \cdot 10^5\ кг/см^2$.

Примечание. Зависимость между σ и ε не получится строго прямолинейной. Для определения значения E при напряжении 40 $кг/см^2$ следует спрямить кривую от нуля до этого напряжения.

1.54. Между неподвижными точками A и B (см. рисунок) горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 *мм*. Какую необходимо приложить силу P в точке C посредине длины проволоки и какое в этом случае возникает напряжение в ней, если смещение точки C по направлению силы P достигнет 4,5 *см*? Собственным весом проволоки пренебречь.



К задаче 1.54.

Решение. Абсолютное удлинение одной половины проволоки после приложения силы P будет равно разности длин CB и $C'B$:

$$\Delta l = \sqrt{100^2 + 4,5^2} - 100 = 0,1\ см.$$

Ее относительное удлинение составит

$$\varepsilon = \frac{0,1}{100} = 0,001.$$

Тогда напряжение в проволоке мы можем получить, используя закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon = 2\cdot 10^6\cdot 0{,}001 = 2000\ \text{кг/см}^2.$$

Зная напряжение, определяем усилие в проволоке:

$$S = \sigma F = 2000\cdot\frac{3{,}14\cdot 0{,}1^2}{4} = 15{,}7\ \text{кг}.$$

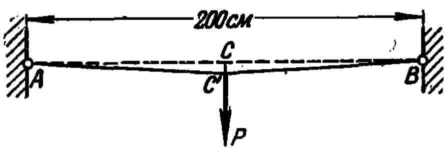
Точка C' будет находиться в равновесии под действием силы P и двух усилий S. Из подобия треугольника сил и треугольника $C'CB$ находим, что

$$\frac{\frac{P}{2}}{4{,}5} = \frac{S}{100{,}1},$$

откуда

$$P = 2\cdot 4{,}5\frac{S}{100{,}1} = \frac{9\cdot 15{,}7}{100{,}1} = 1{,}41\ \text{кг}.$$

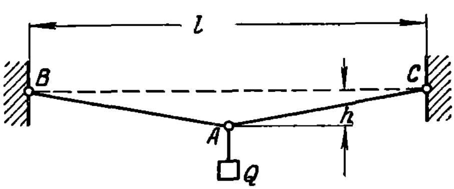
1.55. Между неподвижными точками A и B (см. рисунок) горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 *мм*. К точке C посредине длины проволоки подвешивается постепенно увеличивающаяся нагрузка P. Когда удлинение проволоки достигло $0{,}5\,\%$, она порвалась. Чему в этот момент равен груз P, какова величина опускания точки C и какой величины напряжение в проволоке в момент разрыва? Собственным весом проволоки пренебречь. Считать, что проволока наклепана и до момента разрыва она имеет лишь упругие деформации.



К задаче 1.55.

Ответ: $P = 15{,}7$ *кг*, $CC' = 10$ *см*, $\sigma = 100$ *кг/мм*^{2}.

1.56. Груз $Q = 160$ *кг* подвешивается (см. рисунок) на двух стальных проволоках AB и AC одинаковой длины; расстояние l составляет $5h$. Определить необходимый диаметр проволок при допускаемом напряжении 1000 *кг/см*^{2} и величину опускания точки A после приложения нагрузки. Определить этот диаметр также в предположении $l = 10h$. Собственным весом проволок пренебречь в обоих случаях.



К задаче 1.56.

Ответ: 5,25 *мм*, 7,21 *мм*, $\Delta h = 0{,}0007l$.

1.57. Определить коэффициент запаса прочности для материала штока (задача 1.1) по отношению к пределу прочности $\sigma_в$, пределу текучести $\sigma_т$ и пределу выносливости $\sigma_к$, принимая для стали, из которой изготовлен шток: $\sigma_в = 50$ *кг/мм*^{2}, $\sigma_т = 30$ *кг/мм*^{2} и $\sigma_к = 14$ *кг/мм*^{2}.

Ответ: $k_в = 10$, $k_т = 6$, $k_к = 2{,}8$.

1.58. Каково должно быть допускаемое напряжение при расчете на статическую нагрузку для материала винта стяжки железнодорожных вагонов, если напряжение при трогании поезда с места не должно превосходить предела текучести стали? Принимаем предел текучести $\sigma_т = 0{,}6\sigma_в$, а предел прочности $\sigma_в = 50$ *кг/мм*². Учесть, что напряжения при внезапном трогании поезда с места вдвое больше, чем при постепенном.

Ответ: 1500 *кг/см*².

1.59. Определить площадь поперечного сечения стального стержня, подвергающегося внезапному приложению растягивающих сил $P = 1{,}5$ *т* с динамическим коэффициентом $k_д = 2$; относительное удлинение при этом не должно превышать 1/1800. Определить коэффициент запаса, если предел прочности материала равен $\sigma_в = 42$ *кг/мм*².

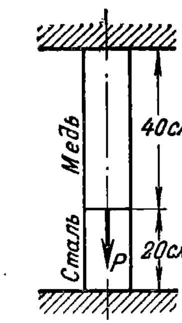
Ответ: $F = 2{,}7$ *см*², $k = 3{,}78 k_д$.

§ 2. Статически неопределимые системы

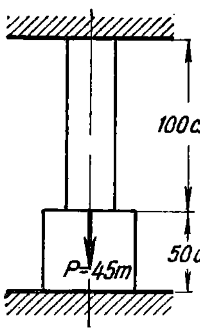
1.60. Стержень, состоящий из верхней медной части и нижней стальной (см. рисунок), нагружен силой $P = 10$ *т*. Оба конца стержня жестко защемлены. Площадь его поперечного сечения $F = 20$ *см*². Определить напряжения в каждой части стержня.

Ответ: $\sigma_м = 100$ *кг/см*², $\sigma_с = -400$ *кг/см*².

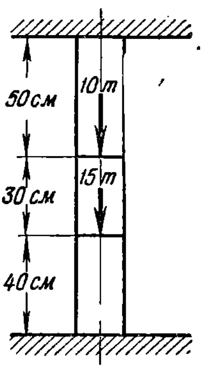
1.61. Стержень, жестко защемленный двумя концами (см. рисунок), имеет площадь поперечного сечения верхней части 10 *см*² и



К задаче 1.60.



К задаче 1.61.



К задаче 1.62.

нижней части 40 *см*². Определить напряжения в каждой части стержня.

Ответ: $\sigma_в = 500$ *кг/см*², $\sigma_н = -1000$ *кг/см*².

1.62. Стержень с площадью поперечного сечения $F = 10$ *см*² жестко защемлен двумя концами и нагружен, как указано на рисунке. Определить напряжения во всех трех участках стержня.

Ответ: $\sigma_в = 1083$ *кг/см*², $\sigma_{ср} = 83$ *кг/см*², $\sigma_н = -1417$ *кг/см*².

1.63. Трос состоит из центральной медной проволоки диаметром $d_1 = 5$ *мм* и девяти стальных проволок диаметром $d_2 = 2{,}5$ *мм*, окружающих первую. Найти напряжения в проволоках троса от груза $P = 500$ *кг*, считая проволоки параллельными.

Ответ: $\sigma_м = 4{,}63$ *кг/мм²*, $\sigma_с = 9{,}26$ *кг/мм²*.

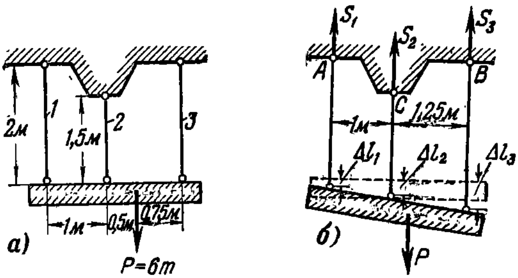
1.64. Площадь поперечного сечения бетона в короткой железобетонной колонне равна 645 *см²*. Колонна снабжена четырьмя продольными, симметрично расположенными стальными стержнями, каждый площадью поперечного сечения, равной 10 *см²*. Определить допускаемую нагрузку на колонну, если $[\sigma_б] = 80$ *кг/см²* и $[\sigma_с] = 1400$ *кг/см²*. Для стали модуль упругости равен $2 \cdot 10^6$ *кг/см²*, а для бетона $2 \cdot 10^5$ *кг/см²*.

Ответ: 83,6 *т*.

1.65. Железобетонная колонна квадратного поперечного сечения армирована четырьмя стальными стержнями, площадь поперечного сечения которых составляет 1% от площади поперечного сечения колонны. Допускаемое напряжение для бетона равно 60 *кг/см²*, для арматуры 1200 *кг/см²*. Отношение модулей упругости стали и бетона равно 10. Колонна несет нагрузку 100 *т*. Каковы должны быть стороны сечения колонны и диаметр стержней?

Ответ: $a = 39$ *см*, $d = 22$ *мм*.

1.66. Жесткий брус, деформациями которого пренебрегаем, подвешен на трех стержнях и нагружен, как указано на рисунке *а*).



К задаче 1.66.

Стержень *1* — медный, сечением 1 *см²*; стержень *2* — стальной, сечением 1,5 *см²*; стержень *3* — алюминиевый, сечением 2 *см²*. Определить напряжения в стержнях.

Решение. Предполагаем, что все усилия растягивающие и что брус займет после деформации стержней новое положение, изображенное на рисунке *б*). Составим два уравнения равновесия:

$$1)\ \sum m_A = -S_2 \cdot 1 - S_3 \cdot 2{,}25 + P \cdot 1{,}5 = 0,$$

$$2)\ \sum m_B = S_1 \cdot 2{,}25 + S_2 \cdot 1{,}25 - P \cdot 0{,}75 = 0.$$

Для составления третьего необходимого уравнения рассмотрим деформации (рисунок *б*)). Из трапеции, полученной на рисунке, можно составить следующее отношение:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{2,25} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{1},$$

которое преобразуем к виду

$$1,25\Delta l_1 - 2,25\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Выразим в этом уравнении деформации через усилия:

$$1,25\frac{S_1\cdot 200}{10^6\cdot 1} - 2,25\frac{S_2\cdot 150}{2\cdot 10^6\cdot 1,5} + \frac{S_3\cdot 200}{0,7\cdot 10^6\cdot 2} = 0.$$

После сокращений имеем:

$$3)\ 2,5\cdot S_1 - 1,125\cdot S_2 + 1,43\cdot S_3 = 0.$$

Совместно решая уравнения 1), 2) и 3), получаем:

$$S_1 = 0,018P = 0,018\cdot 6000 = 110\ кг,$$
$$S_2 = 0,568P = 0,568\cdot 6000 = 3410\ кг,$$
$$S_3 = 0,414P = 0,414\cdot 6000 = 2480\ кг.$$

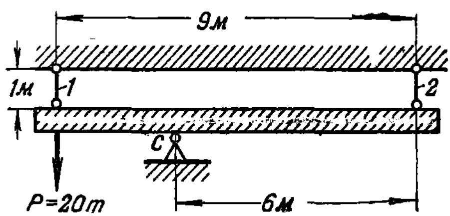
Проверим полученные значения:

$$\sum S = 110 + 3410 + 2480 = 6000\ кг = P.$$

Напряжения в стержнях соответственно равны:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1} = \frac{110}{1} = 110\ кг/см^2,$$
$$\sigma_2 = \frac{S_2}{F_2} = \frac{3410}{1,5} = 2270\ кг/см^2,$$
$$\sigma_3 = \frac{S_3}{F_3} = \frac{2480}{2} = 1240\ кг/см^2.$$

1.67. Определить величину напряжений, возникающих в стержнях *1* и *2*, поддерживающих жесткую балку (см. рисунок). Стержень

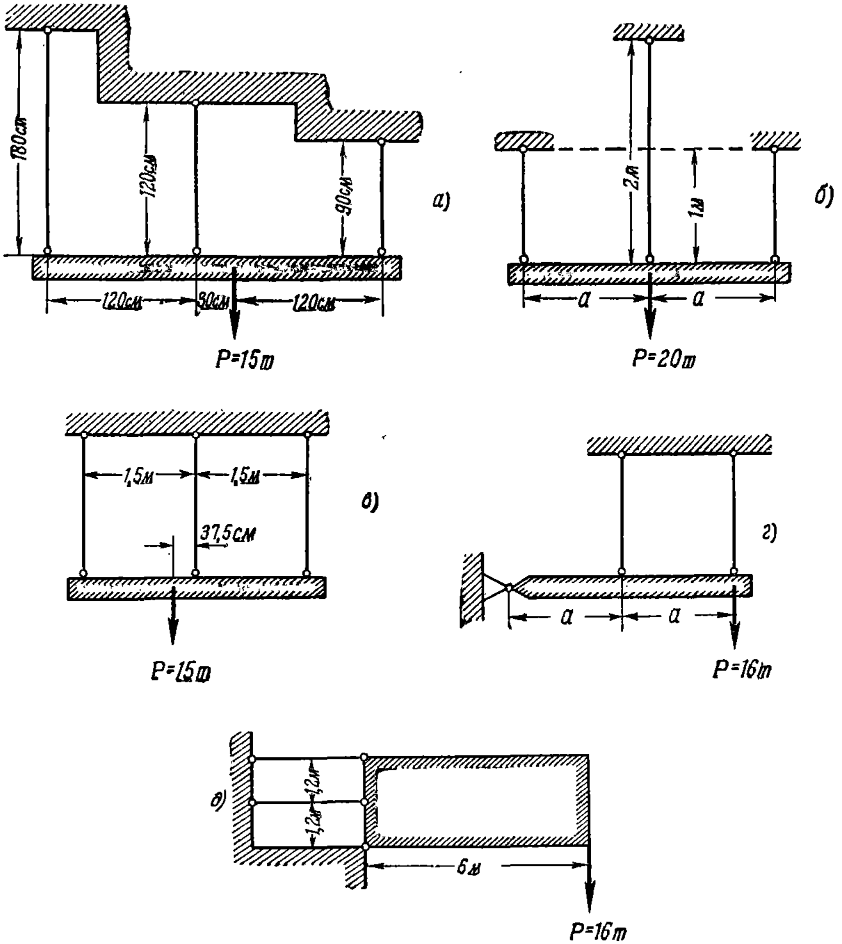


К задаче 1.67.

1 — медный, площадью сечения 20 $см^2$; стержень *2* — стальной, площадью сечения 10 $см^2$.

Ответ: $\sigma_1 = 200\ кг/см^2$, $\sigma_2 = -800\ кг/см^2$.

1.68. Жесткий брус закреплен с помощью системы стальных стержней одинакового поперечного сечения (см. рисунок). Принимая



К задаче 1.68.

$[\sigma] = 1600$ *кг/см²*, определить площадь поперечного сечения стержней.

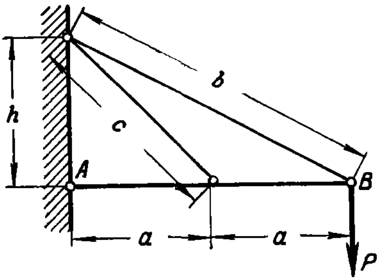
Ответ: а) 3,78 *см²*, б) 5 *см²*, в) 4,3 *см²*, г) 8 *см²*, д) 20 *см²*.

1.69. Жесткая балка *AB*, деформацией которой пренебрегаем, шарнирно прикреплена к стене в точке *A* и поддержана, как показано на рисунке, двумя проволоками одинакового материала и одинаковой площади поперечного сечения. Показать, что груз *P*, приложенный в точке B, вызывает в проволоках усилия, равные

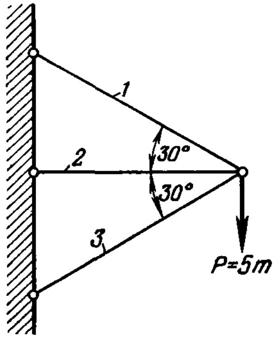
$$\frac{2P}{h}\cdot\frac{cb^3}{b^3+4c^3} \text{ и } \frac{4P}{h}\cdot\frac{bc^3}{b^3+4c^3}.$$

1.70. Три стержня кронштейна (см. рисунок) выполнены из одного материала. Сечение первого 2 *см*^{2}, второго 3 *см*^{2} и третьего 4 *см*^{2}. Определить напряжения в стержнях.

Ответ: $\sigma_1 = 2113$ *кг/см*^{2}, $\sigma_2 = 447$ *кг/см*^{2}, $\sigma_3 = -1440$ *кг/см*^{2}.



К задаче 1.69.

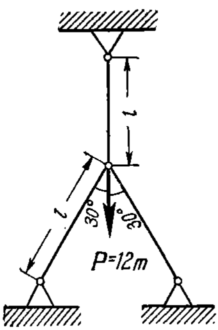


К задаче 1.70.

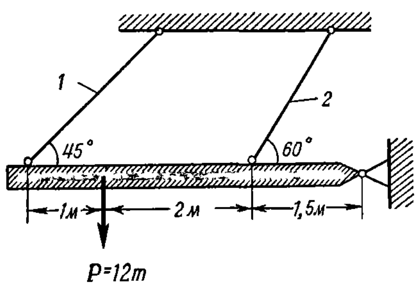
1.71. Три стержня, шарнирно скрепленные в одной точке (см. рисунок), имеют одинаковое поперечное сечение. Определить площадь поперечного сечения, принимая $[\sigma] = 1600$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 3 *см*^{2}.

1.72. Жесткая балка поддерживается двумя подвесками, как показано на рисунке. Первая подвеска должна иметь площадь сечения,



К задаче 1.71.



К задаче 1.72.

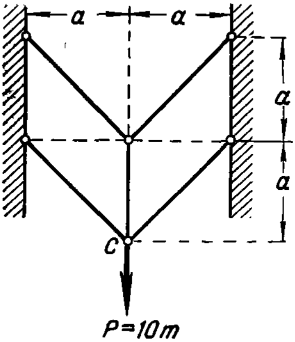
в два раза большую, чем вторая; материал подвесок — сталь с допускаемым напряжением $[\sigma] = 1600$ *кг/см*^{2}. Подобрать сечения подвесок.

Ответ: $F_1 = 7{,}5$ *см*^{2}, $F_2 = 3{,}75$ *см*^{2}.

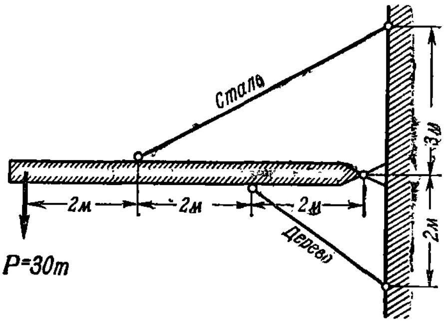
1.73. Определить опускание точки C системы стальных стержней одинакового поперечного сечения площадью 5 $см^2$ (см. рисунок). Размер $a = 1$ *м*.

Ответ: 0,895 *мм*.

1.74. Жесткий стержень прикреплен к стене при помощи шарнира (см. рисунок) стальной тяги и деревянного подкоса. Подобрать



К задаче 1.73.

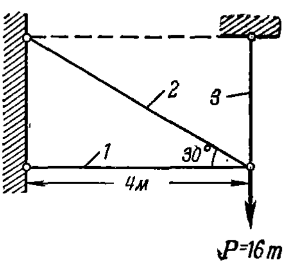


К задаче 1.74.

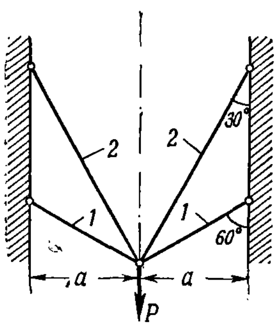
сечение тяги и подкоса, если площадь сечения подкоса должна быть в 10 раз больше площади сечения тяги, а допускаемые напряжения равны: для стали $[\sigma_с] = 1600$ *кг/см²*, для дерева $[\sigma_д] = 60$ *кг/см²*.

Ответ: $F_с = 50$ *см²*, $F_д = 500$ *см²*.

1.75. В изображенной на рисунке конструкции стержень *1* — чугунный с $[\sigma_ч] = 800$ *кг/см²*, стержень *2* — медный с $[\sigma_м] = 600$ *кг/см²* и стержень *3* — стальной с $[\sigma_с] = 1200$ *кг/см²*. Площади поперечных



К задаче 1.75.



К задаче 1.76.

сечений стержней *1* и *2* одинаковы, сечение же стержня *3* вдвое меньше. Подобрать сечения стержней.

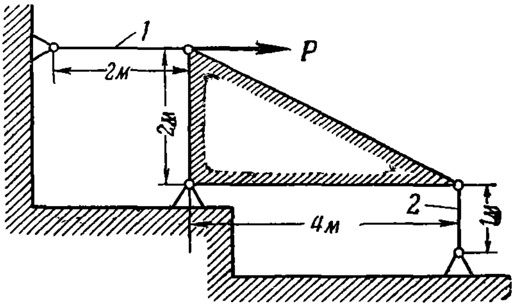
Ответ: $F_1 = F_2 = 24{,}6$ *см²*, $F_3 = 12{,}3$ *см²*.

1.76. В изображенной на рисунке конструкции стержни *1* — стальные с площадью сечения $F_0 = 10$ *см²*, а стержни *2* — медные с площадью сечения $F_м = 20$ *см*². Допускаемые напряжения равны: для стали $[\sigma_с] = 1600$ *кг/см*², для меди $[\sigma_м] = 600$ *кг/см*². Определить наибольшую возможную нагрузку P.

Ответ: 32,8 *т*.

1.77. Жесткая конструкция прикреплена к фундаменту при помощи шарнира и двух стержней (см. рисунок). Стержень *1* — стальной ($[\sigma_с] = 1600$ *кг/см*²), стержень 2 — чугунный ($[\sigma_ч] = 1000$ *кг/см*²). Их площади сечений соответственно равны: $F_с = 30$ *см*², $F_ч = 50$ *см*². Определить максимальную нагрузку P.

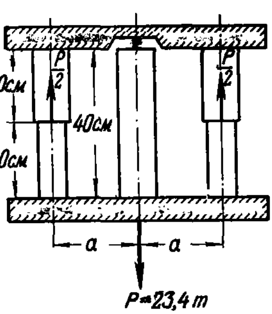
Ответ: 112,5 *т*.



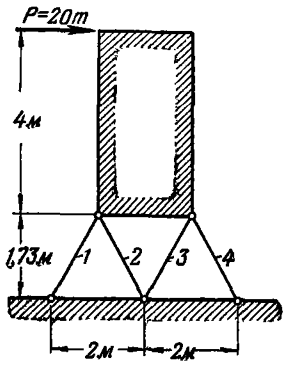
К задаче 1.77.

1.78. Два жестких бруса соединены, как показано на рисунке, тремя стержнями. Крайние стержни стальные, с площадью сечения верхней части, равной 16 *см*², и нижней части 10 *см*²; средний стержень медный, с площадью сечения, равной 20 *см*². Между верхним концом среднего стержня и верхним брусом поставлена пружина с коэффициентом податливости $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ *см/кг* (осадка пружины на 1 *кг* нагрузки). При заданной нагрузке определить напряжения в соединительных стержнях.

Ответ: В верхней части стального стержня $\sigma = -90$ *кг/см*², в его нижней части $\sigma = 1026$ *кг/см*², в медном стержне $\sigma = 144$ *кг/см*².



К задаче 1.78.



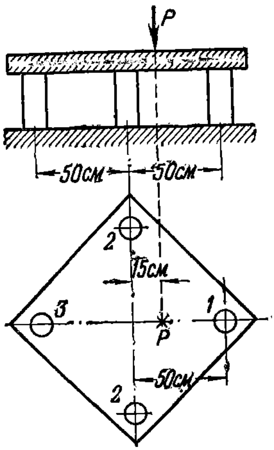
К задаче 1.79.

1.79. Четыре стержня, поддерживающие жесткую конструкцию (см. рисунок), выполнены из одного материала и имеют одинаковые поперечные сечения площадью $F = 25$ *см*². Определить в них напряжения.

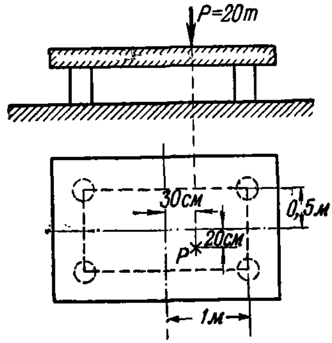
Ответ: $\sigma_1 = 1330$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 525$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -525$ *кг/см²*, $\sigma_4 = -1330$ *кг/см²*.

1.80. Квадратная плита опирается на четыре симметрично расположенные стойки одинакового поперечного сечения, одинаковой длины и из одинакового материала (см. рисунок). Определить величину усилия в каждой стойке, пренебрегая деформацией плиты.

Ответ: $S_1 = 0,4P$, $S_2 = 0,25P$, $S_3 = 0,1P$.



К задаче 1.80.

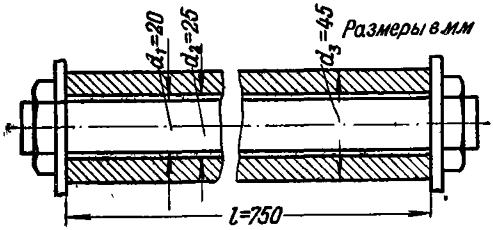


К задаче 1.81.

1.81. Жесткая прямоугольная плита опирается на четыре одинакового сечения, длины и материала стойки, расположенные в ее углах, как указано на рисунке. Определить величину усилия в каждой стойке.

Ответ: $S_1 = 1,5$ *т*, $S_2 = 4,5$ *т*, $S_3 = 8,5$ *т*, $S_4 = 5,5$ *т*.

1.82. Стальной болт пропущен сквозь медную трубку, как показано на рисунке. Шаг нарезки болта равен 3 *мм*. Какие



К задаче 1.82.

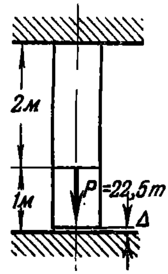
напряжения возникают в болте и трубке при завинчивании гайки на $^1/_4$ оборота?

Ответ: $\sigma_c = 1274$ *кг/см²*, $\sigma_м = -364$ *кг/см²*.

1.83. Чугунный цилиндр длиной 1,50 *м* имеет внутренний диаметр 25 *см* и толщину стенок 25 *мм*. Торцы цилиндра закрыты жесткими крышками, через центры которых пропущен стальной болт, стянутый гайками. Гайки подвернуты настолько, что растягивающее усилие в болте равно 20 *т*. Затем к каждой крышке прикладываются усилия в 20 *т*, растягивающие всю конструкцию. Определить напряжение в болте, если его рабочая длина равна 150 *см*, а поперечное сечение 35 *см²*.

Ответ: 692 *кг/см²*.

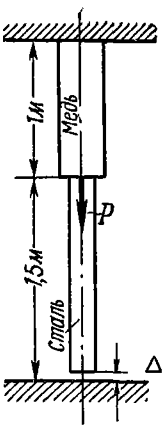
1.84. Стальной стержень (см. рисунок), защемленный верхним концом, имеет площадь поперечного сечения $F = 20$ *см²*. Между его нижним концом и неподатливой плоскостью до его нагружения был зазор $\Delta = 0{,}375$ *мм*. Определить напряжения в верхней и нижней частях стержня при действии силы P.



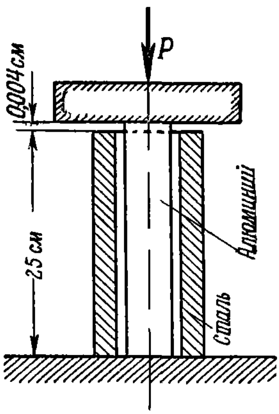
К задаче 1.84.

Ответ: $\sigma_в = 625$ *кг/см²*, $\sigma_н = -500$ *кг/см²*.

1.85. Представленный на рисунке стержень жестко защемлен верхним концом. До нагружения между нижним его концом и неподатливой опорой был зазор $\Delta = 0{,}05$ *мм*. Верхняя часть стержня с площадью поперечного сечения 150 *см²* — медная, нижняя часть



К задаче 1.85.



К задаче 1.86.

с площадью поперечного сечения 50 *см²* — стальная. Определить напряжения в верхней и нижней частях стержня, возникающие после загружения стержня силой $P = 20$ *т*.

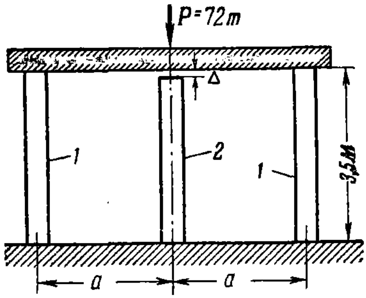
Ответ: $\sigma_в = 107{,}6$ *кг/см²*, $\sigma_н = -77$ *кг/см²*.

1.86. Изображенный на рисунке алюминиевый стержень имеет площадь поперечного сечения 20 *см²* и при отсутствии нагрузки длину 25,004 *см*. Стальная трубка имеет такую же площадь поперечного сечения и при тех же условиях длину 25 *см*. Чему равна нагрузка P, вызывающая одинаковое напряжение в стали и алюминии?

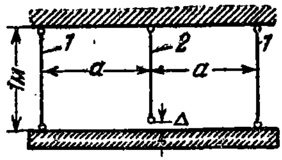
Ответ: 6,9 *т*.

1.87. Жесткая балка (см. рисунок) положена на три колонны одинакового поперечного сечения площадью 400 $см^2$. Между балкой и средней колонной до нагружения был зазор $\Delta = 1,5$ *мм*. Материал колонн — бетон с модулем $E = 140\,000$ $кг/см^2$. Определить напряжения, возникающие в колоннах.

Ответ: $\sigma_1 = -80$ $кг/см^2$; $\sigma_2 = -20$ $кг/см^2$.



К задаче 1.87.

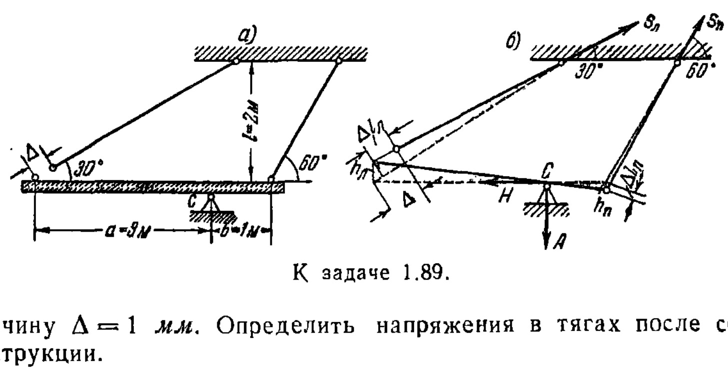


К задаче 1.88.

1.88. Жесткая балка (см. рисунок) подвешена на трех стальных стержнях; средний стержень сделан на $\Delta = 0,5$ *мм* короче требуемой длины и поставлен на место с начальным напряжением. Определить напряжения в стержнях, если площади поперечного сечения всех стержней одинаковы и равны $F = 2$ $см^2$.

Ответ: $\sigma_1 = -333$ $кг/см^2$, $\sigma_2 = 667$ $кг/см^2$.

1.89. Жесткий брус (см. рисунок *а*)) прикреплен к фундаменту при помощи шарнира C и двух стальных тяг одинакового поперечного сечения. Левая тяга выполнена короче проектного размера на



К задаче 1.89.

величину $\Delta = 1$ *мм*. Определить напряжения в тягах после сборки конструкции.

Решение. После сборки конструкции жесткий брус займет наклонное положение, изображенное на рисунке *б*). При этом левая тяга удлинится на величину $\Delta l_л$, а правая тяга удлинится на величину $\Delta l_п$. В точках прикрепления тяг появятся реакции $S_л$ и $S_п$, в шарнире C — реакции A и H.

Составим уравнение равновесия — сумму моментов всех сил относительно шарнира C:

$$S_л \cdot a \sin 30° - S_п \cdot b \sin 60° = 0,$$

откуда

$$S_п = \frac{a \sin 30°}{b \sin 60°} S_л = \frac{3 \cdot 0,5}{1 \cdot 0,866} S_л = 1,73 S_л. \tag{а}$$

В остальные два уравнения равновесия войдут не интересующие нас реакции A и H, поэтому мы их и не пишем.

Для составления дополнительного уравнения обратимся к рассмотрению деформаций.

Из рисунка *б*) видно, что

$$\frac{h_л}{h_п} = \frac{a}{b} = 3.$$

Но

$$h_л = \frac{\Delta - \Delta l_л}{\sin 30°} \quad \text{и} \quad h_п = \frac{\Delta l_п}{\sin 60°}.$$

Таким образом,

$$\frac{(\Delta - \Delta l_л) \cdot \sin 60°}{\sin 30° \cdot \Delta l_п} = 3,$$

или

$$\frac{\Delta - \Delta l_л}{\Delta l_п} = 3 \frac{\sin 30°}{\sin 60°} = 3 \frac{0,5}{0,866} = 1,73,$$

откуда

$$1,73 \Delta l_п + \Delta l_л = \Delta. \tag{б}$$

Выразим $\Delta l_л$ и $\Delta l_п$ через усилия $S_л$ и $S_п$:

$$\Delta l_л = \frac{S_л l_л}{EF} = \frac{S_л l}{EF \sin 30°}$$

и

$$\Delta l_п = \frac{S_п l_п}{EF} = \frac{S_п l}{EF \sin 60°}.$$

Подставим в уравнение (б) найденные значения $\Delta l_л$ и $\Delta l_п$:

$$1,73 \frac{S_п l}{EF \sin 60°} + \frac{S_л l}{EF \sin 30°} = \Delta,$$

или

$$S_п + S_л = \frac{\Delta \cdot EF}{2l}. \tag{в}$$

Разделим обе части уравнений (а) и (в) на F и учтем, что

$$\frac{S_л}{F} = \sigma_л \quad \text{и} \quad \frac{S_п}{F} = \sigma_п;$$

тогда

$$\sigma_п = 1,73 \sigma_л,$$

$$\sigma_п + \sigma_л = \frac{\Delta \cdot E}{2l}.$$

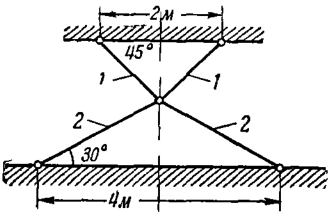
Решая совместно эти уравнения, получаем, что

$$\sigma_л = 0{,}184\,\frac{\Delta\cdot E}{l} = \frac{0{,}184\cdot 0{,}1\cdot 2\cdot 10^6}{200} = 184\ кг/см^2,$$

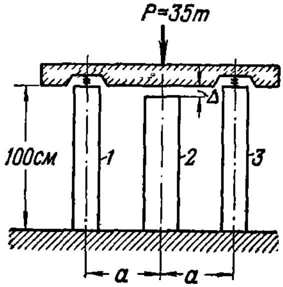
$$\sigma_п = 0{,}317\,\frac{\Delta\cdot E}{l} = \frac{0{,}317\cdot 0{,}1\cdot 2\cdot 10^6}{200} = 317\ кг/см^2.$$

1.90. При сборке изображенной на рисунке конструкции оказалось, что стальные стержни *1* выполнены длиннее проектного размера на 0,3 *мм*. Их сечения $F_1 = 25$ *см*². Сечения чугунных стержней *2* равны $F_2 = 40$ *см*². Определить напряжения в стержнях после сборки конструкции.

Ответ: $\sigma_1 = -96{,}5$ *кг/см*², $\sigma_2 = -85{,}2$ *кг/см*².



К задаче 1.90.



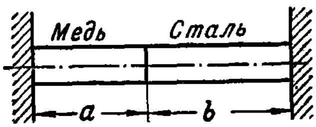
К задаче 1.91.

1.91. Жесткий брус покоится на трех стойках (см. рисунок). Крайние стойки — стальные, одинакового поперечного сечения, площадью 20 *см*², средняя стойка — чугунная, сечением 50 *см*². Между крайними стойками и брусом помещены одинаковые пружины с коэффициентом податливости, равным $\alpha = 5\cdot 10^{-6}$ *см/кг*. Между средней стойкой и брусом до приложения нагрузки был зазор $\Delta = 0{,}5$ *мм*. Определить напряжения в стойках.

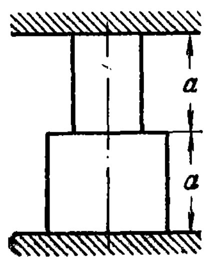
Ответ: $\sigma_с = -500$ *кг/см*², $\sigma_ч = -300$ *кг/см*².

1.92. Стержень постоянного поперечного сечения наглухо защемлен обоими концами. Часть его длиной $a = 1$ *м* (см. рисунок) — медная, вторая часть длиной $b = 1{,}5$ *м* — стальная. После защемления стержня температура его повышается на $\Delta t = +50°$. Определить напряжение в стержне.

Ответ: -1005 *кг/см*².



К задаче 1.92.

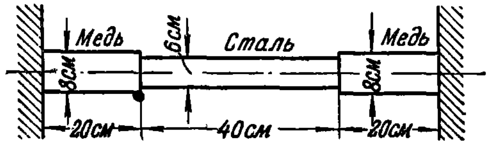


К задаче 1.93.

1.93. Стальной стержень (см. рисунок) закреплен между двумя неподатливыми плоскостями при температуре $t_1 = +5°$; площадь сечения верхней части $F_в = 5$ *см²*, нижней части $F_н = 10$ *см²*. Определить величину напряжений, возникающих в каждой части стержня, при повышении температуры до $t_2 = +25°$.

Ответ: $\sigma_в = -666$ *кг/см²*, $\sigma_н = 333$ *кг/см²*.

1.94. Изображенный на рисунке стержень состоит из трех частей и имеет круглое поперечное сечение. После защемления концов



К задаче 1.94.

стержня температура его повышается на $\Delta t = +30°$. Определить напряжения в медных и стальной частях стержня.

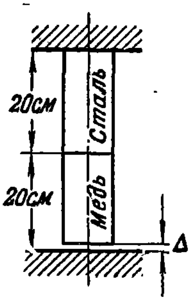
Ответ: $\sigma_м = -460$ *кг/см²*, $\sigma_с = -820$ *кг/см²*.

1.95. Стальной стержень длиной $l = 2$ *м* защемлен концами в стены. Один из концов имеет возможность свободно перемещаться внутри стены на $\Delta = 0,05$ *мм*. Определить напряжение в стержне при повышении температуры на 40°.

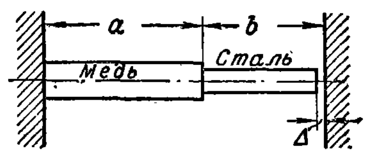
Ответ: —950 *кг/см²*.

1.96. Изображенный на рисунке стержень защемлен верхним концом при температуре $t_1 = -15°$, при этом между нижним концом стержня и неподатливой плоскостью оставлен зазор $\Delta = 0,4$ *мм*. После защемления стержень нагревается до температуры $t_2 = +85°$. Чему в этот момент равно напряжение?

Ответ: —600 *кг/см²*.



К задаче 1.96.

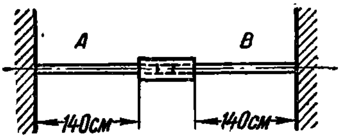


К задаче 1.97.

1.97. После защемления изображенного на рисунке стержня температура его повышается на $+30°$. Левая его часть длиной $a = 1,50$ *м* с поперечным сечением площадью 200 *см²* — медная, правая часть длиной $b = 1$ *м* с поперечным сечением 100 *см²* — стальная. Между правым концом стержня и жесткой плоскостью при заделке был оставлен зазор $\Delta = 0,03$ *мм*. Пренебрегая деформацией изгиба, определить напряжения в частях стержня после повышения его температуры.

Ответ: $\sigma_м = -435$ *кг/см²*, $\sigma_с = -870$ *кг/см²*.

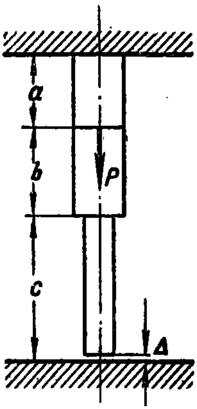
1.98. В стальных стержнях A и B (см. рисунок) стяжной муфтой вызвано растягивающее напряжение $\sigma_1 = 150$ *кг/см²*. Насколько надо изменить длину стержней при помощи муфты, чтобы при изменении температуры на $\Delta t = -10°$ напряжение в них стало равным $\sigma_2 = 800$ *кг/см²*? Деформацией муфты пренебречь.



К задаче 1.98.

Ответ: $\Delta = +0{,}56$ *мм* (на оба стержня).

1.99. Верхняя часть изображенного на рисунке стержня — стальная, с поперечным сечением площадью $F_c = 200$ *см²*, нижняя — медная, с поперечным сечением площадью $F_м = 100$ *см²*. Зазор $\Delta = 0{,}08$ *мм*; размеры $a = 0{,}5$ *м*, $b = 0{,}5$ *м*, $c = 1$ *м*. Определить напряжения в частях стержня, вызванные силой $P = 150$ *т* и одновременным повышением температуры на 20°.



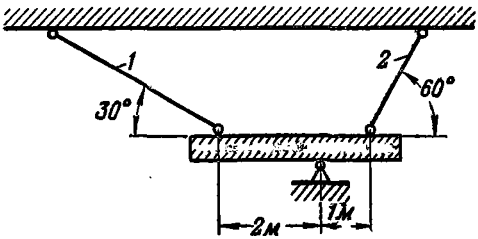
К задаче 1.99.

Ответ: $\sigma_a = 475$ *кг/см²*, $\sigma_b = -275$ *кг/см²*, $\sigma_c = -550$ *кг/см²*.

1.100. Инварная трубка с поперечным сечением 37,5 *см²* и длиной 50 *см* и медная трубка тех же размеров поставлены впритык друг к другу при температуре 0°. Затем они нагреты до температуры $+36{,}4°$ и сжаты силами, не позволяющими измениться их общей длине. Какова величина этих сил и чему равна длина каждой из трубок при повышенной температуре? Для инвара $\alpha_и = 0$ и $E_и = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*.

Ответ: $P = 15{,}0$ *т*, $l_м = 50{,}01$ *см*, $l_и = 49{,}99$ *см*.

1.101. Жесткий брус (см. рисунок), кроме шарнирной опоры, поддерживается еще двумя стальными тягами одинакового поперечного



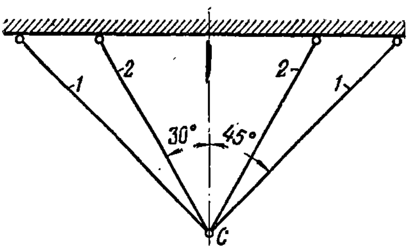
К задаче 1.101.

сечения площадью 40 *см²*. После установки тяг их температура повысилась на $\Delta t = +20°$. Определить напряжения в тягах.

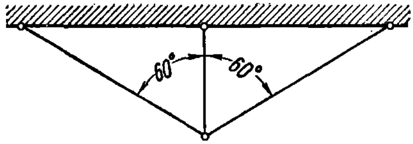
Ответ: $\sigma_1 = -470$ *кг/см²*, $\sigma_2 = -542$ *кг/см²*.

1.102. Стальные стержни *1* с поперечным сечением площадью 20 *см*² и медные стержни 2 с поперечным сечением площадью 30 *см*² шарнирно соединены в точке *C* (см. рисунок) при температуре $t_1 = 15°$. Определить напряжения в стержнях при понижении температуры конструкции до $t_2 = -45°$.

Ответ: $\sigma_c = 104$ *кг/см*², $\sigma_м = -57$ *кг/см*².



К задаче 1.102.



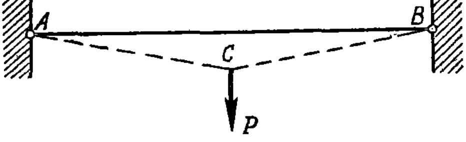
К задаче 1.103.

1.103. В представленной на рисунке конструкции все стержни — стальные, одинакового поперечного сечения. Что опаснее: повышение температуры только среднего стержня или только крайних?

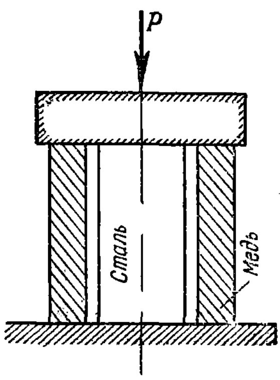
Ответ: Во втором случае напряжение в четыре раза больше, чем в первом, таким образом второй случай опаснее.

1.104. Между неподвижными точками *A* и *B* при температуре $t_0 = 0°$ горизонтально подвешена без натяжения стальная проволока диаметром 1 *мм* (см. рисунок), весом которой пренебрегаем. Температура проволоки может повыситься до $t_1 = +50°$ и понизиться до $t_2 = -50°$. Допускаемое напряжение для материала проволоки равно $[\sigma] = 2000$ *кг/см*². Определить, какую нагрузку *P* можно подвесить к проволоке в точке *C* посредине ее пролета при трех указанных температурах.

Ответ: При 0° нагрузка $P = 1,4$ *кг*; при $-50°$ нагрузка $P = 0,32$ *кг*; при $+50°$ нагрузка $P = 1,79$ *кг*.



К задаче 1.104.

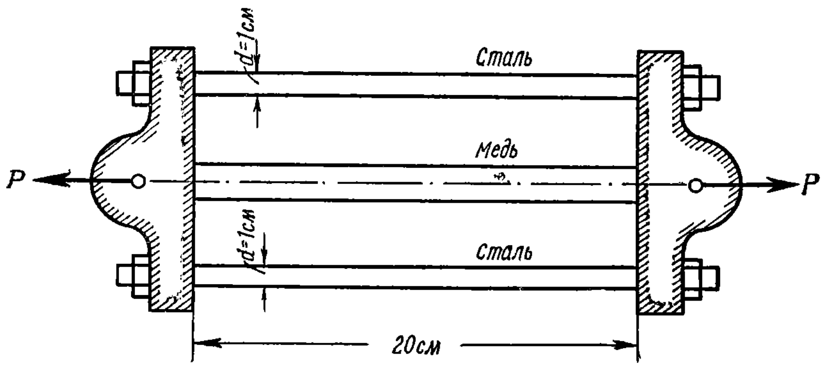


К задаче 1.105.

1.105. Груз 4,5 *т* передается через жесткую плиту на сплошной стальной цилиндр площадью 15 *см*² и полый медный цилиндр площадью 20 *см*². Сила действует по оси обоих цилиндров (см. рисунок). После приложения нагрузки температура может повыситься на 30°. Найти распределение нагрузки до и после изменения температуры.

Ответ: До изменения температуры $P_с = 2{,}7$ *т*, $P_м = 1{,}8$ *т*, после изменения температуры $P_с = 1{,}26$ *т*, $P_м = 3{,}24$ *т*.

1.106. Две жесткие отливки соединены стальными болтами, как показано на рисунке. Найти величину сил P, необходимую для раздвижения отливок настолько, чтобы между ними свободно мог быть

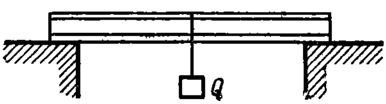


К задаче 1.106.

помещен медный стержень длиной 20,02 *см* и площадью поперечного сечения 6 *см*²; определить расстояние между отливками после удаления сил P.

Ответ: $P = 3{,}14$ *т*, $l = 20{,}013$ *см*.

1.107. Стальная двутавровая балка № 16 лежит на двух опорах и нагружена посредине пролета грузом $Q = 10$ *т* (см. рисунок). Сечения балки на опоре удерживаются от горизонтального перемещения силами трения, которые будем полагать приложенными вдоль оси балок. Коэффициент трения между балкой и опорами равен $f = 0{,}3$. Определить наибольшую разность температур, до которой возможен рост напряжений в балке, и величину наибольших температурных напряжений.



К задаче 1.107.

Ответ: $\Delta t = \pm 3°$, $\sigma = \mp 74{,}3$ *кг/см*².

1.108. Рельсы уложены при температуре $t_1 = +10°$ с зазором $a = 4$ *мм*. Длина рельсов $l = 12{,}5$ *м*. Какой зазор будет при температуре $t_2 = -30°$; при какой температуре зазор исчезнет; какие напряжения будут при температуре $t_3 = +50°$?

Решение. Укорочение рельса при понижении температуры определим по формуле

$$\Delta l = \alpha l \, \Delta t = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 1250 \cdot 40 = 0{,}625 \text{ см}.$$

Таким образом, после понижения температуры зазор окажется равным

$$a_1 = a + \Delta l = 4 + 6{,}25 = 10{,}25 \text{ мм}.$$

Для определения температуры, при которой зазор исчезнет, приравняем удлинение рельса зазору. Из этого уравнения найдем необходимую разность температур:

$$\alpha l \, \Delta t = a,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{a}{\alpha l} = \frac{0{,}4}{125 \cdot 10^{-7} \cdot 1250} = 25{,}6°.$$

Следовательно, зазор исчезнет при температуре

$$t_4 = t_1 + \Delta t = 10 + 25{,}6 = 35{,}6°,$$

и напряжения в рельсах начнут возникать лишь при $t > t_4$. Они будут равны

$$\sigma = E\alpha (t_4 - t_3) = 2 \cdot 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-7} (35{,}6 - 50) = -360 \text{ кг/см}^2.$$

1.109. Определить необходимую величину зазоров в стыках рельсов, при которой в летнее время не будет происходить сжатия рельсов. Укладка рельсов производится при температуре $+10°$; наибольшая летняя температура равна $+60°$; длина рельсов 8 *м*. Как велики будут напряжения, если при укладке рельсов вовсе не оставлять зазоров?

Ответ: 5 *мм*, $\sigma = -1250$ *кг/см*^{2}.

1.110. Паропроводная стальная трубка имеет длину 30 *м* при температуре $+15°$. Через эту трубку пропускается пар, нагревающий ее до температуры $+180°$. Какова при этом будет длина трубки, если не имеется никаких препятствий для ее расширения? Чему были бы равны напряжения в трубке, если бы она не могла удлиняться?

Ответ: 30,062 *м*, $\sigma = -4125$ *кг/см*^{2}.

1.111. Определить, насколько возрастет напряжение в стальном бандаже, если между ним и колесным центром проложить прокладки из кровельного железа толщиной 0,45 *мм* (их деформациями, так же как и деформацией центра, пренебречь). Диаметр центра и внутренний диаметр бандажа равны 900 *мм*, толщина бандажа 45 *мм*.

Решение. Ввиду малости толщины бандажа по сравнению с его диаметром примем, что диаметр средней линии бандажа равен его внутреннему диаметру. Наличие прокладок увеличивает диаметр на $2 \cdot 0{,}45 = 0{,}9$ *мм*. Относительное увеличение диаметра, равное относительному увеличению длины бандажа, будет равно

$$\varepsilon = \frac{0{,}9}{900} = 0{,}001.$$

Увеличение напряжений определим по закону Гука:

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}001 = 2000 \text{ кг/см}^2.$$

1.112. Лопнувший во время работы чугунный диск предположено исправить, стянув бандажом из мягкой стали. Наружный диаметр диска равен $d = 80$ *см*. Для возможности насадки бандаж будет предварительно нагрет. Каков должен быть внутренний диаметр бандажа до нагрева, если напряжения в нем после насадки должны равняться $\sigma = 1000$ *кг/см*^{2}? Ввиду массивности диска по сравнению с бандажом диск считать недеформируемым.

Ответ: 79,96 *см*.

1.113. Стальную ленту толщиной 6 *мм* необходимо натянуть на стальной же цилиндр диаметром 30 *см*; внутренний диаметр ленточного кольца равен 29,98 *см*. Насколько необходимо повысить температуру кольца, чтобы оно стало скользить по поверхности цилиндра? Какое растягивающее напряжение возникнет в кольце, когда оно примет ту же температуру, что и цилиндр, если деформацией последнего можно пренебречь?

Решение. Средний диаметр ленты до ее нагрева равен

$$d = 29{,}98 + 0{,}6 = 30{,}58 \text{ см}.$$

Чтобы лента скользила по цилиндру, необходимо, чтобы внутренний ее диаметр стал бы, по крайней мере, равен диаметру цилиндра, т. е. чтобы он увеличился на

$$\Delta d = 30 - 29{,}98 = 0{,}02 \text{ см}.$$

На эту же величину Δd увеличится и средний диаметр ленты. Тогда относительное увеличение диаметра составит

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0{,}02}{30{,}58} = 6{,}54 \cdot 10^{-4}.$$

Приравняем это значение ε относительному увеличению диаметра, вызванному повышением температуры:

$$\varepsilon = \alpha \Delta t,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{6{,}54 \cdot 10^{-4}}{125 \cdot 10^{-7}} = 52{,}2^\circ.$$

После того как лента в горячем состоянии будет надета, она постепенно остынет до первоначальной температуры, т. е. по сравнению с нагретым состоянием ее температура уменьшится на $\Delta t = 52{,}2^\circ$ C. Так как деформацией цилиндра мы пренебрегаем, то лента не имеет возможности укоротиться, следовательно, для определения в ней напряжений можем воспользоваться формулами:

$$\sigma = E\alpha\Delta t = 2 \cdot 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 52{,}2 = 1308 \text{ кг/см}^2,$$

или

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \cdot 6{,}54 \cdot 10^{-4} = 1308 \text{ кг/см}^2.$$

1.114. Тонкое медное кольцо, имеющее внутренний диаметр 10 *см*, надевается при комнатной температуре вплотную, но без натяга на тонкое же стальное кольцо; размеры колец в направлении образующей одинаковы. Если температура обоих колец понизится на 50°, какое среднее напряжение возникнет в каждом из них и насколько уменьшится внутренний диаметр медного кольца.

Ответ: $\sigma_м = -\sigma_с = 133$ *кг/см*^{2}, $\Delta d = -0{,}069$ *мм*.

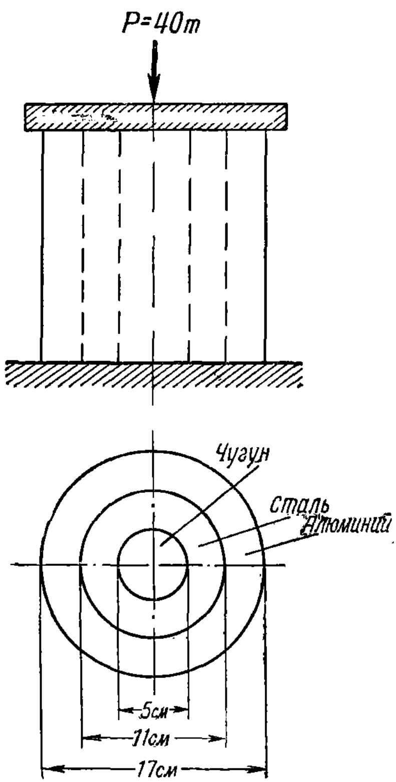
1.115. Цилиндрическое стальное кольцо шириной 2,5 *см* имеет внутренний диаметр 500 *мм* и толщину 12 *мм*. Второе стальное кольцо той же ширины, но толщиной 18 *мм* нагрето и надето на первое. Каков должен быть внутренний диаметр второго кольца для того, чтобы после охлаждения напряжения в нем не превышали 700 *кг/см²*? Определить также новый внутренний диаметр первого кольца после охлаждения второго.

Ответ: $d_2 = 523{,}541$ *мм*, $d_1 = 499{,}731$ *мм*.

1.116. Стальной обруч с наружным диаметром 1000 *мм* имеет толщину 25 *мм*. Второй обруч из того же материала имеет внутренний диаметр 999,5 *мм*, толщину 20 *мм* и такую же ширину, как и первый обруч. Второй обруч нагрет и надет на первый. Определить окончательный диаметр поверхности соприкасания, окончательный внутренний диаметр внутреннего обруча, сжимающее напряжение во внутреннем обруче и растягивающее напряжение во внешнем.

Ответ: $d_{\text{сопр}} = 999{,}778$ *мм*, $d_{\text{вн}} = 949{,}778$ *мм*; $\sigma_{\text{вн}} = -444$ *кг/см²*, $\sigma_{\text{нар}} = 556$ *кг/см²*.

1.117. Короткий чугунный стержень свободно вставлен в стальную трубку, которая в свою очередь свободно вставлена в алюминиевую трубку (см. рисунок). Определить напряжения в стержне и трубках (поперечными деформациями пренебречь) при действии силы P, сжимающей систему через посредство жесткой плиты.



К задаче 1.117.

Решение. Нагрузка P распределится между чугунным стержнем и стальной и алюминиевой трубками. Равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикаль дает

$$P_{\text{ч}} + P_{\text{с}} + P_{\text{а}} = P.$$

Это — единственное уравнение статики, которое мы можем составить. Обратимся к рассмотрению деформаций. Деформации (укорочение) всех трех стержней равны между собой, следовательно,

$$\Delta l_{\text{ч}} = \Delta l_{\text{с}} = \Delta l_{\text{а}}.$$

Отсюда можно составить два уравнения деформаций:

$$\Delta l_{\text{ч}} = \Delta l_{\text{с}} \quad \text{и} \quad \Delta l_{\text{ч}} = \Delta l_{\text{а}}.$$

Выразим деформации через нагрузки:

$$\frac{P_{\text{ч}} l}{E_{\text{ч}} F_{\text{ч}}} = \frac{P_{\text{с}} l}{E_{\text{с}} F_{\text{с}}} \quad \text{и} \quad \frac{P_{\text{ч}} l}{E_{\text{ч}} F_{\text{ч}}} = \frac{P_{\text{а}} l}{E_{\text{а}} F_{\text{а}}}.$$

Выразим в уравнении равновесия и в уравнениях деформаций силы через напряжения, имея в виду, что $\frac{P_ч}{F_ч}=\sigma_ч$, $\frac{P_c}{F_c}=\sigma_c$ и $\frac{P_a}{F_a}=\sigma_a$, и сократим в уравнениях деформаций длину l. Тогда уравнение равновесия и уравнения деформаций примут следующий вид:

$$\sigma_ч F_ч+\sigma_c F_c+\sigma_a F_a=P;\quad \frac{\sigma_ч}{E_ч}=\frac{\sigma_c}{E_c};\quad \frac{\sigma_ч}{E_ч}=\frac{\sigma_a}{E_a}.$$

Совместное решение этих трех уравнений дает значения напряжений. Они равны:

$$\sigma_ч=\frac{P}{F_ч\left(1+\frac{E_c}{E_ч}\frac{F_c}{F_ч}+\frac{E_a}{E_ч}\frac{F_a}{F_ч}\right)}=$$

$$=\frac{40\,000}{3{,}14\cdot 2{,}5^2\left(1+\frac{2}{1{,}2}\cdot\frac{5{,}5^2-2{,}5^2}{2{,}5^2}+\frac{0{,}7}{1{,}2}\cdot\frac{8{,}5^2-5{,}5^2}{2{,}5^2}\right)}=180\ кг/см^2,$$

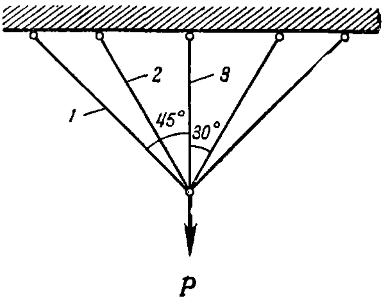
$$\sigma_c=\frac{E_c}{E_ч}\sigma_ч=\frac{2\cdot 10^6}{1{,}2\cdot 10^6}\cdot 180=300\ кг/см^2,$$

$$\sigma_a=\frac{E_a}{E_ч}\sigma_ч=\frac{0{,}7\cdot 10^6}{1{,}2\cdot 10^6}\cdot 180=105\ кг/см^2.$$

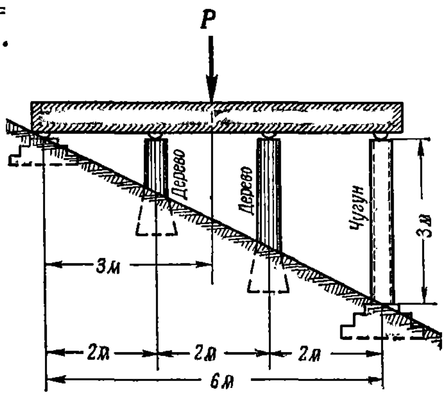
Все напряжения — сжимающие.

1.118. Все стержни, удерживающие груз $P=30$ *т* (см. рисунок), одинакового круглого поперечного сечения диаметром 3 *см* и выполнены из одного материала. Определить напряжения в стержнях.

Ответ: $\sigma_1=707\ кг/см^2$, $\sigma_2=1060\ кг/см^2$, $\sigma_3=1414\ кг/см^2$.



К задаче 1.118.



К задаче 1.119.

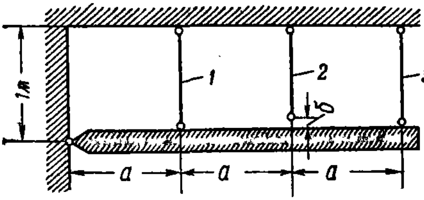
1.119. Жесткая балка первоначально опиралась правым концом на чугунную стойку площадью сечения 100 $см^2$ и не имела промежуточных опор. Затем были поставлены две промежуточные деревянные стойки круглого сечения диаметром 25 *см* (см. рисунок). На сколько процентов можно увеличить нагрузку после установки промежуточных стоек при условии, что напряжения в чугунной стойке останутся первоначальными?

Ответ: На 41%.

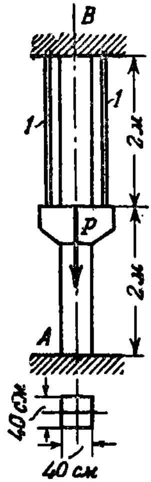
1.120. Жесткий брус подвешен на трех стальных стержнях одинакового поперечного сечения площадью 20 *см*². Средний стержень выполнен короче проектного размера на $\delta = 0{,}5$ *мм* (см. рисунок). Определить напряжения в стержнях после сборки конструкции.

Ответ: $\sigma_1 = -143$ *кг/см*², $\sigma_2 = 715$ *кг/см*², $\sigma_3 = -429$ *кг/см*².

1.121. Бетонная стойка AB с обоими защемленными концами (см. рисунок) в среднем своем сечении нагружена вдоль оси силой $P = 32$ *т*. Какой площади сечения нужно поставить две стальные тяги *1*, чтобы растягивающие напряжения в верхней части бетонной стойки не превосходили 5 *кг/см*²? Чему в этом случае будут равны напряжения в тягах и в нижней части стойки? Модуль упругости для бетона при растяжении и при сжатии принять одинаковым и равным $E_б = 1{,}5 \cdot 10^5$ *кг/см*².



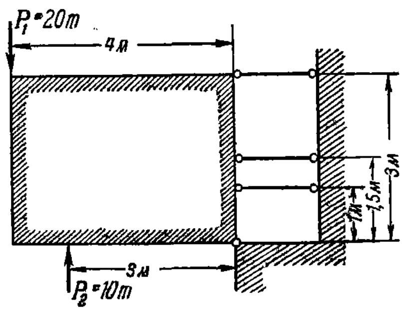
К задаче 1.120.



К задаче 1.121.

Ответ: $F = 2 \times 120$ *см*²,
$\sigma_{тяг} = 66{,}7$ *кг/см*²,
$\sigma_б = -5$ *кг/см*².

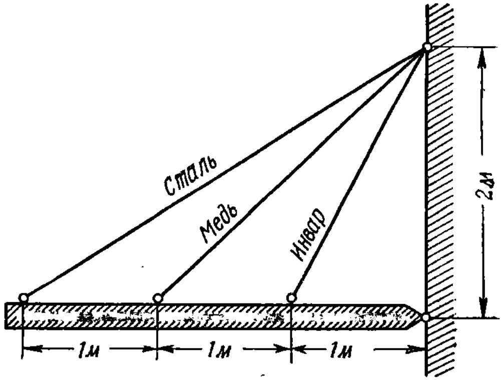
1.122. Жесткая конструкция (см. рисунок) прикреплена к фундаменту при помощи шарнира и трех стальных тяг с одинаковой площадью поперечного сечения и одинаковой длиной. При допускаемом напряжении $[\sigma] = 1600$ *кг/см*² подобрать сечение тяг.



К задаче 1.122.

Ответ: 7,65 *см*².

1.123. Жесткий брус подвешен на трех стержнях одинакового поперечного сечения площадью 10 $см^2$, но выполненных из разных материалов (см. рисунок). Определить напряжение в стержнях после



К задаче 1.123.

повышения их температуры на $\Delta t = +30°$. Для инвара $\alpha_и = 0$ и $E_и = 2 \cdot 10^6$ $кг/см^2$.

Ответ: $\sigma_с = -142$ $кг/см^2$, $\sigma_м = -166$ $кг/см^2$, $\sigma_и = 527$ $кг/см^2$.

§ 3. Учет собственного веса

1.124. Определить сжимающее напряжение в нижнем поперечном сечении каменного столба высотой 8 *м* с постоянным поперечным сечением; вес одного кубического метра кладки равен 2 *т*.

Ответ: 1,6 $кг/см^2$.

1.125. Клеть подъемника, весящая 1,6 *т*, подвешена на двух тросах на глубине $h = 140$ *м*. Площадь поперечного сечения каждого троса равна 1,25 $см^2$, погонный метр его весит 1,5 *кг*. Какое напряжение материала в сечении у верхнего и нижнего концов троса?

Ответ: $\sigma_н = 640$ $кг/см^2$, $\sigma_в = 808$ $кг/см^2$.

1.126. Определить объем кладки опоры, сжатой силой $P = 400$ *т*, в трех случаях: 1) опора постоянного сечения, 2) опора ступенчатая из трех частей одинаковой длины и 3) опора выполнена в виде бруса равного сопротивления сжатию. Допускаемое напряжение принять равным 12 $кг/см^2$, объемный вес кладки 2,2 $т/м^3$, высота опоры 42 *м*.

Ответ: $V_1 = 610$ $м^3$; $V_2 = 261$ $м^3$; $V_3 = 209$ $м^3$.

1.127. Определить размеры поперечного сечения квадратного каменного столба высотой 10 *м*, центрально нагруженного силой 50 *т*. Допускаемое напряжение на сжатие 10 $кг/см^2$, удельный вес кладки равен 2. Построить эпюру распределения напряжений по длине стержня.

Ответ: 79×79 $см^2$.

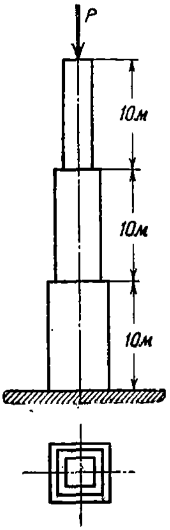
1.128. Определить необходимый диаметр шахтной штанги длиной 100 *м*, закрепленной верхним концом и нагруженной на нижнем конце силой 2 *т*. Допускаемое напряжение для материала штанги $[\sigma] = 1000$ *кг/см²*. Расчет произвести в двух предположениях: с учетом и без учета собственного веса штанги.

Ответ: 1,66 *см*; 1,59 *см*.

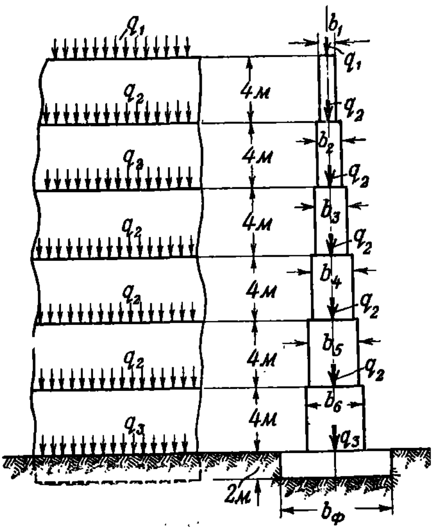
1.129. Определить размеры в плане ступенчатого столба квадратного поперечного сечения высотой 30 *м*, имеющего три участка одинаковой длины, сжатого силой $P = 60$ *т* (см. рисунок). Допускаемое напряжение для кладки столба на сжатие $[\sigma] = 10$ *кг/см²*, удельный вес ее равен 2. Построить эпюру распределения напряжений по длине стержня.

Ответ: 87×87 *см*; 97×97 *см*; 108×108 *см*.

1.130. На рисунке представлены часть фасада и поперечный разрез кирпичной стены шестиэтажного здания. От чердачного



К задаче 1.129.



К задаче 1.130.

перекрытия и кровли на погонный метр стены действует нагрузка $q_1 = 6$ *т/м*, от междуэтажных перекрытий $q_2 = 4$ *т/м* и от пола нижнего этажа $q_3 = 3$ *т/м*. Эти нагрузки приложены вдоль оси стены. Объемный вес материала стены равен 2 *т/м³*. Определить наименьшие толщины стен в каждом этаже при допускаемом напряжении $[\sigma] = 6$ *кг/см²* и ширину фундамента при допускаемом давлении на грунт, равном 5 *кг/см²*.

Ответ: $b_1 = 11{,}5$ *см*, $b_2 = 21$ *см*, $b_3 = 32$ *см*, $b_4 = 44{,}5$ *см*, $b_5 = 59$ *см*, $b_6 = 76$ *см*, $b_ф = 125$ *см*.

На основании теплотехнических расчетов полученные минимальные размеры значительно увеличиваются.

1.131. Стальной стержень подвешен вертикально за верхний конец и нагружен только собственным весом. Если напряжение не должно превышать 300 *кг/см*^{2} и удельный вес стали равен 7,85, то какова наибольшая допускаемая длина стержня? Построить эпюру распределения напряжений по длине стержня.

Ответ: 382 *м*.

1.132. Определить полное удлинение стального стержня длиной 120 *м*, вызванное собственным его весом.

Ответ: 2,8 *мм*.

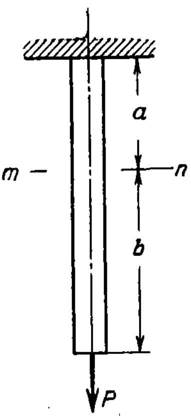
1.133. Вертикальный стальной стержень с площадью поперечного сечения F и длиной $l=300$ *м* работал с нагрузкой P при напряжении 6 *кг/мм*^{2}. Не меняя ни размеров сечения стержня, ни нагрузки на него, требуется нарастить стержень в длину, считая возможным повышение допускаемого напряжения до 6,5 *кг/мм*^{2}. Насколько длиннее можно сделать стержень?

Ответ: На 64,1 *м*.

1.134. Определить с учетом собственного веса перемещение сечения mn приведенного на рисунке стержня, если поперечное сечение его F, модуль упругости E, а объемный вес материала γ.

Решение. По отношению к верхней части длиной a вес нижней части стержня длиной b будет наравне с силой P внешней нагрузкой. Таким образом, перемещение сечения mn, равное удлинению части стержня длиной a, составит

$$\delta_{mn}=\Delta l_a=\frac{(P+\gamma Fb)a}{EF}+\frac{\gamma a^2}{2E}.$$



К задаче 1.134. К задаче 1.135.

1.135. Определить с учетом собственного веса перемещение свободного конца приведенного на рисунке стержня, если поперечное сечение его F, модуль упругости E, а объемный вес материала γ.

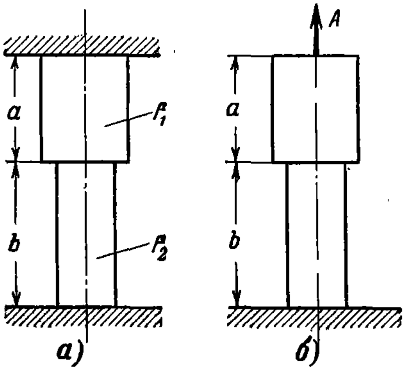
Ответ: $\frac{Pb}{EF}+\frac{\gamma(b+a)^2}{2E}$.

1.136. Определить вызванные собственным весом реакции опор стержня, изображенного на рисунке *а*). Верхняя и нижняя части стержня выполнены из одного материала с удельным весом γ и модулем E, но разного поперечного сечения.

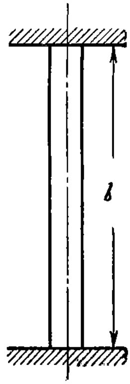
Решение. Обозначим верхнюю реакцию A и нижнюю B. Предположим, что они обе направлены вверх. Тогда единственное уравнение равновесия — сумма проекций на вертикальную ось — даст, что вес стержня равен сумме проекций:

$$\gamma F_1a+\gamma F_2b=A+B.$$

Таким образом, задача оказывается статически неопределимой. Обратимся к рассмотрению деформаций. Для перехода к основной системе отбросим верхнюю опору. Нагрузим основную систему реакцией A (см. рисунок б)). Так как полная деформация равна нулю, то удлинение стержня, вызванное



К задаче 1.136.



К задаче 1.137.

реакцией A, должно равняться его укорочению, вызванному собственным его весом. Это условие и будет дополнительным уравнением деформаций. Удлинение стержня от реакции A равно

$$\Delta l_A = \frac{A}{E}\left(\frac{b}{F_2}+\frac{a}{F_1}\right) = \frac{Aa}{EF_1}\left(1+\frac{b}{a}\frac{F_1}{F_2}\right).$$

Укорочение стержня, вызванное собственным его весом, равно

$$\Delta l_Q = \frac{\gamma a^2}{2E}+\frac{\gamma b^2}{2E}+\frac{\gamma a F_1 b}{EF_2} = \frac{\gamma a^2}{2E}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\frac{b}{a}\frac{F_1}{F_2}\right].$$

Приравнивая значения этих величин, получаем

$$\frac{Aa}{EF_1}\left(1+\frac{b}{a}\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{\gamma a^2}{2E}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\frac{b}{a}\frac{F_1}{F_2}\right].$$

Отсюда

$$A = \frac{\gamma F_1 a}{2}\cdot\frac{1+\frac{b^2}{a^2}+2\frac{b}{a}\frac{F_1}{F_2}}{1+\frac{b}{a}\frac{F_1}{F_2}},$$

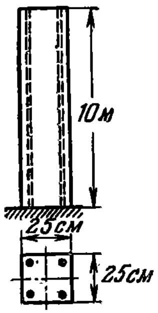
а из уравнения статики

$$A = \gamma F_1 a + \gamma F_2 b - A.$$

1.137. Стержень длиной l и площадью поперечного сечения F, выполненный из материала с удельным весом γ, защемлен, как указано на рисунке, своим верхним и нижним концами. Определить напряжения в верхнем и нижнем сечениях стержня, вызванные его собственным весом, и начертить эпюру распределения напряжений по длине стержня.

Ответ: $\sigma_в = \frac{\gamma l}{2}$, $\sigma_н = -\frac{\gamma l}{2}$.

1.138. Железобетонная колонна указанных на рисунке размеров нагружена только собственным своим весом. При объемном весе железобетона, равном 2,5 *т/м*³, определить напряжения в бетоне и в арматуре колонны. Отношение модулей упругости стальной арматуры и бетона принять равным 15, диаметр арматуры 25 *мм*.



К задаче 1.138.

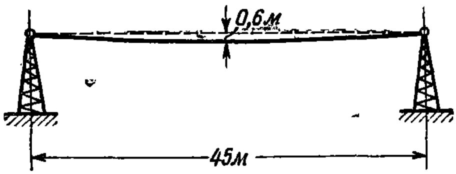
Ответ: $\sigma_б = -1,7$ *кг/см*², $\sigma_с = -25,5$ *кг/см*².

1.139. Бетонная колонна постоянного сечения жестко защемлена своим верхним и нижним концами. Какую предельную длину l может иметь колонна, если растягивающие напряжения в бетоне не должны превышать 5 *кг/см*²? Объемный вес бетона принять равным 2,5 *т/м*³.

Ответ: 40 *м*.

§ 4. Расчет гибких нитей

1.140. Канат диаметром 5 *см* и весом 1 *кг/м* подвешен (см. рисунок) с провесом 0,6 *м* к двум опорам, расположенным на одном уровне и отстоящим друг от друга на 45 *м*. Определить наибольшее и наименьшее растягивающие усилия в канате.

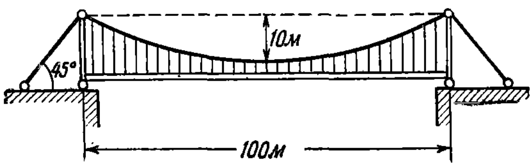


К задаче 1.140.

Ответ: $H = 422$ *кг*, $T_{max} \approx H$.

1.141. Висячий мост поддерживается двумя цепями. Пролет цепей равен 100 *м*, а стрела провисания 8 *м*. Нагрузка моста составляет 6 *т/м*. Определить необходимое поперечное сечение цепей при $[\sigma] = 1400$ *кг/см*², приняв сечение их постоянным по всей длине.
Ответ: 352 *см*².

1.142. Цепь изображенного на рисунке висячего моста нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 5$ *т/м*.



К задаче 1.142.

Определить необходимое сечение тросов оттяжек при допускаемом напряжении для них, равном $[\sigma] = 1000$ *кг/см*².
Ответ: 884 *см*².

1.143. Медный провод сечением 95 *мм*² подвешен к опорам, расположенным на одном уровне и находящимся на расстоянии $l = 100$ *м* друг от друга. Стрела провисания провода равна $f = 4{,}0$ *м*. Найти увеличение напряжений при понижении температуры на 25°, если вес погонного метра провода равен $q = 0{,}862$ *кг/м*, коэффициент линейного расширения $\alpha = 167 \cdot 10^{-7}$, модуль упругости $E = 12\,000$ *кг/мм*².

Ответ: Напряжения увеличатся на 14,7 *кг/см*².

1.144. Стальной провод должен быть подвешен к двум точкам, находящимся на одном уровне и отстоящим на 30 *м* друг от друга. Провод подвешивается при температуре +35°. Чему должна равняться первоначальная стрела провисания, чтобы при температуре —25° напряжения не превышали 1200 *кг/см*²? Какая потребуется длина провода?

Решение. Условие прочности для провода имеет вид

$$\sigma = \frac{H}{F} = \frac{ql^2}{8fF} \leqslant [\sigma].$$

Так как нагрузкой на провод является только собственный его вес, то $q = \gamma \cdot F \cdot 1$ и условие прочности будет:

$$\frac{\gamma F l^2}{8fF} \leqslant [\sigma].$$

После сокращения на площадь сечения провода находим необходимую стрелу провисания

$$f = \frac{\gamma l^2}{8[\sigma]} = \frac{7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 30^2 \cdot 10^4}{8 \cdot 1200} = 7{,}31 \text{ см}.$$

Эту стрелу провисания должен иметь провод в опасном состоянии, т. е. при температуре —25°. Чтобы найти стрелу провисания при подвеске провода, необходимо перейти от его состояния при $t_1 = -25°$ к его состоянию при $t_2 = +35°$. Как известно, два состояния провода связаны между собой следующим кубическим уравнением:

$$H_2^3 + \left[\frac{EFq_1^2 l^2}{24 H_1^2} + EF\alpha(t_2 - t_1) - H_1\right] H_2^2 - \frac{EFq_2^2 l^2}{24} = 0.$$

Произведем в этом уравнении следующие замены:

$$H_2 = \frac{ql^2}{8f_2}, \quad H_1 = H = [\sigma] F \quad \text{и} \quad q_1 = q_2 = q = \gamma F.$$

Тогда уравнение запишется так:

$$f_2^3 - \frac{3}{8} l^2 \left[\frac{1}{24} \frac{\gamma^2 l^2}{[\sigma]^2} + \alpha(t_2 - t_1) - \frac{[\sigma]}{E}\right] f_2 - \frac{3\gamma l^4}{64E} = 0.$$

После подстановки числовых данных оно принимает вид

$$f_2^3 - \frac{3}{8} \cdot 3000^2 \left[\frac{0{,}0078^2 \cdot 3000^2}{24 \cdot 1200^2} + 125 \cdot 10^{-7}(35 + 25) \frac{1200}{2 \cdot 10^6}\right] f_2 - \frac{3 \cdot 0{,}0078 \cdot 3000^4}{64 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,$$

а после сокращения

$$f_2^3 - 560 f_2 - 14\,850 = 0,$$

откуда $f_2 = 32$ *см*. Это и будет необходимая первоначальная стрела провисания.

Длину провода при этой стреле провисания найдем по формуле

$$s = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_2^2}{l^2}\right) = 30\left(1 + \frac{8}{3}\frac{0,32^2}{30^2}\right) = 30,009 \text{ м}.$$

1.145. Между двумя опорами, расположенными на одинаковом уровне и отстоящими одна от другой на расстоянии $l = 10$ *м*, подвешивается многожильный медный провод при температуре $t_1 = +15°$. Площадь сечения провода $F = 120$ *мм*². В дальнейшем температура понижается до $t_2 = -5°$ и происходит обледенение провода слоем льда толщиной 10 *мм*. Одновременно провод подвергается горизонтальному давлению ветра интенсивностью 24 *кг* на 1 кв. метр вертикальной проекции провода, покрытого слоем льда. Кроме того, предусматривается, что температура может понизиться до $t_3 = -40°$, но без одновременного обледенения и ветра.

Какова должна быть первоначальная стрела провисания провода, чтобы при наихудших условиях напряжения в нем не превышали 800 *кг/см*², если вес 1 *пог. м* провода равен 1,09 *кг*; его наружный диаметр 14,2 *мм*; $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$; $E = 1,3 \cdot 10^4$ *кг/мм*²; удельный вес льда равен 0,9.

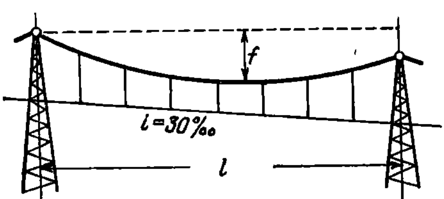
Ответ: $f = 2,59$ *м*.

1.146. Определить натяжения в стальной и алюминиевой частях проволочного стале-алюминиевого кабеля, подвешенного к двум опорам, расположенным на одинаковом уровне с пролетом l и при стреле провисания кабеля f. Площадь стальной части кабеля F_c, алюминиевой F_a, объемные веса и модули упругости равны соответственно γ_c, γ_a, E_c и E_a.

Ответ: $H_c = \dfrac{(\gamma_c F_c + \gamma_a F_a) l^2}{8f\left(1 + \dfrac{E_a F_a}{E_c F_c}\right)}$; $\quad H_a = \dfrac{(\gamma_c F_c + \gamma_a F_a) l^2}{8f\left(1 + \dfrac{E_c F_c}{E_a F_a}\right)}$.

1.147. Горизонтальное расстояние между опорами провода сечением 1 *см*², весящего 8 *г/см*³, равно 37 *м*. Одна опора ниже другой на 30 *см*, и наинизшая точка провода расположена на 90 *см* ниже низкой опоры. Определить горизонтальное расстояние от низкой опоры до наинизшей точки провода и натяжение в этой точке.

Ответ: 17,1 *м*; $H = 131$ *кг*.

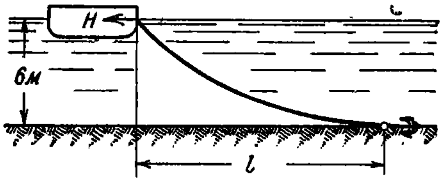


К задаче 1.148.

1.148. Определить натяжение в нижнем сечении несущего троса, поддерживающего провод электрической железной дороги (см. рисунок), при уклоне $i = 30‰$, пролете $l = 75$ *м* и нагрузке $q = 1,6$ *кг/м* троса. Расстояние по вертикали наиболее пониженной точки троса от вершины более высоко расположенной опоры равно $f=3$ *м*.

Ответ: $H=667$ *кг*.

1.149. Якорная цепь, удерживающая баржу,— стальная, сечением 5 *см*². В точке установки якоря она горизонтально касается дна

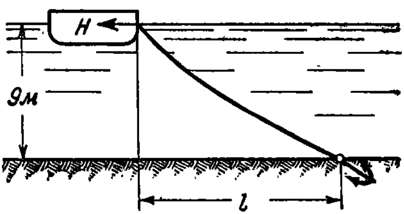


К задаче 1.149.

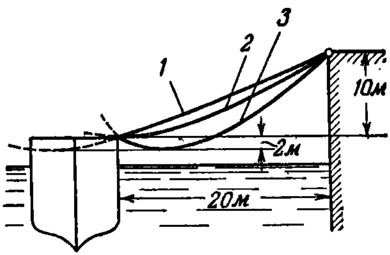
(см. рисунок). Определить расстояние l от баржи до якоря, если величина горизонтального усилия, вырывающего якорь, равна 100 *кг*.

Ответ: 18,8 *м*.

1.150. Плавающая в воде баржа (см. рисунок) передает на якорную цепь горизонтальное усилие $H=36$ *т*. Полная длина цепи 45 *м*,



К задаче 1.150.



К задаче 1.151.

а вертикальное расстояние от точки прикрепления цепи к барже до дна равно 9 *м*. Вес цепи в воде равен 50 *кг/м*. Определить горизонтальное расстояние между якорем и точкой подвеса цепи к барже.

Ответ: 44,1 *м*.

1.151. При помощи стального троса весом 3 *кг/м*, сечением 4 *см*² корабль пришвартован к берегу (см. рисунок). Какими усилиями корабль относит от берега, когда трос провисает по кривым *1*, *2* и *3*. Нижняя точка кривой *2* — у ее левого закрепления, нижняя точка кривой *1* — левее левого закрепления, а кривой *3* — правее и на одном уровне с нижней точкой кривой *1*.

Ответ: $H_1=143$ *кг*; $H_2=60$ *кг*; $H_3=25$ *кг*.

ГЛАВА 2

СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 5. Линейное и плоское напряженные состояния

2.1. Стержень диаметром 6 *см* растянут усилием 25 *т*. Определить величину нормального и касательного напряжений по сечению, нормаль к которому составляет угол 30° с осью стержня. Определить, по какому сечению касательные напряжения достигают максимума, и вычислить их величину.

Решение. Сначала найдем напряжение по сечению, перпендикулярному к оси стержня:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 25\,000}{3,14 \cdot 6^2} = 884 \textit{ кг/см}^2.$$

Нормальное и касательное напряжения по наклонному сечению определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha = 884 \cdot 0,866^2 = 663 \textit{ кг/см}^2,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha = \frac{884}{2} \cdot 0,866 = 383 \textit{ кг/см}^2.$$

Касательные напряжения достигают максимума по сечениям, наклоненным к оси стержня под углом 45°. Их значение равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_0}{2} = \frac{884}{2} = 442 \textit{ кг/см}^2.$$

2.2. Стержень диаметром 7,5 *см* растянут силами 35 *т*. Определить полное напряжение в поперечном сечении; определить полное и касательное напряжения в сечении с нормалью, наклоненной под углом 15° к оси стержня.

Ответ: $\sigma_0 = 795$ *кг/см²*; $p_\alpha = 767$ *кг/см²*; $\tau_\alpha = 198$ *кг/см²*.

2.3. Стержень круглого поперечного сечения растянут силой 15 *т*. Касательное напряжение по любому сечению не должно превосходить 600 *кг/см²*. Определить диаметр стержня.

Ответ: 4 *см*.

2.4. В растянутом стержне нормальные напряжения по одной из наклонных площадок равны 700 *кг/см²*, а касательные 500 *кг/см²*. Определить наибольшие нормальные и касательные напряжения.

Ответ: $\sigma_{\max} = 1056$ *кг/см²*, $\tau_{\max} = 528$ *кг/см²*.

2.5. Нормальное напряжение по поперечному сечению растянутого стержня равно 500 *кг/см²*. По одному из наклонных сечений касательное напряжение при этом равно 160 *кг/см²*. Определить положение этого сечения и величину действующего по нему нормального напряжения.

Ответ: $\alpha_1 = 19°55'$; $\sigma_{\alpha_1} = 442$ *кг/см²*;
$\alpha_2 = 70°5'$; $\sigma_{\alpha_2} = 58$ *кг/см²*.

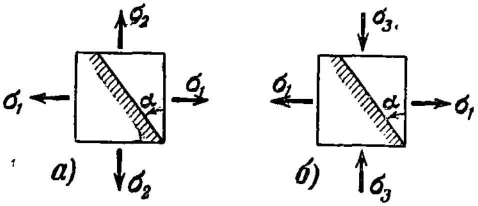
2.6. Короткий бетонный стержень с поперечным сечением 20×20 *см* сжат силой P. Чему равно P, если сжимающее нормальное напряжение по площадке, наклоненной под углом 45° к оси, равно 15 *кг/см²*?

Ответ: 12 *т*.

2.7. Полное напряжение по одной из площадок, проведенных через выбранную точку элемента конструкции, равно 300 *кг/см²*. Оно наклонено к этой площадке под углом 60°. По площадке, перпендикулярной к первой, действуют лишь касательные напряжения. Найти наибольшее растягивающее напряжение в этой точке.

Ответ: 328 *кг/см²*.

2.8. По заданным σ_1 и σ_2 (рисунок *а*)) или σ_1 и σ_3 (рисунок *б*)) определить графически σ_α, τ_α и полное напряжение p_α в сечении под



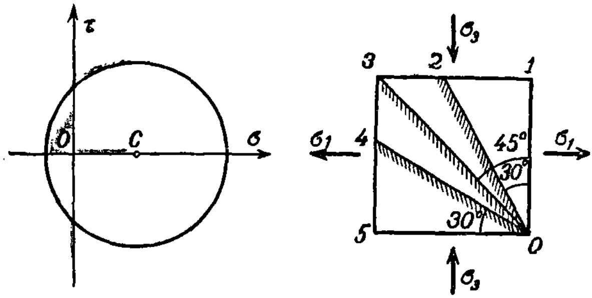
К задаче 2.8.

углом α к сечению, на которое действует σ_1. Кроме того, определить наибольшие касательные напряжения в материале.

а) $\sigma_1 = 800$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -500$ *кг/см²*, $\alpha = 60°$;
б) $\sigma_1 = 750$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -750$ *кг/см²*, $\alpha = 60°$;
в) $\sigma_1 = 150$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 150$ *кг/см²*, $\alpha = 60°$;
г) $\sigma_1 = 150$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 150$ *кг/см²*, $\alpha =$ любому углу;
д) $\sigma_1 = 150$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -150$ *кг/см²*, $\alpha = 45°$;
е) $\sigma_1 = 1000$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -600$ *кг/см²*, $\alpha = 60°$;
ж) $\sigma_1 = 140$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -140$ *кг/см²*, $\alpha = 30°$;
з) $\sigma_1 = 600$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -300$ *кг/см²*, $\alpha = 60°$.

Ответ: а) —175 *кг/см²*; б) —375 *кг/см²*; в) 150 *кг/см²*; г) 150 *кг/см²*; д) 0; е) —200 *кг/см²*; ж) 70 *кг/см²*; з) —75 *кг/см²*. В ответах указаны σ_α.

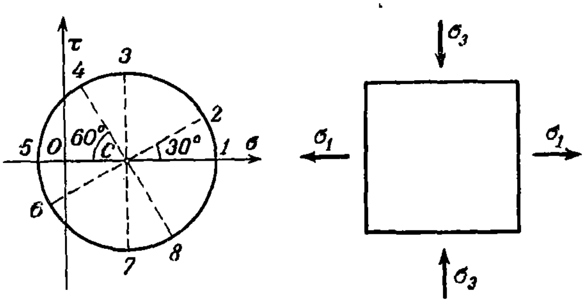
2.9. Для элемента, находящегося в плоском напряжениом состоянии, построен круг напряжений (см. рисунок). Указать на круге



К задаче 2.9.

точки, определяющие напряжения по площадкам (сечениям) *1—O*, *2—O*, *3—O*, *4—O* и *5—O*.

2.10. Для элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии, построен круг напряжений (см. рисунок). Указать на элементе



К задаче 2.10.

площадки (сечения), напряжения в которых определяются по кругу координатами точек *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7* и *8*.

2.11. Стальная пластинка квадратной формы со стороной 15 *см* растянута в одном направлении напряжением 750 *кг/см*², а в другом сжата таким же напряжением. Найти относительное удлинение диагоналей пластинки.

Ответ: $\varepsilon = 0$.

2.12. Стальной лист удлиняется на 0,2 *мм* на длине 250 *мм* при растягивающем напряжении 1500 *кг/см*². Если на лист будет действовать добавочное растягивающее напряжение 1500 *кг/см*² в направлении, перпендикулярном к первому, то каково будет удлинение на 250 *мм* в том и другом направлении? Коэффициент поперечной деформации принять равным $\mu = 0{,}3$. Как изменится деформация, если добавочное напряжение будет той же величины, но только сжимающим?

Ответ: При добавочном растягивающем напряжении $\Delta l_{\parallel} = \Delta l_{\perp} = 0{,}14$ *мм*; при добавочном сжимающем напряжении $\Delta l_{\parallel} = 0{,}26$ *мм* и $\Delta l_{\perp} = -0{,}26$ *мм*.

2.13. Главные напряжения в стенке резервуара равны 150 *кг/см²* и 300 *кг/см²*. Определить нормальное, касательное и полное напряжения по величине и направлению для сечения, нормаль к которому составляет угол в 30° с направлением наибольшего главного напряжения. Найти сечение, нормальное к стенке, с наибольшим касательным напряжением и вычислить обе составляющие напряжения по этой площадке.

Ответ: $\sigma_\alpha = 263$ *кг/см²*; $\tau_\alpha = 65$ *кг/см²*; $p_\alpha = 271$ *кг/см²* под углом 16° к направлению σ_1; сечение с наибольшим касательным напряжением лежит под углом 45° к сечению с наибольшим главным напряжением; в нем $\sigma = 225$ *кг/см²* и $\tau_{max} = 75$ *кг/см²*.

2.14. Главные напряжения в стенке котла равны 600 *кг/см²* и 300 *кг/см²*. Определить относительные деформации в направлении главных напряжений. Какое напряжение вызывает такую же наибольшую относительную деформацию при линейном напряженном состоянии? Подсчитать запас потенциальной энергии, накопленной в 1 *см³* стенки котла.

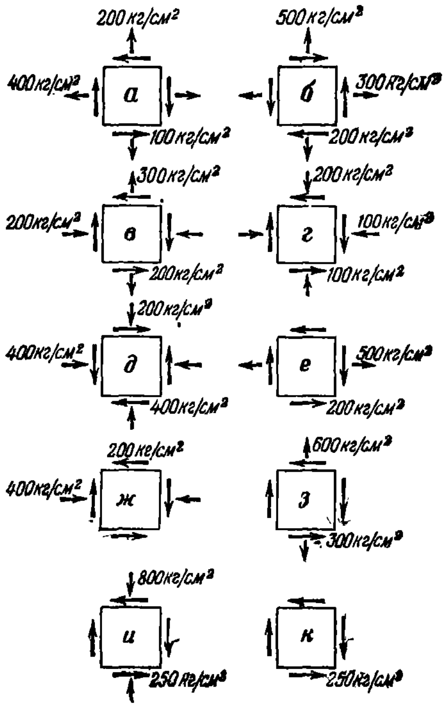
Ответ: $\varepsilon_1 = 2{,}55 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 0{,}6 \cdot 10^{-4}$; $\sigma = 510$ *кг/см²*; $a = 8{,}55 \cdot 10^{-2}$ *кг/см²*.

2.15. Главные напряжения в точке элемента, подвергающегося плоскому напряженному состоянию, равны 1200 *кг/см²* и 450 *кг/см²*.

Определить сечение по отношению к которому полное напряжение, действующее по этому сечению, наклонено под наименьшим углом.

Ответ: Под углом 58°30′ к сечению с наибольшим главным напряжением.

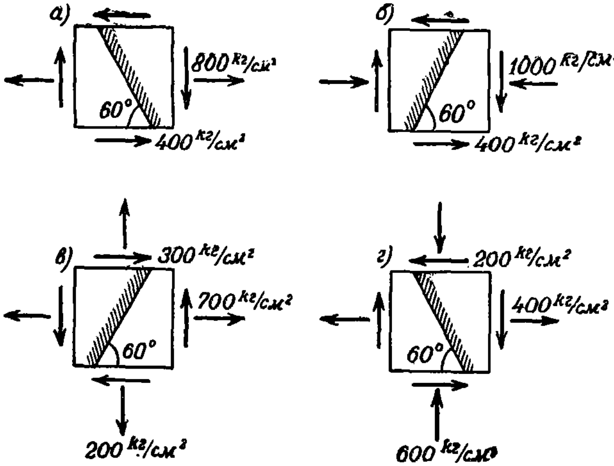
2.16. Определить графически (при помощи круга напряжений) величину и направление главных напряжений для показанных на рисунке элементов и изобразить внутри них элементы, находящиеся под действием лишь главных напряжений.



К задаче 2.16.

Ответ: а) 440 $кг/см^2$; б) 625 $кг/см^2$; в) 370 $кг/см^2$; г) —40 $кг/см^2$; д) —110 $кг/см^2$; е) 570 $кг/см^2$; ж) 83 $кг/см^2$; з) 730 $кг/см^2$; и) 70 $кг/см^2$; к) 250 $кг/см^2$. В ответах указаны σ_1.

2.17. По заданным σ_x, σ_y, τ_x и τ_y (см. рисунок) определить графически σ_α и τ_α в указанном наклонном сечении.



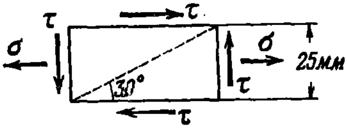
К задаче 2.17.

Ответ: а) $\sigma_\alpha = 258$ $кг/см^2$, $\tau_\alpha = 546$ $кг/см^2$;
б) $\sigma_\alpha = -402$ $кг/см^2$, $\tau_\alpha = 630$ $кг/см^2$;
в) $\sigma_\alpha = 314$ $кг/см^2$, $\tau_\alpha = -368$ $кг/см^2$;
г) $\sigma_\alpha = -24$ $кг/см^2$, $\tau_\alpha = 532$ $кг/см^2$.

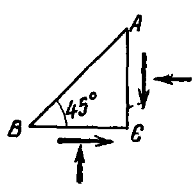
2.18. На элемент (см. рисунок), вырезанный из стальной детали, действуют напряжения $\sigma = 300$ $кг/см^2$ и $\tau = 150$ $кг/см^2$. Определить изменение угла наклона и длины диагонали.

Ответ: $\Delta l_{диаг} = 9{,}25 \cdot 10^{-3}$ *мм*.

2.19. На рисунке изображен призматический элемент материала; плоскость AB и основание призмы (параллельное ABC) не нагружены;



К задаче 2.18.



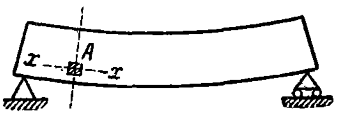
К задаче 2.19.

нормальные напряжения по плоскостям AC и BC равны —150 $кг/см^2$. Определить касательные напряжения по плоскостям AC и BC и величину и направление главных напряжений.

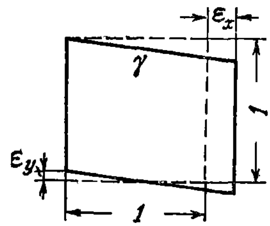
Ответ: $\tau = 150$ $кг/см^2$; $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -300$ $кг/см^2$.

2.20. В продольной балке стального моста при проходе поезда были измерены около точки A при помощи тензометров относительные удлинения в горизонтальном и вертикальном направлениях (см. рисунок). Относительное удлинение в направлении оси xx (параллельно оси балки) оказалось равным $\varepsilon_x = 0{,}0004$ и в перпендикулярном направлении $\varepsilon_y = -0{,}00012$. Определить нормальные напряжения в направлениях вдоль и поперек оси балки.

Ответ: Параллельно оси $\sigma = 800$ *кг/см*², в перпендикулярном направлении $\sigma = 0$.



К задаче 2.20.



К задаче 2.21.

2.21. Относительные деформации плоского элемента стальной детали (см. рисунок) равны: $\varepsilon_x = 5{,}32 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_y = -1{,}82 \cdot 10^{-4}$; $\gamma = 1{,}19 \cdot 10^{-3}$. Определить величину и направление главных напряжений.

Ответ: $\sigma_1 = 1600$ *кг/см*², $\sigma_2 = -600$ *кг/см*²; σ_1 повернуто относительно горизонтали на 30° по часовой стрелке.

§ 6. Объемное напряженное состояние

2.22. Определить наибольшие относительные деформации для элемента, находящегося в объемном напряженном состоянии, если $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*² и $\mu = 0{,}25$, при следующей величине главных напряжений:

а) $+150$ *кг/см*², $+300$ *кг/см*², $+450$ *кг/см*²;

б) $+150$ *кг/см*², $+300$ *кг/см*², -450 *кг/см*²;

в) $+150$ *кг/см*², -300 *кг/см*², -450 *кг/см*².

Ответ: а) $\varepsilon_1 = 1685 \cdot 10^{-7}$; б) $\varepsilon_2 = -2812 \cdot 10^{-7}$;
в) $\varepsilon_3 = -2062 \cdot 10^{-7}$.

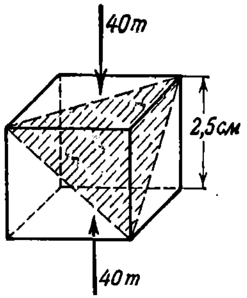
2.23. Стальной параллелепипед подвергнут напряжениям по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Они равны $+750$ *кг/см*², -600 *кг/см*², $+900$ *кг/см*². Определить относительные деформации по всем трем направлениям и значение объемного модуля. Вычислить расчетные напряжения по III и IV теориям прочности.

Ответ: $\varepsilon_1 = 4{,}275 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 3{,}3 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_2 = -0{,}548 \cdot 10^{-2}$; $K = 1{,}667 \cdot 10^6$ *кг/см*²; $\sigma_{r3} = 1500$ *кг/см*²; $\sigma_{r4} = 1430$ *кг/см*².

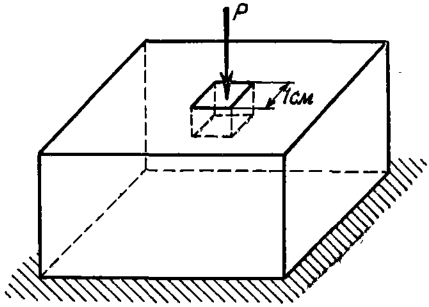
2.24. Кубик с ребром в 2,5 *см* (см. рисунок) был испытан на сжатие. При нагрузке в 40 *т* он разрушился по плоскости, проходящей через диагональ верхней стороны и через диагонали смежных вертикальных сторон. Определить полное, нормальное и касательное напряжения в этом сечении в момент разрушения.

Ответ: $p_\alpha = -3680$ *кг/см²*; $\sigma_\alpha = -2133$ *кг/см²*; $\tau_\alpha = 3010$ *кг/см²*.

2.25. В толстой стальной плите (см. рисунок) сделано гнездо кубической формы размером в 1 *см³*. В это гнездо плотно, без зазоров, вставлен стальной кубик, сжатый, как указано на рисунке,



К задаче 2.24.



К задаче 2.25.

силой $P = 700$ *кг*. Считая плиту несжимаемой, определить все три главных напряжения в кубике.

Ответ: $\sigma_1 = \sigma_2 = -300$ *кг/см²*; $\sigma_3 = -700$ *кг/см²*.

2.26. Толстая стальная плита имеет квадратное в плане гнездо глубиной 10 *мм* и с поперечными размерами $10{,}001 \times 10{,}001$ *мм*. В это гнездо вставлен стальной же кубик размерами $10 \times 10 \times 10$ *мм*, сжатый силой $P = 1500$ *кг* по свободной грани. Считая плиту недеформируемой, определить все три главных напряжения в кубике.

Решение. Сжимающие напряжения по свободной и ей противоположной поверхностям будут наибольшими. Поэтому мы их обозначаем σ_3. Они равны

$$\sigma_3 = \frac{P}{F} = -\frac{1500}{1} = -1500 \text{ кг/см}^2.$$

Ввиду симметрии гнезда и кубика в плане два остальных главных напряжения равны между собой: $\sigma_1 = \sigma_2$. Одинаковы и относительные деформации ε_1 и ε_2. Они равны

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{10{,}001 - 10}{10} = 1 \cdot 10^{-4}.$$

Величина относительной деформации ε_1 при объемном напряженном состоянии определяется формулой

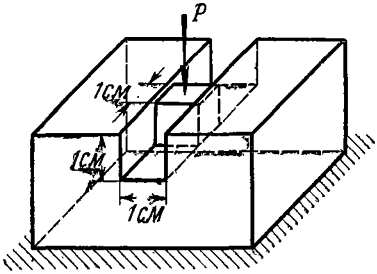
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right].$$

Положив $\sigma_2 = \sigma_1$, решаем это равенство относительно σ_1 и подставляем значения ε_1 и σ_3:

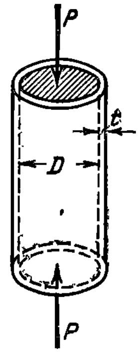
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{E\varepsilon_1 + \mu\sigma_3}{1 - \mu} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} - 0{,}3 \cdot 1500}{1 - 0{,}3} = -357 \text{ кг/см}^2.$$

2.27. В толстой стальной плите сделан сквозной паз шириной и глубиной по 1 *см*. В этот паз плотно, без зазора, вставлен алюминиевый кубик размером $1 \times 1 \times 1$ *см*, сжатый, как указано на рисунке, силой $P = 600$ *кг*. Считая плиту несжимаемой, определить все три главных напряжения в кубике. Для алюминия $\mu = 0{,}33$.

Ответ: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -198$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -600$ *кг/см²*.



К задаче 2.27.



К задаче 2.28.

2.28. Сплошной медный цилиндр диаметром $D = 50$ *мм* заключен в стальную рубашку толщиной $t = 1$ *мм* (см. рисунок). Цилиндр сжат силами $P = 20$ *т*. Определить растягивающие напряжения в цилиндре, прнняв коэффициент поперечной деформации для меди $\mu = 0{,}32$. Трением между цилиндром и рубашкой пренебречь.

Решение. Вырежем из тела цилиндра кубик с ребром, равным единице. По верхней и нижней его граням напряжения будут равны

$$\sigma_3 = \frac{P}{F_ц} = \frac{4 \cdot P}{\pi D^2} = -\frac{4 \cdot 20\,000}{3{,}14 \cdot 5^2} = -1015 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжения по боковым граням будут также сжимающими и ввиду симметрии одинаковыми. Обозначим их $\sigma_1 = \sigma_2 = -q$. Эти же напряжения являются удельным давлением на внутреннюю поверхность трубчатой рубашки. Как известно, растягивающие напряжения в цилиндре в направлении, перпендикулярном к образующей, при иаличии внутреннего давления q равны

$$\sigma = \frac{qD}{2t},$$

откуда

$$q = \frac{2t\sigma}{D}.$$

Напряженяй, параллельных образующей, в трубке не будет, так как в этом направлении отсутствует нагрузка (силы трения между стержнем и трубкой не учитываются).

Для определения напряжений σ обратимся к рассмотрению деформаций. Относительная поперечная деформация медного цилиндра одинакова с относительной поперечной деформацией вырезанного из него кубика:

$$\varepsilon_ц = \varepsilon_к = \frac{1}{E_м}\left[-q - \mu(-q + \sigma_3)\right].$$

Относительная деформация диаметра трубки, равная относительной деформации ее периметра:

$$\varepsilon_т = \frac{\sigma}{E_с},$$

равна относительной поперечной деформации цилиндра:

$$\varepsilon_ц = \varepsilon_т.$$

Подставим в это уравнение значения $\varepsilon_ц$ и $\varepsilon_т$:

$$\frac{1}{E_м}[-q-\mu(-q+\sigma_з)] = \frac{\sigma}{E_с}$$

и заменим q его выражением через σ:

$$\frac{1}{E_м}\left[-\frac{2t\sigma}{D}-\mu\left(-\frac{2t\sigma}{D}+\sigma_з\right)\right] = \frac{\sigma}{E_с}.$$

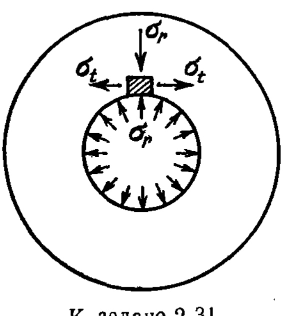
Решив это уравнение относительно σ и подставив численные значения остальных величин, определим напряжение σ:

$$\sigma = \frac{-\mu\sigma_з}{2\frac{t}{D}(1-\mu)+\frac{E_м}{E_с}} = \frac{0,32\cdot 1015}{2\frac{1}{50}(1-0,32)+\frac{1}{2}} = 616 \text{ кг/см}^2.$$

2.29. Бетонный цилиндр диаметром $D = 30$ *см* охвачен стальной трубкой толщиной $t = 2$ *мм* и сжимается силой $P = 15$ *т*. Найти главные напряжения для кубика, вырезанного из тела цилиндра. Модуль упругости бетона принять равным $E_б = 14\cdot 10^4$ *кг/см*^{2}, а его коэффициент поперечной деформации $\mu = 0,18$. Решить ту же задачу в предположении, что толщина стенок велика и деформацией трубки можно пренебречь.

Ответ: 1) $\sigma_1 = \sigma_2 = -0,63$ *кг/см*^{2}; 2) $\sigma_1 = \sigma_2 = -4,7$ *кг/см*^{2}.

2.30. Цилиндр диаметром 5 *см* и длиной 5 *см* сделан из алюминия. Он окружен стальной трубкой с внутренним диаметром 5 *см*, внешним 5,6 *см*. Цилиндр сжат вдоль оси напряжениями 1000 *кг/см*^{2}. Какова будет деформация цилиндра вдоль его оси? Как изменится деформация цилиндра, если внутренний диаметр трубки будет равен 5,005 *см*? Для алюминия принять $\mu = 0,35$.



К задаче 2.31.

Ответ: 1) $\Delta l = -0,067$ *мм*; 2) $\Delta l = -0,0713$ *мм*.

2.31. Пороховые газы при выстреле вызывают в стволе орудия (см. рисунок) внутреннее давление 3500 *кг/см*^{2}. Наибольшее радиальное сжимающее напряжение в материале σ_r равно, следовательно, также 3500 *кг/см*^{2}. Наибольшее тангенциальное растягивающее напряжение σ_t равно 5500 *кг/см*^{2} и имеет место там же, где указанные выше радиальные напряжения. Третье главное напряжение может быть принято равным нулю. Чему равны наибольшие касательные напряжения и по каким площадкам они действуют? Вычислить расчетное напряжение по IV теории прочности.

Решение. Как известно, наибольшее касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

В нашем случае $\sigma_1 = 5500$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = -3500$ *кг/см²*. Следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{5500 + 3500}{2} = 4500 \text{ кг/см}^2.$$

Сечения, где они имеют место, составляют угол 45° с сечениями, где действуют σ_1 и σ_3. В нашем случае это будут сечения, наклоненные под углом 45° к любому радиусу внутренней поверхности ствола орудия и перпендикулярные к поперечному сечению ствола.

Расчетное напряжение по IV теории прочности определяем по формуле

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(5500 - 0)^2 + (5500 + 3500)^2 + (0 + 3500)^2} = 7860 \text{ кг/см}^2.$$

2.32. Если в стволе орудия $\sigma_t = 5500$ *кг/см²*, $\sigma_r = -3500$ *кг/см²*, а третье главное напряжение, действующее перпендикулярно к плоскости чертежа (вдоль ствола орудия),— растягивающее и равно 4200 *кг/см²*, то чему равно наибольшее касательное напряжение и по какой плоскости оно действует? Вычислить расчетное напряжение по III теории прочности.

Ответ: $\tau_{max} = 4500$ *кг/см²*; $\sigma_{r3} = 9000$ *кг/см²*.

2.33. Подсчитать расчетные напряжения по II, III и IV теориям прочности при следующих значениях главных напряжений ($\mu = 0{,}3$):

а) $\sigma_1 = 1200$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 1000$ *кг/см²*, $\sigma_3 = 800$ *кг/см²*;
б) $\sigma_1 = 1200$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 1000$ *кг/см²*, $\sigma_2 = -800$ *кг/см²*;
в) $\sigma_1 = 1200$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -1000$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 800$ *кг/см²*;
г) $\sigma_1 = 1200$ *кг/см²*, $\sigma_3 = -1000$ *кг/см²*, $\sigma_2 = -800$ *кг/см²*;
д) $\sigma_3 = -1200$ *кг/см²*; $\sigma_1 = 1000$ *кг/см²*, $\sigma_2 = 800$ *кг/см²*;
е) $\sigma_2 = -1200$ *кг/см²*, $\sigma_1 = 1000$ *кг/см²*, $\sigma_2 = -800$ *кг/см²*;
ж) $\sigma_3 = -1200$ *кг/см²*, $\sigma_2 = -1000$ *кг/см²*, $\sigma_1 = 800$ *кг/см²*;
з) $\sigma_2 = -1200$ *кг/см²*, $\sigma_2 = -1000$ *кг/см²*, $\sigma_1 = -800$ *кг/см²*.

Ответ:

а) $\sigma_{r^2} = 660$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 400$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 346$ *кг/см²*;
б) $\sigma_{r^2} = 1460$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 2000$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 1910$ *кг/см²*;
в) $\sigma_{r^2} = 1600$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 2200$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 2030$ *кг/см²*;
г) $\sigma_{r^2} = 1740$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 2200$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 2110$ *кг/см²*;
д) $\sigma_{r^2} = 1740$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 2200$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 2110$ *кг/см²*;
е) $\sigma_{r^2} = 1600$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 2200$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 2030$ *кг/см²*;
ж) $\sigma_{r^2} = 1460$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 2000$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 1910$ *кг/см²*;
з) $\sigma_{r^2} = 660$ *кг/см²*, $\sigma_{r^3} = 400$ *кг/см²*, $\sigma_{r^4} = 346$ *кг/см²*.

§ 7. Расчет тонкостенных сосудов

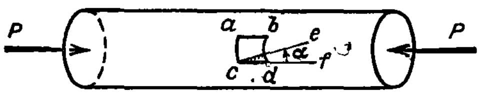
2.34. Цилиндрический котел диаметром $D=2$ *м* с толщиной стенок $t=10$ *мм* находится под рабочим давлением $q=10$ *ат*. Допускаемое напряжение материала стенок котла равно $[\sigma]=900$ *кг/см²*. Проверить прочность стенок котла, основываясь на IV теории прочности.

Ответ: 866 *кг/см²* $<$ 900 *кг/см²*.

2.35. Цилиндрический котел диаметром 1,8 *м* имеет толщину листов 20 *мм*. Он подвержен рабочему давлению 14 *ат*. Определить наибольшее касательное напряжение в стенке котла. В каких сечениях оно имеет место? Вычислить расчетное напряжение по II теории прочности, если материал стенок котла — сталь.

Ответ: $\tau_{max}=315$ *кг/см²*; $\sigma_{r^2}=535$ *кг/см²*.

2.36. Из стенки стального цилиндрического резервуара (см. рисунок) вырезан прямоугольный элемент *abcd*, одна сторона которого параллельна образующей цилиндра. Диаметр цилиндра $D=100$ *см*,



К задаче 2.36.

толщина стенок $t=10$ *мм*; внутреннее давление $q=20$ *ат*; цилиндр сжат через днища продольными силами $P=50$ *т*.

Определить нормальное и касательное напряжения по сечению *ce*, перпендикулярному к плоскости элемента и составляющему угол 30° с направлением образующей цилиндра *cf*. Вычислить расчетные напряжения по II, III и IV теориям прочности.

Решение. Для получения ответа надо найти главные напряжения. Они будут действовать по площадкам, параллельным и перпендикулярным к образующим цилиндра. По первой площадке нормальное напряжение σ_x равно

$$\sigma_x=+\frac{qD}{2t}=+\frac{20\cdot 100}{2\cdot 1}=+1000 \text{ кг/см}^2;$$

по второй площадке

$$\sigma_y=+\frac{qD}{4t}-\frac{P}{\pi Dt}=+\frac{20\cdot 100}{4\cdot 1}-\frac{50\,000}{\pi\cdot 100\cdot 1}=+500-159=+341 \text{ кг/см}^2.$$

Главные напряжения, таким образом, равны

$$\sigma_1=+1000 \text{ кг/см}^2,\quad \sigma_2=+341 \text{ кг/см}^2,\quad \sigma_2=0.$$

Нормальное и касательное напряжения по наклонной площадке соответственно равны

$$\sigma_\alpha=\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\sin^2\alpha,\qquad \tau_\alpha=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha,$$

где α — угол между нормалью к площадке и направлением наибольшего главного напряжения σ_1. В рассматриваемом случае σ_1 направлено перпендикулярно к образующей цилиндра; угол между наклонной площадкой и образующей равен 30°; следовательно, угол α между нормалью к площадке и направлением σ_1 равен 60°. Тогда

$$\sigma_\alpha = 1000 \cos^2 60° + 341 \sin^2 60° = 506 \; кг/см^2,$$
$$\tau_\alpha = \frac{1000-341}{2} \sin 120° = 285 \; кг/см^2.$$

Формулы для вычисления расчетных напряжений имеют вид:
По II теории прочности $\sigma_r = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$,
» III » » $\sigma_r = [\sigma_1 - \sigma_3]$,
» IV » » $\sigma_r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}$.

В нашем случае
II $\sigma_r = 1000 - 0{,}3 \cdot 341 = 898 \; кг/см^2$,
III $\sigma_r = 1000 - 0 = 1000 \; кг/см^2$,
IV $\sigma_r = \sqrt{1000^2 + 341^2 - 1000 \cdot 341} = 881 \; кг/см^2$.

2.37. Из стенки цилиндрического котла диаметром 1,5 *м* при рабочем давлении 14 *ат* вырезан прямоугольный элемент, одна из сторон которого параллельна образующей цилиндра. Толщина стенок котла 12 *мм*. Найти нормальное и касательное напряжения по сечению, перпендикулярному к плоскости элемента и наклоненному под углом 45° к образующей. Вычислить расчетное напряжение по IV теории прочности.

Ответ: $\sigma_\alpha = 656 \; кг/см^2$; $\tau_\alpha = 219 \; кг/см^2$; $\sigma_{r4} = 758 \; кг/см^2$.

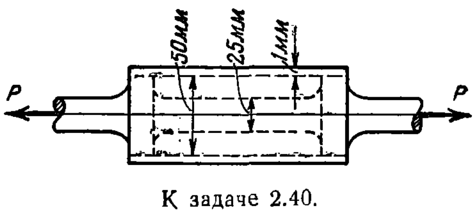
2.38. Определить необходимую толщину стенок чугунной водопроводной трубы диаметром 100 *см* при высоте напора 120 *м*. Допускаемое напряжение на растяжение чугуна принять равным 200 $кг/см^2$.

Ответ: 30 *мм*.

2.39. Стальная водопроводная труба диаметром 60 *см* работает при высоте напора 120 *м*. Какую толщину необходимо дать стенкам трубы, если допускаемое напряжение принять равным 800 $кг/см^2$ и если учитывать возможное уменьшение толщины стенок на 2,5 *мм* из-за ржавления?

Ответ: 7 *мм*.

2.40. Изображенная на рисунке стальная трубка приварена к уширенным частям стального же стержня. Трубка подвержена внутреннему давлению, вызывающему в ней (вдали от концов трубки) растягивающее напряжение, перпендикулярное к образующей, равное 1400 $кг/см^2$. Одновременно с этим стержень растянут осевой силой $P = 4$ *т*. Стержень и трубка удлиняются на одинаковую величину. Определить продольные растягивающие напряжения в средней части стержня и в трубке. Принять $\mu = 0{,}25$.



К задаче 2.40.

Ответ: $\sigma_{ст} = 655 \; кг/см^2$; $\sigma_{тр} = 1005 \; кг/см^2$.

2.41. Какое внутреннее давление можно допустить в сосуде, состоящем из полого медного цилиндра (внешний диаметр 50 *см*, толщина стенок 0,4 *см*) и плотно охватывающего его по всей длине стального цилиндра с толщиной стенок 0,2 *см*, если наибольшее допускаемое напряжение для меди равно 400 *кг/см*² и для стали 1600 *кг/см*²? При расчете пренебречь напряжениями, параллельными образующей.

Решение. Относительные деформации диаметров, а следовательно, и периметров обоих цилиндров будут одинаковы. В таком случае отношение напряжений в них будет таким же, как и отношение модулей:

$$\frac{\sigma_с}{\sigma_м}=\frac{E_с}{E_м}=2.$$

При определении наибольшего допустимого давления придется ориентироваться на медный цилиндр, так как, если бы мы определили давление, при котором в стальном цилиндре напряжение равняется допускаемым 1600 *кг/см*², то в медном цилиндре напряжения достигли бы 800 *кг/см*², что недопустимо, так как больше 400 *кг/см*².

Разрежем оба цилиндра вдоль оси пополам и составим условие равновесия для одной половины, положив $\sigma_с=2\sigma_м$:

$$2\sigma_м t_м l+2\cdot 2\sigma_м t_с l-qdl=0,$$

откуда

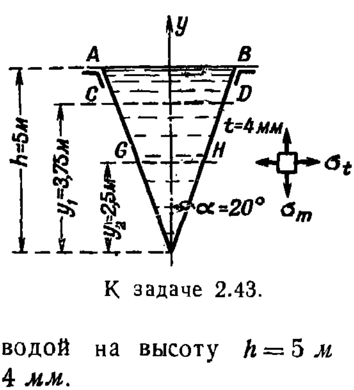
$$q=\frac{2\sigma_м\,(t_м+2t_с)}{d}.$$

Положим $\sigma_м=[\sigma_м]$; тогда

$$q=\frac{2\,[\sigma_м]\,(t_м+2t_с)}{d}=\frac{2\cdot 400\,(0{,}4+2\cdot 0{,}2)}{50}=12{,}8\ кг/см^2\approx 13\ ат.$$

2.42. Определить напряжение в стенке стального цилиндра, вставленного в алюминиевую рубашку. Внутренний диаметр цилиндра $d_1=160$ *мм*, толщина стенок $t_1=3$ *мм*; толщина алюминиевой оболочки $t_2=6{,}5$ *мм*. Давление газов в цилиндре $q=33$ *кг/см*². При расчете вырезать из цилиндра кольцо шириной, равной единице, и полагать, что по кольцевому сечению напряжения отсутствуют.

Ответ: 500 *кг/см*².



К задаче 2.43.

2.43. Определить наибольшую величину нормального напряжения в коническом резервуаре (с углом при вершине $2\alpha=40°$), подвешенном по окружности сечения AB и наполненном водой на высоту $h=5$ *м* (см. рисунок). Толщина стенок равна 4 *мм*.

Решение. В стенке наполненного жидкостью резервуара возникают растягивающие напряжения: σ_m (в меридиональном направлении по образующей) и σ_t (в тангенциальном направлении). Для вычисления этих напряжений имеем формулы

$$\sigma_m=\frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha}\left(h-\frac{2}{3}y\right)y \quad \text{и} \quad \sigma_t=\frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{t\cos\alpha}(h-y)\,y,$$

где γ — объемный вес жидкости, а y — расстояние по оси конуса от его вершины до площадки, где определяются напряжения. Напряжения σ_m и σ_t меняются в зависимости от расстояний y по параболическому закону. Определим положение площадок с наибольшими значениями этих напряжений. Для этого приравняем нулю производные выражений для σ_m и σ_t по y; имеем

$$\frac{d\sigma_m}{dy}=\frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha}\left(h-\frac{4}{3}y\right)=0,$$

откуда

$$y_1=\frac{3}{4}h=\frac{3}{4}5=3{,}75 \text{ м}$$

(на уровне CD) и

$$\frac{d\sigma_t}{dy}=\frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{t\cos\alpha}(h-2y)=0,$$

откуда

$$y_2=\frac{h}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5 \text{ м}$$

(на уровне GH).

Подставляя значения y_1 и y_2 и данные задачи в выражения для σ_m и σ_t, находим

$$\max\sigma_m=\frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha}\left(h-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}h\right)\frac{3}{4}h=\frac{3\gamma h^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{16t\cos\alpha}=$$
$$=\frac{3\cdot 0{,}001\cdot 500^2\cdot 0{,}364}{16\cdot 0{,}4\cdot 0{,}940}=45{,}4 \text{ кг/см}^2$$

и

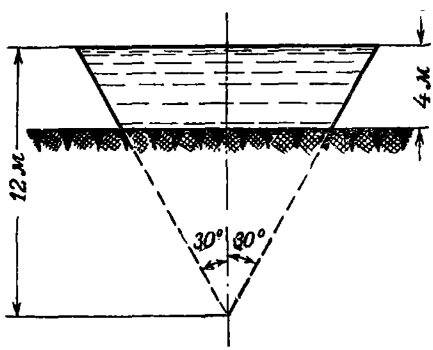
$$\max\sigma_t=\frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{t\cos\alpha}\left(h-\frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}=\frac{\gamma h^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4t\cos\alpha}=\frac{0{,}001\cdot 500^2\cdot 0{,}364}{4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}940}=60{,}5 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее нормальное напряжение $\sigma_{max}=\max\sigma_t=60{,}5$ кг/см².

2.44. Резервуар в виде усеченного конуса (см. рисунок) опирается на меньшее основание; он наполнен жидкостью с объемным весом 0,9 т/м³. Толщина стенки резервуара 8 мм.

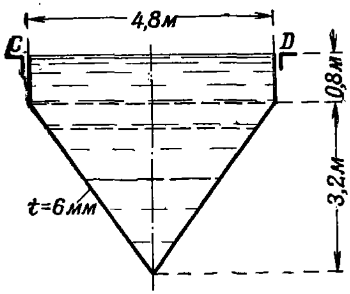
Определить наибольшие нормальные напряжения в меридиональном и тангенциальном направлениях.

Ответ: $\sigma_m=70$ кг/см² (сжатие); $\sigma_t=240$ кг/см².



К задаче 2.44.

2.45. Резервуар составлен из двух частей (см. рисунок): верхней — цилиндрической, имеющей диаметр 4,8 м и высоту 80 см, и нижней — конической, имеющей высоту 3,2 *м* и толщину стенки 6 *мм*. Резервуар подвешен по окружности сечения CD и наполнен бензином с объемным весом 0,72 *т/м*³.



К задаче 2.45.

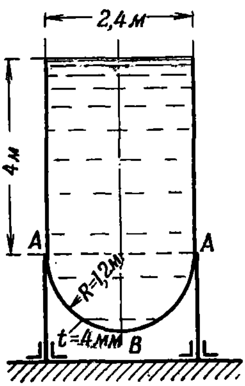
Определить в стенке конической части резервуара наибольшие нормальные напряжения в меридиональном и тангенциальном направлениях.

Ответ: $\max \sigma_m = 33,8$ *кг/см*²;
$\max \sigma_t = 45$ *кг/см*².

2.46. Стальной сферический сосуд, имеющий диаметр 60 *см*, подвергается внутреннему равномерно распределенному давлению 24 *ат*. Определить необходимую толщину стенки сосуда при допускаемом напряжении 1200 *кг/см*².

Ответ: 3 *мм*.

2.47. Цилиндрический резервуар диаметром 2,4 *м* с днищем в виде полусферы наполнен водой на высоту 4 *м* (см. рисунок). Толщина стенок цилиндрической части и днища резервуара равна 4 *мм*.



К задаче 2.47.

Определить наибольшие нормальные напряжения в стенке цилиндрической части и в днище резервуара.

Ответ: $\max \sigma_{цил} = 96$ *кг/см*²; $\max \sigma_{дн} = 62,4$ *кг/см*².

§ 8. Расчет толстостенных сосудов

2.48. Длинная бетонная труба, имеющая внутренний диаметр 1 *м*, заложена на глубине $H = 35$ *м* от поверхности воды.

Считая давление воды равномерно распределенным по поверхности трубы, определить необходимую толщину ее стенок, исходя из условия прочности по теории наибольших напряжений и по теории наибольших деформаций. Допускаемое напряжение для бетона на сжатие принять равным 15 *кг/см*²; коэффициент поперечной деформации $\mu = 0,16$.

Решение. Труба подвергается только наружному, равномерно распределенному по ее поверхности давлению $p_1 = \gamma H = 1,0 \cdot 35 = 35$ *т/м*² $= 3,5$ *кг/см*². Для вычисления нормальных напряжений в радиальном и тангенциальном направлениях имеем формулы

$$\sigma_r = -\frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) \text{ и } \sigma_t = -\frac{p_1 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right),$$

где r_1 — радиус наружной, а r_2 — радиус внутренней цилиндрической поверхности трубы; r — расстояние любой площадки в поперечном сечении трубы от ее оси.

Так как труба длинная, то для сечений, удаленных от ее концов, деформацию в направлении оси трубы (ε_z) следует считать равной нулю, т. е.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_t)] = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_t) = -2\mu p_1 \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} = \text{const}.$$

Напряжения σ_r, σ_t и σ_z по всей толщине трубы будут сжимающими, наибольшим из них по абсолютной величине будет тангенциальное напряжение σ_t. Максимальной величины это напряжение достигает у внутренней поверхности трубы; здесь при $r = r_2$

$$\sigma_t = -\frac{2p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2};$$

при этом $\sigma_r = 0$.

Условие прочности по теории наибольших нормальных напряжений имеет вид

$$|\sigma_3| = |\max \sigma_t| = \frac{2p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \leqslant [\sigma_{\text{сж}}],$$

откуда

$$r_1 \geqslant \frac{r_2}{\sqrt{1 - \frac{2p_1}{[\sigma_{\text{сж}}]}}}.$$

Подставляя данные задачи, находим

$$r_1 \geqslant \frac{50}{\sqrt{1 - \frac{2\cdot 3,5}{15}}} = 68,5 \textit{ см},$$

т. е. стенка трубы должна иметь толщину $\delta = r_1 - r_2 = 68,5 - 50 = 18,5$ *см*.

Условие прочности по теории наибольших деформаций для материала у внутренней поверхности трубы имеет вид

$$|\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| = |\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)| = |\sigma_t - \mu\sigma_z| =$$

$$= \frac{2p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} - 2\mu^2 \frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{2(1-\mu^2) p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \leqslant [\sigma_{\text{сж}}],$$

откуда

$$r_1 \geqslant \frac{r_2}{\sqrt{1 - \frac{2p_1}{[\sigma_{\text{сж}}]}(1-\mu^2)}} = \frac{50}{\sqrt{1 - \frac{2\cdot 3,5}{15}(1 - 0,16^2)}} = 68 \textit{ см},$$

т. е. стенка трубы должна иметь толщину 18 *см*.

2.49. Длинная стальная труба, имеющая внутренний диаметр 4 *см* и толщину стенок 5 *мм*, подвергается внутреннему равномерно распределенному давлению 90 *кг/см*^{2}.

Считая деформацию в направлении оси трубы равной нулю, определить наибольшее расчетное напряжение в материале трубы на основе энергетической теории прочности.

Ответ: 438 *кг/см²*.

2.50. Полый стальной цилиндр с днищами, имеющими внутренний диаметр 150 *мм* и толщину стенки 25 *мм*, подвергается действию внутреннего равномерно распределенного давления 400 *ат*.

Считая нормальные напряжения в направлении оси цилиндра равномерно распределенными по его поперечному сечению, определить величину наибольшего расчетного напряжения в стенке цилиндра на основе: а) теории наибольших касательных напряжений и б) энергетической теории.

Ответ: а) 1830 *кг/см²*; б) 1585 *кг/см²*.

2.51. Длинный полый стальной цилиндр, имеющий наружный диаметр 200 *мм*, подвергается действию внутреннего равномерно распределенного давления 350 *ат*. Полагая деформацию в направлении оси цилиндра равной нулю и исходя из условия прочности 1) по теории наибольших касательных напряжений и 2) по энергетической теории, определить необходимую толщину стенки цилиндра при допускаемом напряжении $[\sigma] = 2000$ *кг/см²*.

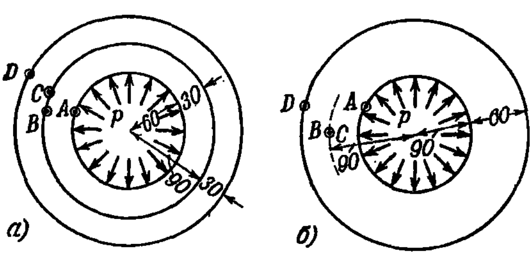
Ответ: 1) 19,4 *мм*; 2) 16,8 *мм*.

2.52. На сплошной стальной вал диаметром 160 *мм* в горячем состоянии надета длинная стальная муфта, имеющая наружный диаметр 240 *мм*; внутренний диаметр муфты сделан на 0,2 *мм* меньше диаметра вала.

Определить наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения в материале муфты и вала.

Ответ: В муфте $\max \sigma_{\text{раст}} = 1805$ *кг/см²*; $\max \sigma_{\text{сж}} = 695$ *кг/см²*. В вале $\max \sigma_{\text{сж}} = 695$ *кг/см²* $= \text{const}$.

2.53. Составной цилиндр изготовлен из двух стальных труб: первой — с внутренним диаметром 120 *мм* и толщиной стенки 30 *мм* и второй — с наружным диаметром 240 *мм* (см. рисунок *а*)). Вторая труба нагрета и надета на первую. До насаживания внутренний диаметр второй трубы был на 0,135 *мм* меньше наружного диаметра первой трубы. Составной цилиндр подвергается внутреннему равномерно распределенному давлению p. Используя теорию наибольших касательных напряжений, определить максимальную допускаемую величину давления p при допускаемом напряжении для материала труб, равном 3000 *кг/см²*.



К задаче 2.53.

Сравнить наибольшие допускаемые величины давления p для составного цилиндра и для полого цилиндра из той же стали, имеющего внутренний диаметр 120 *мм* и толщину стенки 60 *мм* (см. рисунок *б*)). Для обоих цилиндров при наибольшем значении давления p построить графики распределения нормальных напряжений по толщине стенок.

Ответ:

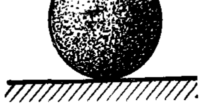
Цилиндры	$[p]$ $кг/см^2$	Значения напряжений ($кг/см^2$) в точках: напряжения σ_r и σ_t	A	B (внутр. труба)	C (наружн. труба)	D
Составной	1453	σ_r σ_t	−1453 +1547	−620 +713	−620 +2213	0 +1594
Сплошной	1125	σ_r σ_t	−1125 +1875	−292 +1042		0 +750

2.54. Полый стальной сферический сосуд с внутренним диаметром 50 *см* предназначен для хранения газа, сжатого под давлением 800 *ат*.

Исходя из условия прочности по энергетической теории, определить необходимую толщину стенок сосуда при допускаемом напряжении 2500 $кг/см^2$. Какую толщину должны были бы иметь стенки закрытого цилиндрического сосуда, изготовленного из той же стали и имеющего тот же внутренний диаметр?

Ответ: 61 *мм*, 125 *мм*.

§ 9. Контактные напряжения



К задаче 2.55.

2.55. Определить величину наибольшего контактного напряжения для начального момента вдавливания шарика на прессе Бринеля в испытуемую плоскую деталь (см. рисунок). Диаметр шарика равен 10 *мм*, сила P, вдавливающая шарик, равна 1 *кг*. Шарик и деталь — стальные.

Решение. Для данной схемы касания формула для наибольшего напряжения приведена в курсе проф. Н. М. Беляева «Сопротивление материалов» в таблице 11. Она имеет вид

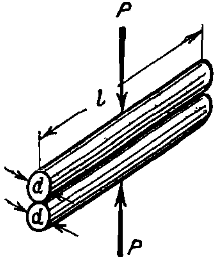
$$\sigma_{\max}=0{,}388\sqrt[3]{PE^2\frac{1}{R^2}}.$$

В нашем случае $P=1$ *кг*, $E=2\cdot10^4$ $кг/мм^2$, $R=5$ *мм*, следовательно,

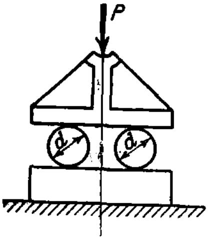
$$\sigma_{\max}=0{,}388\sqrt[3]{\frac{(2\cdot10^4)^2}{5^2}}=98\ кг/мм^2.$$

Мы видим, что уже в начальный момент в испытуемой детали возникают очень большие напряжения. С возрастанием нагрузки они переходят предел текучести и образуется пластическая деформация (отпечаток).

2.56. Передача силы $P = 10$ *т* (равнодействующая равномерного давления) осуществляется через два соприкасающихся стальных цилиндра одинакового диаметра d и длины $l = 200$ *мм* (см. рисунок). Определить диаметр цилиндров d, если наибольшее напряжение по поверхности соприкасания не должно превосходить 100 *кг*/*мм*^{2}.



К задаче 2.56.



К задаче 2.57.

Ответ: 70 *мм*.

2.57. Шарнирно-подвижная опора мостовой фермы имеет два стальных цилиндрических катка диаметром $d = 100$ *мм* и длиной $l = 300$ *мм*. Давление, приходящееся на эти катки и поровну между ними распределяющееся, равно $P = 100$ *т* (см. рисунок). Определить наибольшее главное сжимающее напряжение у поверхности опирания катков.

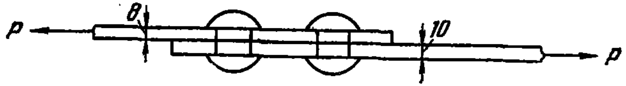
Ответ: $-107{,}5$ *кг*/*мм*^{2}.

ГЛАВА 3

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

§ 10. Сдвиг (срез, скалывание)

3.1. Определить необходимое количество заклепок диаметром 20 *мм* для соединения внахлестку двух листов толщиной 8 *мм* и 10 *мм* (см. рисунок). Сила P, растягивающая соединение, равна



К задаче 3.1.

20 *т*. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau]=1400$ *кг/см²*, на смятие $[\sigma_c]=3200$ *кг/см²*.

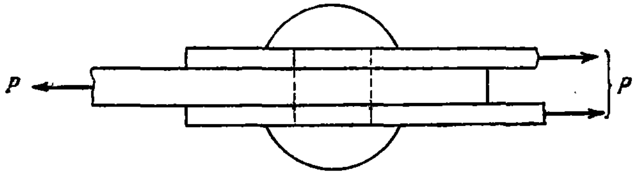
Решение. Из уравнения прочности на срез необходимое число заклепок

$$n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}[\tau]}=\frac{20\,000}{\pi\cdot\frac{2^2}{4}1400}=4{,}53\approx 5.$$

Из уравнения прочности на смятие необходимое число заклепок

$$n \geqslant \frac{P}{td\,[\sigma_c]}=\frac{20\,000}{0{,}8\cdot 2\cdot 3200}=3{,}9\approx 4.$$

Следует поставить пять заклепок.



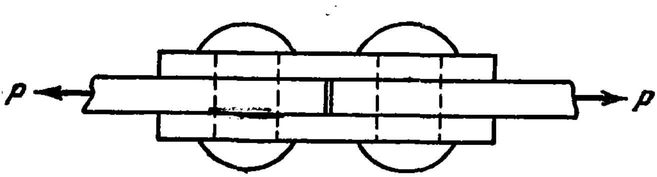
К задаче 3.2.

3.2. Определить необходимое число заклепок диаметром 20 *мм* для присоединения двух листов толщиной по 5 *мм* к третьему листу толщиной 12 *мм* (см. рисунок). Сила P, растягивающая соединение, равна 18 *т*.

Допускаемые напряжения: $[\tau] = 1000$ *кг/см²*; $[\sigma_c] = 2800$ *кг/см²*.

Ответ: Четыре заклепки.

3.3. Определить необходимое количество заклепок диаметром 17 *мм* для соединения впритык двух листов при помощи двух накладок (см. рисунок). Растягивающая сила $P = 30$ *т*. Толщина листов

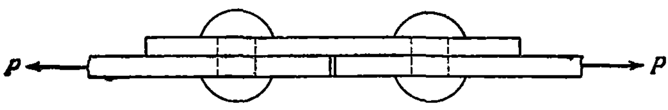


К задаче 3.3.

10 *мм*, толщина накладок по 6 *мм*. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau] = 1000$ *кг/см²*, на смятие $[\sigma_c] = 2800$ *кг/см²*.

Ответ: Семь заклепок с каждой стороны стыка.

3.4. Два листа соединены при помощи одной накладки, как показано на рисунке. Толщина листов и накладки по 10 *мм*. Определить необходимое количество заклепок диаметром 17 *мм*, если

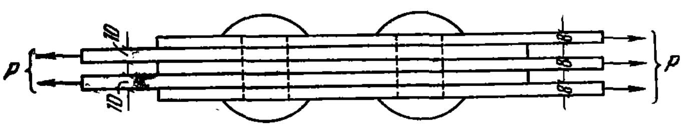


К задаче 3.4.

допускаемые напряжения: на срез $[\tau] = 1400$ *кг/см²*, на смятие $[\sigma_c] = 3200$ *кг/см²*. Сила P, растягивающая соединение, равна 24 *т*.

Ответ: Восемь заклепок с каждой стороны стыка.

3.5. Два листа толщиной по 10 *мм* соединены с тремя листами толщиной по 8 *мм* при помощи заклепок диаметром 20 *мм* по схеме,

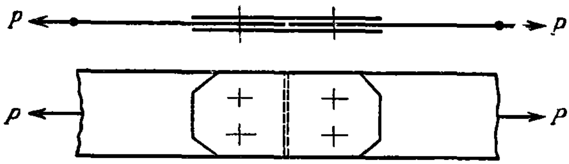


К задаче 3.5.

изображенной на рисунке. Соединение растягивается силой $P = 28$ *т*. Определить необходимое число заклепок, если допускаемые напряжения: $[\tau] = 1000$ *кг/см²*; $[\sigma_c] = 2800$ *кг/см²*.

Ответ: Три заклепки.

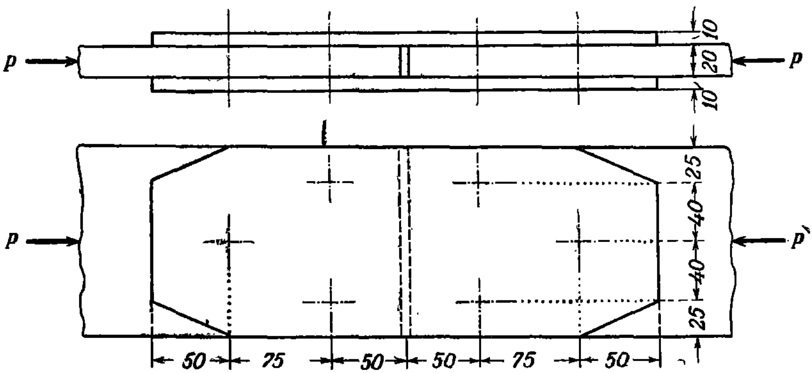
3.6. Лист с поперечным сечением 12×150 *мм*^{2} имеет стык (см. рисунок), перекрытый двумя накладками толщиной 6 *мм*. В соединении применены заклепки диаметром 20 *мм*. Растягивающее усилие $P=12$ *т*. Определить напряжения в заклепках на срез и на смятие, а также напряжения на разрыв в опасных сечениях листа и накладки.



К задаче 3.6.

Ответ: В *кг/см*^{2}: 955; 2500; 909; 909.

3.7. В стыке двух листов применены заклепки диаметром 26 *мм*. Соединение выполнено, как показано на рисунке. Допускаемые

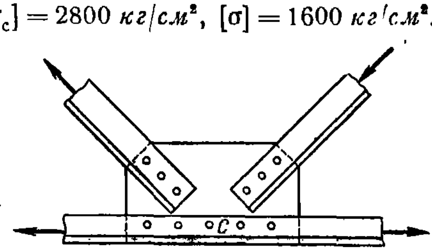


К задаче 3.7.

напряжения: $[\tau]=1000$ *кг/см*^{2}, $[\sigma_c]=2800$ *кг/см*^{2}, $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}. Определить наибольшее растягивающее усилие, допускаемое для этого стыка.

Ответ: 25 *т*.

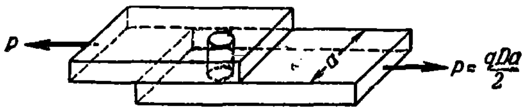
3.8. Раскосы фермы (см. рисунок) испытывают усилия по 5,25 *т*. Каждый из них в узле C прикреплен к фасонке толщиной 10 *мм* при помощи трех заклепок. Сечение раскосов — уголковое $75\times75\times8$. Диаметр заклепок 20 *мм*. Определить касательные и смннающие напряжения в заклепках.



К задаче 3.8.

Ответ: $\tau=557$ *кг/см*^{2}; $\sigma_c=1093$ *кг/см*^{2}.

3.9. Цилиндрический котел диаметром 150 *см* испытывает внутреннее давление 4 *ат*. Продольный шов осуществлен внахлестку с одним рядом заклепок. Толщина листов 10 *мм*, диаметр заклепок



К задаче 3.9.

20 *мм*, шаг заклепок 75 *мм*. Определить касательные, сминающие и растягивающие напряжения в стыке. Определить также предельное допускаемое давление в котле, если допускаемые напряжения: $[\sigma]=1000$ *кг/см²*, $[\tau]=720$ *кг/см²*, $[\sigma_c]=1600$ *кг/см²*.

Решение. Вырезаем из котла элемент шириной, равной шагу заклепок a. Расчетная схема имеет вид, представленный рисунком. Напряжения определятся так:

$$\sigma=\frac{qDa}{2(a-d)t}=\frac{4\cdot150\cdot7{,}5}{2(7{,}5-2)1}=408 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau=\frac{qDa}{2\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{4\cdot150\cdot7{,}5}{2\cdot3{,}14}=717 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_c=\frac{qDa}{2td}=\frac{4\cdot150\cdot7{,}5}{2\cdot1\cdot2}=1125 \text{ кг/см}^2.$$

Ближе к допускаемым напряжениям оказались расчетные напряжения на срез. Они и определяют допускаемое давление q. Так как τ прямо пропорционально q, то допускаемое $q=4\cdot\frac{720}{717}=4{,}02$ *ат*.

3.10. Котел диаметром 160 *см* подвергнут внутреннему давлению 10 *ат*. Продольный шов осуществлен внахлестку с двумя рядами заклепок. Толщина листов $t=10$ *мм*; диаметр заклепок $d=20$ *мм*; шаг заклепок $a=100$ *мм* (расстояние между заклепками одного ряда). Определить касательное, сминающее и растягивающее напряжения в стыке. Определить предельное допускаемое давление в котле при следующих допускаемых напряжениях: $[\tau]=700$ *кг/см²*, $[\sigma_c]=1600$ *кг/см²* и $[\sigma]=1000$ *кг/см²*.

Ответ: 1) $\tau=1273$ *кг/см²*, $\sigma_c=2000$ *кг/см²*, $\sigma=1000$ *кг/см²*;
2) $q=5{,}5$ *ат*.

3.11. Выяснить, какой диаметр должны иметь заклепки котла задачи 3.10 при том же шаге $a=100$ *мм*, чтобы, обеспечивая прочность заклепок и листа, одновременно довести σ и τ до $[\sigma]$ и $[\tau]$. Какое при этом можно допустить внутреннее давление в котле?

Ответ: $d=2{,}6$ *см*, $q=9{,}25$ *ат*.

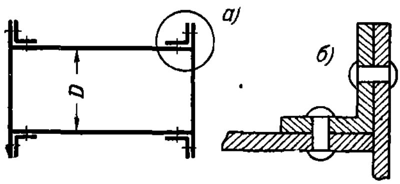
3.12. Листы котла, имеющие толщину 20 *мм*, соединены впритык двумя накладками. С каждой стороны стыка имеется по два ряда заклепок, расположенных в шахматном порядке. Расстояние между рядами 75 *мм*, шаг заклепок в каждом ряду равен 90 *мм*. Диаметр заклепок 20 *мм*. Диаметр котла 150 *см*. Толщина накладок по 10 *мм*. Найти допускаемое внутреннее давление в котле, если допускаемые напряжения: $[\tau]=700$ *кг/см*², $[\sigma_c]=1600$ *кг/см*², $[\sigma]=1000$ *кг/см*².

Ответ: 13 *ат*.

3.13. Листы котла соединены впритык двумя накладками. С каждой стороны стыка расположено по два ряда заклепок. Толщина листов 20 *мм*. Толщина накладок по 10 *мм*. Диаметр котла 250 *см*. Диаметр заклепок 23 *мм*. Шаг заклепок 75 *мм*. Внутреннее давление в котле 12 *ат*. Определить растягивающие, сминающие и касательные напряжения в стыке.

Ответ: $\sigma=1080$ *кг/см*²; $\sigma_c=1223$ *кг/см*²; $\tau=676$ *кг/см*².

3.14. Крышки котла присоединены к стенкам заклепками при помощи уголков, как показано на рисунке. Диаметр котла 100 *см*;

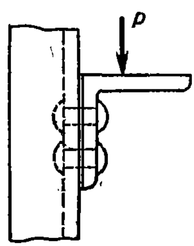


К задаче 3.14.

давление в котле равно 10 *ат*. Толщина стенок котла и полок уголка по 10 *мм*. Определить количество заклепок, необходимое для соединения стенки котла с уголком, если диаметр заклепок 20 *мм*. Допускаемые напряжения: на срез 700 *кг/см*², на смятие 1600 *кг/см*².

Ответ: 36.

3.15. Консоль выполнена из уголка $160\times160\times12$, приклепанного пятью заклепками диаметром 20 *мм* к стенке швеллера № 33, являющегося частью колонны (см. рисунок). Определить касательные и сминающие напряжения в заклепках; $P=12$ *т*.



К задаче 3.15.

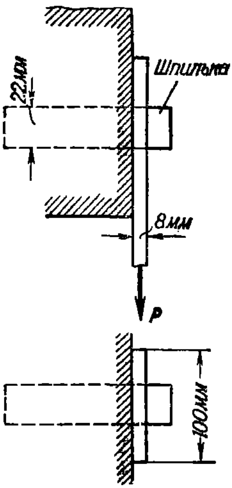
Ответ: $\tau=764$ *кг/см*²; $\sigma_c=1714$ *кг/см*².

3.16. Медный стержень диаметром 40 *мм* вставлен с очень малым зазором в стальную трубку с наружным диаметром 60 *мм*. На обоих концах стержень скреплен с трубкой жесткими шпильками диаметром 20 *мм*, проходящими через стержень и обе стенки трубки перпендикулярно к их оси. Определить касательные напряжения в шпильках, если температура всей конструкции повысилась на 40° С. При определении усилия деформацию шпильки не учитывать.

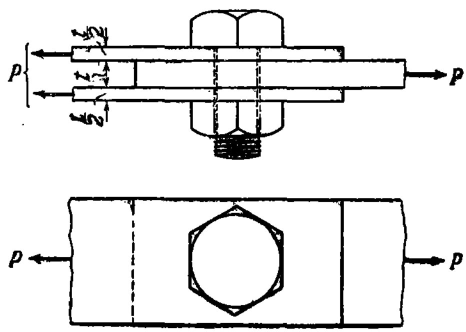
Ответ: 229 *кг/см*².

3.17. Шпилька диаметром 22 *мм* прикрепляет к стенке стальной лист сечением 100×8 *мм* (см. рисунок). Чему равны растягивающие напряжения в листе и сминающие и касательные напряжения в шпильке при $P = 4$ *т*?

Ответ: $\sigma = 642$ *кг/см²*; $\sigma_c = 2270$ *кг/см²*; $\tau = 1050$ *кг/см²*.



К задаче 3.17.



К задаче 3.18.

3.18. Определить диаметр болта в соединении, изображенном на рисунке. Растягивающая сила $P = 20$ *т*, толщина $t = 2$ *см*. Допускаемые напряжения для материала болта: на срез 800 *кг/см²*, на смятие 2000 *кг/см²*.

Ответ: 5 *см*.

3.19. Предел прочности на перерезывание для мягкой стали равен 3800 *кг/см²*. Определить усилие, необходимое для продавливания отверстия:

а) диаметром 20 *мм* в листе толщиной 16 *мм*;
б) диаметром 16 *мм* в листе толщиной 20 *мм*;
в) диаметром 20 *мм* в листе толщиной 20 *мм*;
г) диаметром 16 *мм* в листе толщиной 16 *мм*.

Найти соответствующие сминающие напряжения под концом пробойника.

Ответ: 38,2 *т*, 38,2 *т*, 47,8 *т*, 30,6 *т*; 12 200 *кг/см²*, 19 000 *кг/см²*, 15 200 *кг/см²*, 15 200 *кг/см²*.

3.20. Определить наибольшую толщину стального листа, в котором может быть продавлено отверстие диаметром 20 *мм*, если предел прочности стали на перерезывание равен 38 *кг/мм²*, а допускаемое напряжение на смятие закаленного конца стального пробойника равно 20 000 *кг/см²*.

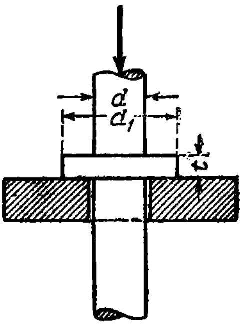
Ответ: 26,4 *мм*.

3.21. Определить наименьший диаметр d отверстия, которое может быть продавлено в листе данной толщины t, если сминающее напряжение в пробойнике выражено четырехкратной величиной предела прочности при перерезывании для материала листа.

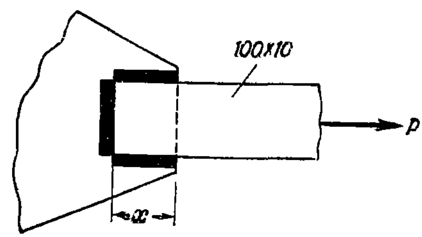
Ответ: $d = t$.

3.22. Сминающее напряжение под заплечиком болта, изображенного на рисунке, равно 400 *кг/см²*, а сжимающее напряжение в болте диаметром 10 *см* равно 1000 *кг/см²*. Чему равен диаметр d_1 заплечика? Определить касательное напряжение в заплечике, если толщина его $t = 5$ *см*.

Ответ: $d_1 = 18{,}7$ *см*; $\tau = 500$ *кг/см²*.



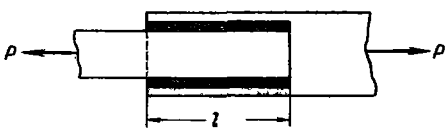
К задаче 3.22.



К задаче 3.23.

3.23. Определить минимальную длину x, необходимую для приварки листа в соединении, изображенном на рисунке, если растягивающее напряжение в листе равно 1400 *кг/см²*, а допускаемое напряженне на срез для сварки $[\tau_э] = 800$ *кг/см²*.

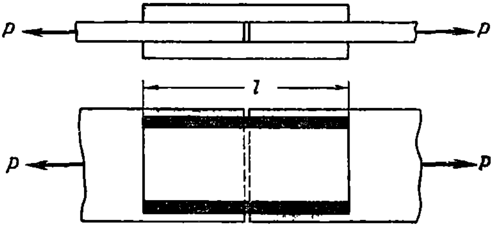
Ответ: 7,5 *см*.



К задаче 3.24.

3.24. Определить необходимую длину l фланговых швов для соединения внахлестку двух листов разной ширины (см. рнсунок). Усилие, испытываемое соединением, $P = 15$ *т*. Допускаемое напряжение на срез для сварки равно 1100 *кг/см²*. Толщина узкого листа 10 *мм*, а широкого 8 *мм*.

Ответ: $l \approx 10$ *см*.



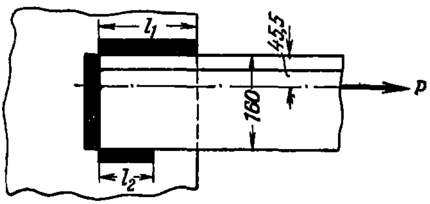
К задаче 3.25.

3.25. Определить необходнмую длину l накладок соединения, изображенного на рисунке, растянутого силой $P = 30$ *т*. Толщина накладок по 5 *мм*. Допускаемое напряжение для сварки на срез равно 1100 *кг/см*^{2}.

Ответ: $l = 40$ *см*.

3.26. Два листа размерами 250×10 *мм* при помощи двух накладок (сечением 200×6 *мм*^{2} каждая) соединены впритык фланговыми швами длиной $l = 40$ *см* (см. рисунок к задаче 3.25). Какое растягивающее усилие может выдержать это соединение, если допускаемое напряжение для листа и накладок равно 1600 *кг/см*^{2}, а допускаемое напряжение для сварки на срез 1100 *кг/см*^{2}?

Ответ: 38,4 *т*.



К задаче 3.27.

3.27. Растягивающее усилие 40 *т* приложено центрально к уголку $160 \times 160 \times 16$ *мм*. Уголок приварен к листу, как показано на рисунке. Для уменьшения длин l_1 и l_2 приварен и торец уголка. Требуется определить размеры l_1 и l_2. Допускаемое напряжение для сварки на срез 800 *кг/см*^{2}.

Решение. Из условия прочности на срез определим полную длину шва

$$l = \frac{P}{0{,}7t\,[\tau_э]} = \frac{40\,000}{0{,}7 \cdot 1{,}6 \cdot 800} = 44{,}7 \text{ см}.$$

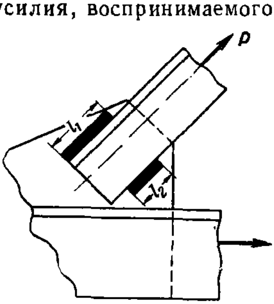
Длина торцевого шва $l_т = 20$ *см*. Остальная длина приходится на фланговые швы $l_ф = 24{,}7$ *см*.

Фланговые швы l_1 и l_2 следует выбрать так, чтобы равнодействующая усилия, воспринимаемого всем швом, была в одной плоскости с осью уголка, расположенной на расстоянии 4,55 *см* от его обушка. Из этого условия вытекают уравнения:

$$4{,}55 l_1 + \frac{4{,}55^2}{2} = \frac{11{,}73^2}{2} + 11{,}73 l_2;$$

$$l_1 + l_2 = 24{,}7.$$

Решая их совместно, определим $l_2 = 6{,}6$ *см* и $l_1 = 18{,}1$ *см*.



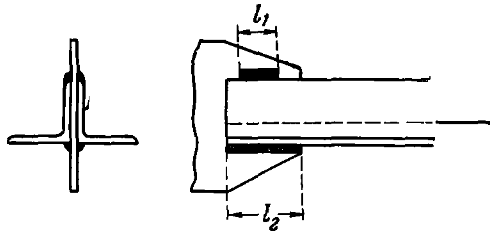
К задаче 3.28.

3.28. Стержень, состоящий из одного уголка размерами $80 \times 80 \times 8$, прикреплен к фасонке узла фланговыми швами, как показано на рисунке. Он испытывает растягивающее усилие $P = 6{,}2$ *т*. Определить необходимую длину швов с каждой стороны уголка, если $[\tau_э] = 800$ *кг/см*^{2}.

Ответ: $l_2 = 3{,}92$ *см*; $l_1 = 9{,}88$ *см*.

3.29. Растянутый стержень состоит из двух уголков размерами $100 \times 100 \times 10$. Они приварены к фасонному листу фланговыми швами, как показано на рисунке. Определить размеры швов l_1 и l_2, если допускаемое напряжение на растяжение в уголках 1600 *кг/см²*, а допускаемое напряжение для сварки на срез 1100 *кг/см²*. Толщина швов равна толщине полок уголков.

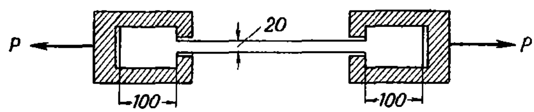
Ответ: $l_1 = 11{,}3$ *см*; $l_2 = 28{,}6$ *см*.



К задаче 3.29.

3.30. Какое разрывающее усилие необходимо приложить к плоскому деревянному образцу сечением 2×4 *см²* (см. рисунок), если предел прочности на растяжение для дерева равен 560 *кг/см²*? Чему при этом равно скалывающее напряжение в головках этого образца?

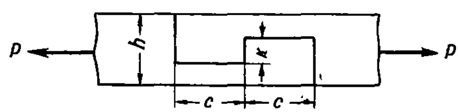
Ответ: 4480 *кг*; 56 *кг/см²*.



К задаче 3.30.

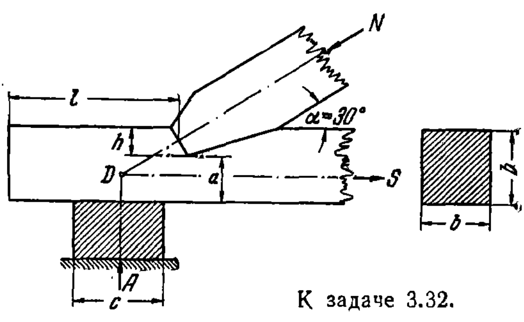
3.31. Определить необходимые размеры врубки «прямым зубом», изображенной на рисунке. Растягивающая сила $P = 4$ *т*. Сечение брусьев — квадратное. Допускаемые напряжения: на растяжение $[\sigma] = 100$ *кг/см²*, на смятие $[\sigma_c] = 80$ *кг/см²*, на скалывание $[\tau] = 10$ *кг/см²*.

Ответ: $h = 11{,}4$ *см*; $k = 4{,}4$ *см*; $c = 35{,}1$ *см*.



К задаче 3.31.

3.32. Определить необходимую глубину врубки h, длину конца затяжки l, ширину опорного бруса c и проверить достаточность высоты a в месте ослабления для опорного узла стропильной фермы, представленного на рисунке. Сжимающее усилие N в стропильной ноге равно 7 *т*.



К задаче 3.32.

Ширина брусьев $b = 20$ *см*. Допускаемые напряжения на растяжение: $[\sigma] = 100$ *кг/см*², на смятие поперек волокон $[\sigma_c]_{90} = 25$ *кг/см*², на смятие под углом 30° к направлению волокон $[\sigma_c]_{30} = 50$ *кг/см*², на скалывание вдоль волокон $[\tau] = 12$ *кг/см*².

Решение. Усилия N (в стропильной ноге), S (в затяжке) и реакция опоры A сходятся в точке D и находятся в равновесии. Исходя из этого, $S = N\cos\alpha$, $A = N\sin\alpha$. Необходимые размеры определятся из условий прочности:

а) на смятие затяжки силой N

$$\frac{N}{b\dfrac{h}{\cos\alpha}} \leqslant [\sigma_c]_\alpha; \quad h \geqslant \frac{N\cos\alpha}{b\,[\sigma_c]_\alpha} = \frac{7000\cdot 0,87}{20\cdot 50} = 6,1 \text{ см};$$

б) на скалывание конца затяжки силой S

$$\frac{S}{bl} \leqslant [\tau]; \quad l \geqslant \frac{S}{b\,[\tau]} = \frac{N\cos\alpha}{b\,[\tau]} = \frac{7000\cdot 0,87}{20\cdot 12} = 25,2 \text{ см};$$

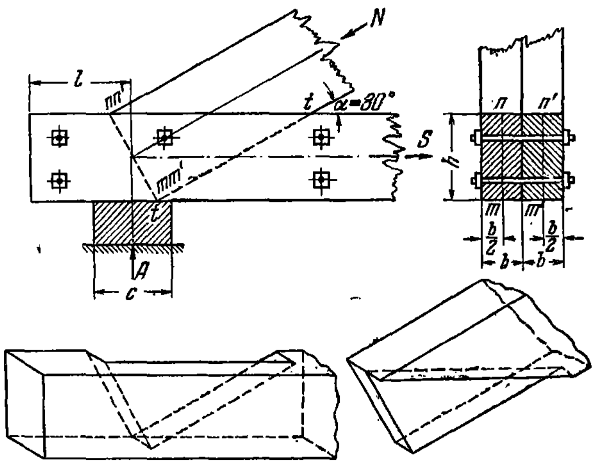
в) на смятие затяжки силой A

$$\frac{A}{bc} \leqslant [\sigma_c]_{90}; \quad c \geqslant \frac{A}{b\,[\sigma_c]_{90}} = \frac{N\sin\alpha}{b\,[\sigma_c]_{90}} = \frac{7000\cdot 0,5}{20\cdot 25} = 7 \text{ см};$$

г) на растяжение затяжки силой S

$$\frac{S}{ba} \leqslant [\sigma]; \quad a \geqslant \frac{S}{b\,[\sigma]} = \frac{N\cos\alpha}{b\,[\sigma]} = \frac{7000\cdot 0,87}{20\cdot 100} = 3,04 \text{ см}.$$

Конструктивно этот размер значительно больше, а именно: $a = b - h = 20 - 6,1 = 13,9$ *см*.



К задаче 3.33.

3.33. Опорный узел фермы выполнен на щековых врубках, как показано на рисунке. Сжимающее усилие в стропильной ноге $N = 5$ *т*.

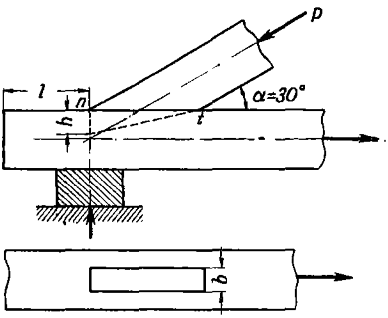
Проверить прочность врубки на площадке $nn'm'm$, а также определить необходимую длину конца затяжки l и ширину опорного бруса c.

Ширина досок $b = 6$ *см*; их высота $h = 20$ *см*. Допускаемые напряжения: на смятие поперек волокон $[\sigma_c]_{90} = 25$ *кг/см*², на смятие под углом 30° к направлению волокон $[\sigma_c]_{30} = 45$ *кг/см*², на скалывание вдоль волокон $[\tau] = 4{,}8$ *кг/см*².

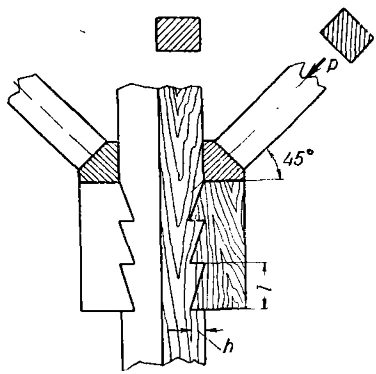
Болты (имеющие конструктивное значение) при расчете не учитывать. Полагать, что по линии $n - t$ усилие не передается.

Ответ: $\sigma_c = 36$ *кг/см*² < 45 *кг/см*²; $l = 23$ *см*; $c = 8{,}3$ *см*.

3.34. Стропильная нога опорного узла фермы соединена с затяжкой при помощи шипа шириной $b = 6$ *см*, как показано на рисунке. Определить высоту шипа h (глубину врубки) и длину конца затяжки l, если допускаемое напряжение на смятие под углом 30° к направлению волокон равно 50 *кг/см*², а допускаемое



К задаче 3.34.



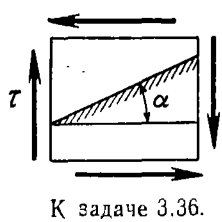
К задаче 3.35.

напряжение на скалывание вдоль волокон равно 8 *кг/см*²; сжимающее усилие в стропильной ноге $P = 2$ *т*. Считать, что усилие по линии $n - t$ не передается.

Ответ: $h = 6$ *см*; $l = 12$ *см*.

3.35. Подкос моста опирается на дубовую подушку, которая передает усилие на стойку через зубчатый коротыш, как показано на рисунке. Определить глубину врубки h и длину зуба l, если усилие, действующее на подкос, $P = 20$ *т*. Сечение подкоса и стойки — квадратное 20×20 *см*². Допускаемое напряжение на смятие равно 80 *кг/см*², а на скалывание 8 *кг/см*².

Ответ: $h = 3$ *см*; $l = 30$ *см*.



К задаче 3.36.

3.36. Для элемента, подвергающегося чистому сдвигу касательными напряжениями $\tau = 500$ *кг/см*², найти построением круга напряжений нормальное, касательное и полное напряжения по площадке, наклоненной под углом $\alpha=30^\circ$ к плоскостям сдвига в соответствии с рисунком.

Ответ: $\sigma_\alpha=433$ *кг/см²*; $\tau_\alpha=250$ *кг/см²*; $p_\alpha=500$ *кг/см²*.

3.37. Стальной куб с размерами ребер 20 *см* подвергается по четырем граням чистому сдвигу касательными напряжениями $\tau=1000$ *кг/см²*. Найти величину абсолютного и относительного сдвига. Модуль упругости при сдвиге $G=8\cdot10^5$ *кг/см²*.

Ответ: $\Delta s=0,25$ *мм*; $\gamma=0,00125$.

3.38. Определить модуль упругости при растяжении E для материала, у которого модуль упругости при сдвиге $G=4\cdot10^5$ *кг/см²*, а коэффициент Пуассона $\mu=0,2$.

Ответ: $E=0,96\cdot10^6$ *кг/см²*.

3.39. На плоском стальном образце до нагрузки была нанесена линия под углом 30° к его оси. На какую величину изменится этот угол, когда образец будет растянут до напряжений $\sigma=1200$ *кг/см²*? $E=2\cdot10^6$ *кг/см²*, $\mu=0,25$.

Ответ: $\gamma=0,00065$ рад. $=2'14''$.

§ 11. Кручение круглых стержней

3.40. Полый стальной вал имеет наружный диаметр $d_1=100$ *мм*, а внутренний $d_2=50$ *мм*. Какую мощность в *л. с.* передает этот вал при вращении со скоростью $n=80$ об/мин, если при этом он закручивается на угол 1,8° на длине 2,7 *м*? Каково наибольшее касательное напряжение в стержне?

Решение. Крутящий момент, воспринимаемый валом, можно определить из формулы $\varphi=\frac{M_к l}{J_p G}$:

$$M_к=\frac{\varphi J_p G}{l}. \qquad (а)$$

Мощность N связана с крутящим моментом:

$$M_к=\frac{2250}{\pi}\cdot\frac{N}{n}\ кгм=\frac{225\,000}{\pi}\cdot\frac{N}{n}\ кгсм. \qquad (б)$$

Отсюда после подстановки вместо $M_к$ его значения из (а)

$$N=\frac{\pi n\varphi J_p G}{225\,000\, l}.$$

Угол φ выражаем в радианах

$$\varphi=1,8^\circ=1,8\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{100}.$$

Полярный момент инерции равен

$$J_p=\frac{\pi r_1^4}{2}(1-\alpha^4)=\frac{15}{32}\pi r_1^4.$$

Тогда

$$N=\frac{\pi\cdot80\cdot\pi\cdot15\cdot\pi\cdot5^4\cdot8\cdot10^5}{100\cdot32\cdot225\,000\cdot270}=95,6\ л.\ с.$$

Наибольшее касательное напряжение выражается формулой

$$\max\tau=\frac{M_к r_1}{J_p}. \qquad (в)$$

Подставляя вместо $M_к$ его значение, выраженное через мощность N и заданное число оборотов, получаем

$$\max\tau=\frac{225\,000\,Nr_1}{\pi nJ_p}=\frac{225\,000\cdot 95{,}6\cdot 32\cdot 5}{\pi\cdot 80\cdot 15\cdot\pi\cdot 5^4}=466\ кг/см^2.$$

3.41. Определить диаметр сплошного вала, передающего крутящий момент 1,5 *тм*, если допускаемое напряжение $[\tau]=700$ *кг/см²*?

Ответ: 10,3 *см*.

3.42. Определить диаметр сплошного вала, передающего 450 *л. с.* при 300 об/мин. Угол закручивания не должен превышать 1° на 2 *м* длины вала, а наибольшее касательное напряжение 400 *кг/см²*; $G=8\cdot 10^5$ *кг/см²*.

Ответ: 11,2 *см*.

3.43. Определить наименьший диаметр стального вала, передающего 18 *л. с.* при 120 об/мин, если допускаемый угол закручивания равен 1° на длине, равной 15 диаметрам вала. Как велики при этом будут наибольшие касательные напряжения?

Ответ: 4,9 *см*; 466 *кг/см²*.

3.44. Сравнить веса сплошных валов одинаковой длины, стального и из алюминиевого сплава, спроектированных с одинаковым относительным углом закручивания при одинаковом крутящем моменте, если $G_а=2{,}7\cdot 10^5$ *кг/см²*; $G_с=8\cdot 10^5$ *кг/см²*; $\gamma_а=2{,}6$; $\gamma_с=7{,}85$.

Ответ: $Q_с=1{,}75\,Q_а$.

3.45. Для определения необходимого диаметра сплошного стального вала задано допускаемое касательное напряжение 800 *кг/см²* и допускаемый угол закручивания 1° на длине, равной 1 *м*. При каких величинах крутящего момента можно ограничиться определением диаметра только по допускаемому напряжению или только по допускаемому углу закручивания?

Ответ: При $M_к>2{,}36$ *тм* по допускаемому напряжению;
при $M_к<2{,}36$ *тм* по допускаемому углу закручивания.

3.46. Сплошной вал диаметром 10 *см* и длиной 6 *м* закручен на угол 4°. Чему равно наибольшее касательное напряжение, если $G=8\cdot 10^5$ *кг/см²*?

Ответ: 466 *кг/см²*.

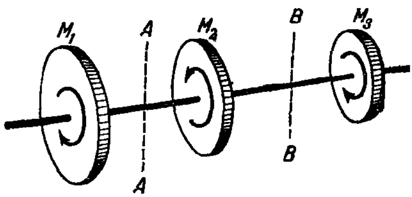
3.47. Сплошной вал диаметром 90 *мм* при скорости вращения 150 об/мин передает 50 *л. с.* Длина вала между шкивами 4 *м*. Модуль $G=8\cdot 10^5$ *кг/см²*. Определить наибольшее касательное напряжение в вале и угол, на который один шкив повернется относительно другого.

Ответ: 167 *кг/см²*; 1°4′.

3.48. Приближенная формула для определения диаметра вала имеет вид $d=2{,}5\sqrt[3]{40\frac{N}{n}}$, где d — диаметр вала, N — передаваемая мощность в *л. с.*, n — число оборотов в минуту. Для какой величины допускаемого напряжения на сдвиг выведена эта формула?

Ответ: 600 *кг/см²*.

3.49. Определить наибольшие касательные напряжения в сечениях AA и BB вала (см. рисунок) при следующих данных: $M_1 = 13$ *тсм*; $M_2 = 30$ *тсм*. Диаметр вала в сечении AA 5 *см*, а в сечении BB 7,5 *см*.



К задаче 3.49.

Ответ: $\tau_A = 530$ *кг/см²*; $\tau_B = 205$ *кг/см²*.

3.50. Стальной образец диаметром 20 *мм* при расчетной длине 200 *мм* испытывался на кручение. Результаты испытания даны в таблице:

Крутящий момент в *кгм*	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Угол закручивания, умноженный на 2000 (в радианах)	6,1	12,5	18,9	25,2	31,4	37,8	44,3	50,5	56,9

Крутящий момент в *кгм*	20	22	24	26	28	30	32	34
Угол закручивания, умноженный на 2000 (в радианах)	63,0	69,5	75,8	82,1	88,5	95,4	110	148

Построить диаграмму касательных напряжений в зависимости от угла закручивания и определить модуль упругости при кручении. Найти величину предела пропорциональности для рассматриваемого случая.

3.51. Определить наибольший крутящий момент, который может быть приложен к стальному стержню диаметром 10 *мм*, если допускаемое напряжение не должно превосходить 1500 *кг/см²*. Какова наименьшая длина стержня, если угол закручивания равен 90°; $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см²*?

Ответ: 295 *кгсм*; 418 *см*.

3.52. Вал диаметром 90 *мм* передает 90 *л. с.* Определить предельное число оборотов, если допускаемое касательное напряжение равно 600 *кг/см²*.

Ответ: $n \geqslant 75$ об/мин.

3.53. Стальной вал длиной 2 *м* и диаметром 5 *см* при нагружении его крутящим моментом 400 *кгм* закручивается на угол 9,2°. Предел пропорциональности для касательных напряжений равен 1700 *кг/см²*. Определить величину модуля упругости при сдвиге.

Ответ: $8{,}1 \cdot 10^5$ *кг/см²*.

3.54. Стержень из мягкой стали диаметром 25 *мм* удлиняется на 0,113 *мм* на длине 20 *см* при растяжении его силой 6 *т*. Этот же стержень закручивается на угол 0,55° на длине 15 *см* при нагружении его крутящим моментом, равным 2000 *кгсм*. Определить величину E, G и μ.

Ответ: $2{,}16 \cdot 10^6$ *кг/см²*; $8{,}16 \cdot 10^5$ *кг/см²*; 0,32.

3.55. При испытании на кручение стального образца длиной 20 *см* и диаметром 20 *мм* было обнаружено, что при крутящем моменте 1640 *кгсм* угол закручивания был равен 0,026 радиана. Предел пропорциональности был достигнут при крутящем моменте, равном 2700 *кгсм*. Определить величину модуля упругости при сдвиге и величину предела пропорциональности при кручении.

Ответ: $8{,}0 \cdot 10^5$ *кг/см²*; 1720 *кг/см²*.

3.56. Полый вал, соединяющий турбину и генератор в гидротехнической установке, имеет наружный диаметр 40 *см* и внутренний диаметр 22,5 *см*. Скорость вращения 120 об/мин. Чему равны наибольшие касательные напряжения при передаче валом 10 000 *л. с.*?

Ответ: 530 *кг/см²*.

3.57. При определении мощности паровой турбины был измерен угол закручивания вращаемого вала, который на длине 6 *м* оказался равным 1,2°. Наружный и внутренний диаметры вала соответственно равны 25 *см* и 17 *см*. Скорость вращения вала 250 об/мин; $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см²*. Определить мощность, передаваемую валом, и возникающие в нем касательные напряжения.

Ответ: 2940 *л. с.*; 349 *кг/см²*.

3.58. Для определения мощности, передаваемой валом, замерялись при помощи тензометра удлинения по линии, расположенной под углом 45° к наружной образующей вала. Замеренное относительное удлинение оказалось равным $\varepsilon = 0{,}000425$. Наружный диаметр вала равен 40 *см*, а внутренний 24 *см*. Модуль упругости $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см²*. Чему равна мощность, передаваемая валом, если он вращается со скоростью 120 об/мин? Как велики при этом наибольшие касательные напряжения?

Ответ: 12 500 *л. с.*; 680 *кг/см²*.

3.59. Сплошной вал диаметром 40 *см* заменяется полым валом, у которого внутренний диаметр составляет 60% от наружного. Определить наружный диаметр полого вала при условии, что допускаемые касательные напряжения у них одинаковые. Сравнить веса сплошного и полого валов.

Ответ: 42 *см*; $\dfrac{Q_{\text{спл}}}{Q_{\text{пол}}} = 1{,}41$.

3.60. Чтобы уменьшить вес сплошного круглого вала на 20%, заменим его полым, наружный диаметр которого в два раза больше внутреннего. Чему будут равны наибольшие касательные напряжения в полом вале, если в сплошном они были равны 600 *кг/см²*?

Ответ: 580 *кг/см²*.

3.61. Два вала, один из которых сплошной, а другой — полый, имеют одинаковый вес и передают одинаковый крутящий момент. У которого из них наибольшие касательные напряжения будут больше и во сколько раз, если внутренний диаметр полого вала составляет 0,6 его наружного диаметра?

Ответ: У сплошного в 1,7 раза.

3.62. Определить наружный диаметр полого стального вала, передающего 9600 *л. с.* при 110 об/мин, если допускаемое касательное напряжение равно 560 *кг/см²*, а внутренний диаметр составляет 0,6 от внешнего.

Ответ: 40,2 *см*.

3.63. Полый стальной вал длиной 1,8 *м* нагружен крутящим моментом 0,6 *тм*. Определить наружный и внутренний диаметры вала, если угол закручивания не должен превосходить 2°, а касательное напряжение 700 *кг/см²*.

Ответ: 90,4 *мм*; 72,4 *мм*.

3.64. Построить кривую, абсциссами которой являются числа оборотов в минуту, а ординатами — необходимые диаметры сплошного стального вала, передающего 50 *л. с.* при допускаемом касательном напряжении 600 *кг/см²*. Число оборотов менять в пределах 16 — 16 000 об/мин.

Ответ: $d=\dfrac{31,2}{\sqrt[3]{n}}$.

3.65. К тонкостенной трубе со средним диаметром, равным $d_{ср}=12,5$ *см*, приложен крутящий момент $M_к=62,5$ *тсм*. Какова должна быть толщина t стенок трубки, чтобы касательные напряжения не превосходили $[\tau]=800$ *кг/см²*. Найти угол закручивания на длине $l=1$ *м*, если $G=8\cdot10^5$ *кг/см²*.

Решение. При кручении тонкостенных стержней касательные напряжения у внутренних и наружных волокон настолько мало отличаются друг от друга, что принимают их равными среднему. Тогда их можно определить по формуле $\tau=\dfrac{M_к r_{ср}}{J_p}$, где $r_{ср}$ — средний радиус кольцевого сечения.

Вследствие незначительной разницы между наружным и внутренним радиусами сечения момент инерции сечения можно подсчитать так:

$$J_p=\int_F dF\rho^2=2\pi r_{ср}tr_{ср}^2=2\pi r_{ср}^3 t,$$

и формула для определения напряжений примет вид

$$\tau=\frac{M_к}{2\pi r_{ср}^2\, t},$$

а толщина стенки t определится из уравнеиия:

$$t = \frac{M_к}{2\pi r_{ср}^2[\tau]} = \frac{62\,500}{2\cdot\pi\cdot 6{,}25^2\cdot 800} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318 \text{ см}.$$

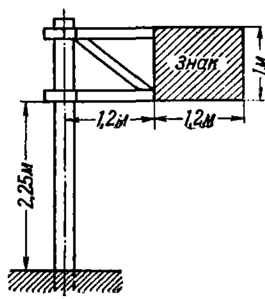
Угол закручивания определяется по обычной формуле:

$$\varphi = \frac{M_к l}{J_p G} = \frac{62\,500\cdot 100\,\pi}{2\cdot\pi\cdot 6{,}25^3\cdot 1\cdot 8\cdot 10^5} = 0{,}016 \text{ радиана}.$$

3.66. Трубчатый вал должен передавать мощность 100 *л. с.* при вращении со скоростью 100 об/мин. Толщина стенки составляет $^1/_{50}$ среднего диаметра трубки. Определить средиий диаметр трубки при условии, чтобы угол закручивания не превосходил 1° иа 3 *м* длииы; $G = 8\cdot 10^5$ *кг/см*². Чему при этом будут равны касательные напряжения в поперечном сечении трубки?

Ответ: 17,7 *см*; 412 *кг/см*².

3.67. Стальная труба должна быть применена в качестве столба для установки дорожного знака, как указано на рисунке. Наибольшее давление ветра на знак предполагается равным 200 *кг/м*². Угол поворота трубы в месте прикрепления нижнего захвата знака не должен превосходить 6°. Наибольшие касательные напряжения от кручения в поперечном сечении трубы не должны быть больше 350 *кг/см*². Определить средний диаметр трубы, если толщина стенки равна 3 *мм*. Считать, что давление ветра передается только на заштрихованную площадь.



К задаче 3.67.

Ответ: 16,2 *см*.

3.68. Трубка длиной 4,6 *м* со средним диаметром 15 *см* имеет толщину стенки 2,5 *мм*. Касательные напряжения в ней равны 560 *кг/см*². Найти полный угол закручивания трубки.

Ответ: 2,46°.

3.69. Вал трубчатого сечения длиной 1,8 *м* со средним диаметром 30 *см* и толщиной стенки 3 *мм* вращается со скоростью 100 об/мин. Какую мощность в *л. с.* он передает, если касательиое напряжение равно 630 *кг/см*²? Определить угол закручивания.

Ответ: 374 *л. с.*; 0,542°.

3.70. Трубчатый вал со средним диаметром 10 *см* имеет толщину стенок 3 *мм*. Угол закручивания ие должен превосходить 1° на длине 3,7 *м*.

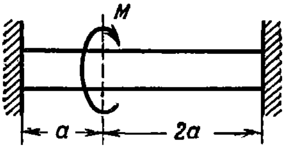
Определить скорость вращения вала, при которой он может передавать мощиость 50 *л. с.*

Ответ: 404 об/мин.

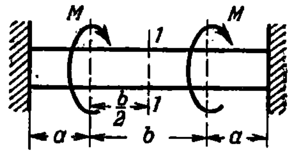
3.71. Концы круглого стержня жестко защемлены, как показано иа рисунке. В промежуточном сечении стержня приложена пара сил с моментом 1200 *кгм*. Определить наибольшие касательные напряжения, если диаметр вала 8 *см*.

Ответ: 795 *кг/см*^{2}.

3.72. Круглый стержень с жестко защемленными концами подвергается действию двух равных и одинаково направленных пар сил



К задаче 3.71.

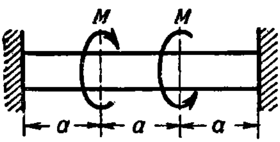


К задаче 3.72.

с моментами по 800 *кгм* (см. рисунок). Определить угол поворота среднего сечения *1—1*, если диаметр вала равен 10 *см*. Расстояния: $a = 60$ *см*; $b = 80$ *см*.

Ответ: 21′.

3.73. К круглому стержню с жестко защемленными концами приложены две равные и противоположно направленные пары сил с моментами по 1000 *кгм* (см. рисунок). Определить диаметр вала, если допускаемое касательное напряжение равно 600 *кг/см*^{2}.



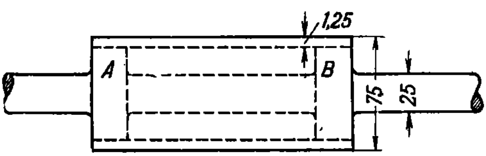
К задаче 3.73.

Ответ: 8,25 *см*.

3.74. Медная трубка с наружным диаметром 7,5 *см* помещена внутри стальной трубки такого же внутреннего диаметра. Толщина стенок обеих трубок по 3 *мм*. Концы трубок жестко скреплены между собой, и к ним приложен крутящий момент 100 *кгм*. Определить наибольшие касательные напряжения в каждой из трубок, распределение момента между трубками и угол закручивания на длине 3 *м*; $G_м = 4 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2}; $G_с = 8 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 250 *кг/см*^{2}; 115 *кг/см*^{2}; 71,8 *кгм*; 28,2 *кгм*; 1,38°.

3.75. Стальной стержень диаметром 2,5 *см* имеет выступы *A* и *B* (см. рисунок). На эти выступы надевается стальная трубка с толщиной стенок 1,25 *мм*. При надевании трубки стержень был закручен моментом, равным 7,5 *кгм*. После того как трубка была приварена к выступам вала, моменты с концов стержня были сняты. Определить величину касательных напряжений в трубке после разгрузки концов стержня. Считать, что выступы *A* и *B* не деформируются.



К задаче 3.75.

Решение. После снятия моментов M_0 с концов стержня участок его между утолщениями A и B, закрученный на угол φ_0, стремится раскрутиться, но встречает препятствие со стороны трубки. Поэтому стержень раскручивается не полностью, а на тот угол, на который закручивается трубка $\varphi_{тр}$. При этом со стороны стержня на трубку через утолщения A и B передается крутящий момент $M_{тр}$. Такой же момент, очевидно, передается и на стержень со стороны трубки $M_{ст}$. Таким образом, для решения задачи можно составить два уравнения:

уравнение равновесия

$$M_{тр}=M_{ст}=M_к,$$

уравнение совместности деформаций

$$\varphi_0-\varphi_{тр}=\varphi_{ст},$$

или

$$\frac{M_0 l}{J_{p(ст)}G}-\frac{M_{тр}l}{J_{p(тр)}G}=\frac{M_{ст}l}{J_{p(ст)}G}.$$

После сокращения на l и G и замены $M_{тр}$ и $M_{ст}$ величиной $M_к$ получим

$$\frac{M_0}{J_{p(ст)}}=\frac{M_к}{J_{p(тр)}}+\frac{M_к}{J_{p(ст)}}=\frac{M_к}{J_{p(ст)}}\left(1+\frac{J_{p(ст)}}{J_{p(тр)}}\right),$$

откуда

$$M_к=\frac{M_0}{1+\frac{J_{p(ст)}}{J_{p(тр)}}}=\frac{7,5}{1+0,0975}=6,85 \text{ кгм}.$$

Теперь можно определить касательные напряжения в трубке

$$\tau=\frac{M_к}{2\pi r_{ср}^2 t}=\frac{685}{2\cdot 3,14\cdot 3,69^2\cdot 0,125}=64,3 \text{ кг/см}^2.$$

§ 12. Кручение стержней некруглого сечения. Соединения, работающие на кручение

3.76. Стальной стержень длиной 2 *м* прямоугольного поперечного сечения размерами 10×30 *мм*^{2} нагружен крутящим моментом 1000 *кгсм*. Определить: а) место и величину наибольших касательных напряжений; б) величину касательных напряжений посредине короткой стороны сечения; в) угол закручивания стержня.

Ответ: 1250 *кг/см*^{2}; 940 *кг/см*^{2}; 18,2°.

Указание. При скручивании стержней прямоугольного сечения угол закручивания и максимальные касательные напряжения вычисляются по формулам, сходным с формулами для круглых стержней, а именно:

$$\varphi=\frac{M_к l}{J_к G};\quad \tau_{max}=\frac{M_к}{W_к}.$$

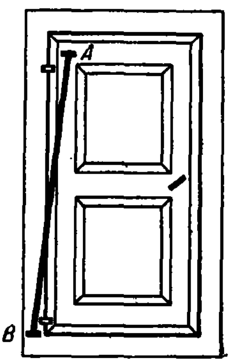
В этих формулах $J_к$ и $W_к$ — величины той же размерности, что и момент инерции и момент сопротивления, и определяются по формулам $J_к=\alpha b^4$, $W_к=\beta b^3$. Здесь b — размер меньшей стороны сечения.

Наибольшие касательные напряжения возникают посредине длинной стороны сечения. Касательные напряжения посредине короткой стороны сечения определяются формулой $\tau=\gamma\tau_{max}$. Коэффициенты α, β и γ зависят от соотношения сторон $\frac{h}{b}$ и даны в таблице:

Значения α, β и γ для прямоугольных сечений

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
α	0,140	0,294	0,457	0,790	1,123	1,789	2,456	3,123
β	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123
γ	1,0	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

3.77. Дверная пружина, состоящая из стального прута квадратного сечения, прикреплена одним концом к двери (в точке A на рисунке), а другим к притолоке (в точке B на рисунке). Найти силу P, с которой нужно будет тянуть за ручку дверь при открытии ее на 90°, и угол α, на который нужно будет предварительно закрутить прут, чтобы при открытии двери наибольшие напряжения в нем равнялись 5000 *кг/см²*. Длина прута 2 *м*, размеры сечения 6×6 *мм²*. Ширина двери равна 1 *м*.



К задаче 3.77.

Ответ: 2,25 *кг*, 87°.

3.78. Определить размеры вала квадратного поперечного сечения, передающего 100 *л. с.* при 120 об/мин. Касательные напряжения не должны превышать 450 *кг/см²*.

Ответ: 86×86 *мм²*.

3.79. Прямоугольное поперечное сечение стержня имеет ширину 4 *см*. Какова должна быть высота сечения, чтобы наибольшие касательные напряжения в нем были такими же, как в стержне круглого поперечного сечения диаметром 5 *см*, если оба стержня нагружены одинаковыми крутящими моментами.

Ответ: 6,52 *см*.

3.80. Стержень прямоугольного поперечного сечения нагружен крутящим моментом 60 *кгм*. Какова должна быть высота поперечного сечения, если ширина его 20 *мм*?

Стержень изготовлен из стали с пределом пропорциональности при растяжении 3500 *кг/см²*. Предел пропорциональности при сдвиге составляет 0,6 от предела пропорциональности при растяжении, а допускаемое касательное напряжение принято равным $^2/_3$ от предела пропорциональности.

Ответ: 4,28 *см*.

3.81. Часть длины круглого вала обработана для насадки шкива и получила сечение квадрата, вписанного в круг.

Определить во сколько раз возрастут наибольшие касательные напряжения в квадратном сечении по сравнению с наибольшими касательными напряжениями при круглом сечении вала.

Ответ: В 2,66 раза.

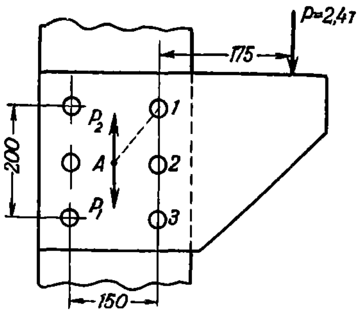
3.82. Два стержня нагружены одинаковыми крутящими моментами; один из них круглого сечения, а другой — квадратного. Установить: а) в каком стержне возникнут напряжения больше и во сколько раз, если площади их сечений одинаковы? б) каково отношение их весов, если наибольшие напряжения в обоих стержнях одинаковы?

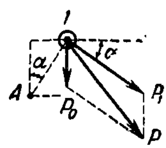
Ответ: а) в стержне квадратного сечения напряжения больше в 1,35 раза; б) в нем же вес больше в 1,23 раза.

3.83. Какой стержень выгоднее для работы на кручение — квадратного или прямоугольного сечения — при прочих равных условиях, если соотношение сторон прямоугольника равно 0,5?

Ответ: Вес стержня прямоугольного сечения больше в 1,12 раза.

3.84. В соединении, изображенном на рисунке, определить полное усилие, приходящееся на наиболее нагруженную заклепку.





К задаче 3.84.

Решение. Силу P следует привести к центру размещения заклепок — к точке A. Приложив в этой точке две противоположно направленные силы $P_1 = P_2 = P$, сводим действие силы P к эквивалентной ей системе: силе P_1, приложенной в центре соединения, и паре сил с моментом, равным $M_к = Pe$, где e — расстояние от линии действия силы до точки A. Сила P_1 распределится равномерно между заклепками, и усилие на каждую заклепку определится, как $\frac{P}{n}$, где n — число заклепок.

Пара сил вызывает кручение заклепочного соединения. При этом во всех заклепках возникают дополнительные силы. Полагают по аналогии с кручением, что усилия в заклепках, вызванные парой сил, прямо пропорциональны расстояниям заклепок от центра (точка A) и направлены перпендикулярно к соответствующим радиусам. Следовательно, если обозначить усилие в любой заклепке, принятой за основную, через P_0, а расстояние до нее через ϱ_0, то усилие P_i в другой произвольной заклепке, расположенной на расстоянии ϱ_i, будет

$$P_i = \frac{P_0 \varrho_i}{\varrho_0}. \qquad (a)$$

Сумма моментов усилий во всех заклепках равна моменту пары:

$$M_к = Pe = \sum_1^n P_i \varrho_i.$$

После подстановки вместо P_i значения (а) имеем

$$M_к = Pe = \frac{P_0}{\varrho_0} \sum_1^n \varrho_i^2, \quad \text{или} \quad \frac{P_0}{\varrho_0} = \frac{M_к}{\sum_1^n \varrho_i^2};$$

тогда усилие в произвольной заклепке

$$P_i = \frac{M_к}{\sum_1^n \varrho_i^2} \varrho_i.$$

Полное усилие, действующее на заклепку, равно геометрической сумме усилий от силы P, приложенной в центре, и от пары сил. Наиболее опасной будет та заклепка, полное усилие для которой будет наибольшим. Ее и нужно проверять на прочность.

В нашем случае точка A лежит от силы на расстоянии $e = 250$ *мм*.

Расстояние до заклепки № 1 $\varrho_1 = \sqrt{7,5^2 + 10^2} = 12,5$ *см*.

Расстояние до заклепки № 2 $\varrho_2 = 7,5$ *см*.

Подсчитаем величину

$$\sum_1^n \varrho_i^2 = 4 \cdot 12,5^2 + 2 \cdot 7,5^2 = 625 + 112,5 = 737,5 \ см^2.$$

Усилие в заклепке № 1

$$P_1 = \frac{Pe\varrho_1}{\sum_1^n \varrho_i^2} = \frac{2,4 \cdot 25 \cdot 12,5}{737,5} = 1,018 \ т.$$

Усилие в заклепке № 2

$$P_2 = P_1 \frac{7,5}{12,5} = 0,610 \ т.$$

Усилие, приходящееся на каждую заклепку от центральной силы:

$$P_0 = \frac{P}{n} = \frac{2,4}{6} = 0,4 \ т.$$

Для заклепки № 2 усилие от кручения направлено вертикально вниз. Поэтому полное усилие для нее равно $0,4 + 0,610 = 1,01$ *т*.

Определим полное усилие, приходящееся на заклепку № 1. Усилие P_1, вызванное кручением, направлено перпендикулярно к радиусу и действует по отношению к горизонтальной линии под углом $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 0,75 = 36°50'$.

Полное усилие определится как геометрическая сумма P_1 и P_0:

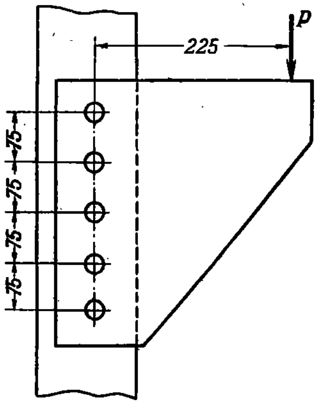
$$P = \sqrt{P_0^2 + P_1^2 + 2P_0P_1 \cos(P_0, \ P_1)} = \sqrt{P_0^2 + P_1^2 + 2P_0P_1 \sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{0,4^2 + 1,018^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 1,018 \cdot 0,6} = 1,2 \ т.$$

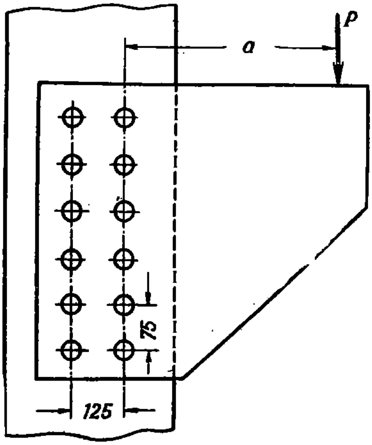
Такое же усилие испытывает заклепка № 3. По этому усилию и следует проверять прочность заклепки.

3.85. Заклепочное соединение, изображенное на рисунке, воспринимает усилие $P = 3{,}5$ *т*. Диаметр заклепок 20 *мм*. Определить касательное напряжение в наиболее опасной заклепке. Заклепки работают на одиночный срез.

Ответ: 704 *кг/см²*.



К задаче 3.85.



К задаче 3.86.

3.86. В соединении, изображенном на рисунке, диаметр заклепки 23 *мм*. Расстояние между рядами 125 *мм*. Шаг заклепок 75 *мм*. Определить расстояние a от крайнего ряда заклепок до силы $P = 1{,}6$ *т*, если допускаемое напряжение для заклепок на срез равно 900 *кг/см²*. Толщина листов такова, что сминающие напряжения не превосходят допускаемых. Заклепки работают на одиночный срез.

Ответ: $a \leqslant 116$ *см*.

3.87. Две части вала диаметром 10 *см* соединены болтами при помощи фланцев. Болты расположены на окружности диаметром 20 *см*. Определить необходимое количество болтов диаметром 20 *мм*, если допускаемое касательное напряжение для болтов равно 600 *кг/см²*, а наибольшее касательное напряжение для материала вала равно 700 *кг/см²*.

Указание. Крутящий момент, воспринимаемый валом, передается болтовому соединению. Так как все болты расположены на одинаковом расстоянии от центра соединения, то усилия в них будут одинаковы. Они определяются из условия, что $M_к = PR_0n$; $M_к$ определяется из условия прочности вала, а P — из условия прочности болта.

Ответ: 8 болтов.

3.88. Два вала A и B, имеющих диаметры 75 *мм* и 100 *мм*, соединены при помощи фланцев шестью болтами. Диаметр болтов равен 20 *мм*. Центры болтов расположены на окружности диаметром 25 *см*. Через соединение передается крутящий момент 600 *кгм*. Определить наибольшие касательные напряжения в вале A и касательные напряжения в болтах.

Ответ: 725 *кг/см²*; 254 *кг/см²*.

3.89. Две трубы соединены при помощи фланцев шестью болтами диаметром по 38 *мм*. Болты расположены на расстоянии 18 *см* от оси трубы. Определить величину передаваемого соединением крутящего момента, если касательные напряжения в поперечном сечении болтов равны 560 *кг/см²*.

Ответ: 3,43 *тм*.

3.90. Два конца вала соединены фланцами. По окружности радиуса 7,5 *см* симметрично поставлены четыре болта диаметром 25 *мм*. Вал передает крутящий момент 25 *тсм*. Обнаружено, что один болт поставлен настолько свободно, что он не несет нагрузки. Определить, который из оставшихся болтов наиболее нагружен и чему равны касательные напряжения в поперечном сечении этого болта.

Ответ: Два симметрично расположенных болта будут нагружены больше; 269 *кг/см²*.

Указание. Нужно найти центр тяжести оставшихся трех болтов. Усилия в болтах будут пропорциональны расстоянию их от найденного центра тяжести. Момент усилий относительно этой точки равен крутящему моменту, а равнодействующая равна нулю.

3.91. Шкив, вращающийся со скоростью 200 об/мин, передает 125 *л. с.* сплошному стальному валу диаметром 75 *мм*. Шкив соединен с валом при помощи стальной шпонки сечением 1×1 *см²* и длиной 10 *см*. Определить касательные напряжения в шпонке.

Ответ: 1120 *кг/см²*.

§ 13. Винтовые пружины

3.92. Цилиндрическая винтовая пружина круглого сечения диаметром 18 *мм* нагружена силой $P=50$ *кг*. Средний диаметр витков пружины $D=125$ *мм*. Модуль упругости $G=8\cdot 10^5$ *кг/см²*. Определить наибольшее касательное напряжение в материале пружины. Какое число витков должна иметь пружина, чтобы осадка ее была равна 6 *мм*?

Решение. Наибольшее напряжение

$$\max\tau=\frac{P}{F}+\frac{M_к}{W_p}=\frac{P}{\pi r^2}+\frac{2PR}{\pi r^3}.$$

После подстановки числовых значений получаем

$$\max\tau=\frac{50}{\pi\cdot 0{,}9^2}+\frac{2\cdot 50\cdot 6{,}25}{\pi\cdot 0{,}9^3}=19{,}6+273=293\ \text{кг/см}^2.$$

Осадка пружины

$$\lambda=\frac{4PR^3n}{Gr^4},$$

откуда

$$n=\frac{\lambda Gr^4}{4\cdot P\cdot R^3}=\frac{0{,}6\cdot 8\cdot 10^5\cdot 0{,}9^4}{4\cdot 50\cdot 6{,}25^3}=6{,}46.$$

3.93. Цилиндрическая винтовая пружина, изготовленная из 6-миллиметровой проволоки, имеет 20 витков со средним радиусом 7,5 *см.* Определить осевую растягивающую нагрузку, которая может быть допущена на пружину, если касательное напряжение в ней не должно превосходить 900 *кг/см*^{2}. Чему при этом будут равны удлинение пружины и наибольшая удельная работа деформации? $G=8\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 5 *кг*; 26 *см*; 0,24 *кгсм/см*^{3}.

3.94. Проволока диаметром 6 *мм* должна быть свита в винтовую пружину с диаметром образующего цилиндра[1]) 5 *см.* Эта пружина должна давать осадку 2,5 *см* под нагрузкой 9 *кг.* Определить необходимую длину куска проволоки. Чему при этом будет равен угол закручивания между концами проволоки и наибольшее касательное напряжение в пружине? $G=8\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 361 *см*; 51°; 627 *кг/см*^{2}.

3.95. Винтовая пружина из стальной проволоки диаметром 6 *мм* имеет 5 витков. Наружный диаметр пружины 3,3 *см.* Определить жесткость пружины, т. е. силу, необходимую для растяжения ее на 1 *см*, полагая, что предел пропорциональности материала при этом не будет превзойден. Какой величины можно допускать осадку пружины (удлинение), если допускаемое напряжение для материала пружины равно 3000 *кг/см*^{2}.

Ответ: 132 *кг/см*; 0,64 *см.*

3.96. Нужно изготовить винтовую пружину, которая под нагрузкой 0,6 *т* давала бы осадку 2 *см.* Определить диаметр проволоки для изготовления пружины вокруг образующего цилиндра диаметром 20 *см*, если допускаемое касательное напряжение равно 750 *кг/см*^{2}. Какое необходимо количество витков, если $G=8\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}?

Решение. Напишем уравнение прочности:

$$\frac{P}{\pi r^2}\left[1+\frac{2(R_0+r)}{r}\right]\leqslant[\tau]$$

[1]) Образующим цилиндром называется цилиндр, на который навивается проволока для изготовления пружины.

и преобразуем его так:

$$P+\frac{2PR_0}{r}+2P=[\tau]\,\pi r^2,$$

а затем вычислим

$$r^2=\frac{2PR_0}{\pi[\tau]r}+\frac{3P}{\pi\,[\tau]}\,.$$

После подстановки числовых значений получим

$$r^2=\frac{5{,}08}{r}+0{,}764.$$

Это уравнение удобно решать подбором:

при $r=2$ *см* $\quad 4>2{,}54+0{,}76=3{,}3;$
» $r=1{,}8$ *см* $\quad 3{,}24<2{,}83+0{,}76=3{,}59;$
» $r=1{,}9$ *см* $\quad 3{,}61>2{,}68+0{,}76=3{,}44;$
» $r=1{,}87$ *см* $\quad 3{,}49\approx 2{,}72+0{,}76=3{,}48.$

Определим число витков:

$$n=\frac{\lambda G r^3}{4PR^4}=\frac{2\cdot 8\cdot 10^5\cdot 1{,}87^4}{4\cdot 600\cdot 11{,}87^3}=4{,}86\approx 5 \text{ витков.}$$

3.97. Витки буферной винтовой пружины имеют средний диаметр 20 *см*. Пружина должна быть спроектирована таким образом, чтобы при сжатии ее на 5 *см* она поглощала энергию, равную 0,1 *тм*. Определить диаметр проволоки и количество витков. Допускаемое напряжение на срез 1500 *кг/см*²; $G=8\cdot 10^5$ *кг/см*².

Ответ: 5,36 *см*; 13 витков.

3.98. Винтовая пружина должна быть спроектирована так, чтобы ее жесткость равнялась 40 *кг/см*, а полная осадка при соприкосновении витков равнялась 4 *см*. Средний диаметр витков равен 6 *см*. Допускаемое касательное напряжение на срез 1400 *кг/см*². Определить диаметр стальной проволоки, число витков и просвет между витками в ненагруженном состоянии.

Ответ: 12,44 *мм*; 28 витков; 1,43 *мм*.

3.99. Винтовая пружина изготовлена из стальной трубки, внутренний диаметр которой составляет 0,8 внешнего. Определить потенциальную энергию, приходящуюся на один килограмм металла трубки, если средняя величина касательных напряжений в поперечном сечении трубки от кручения равна 4500 *кг/см*²; $G=8\cdot 10^5$ *кг/см*²; $\gamma=7{,}85$ *г/см*².

Ответ: 16,3 *кгм/кг*.

3.100. Винтовая стальная пружина должна удлиняться на 2,5 *см* от каждых 50 *кг* осевой нагрузки. Наибольшее растяжение не должно превышать 12,5 *см*. Диаметр образующего цилиндра должен быть равен 7,5 *см*. Определить диаметр проволоки, количество витков и вес пружины, если допускаемое касательное напряжение равно 1400 *кг/см*².

Ответ: 16,6 *мм*; 50; 24,4 *кг*.

3.101. Открытию двери препятствует пружина, передающая на дверь момент, пропорциональный углу открытия двери. Ручка двери находится на расстоянии 60 *см* от вертикали, на которой расположены петли. Постепенно приложенное к ручке усилие, равное 0,5 *кг*, открывает дверь на 10°. Чему равна потенциальная энергия пружины и момент, когда дверь открыта на 60°?

Ответ: 94,2 *кгсм*; 18 *кгм*.

3.102. Винтовая пружина, имеющая 20 витков с диаметром образующего цилиндра 5 *см*, изготовлена из стальной проволоки диаметром 10 *мм*. Пружина нагружена силой 5 *кг*. Определить потенциальную энергию пружины.

Ответ: 0,54 *кгсм*.

3.103. Спроектировать винтовую пружину, поглощающую 270 *кгм* энергии при следующих условиях: а) наибольшее напряжение не должно превышать 5600 $кг/см^2$; б) наибольшая осадка пружины должна быть равна 34 *см*; в) средний диаметр витков должен быть равен десятикратному диаметру проволоки, из которой изготовлена пружина. Определить диаметр проволоки, средний диаметр витков и число витков.

Ответ: 2,76 *см*; 27,6 *см*; 6 витков.

3.104. Предохранительный клапан диаметром 7,5 *см*, прижатый пружиной, должен открываться при давлении 8 *ат*. Клапан открывается только после того, как он поднимается на 2 *см*. Пружина имеет средний диаметр 6 *см* и изготовлена из проволоки диаметром 12 *мм*. Расстояние в свету между витками у ненагруженной пружины равно 5 *мм*. Определить необходимое количество витков, если пружина имеет 16-миллиметровый запас деформации при открытом клапане. Определить также первоначальную сжимающую силу и наибольшее касательное напряжение в материале пружины.

Ответ: 12 витков; 192 *кг*; 3430 $кг/см^2$.

3.105. Две винтовые пружины с одинаковым образующим цилиндром изготовлены из двух проволок одинаковой длины, но одна проволока — стальная, а другая — бронзовая. Диаметр бронзовой проволоки в 1,5 раза больше диаметра стальной. Модуль упругости бронзы в два раза меньше модуля упругости стали. Определить отношение удлинений и наибольших касательных напряжений обеих пружин под одинаковой нагрузкой.

Ответ: 81/32; $\approx 27/8$.

3.106. Внутри цилиндрической винтовой пружины круглого сечения диаметром 2 *см* помещается другая — того же сечения. Средний радиус наружной пружины 8 *см*, а внутренний 5 *см*. Обе пружины одинаковой высоты и имеют по 10 витков каждая. При нагрузке P, передающейся на обе пружины, они дают осадку 5 *см*. В которой пружине максимальные касательные напряжения будут больше и чему они равны? Чему равна нагрузка на обе пружины?

Ответ: Во внутренней 2810 $кг/см^2$; 995 *кг*.

3.107. Винтовая стальная пружина квадратного сечения 10×10 *мм* имеет 12 витков со средним радиусом 5 *см*. Определить наибольшую силу, которой можно нагрузить пружину, если допускаемые напряжения на срез равны 2800 *кг/см²*. Чему при этом будет равна осадка пружины?

Ответ: 112 *кг*; 9,4 *см*.

3.108. Коническая стальная рессора круглого сечения диаметром 2,0 *см* сжимается силой $P=400$ *кг*. Радиус оси верхнего витка равен 4 *см*, а нижнего 10 *см*. Определить величину наибольших касательных напряжений в пружине и число витков, если осадка пружины равна 6,5 *см*.

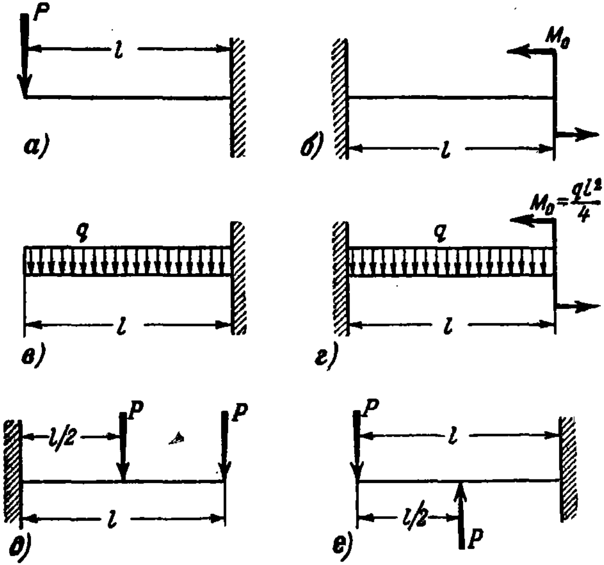
Ответ: 2690 *кг/см²*; 8.

ГЛАВА 4

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

§ 14. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

4.1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, защемленных одним концом и загруженных, как показано на рисунке.



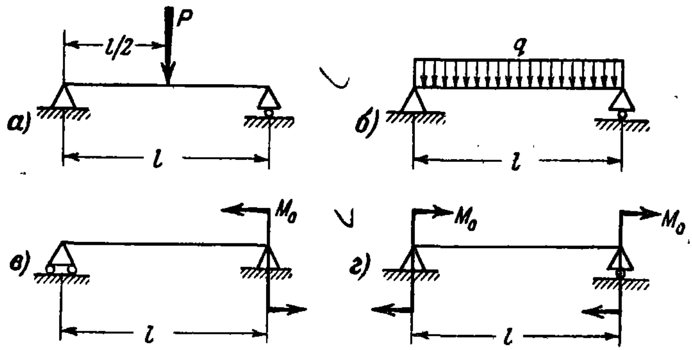
К задаче 4.1.

Подсчитать наибольшие по абсолютному значению величины поперечных сил и изгибающих моментов, если $P=2$ *т*, $q=2$ *т/м*, $M_0=4$ *тм* и $l=2$ *м*.

Ответ:

	а)	б)	в)	г)	д)	е)
Q в m	2	0	4	4	4	2
M в $mм$	4	4	4	2	6	2

4.2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок на двух опорах, загруженных, как показано на рисунке.



К задаче 4.2.

Найти max Q и max M при следующих данных: $P = 6\ m$, $q = 2\ m/м$, $M_0 = 6\ mм$, $l = 3\ м$.

Ответ:

	а)	б)	в)	г)
Q в m	3	3	2	4
M в $mм$	4,5	2,25	6	6

4.3. Шарнирно опертая балка пролетом $l = 5a$ загружена на длине $4a$ сплошной равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q и парой сил с моментом $M_0 = qa^2$, приложенной в расстоянии a от левой опоры (см. рисунок). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подсчитать наибольшие по абсолютному значению величины их.

Решение. 1) Определение опорных реакций. Изобразим на рисунке реакции опор A и B, направив их вверх, и составим уравнения равновесия. Горизонтальная реакция в точке A заведомо равна нулю:

$$\sum M_B = 0; \quad A \cdot 5a - M_0 - q \cdot 4a \cdot 2a = 0; \quad A = \frac{1}{5a}(8qa^2 + M_0) = 1{,}8\ qa;$$

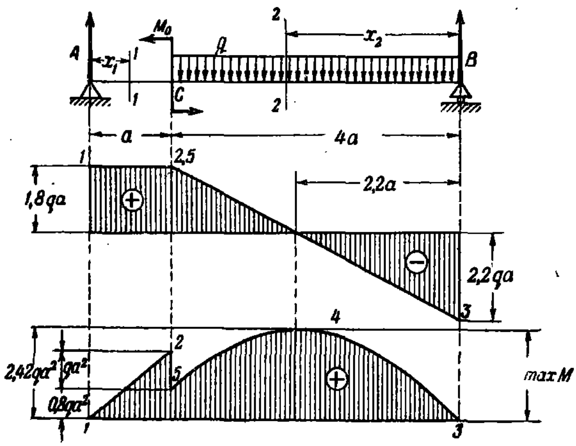
$$\sum M_A = 0; \quad -B \cdot 5a + q \cdot 4a\,(2a + a) - M_0 = 0; \ B = -\frac{1}{5a}(12qa^2 - M_0) = 2{,}2qa.$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\Sigma Y = 0;\; A + B - q\cdot 4a = 0;\; 1{,}8qa + 2{,}2qa - 4qa = 0.$$

Реакции определены правильно.

2) Составление выражений $Q(x)$ и $M(x)$. Для составления уравнений, выражающих законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов, необходимо рассмотреть два сечения: *1—1* на участке между



К задаче 4.3.

опорой *A* и точкой *C* и сечение *2—2* в пределах загруженного участка балки *CB*.

Вычисление $Q(x)$ и $M(x)$ для сечения *1—1* удобнее произвести, рассматривая силы, расположенные левее этого сечения (на длине x), а для второго участка при рассмотрении правой части балки (длиной x_2). По этим соображениям для первого участка начало координат взято на опоре *A*, для второго — на опоре *B*.

Выражения $Q(x)$ и $M(x)$:

для первого участка	*для второго участка*
$0 \leqslant x_1 \leqslant a,$	$0 \leqslant x_2 \leqslant 4a,$
$Q_1 = A = 1{,}8qa,$	$Q_2 = -B + qx_2 = -2{,}2qa + qx_2,$
$M_1 = Ax_1 = 1{,}8qax_1;$	$M_2 = +Bx_2 - \dfrac{qx_2^2}{2} = 2{,}2qax_2 - \dfrac{qx_2^2}{2}.$

Полученные уравнения показывают, что на первом участке обе эпюры ограничены прямыми линиями; на втором — эпюра *M* очерчивается параболической кривой.

3) Построение эпюр *Q* и *M*. Для построения эпюр на первом участке балки достаточно дать переменной x_1 два значения; на втором

участке для построения эпюры моментов следует дать переменной x_2 не менее трех значений. Необходимые вычисления сводим в таблицу:

Значения ординат эпюр Q и M

№ точек эпюры	Значения абсциссы x	Поперечная сила $Q(x)$	Изгибающий момент $M(x)$
1	$x_1=0$	$Q_1=1,8qa$	$M_1=0$
2	$x_1=a$	$Q_1=1,8qa$	$M_1=1,8qa^2$
3	$x_2=0$	$Q_2=-2,2qa$	$M_2=0$
4	$x_2=2a$	$Q_2=-0,2qa$	$M_2=2,2qa\cdot 2a-\frac{q(2a)^2}{2}=2,4qa^2$
5	$x_2=4a$	$Q_2=-2,2qa+4qa=1,8qa$	$M_2=2,2qa\cdot 4a-\frac{q(4a)^2}{2}=0,8qa^2$

По значениям абсцисс и ординат, приведенным в таблице, построены эпюры Q и M. Однако для уточнения вида эпюры M на втором участке необходимо исследовать выражение M_2 на максимум:

$$\frac{dM_2}{dx_2}=-Q_2=2,2qa-qx_2=0$$

$\left(\frac{dM_2}{dx_2}=-Q_2\text{, так как ось } x_2 \text{ направлена справа налево}\right)$.

Отсюда определяем то значение x_2, при котором $M_2=M_{max}$; $x_2=2,2a$.

Подставив это значение x_2 в выражение M_2, найдем

$$\max M=2,2qa\cdot 2,2a-\frac{q(2,2a)^2}{2}=2,42qa^2.$$

Эта ордината эпюры изгибающих моментов соответствует нулевой точке эпюры Q.

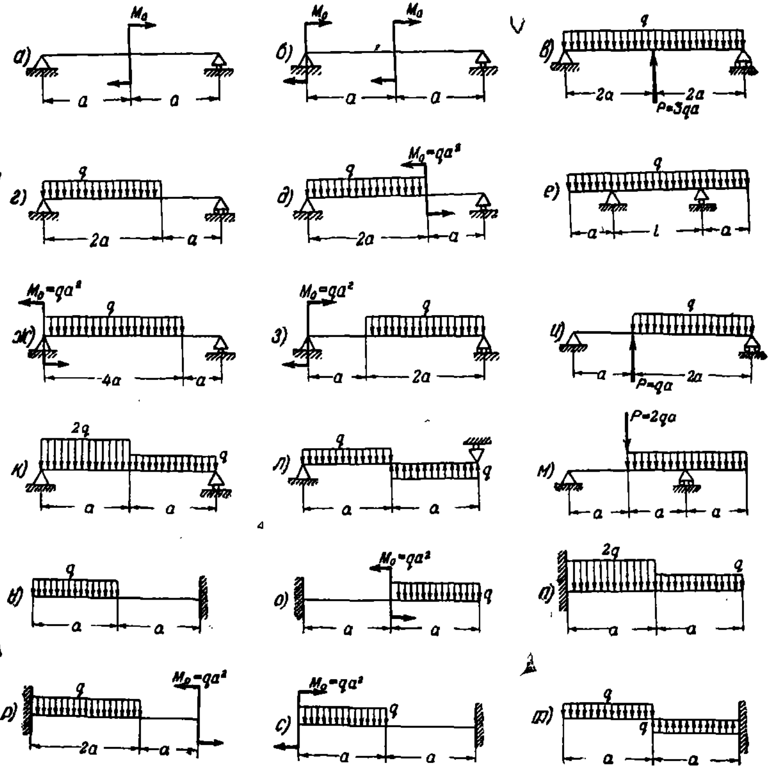
Из эпюр видно, что наибольшие абсолютные значения Q и M равны: $|\max Q|=2,2qa$ (над опорой B) и $\max M=2,42qa^2$ — в сечении, отстоящем на расстояние $2,2a$ от правой опоры B.

4.4. Построить эпюры Q и M для балок, изображенных на рисунках на стр. 107.

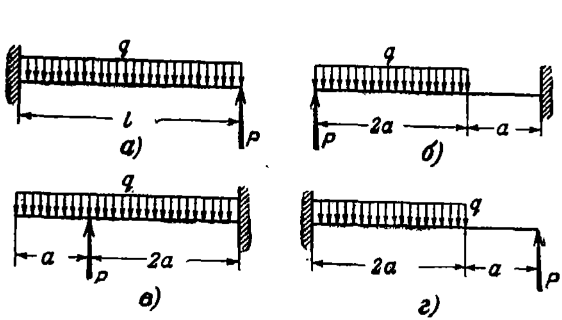
4.5. При каком значении силы P изгибающие моменты в опорных сечениях балок, изображенных на рисунке, будут равны нулю? Построить эпюры Q и M при этих значениях сил (см. стр. 107).

Ответ:

	а)	б)	в)	г)
$P=$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{4}{3}qa$	$\frac{4}{9}qa$	$\frac{2}{3}qa$



К задаче 4.4.



К задаче 4.5.

4.6. Исследовать законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рисунке, и построить эпюры Q и M.

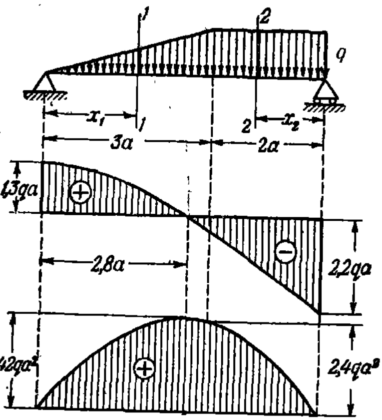
Решение. Из уравнений равновесия определяем значения опорных реакций A и B.

Обе реакции направлены вверх и соответственно равны:

$$A = 1{,}3qa;$$
$$B = 2{,}2qa.$$

Составим уравнения Q и M для каждого из участков балки.

Для сечения $1-1$. $Q_1 = A - \omega_1$, где ω_1 — грузовая площадь, расположенная слева от сечения $1-1$ и равная площади треугольника с основанием x_1 и высотой $q_1 = q\dfrac{x_1}{3a}$. Следовательно,



К задаче 4.6.

$$Q_1 = 1{,}3qa - \frac{qx_1^2}{6a};$$

$$M_1 = Ax_1 - \omega_1\frac{x_1}{3} = 1{,}3qax_1 - \frac{qx_1^3}{18a}.$$

Для сечения $2-2$. Рассматривая правую отсеченную часть, имеем

$$Q_2 = -B + qx_2 = -2{,}2qa + qx_2;$$

$$M_2 = Bx_2 - \frac{qx_1^2}{2} = 2{,}2qax_2 - \frac{qx_1^2}{2}.$$

Таким образом, поперечная сила в первом участке изменяется по параболическому закону, во втором — по линейному. Законы изменения изгибающих моментов: в первом участке — кубическая парабола, во втором — квадратная парабола.

Для построения эпюр Q и M по точкам составим таблицу значений $Q(x)$ и $M(x)$:

Значения Q и M

x	$Q(x)$	$M(x)$
$x_1 = 0$	$Q_1 = 1{,}3qa$	$M_1 = 0$
$x_1 = 2a$	$Q_1 = 1{,}96qa$	$M_1 = 2{,}16qa^2$
$x_1 = 3a$	$Q_1 = -0{,}2qa$	$M_1 = 2{,}4qa^2$
$x_2 = 0$	$Q_2 = -2{,}2qa$	$M_2 = 0$
$x_2 = a$	. . . .	$M_2 = 1{,}7qa^2$
$x_2 = 2a$	$Q_2 = -0{,}2qa$	$M_2 = 2{,}4qa^2$

Эпюры Q и M, построенные по данным таблицы, приведены на рисунке.

Для определения наибольших по абсолютному значению расчетных величин M_1 и M_2 нужно исследовать соответствующие уравнения на максимум. Условие максимума изгибающего момента выражается формулой

$$\frac{dM}{dx}=Q(x)=0.$$

Для первого участка

$$Q_1=1{,}3qa-\frac{qx_1^2}{6a}=0,$$

отсюда

$$x_1=a\sqrt{7{,}8}\approx 2{,}8a,$$

и наибольшее значение M_1 будет

$$\max M_1=1{,}3qa\cdot 2{,}8a-\frac{q}{18a}\cdot(2{,}8a)^3=2{,}42qa^2.$$

Для второго участка

$$Q_2=-2{,}2qa+qx_2=0,$$

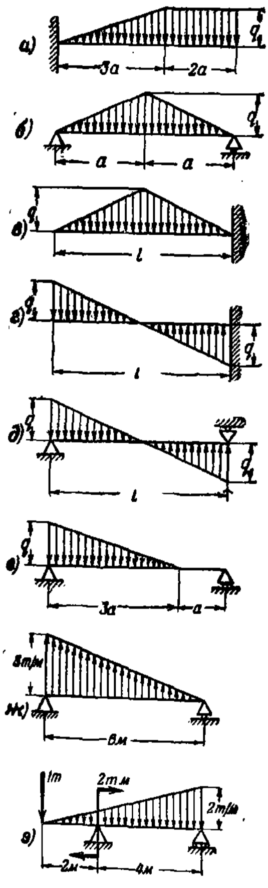
откуда

$$x_2=2{,}2a$$

(при длине участка $2a$). Таким образом, парабола, выражающая функцию M_2, имеет максимум за пределами рассматриваемого участка.

Расчетная величина изгибающего момента имеет значение $\max M=2{,}42qa^2$ для сечения, отстоящего от левой опоры на расстояние $2{,}8a$. Что касается поперечной силы, то, как это видно из эпюры Q, наибольшую по абсолютному значению величину она имеет в сечении на правой опоре B и равна соответствующей опорной реакции, а именно $|\max Q|=2{,}2qa$.

4.7. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, схемы которых изображены на рисунке, и вычислить наибольшие значения Q и M.



К задаче 4.7.

Ответ:

а) $Q=3{,}5\,qa$; $M=-11\,qa^2$;

б) $Q=0{,}5\,qa$; $M=\frac{1}{3}qa^2$;

в) $Q=0{,}5\,ql$; $M=-0{,}25\,ql^2$;

г) $Q=-0{,}25\,ql$; $M=-\frac{1}{6}ql^2$;

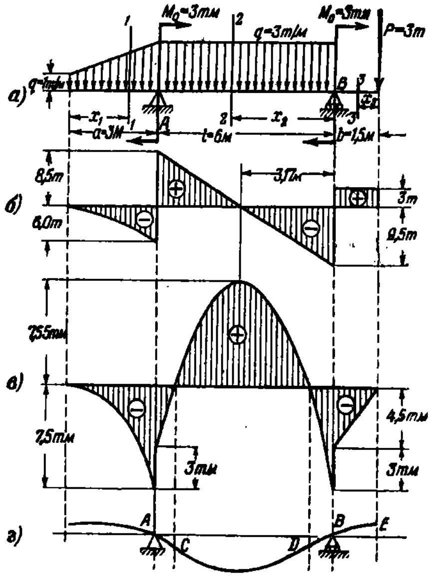
д) $Q=\frac{1}{6}ql$; $M=0{,}0016\,ql^2$; ж) $Q=6\,т$; $M=6{,}93\,тм$;

е) $Q=\frac{9}{8}qa$; $M=\frac{3}{8}qa^2$; з) $Q=3{,}0\,т$; $M=2{,}53\,тм$.

4.8. Построить эпюры Q и M для балки на двух шарнирных опорах с консолями, загруженной по схеме, показанной на рисунке $а$). Наметить также изогнутую ось балки, руководствуясь эпюрой моментов.

Ответ: Эпюры Q и M изображены на рисунках *б*) и *в*).

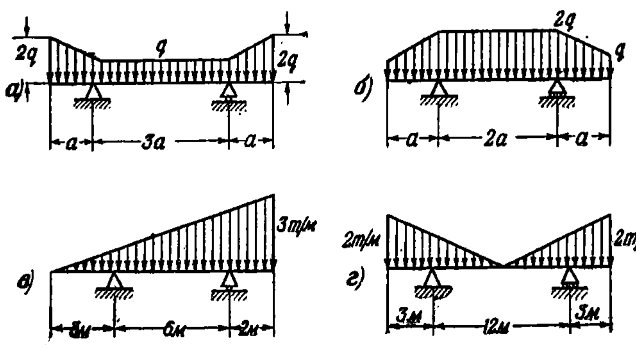
На рисунке *г*) изображен примерный вид изогнутой оси. Левая часть балки до точки C изгибается выпуклостью кверху, что отвечает отрицательному значению M. Точки C и D, соответствующие нулевым точкам



К задаче 4.8.

эпюры M, являются точками перегиба. На участке CD балка изгибается выпуклостью вниз.

Правый конец балки DE имеет выпуклость вверх.

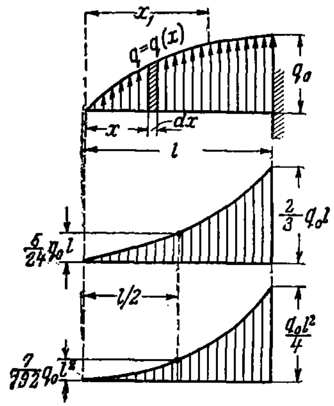


К задаче 4.9.

4.9. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок с консолями, изображенных на схеме. Показать также характер изогнутой оси балки и наметить точки перегиба (если они имеются).

4.10. Построить эпюры Q и M для балки, защемленной одним концом и нагруженной сплошной нагрузкой, направленной вверх. Интенсивность нагрузки изменяется по уравнению параболы

$$q(x) = q_0\left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$



К задаче 4.10.

Решение. Имея в виду, что элементарная нагрузка, приходящаяся на бесконечно малый отрезок балки длиной dx, равна

$$d\omega = q(x)\,dx = q_0\left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)dx,$$

найдем для сечения на расстоянии x_1 от левого конца балки:

$$Q = \int_0^{x_1} q(x)\,dx = \frac{q_0}{l}\int_0^{x_1}\left(2x - \frac{x^2}{l}\right)dx = \frac{q_0 x_1^2}{l} - \frac{q x_1^3}{3l^2};$$

$$M = \int_0^{x_1} q(x)\,dx\,(x_1 - x) = \frac{q_0}{l}\int_0^{x_1}\left(2x - \frac{x^2}{l}\right)(x_1 - x)\,dx =$$

$$= \frac{q_0}{l}\left[2x_1\int_0^{x_1} x\,dx - 2\int_0^{x_1} x^2 dx - \frac{x_1}{l}\int_0^{x_1} x^2\,dx + \frac{1}{l}\int_0^{x_1} x^2\,dx\right] = \frac{q_0 x_1^3}{3l} - \frac{q_0 x_1^4}{12l^2}.$$

Для построения эпюр составим таблицу значений Q и M:

Значения расчетных величин

x_1	$Q(x_1)$	$M(x_1)$
0	$Q_1 = 0$	$M_1 = 0$
$\frac{l}{2}$	$Q_1 = \frac{q_0 l}{4} - \frac{q_0 l}{24} = \frac{5}{24}q_0 l$	$M_1 = \frac{q_0 l^2}{24} - \frac{q_0 l^2}{8\cdot 24} = \frac{7}{192}q_0 l^2$
l	$Q_1 = q_0 l - \frac{q_0 l}{3} = \frac{2}{3}q_0 l$	$M_1 = \frac{q_0 l^2}{3} - \frac{q_0 l^2}{12} = \frac{q_0 l^2}{4}$

Эпюры Q и M показаны на рисунке. Заметим, что наибольшая ордината эпюры Q выражает величину грузовой площади, т. е. площади параболического треугольника $\omega = \frac{2}{3}q_0 l$, а наибольшая ордината эпюры M численно равна статическому моменту этой площади относительно защемления $S = \frac{q_0 l^2}{4}$.

Отсюда расстояние до центра тяжести параболической нагрузки от защемленного конца

$$x_C = \frac{S}{\omega} = \frac{q_0 l^2}{4 \cdot \frac{2}{3} q_0 l} = \frac{3}{8} l$$

или от свободного конца $x'_C = \frac{5}{8} l$.

4.11. Построить эпюры Q и M и найти наибольшие значения Q и M для балки иа двух опорах пролетом l, загруженной сплошной нагрузкой, изменяющейся по параболическому закону, выражаемому уравнением $q(x) = \frac{4}{l^2} q_0 (lx - x^2)$.

Ответ: $\max Q = \frac{q_0 l}{3}$; $\max M = \frac{5}{48} q_0 l^2$.

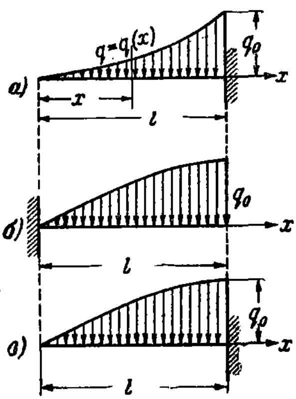
4.12. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и вычислить наибольшие значения величин Q и M для балок, загруженных сплошной нагрузкой с интенсивностью $q = q(x)$, меняющейся по закону:

а) $q(x) = q_0 \frac{x^2}{l^2}$; б) $q(x) = q_0 \left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$; в) $q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{2l}$.

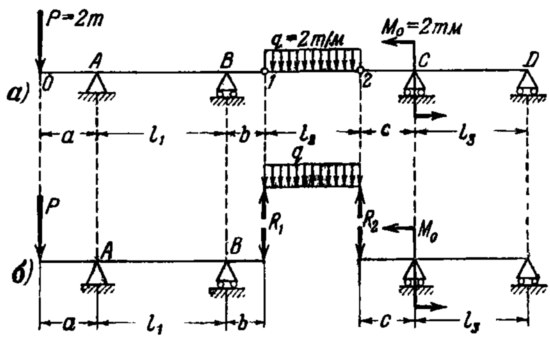
Ответ:

а) $Q = -\frac{q_0 l}{3}$; б) $Q = \frac{2}{3} q_0 l$; в) $Q = -\frac{2}{\pi} q_0 l$;

$M = -\frac{q_0 l^2}{12}$; $M = -\frac{5}{12} q_0 l^2$; $M = -\frac{2\pi - 4}{\pi^2} q_0 l^2$.



К задаче 4.12.



К задаче 4.13.

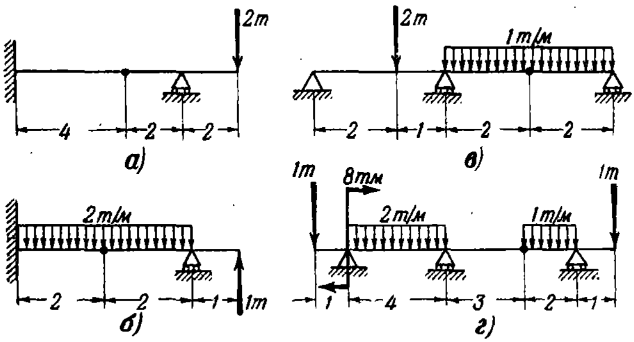
4.13. Построить эпюры Q и M для четырехопорной балкн с промежуточными шарнирами при следующих размерах:

$$a = 2\ м;\quad l_1 = 4\ м;\quad P = 2\ т;$$
$$b = 1\ м;\quad l_2 = 3\ м;\quad q = 2\ т/м;$$
$$c = 3\ м;\quad l_3 = 4\ м;\quad M = 2\ тм.$$

Указание. Балку удобно расчленить на три самостоятельные: одну подвесную *1—2*, опирающуюся через шарниры *1* и *2* на консоли *b* и *c*, и две основные балки с консолями (*0—1* и *2—D*). Давления, передающиеся через шарниры от подвесной балки на консоли основных, равны реакциям R_1 и R_2 двухопорной подвесной балки, но направлены в противоположные стороны (см. схему *б*). Эпюры Q и M можно теперь строить для каждой из балок в отдельности.

Ответ: $\min M = -11$ *тм*; $\max Q = 3$ *т*.

4.14. Построить эпюры Q и M для балок с шарнирами, схемы которых показаны на рисунке, и вычислить $\max Q$ и $\max M$. Размеры на рисунке даны в метрах.



К задаче 4.14.

Ответ: Наибольшие значения Q и M соответственно равны:

а) $M = 8$ *тм*; $Q = 2{,}0$ *т*;
б) $M = -9{,}0$ *тм*; $Q = -6{,}5$ *т*;
в) $M = -4{,}0$ *тм*; $Q = 3{,}0$ *т*;
г) $M = 7{,}0$ *тм*; $Q = -6{,}62$ *т*.

4.15. Построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов для стержня с ломаной осью.

Решение. Опорные реакции находим из уравнений:

$$\Sigma X = 0; \qquad H_A - qh = 0, \text{ откуда } H_A = qh;$$
$$\Sigma Y = 0; \qquad A - B = 0, \text{ или } A = B;$$
$$\Sigma M_B = 0; \qquad Al - \frac{qh^2}{2} = 0, \text{ откуда } A = \frac{qh^2}{2l} = B.$$

а) Построение эпюры продольных сил. Продольной (или нормальной) силой называется сумма проекций на ось стержня внешних сил, приложенных к отсеченной его части.

Для сечения *1—1*, рассматривая нижнюю часть стойки *AC*, имеем

$$N_1 = -A = -\frac{qh^2}{2l}.$$

Знак минус взят потому, что сила *A* вызывает сжатие стойки; величина N_1 остается постоянной по всей длине стойки.

Для сечения $2-2$, рассматривая левую отсеченную часть стержня, получим

$$N_2 = -H_A = -qh \text{ (сжатие)}.$$

Наконец, в сечении $3-3$ правой стойки (рассматриваем нижнюю отсеченную часть)

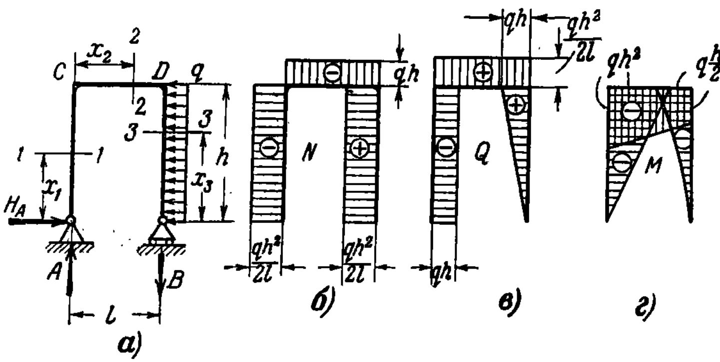
$$N_3 = B = \frac{qh^2}{2l} \text{ (растяжение)}.$$

На эпюре (рисунок *б*)) положительные значения N отложены внутрь, отрицательные — наружу.

б) Построение эпюры поперечных сил. Поперечная сила в сечениях $1-1$, $2-2$, $3-3$:

$$Q_1 = -H_A = -qh; \quad Q_2 = A = \frac{qh^2}{2l}; \quad Q_3 = qx_3 \text{ и } \max Q_3 = qh.$$

Поперечную силу Q считаем *положительной*, если нижняя часть стойки сдвигается влево, а левая часть ригеля[1]) сдвигается вверх. На эпюре



К задаче 4.15.

(рисунок *в*)) значения Q отложены в направлении сдвига нижней части стоек и левой части ригеля.

в) Построение эпюры изгибающих моментов. Уравнения моментов:

$$M_1 = -H_A x_1 = -qhx_1; \quad M_2 = Ax_2 - H_A h = \frac{qh^2}{2l}x_2 - qh^2; \quad M_3 = -\frac{qx_3^2}{2}.$$

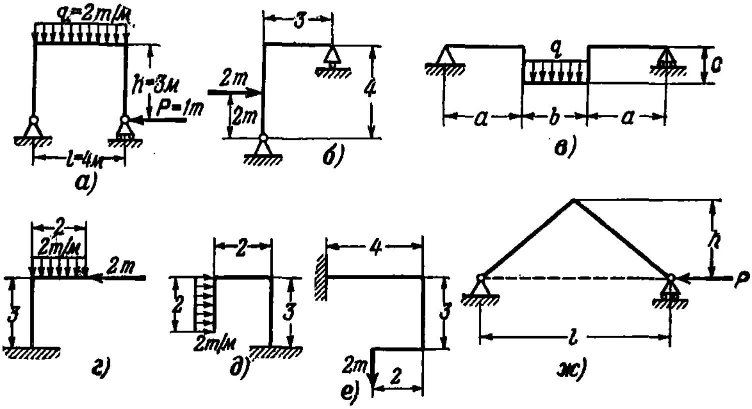
Наибольшие по абсолютному значению величины получат моменты в углах C или D:

$$M_C = -qh^2; \quad M_D = -\frac{qh^2}{2}.$$

Эпюра M построена на рисунке, причем все ординаты отложены на стороне сжатых волокон, как это принято для балок в курсе.

[1]) Ригелем называется горизонтальный стержень рамы.

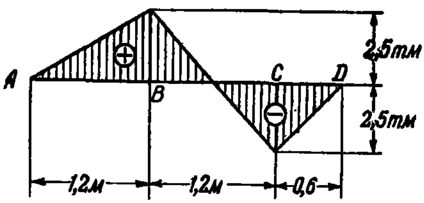
4.16. Построить эпюры N, Q и M для стержней с ломаной осью, изображенных на рисунке. Размеры даны в метрах.



К задаче 4.16.

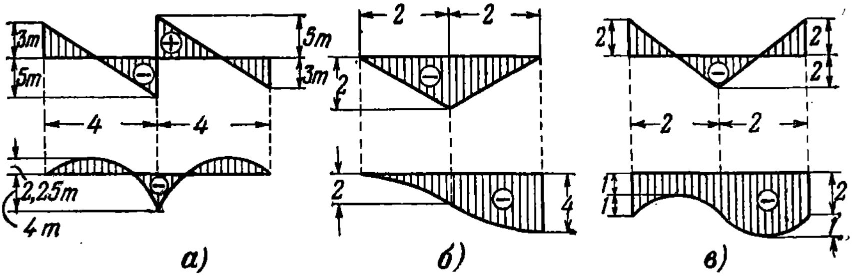
4.17. На рисунке изображена эпюра M для балки, опертой шарнирно в точках A и C. Требуется изобразить нагрузку, эпюру Q и найти опорные реакции.

Ответ: max $Q = 4{,}17$ $т$.



К задаче 4.17.

4.18. Изобразить схемы нагружения балок и определить величины приложенных к ним нагрузок по эпюрам поперечных сил и изгибающих моментов, приведенных на рисунке. Длины показаны в метрах, Q — в $т$, M — в $тм$.



К задаче 4.18.

4.19. Балка $ABCDE$ оперта шарнирно в точках A и D. $AB = 0{,}6$ $м$; $BC = 0{,}6$ $м$; $CD = 1{,}8$ $м$; $DE = 1$ $м$. Балка нагружена сосредоточенной силой $P = 2{,}5$ *т* в точке B. Определить, какую сосредоточенную силу P_1 надо приложить в точке E для того, чтобы изгибающий момент в точке C был равен нулю. Эпюры Q и M построить: 1) с учетом и 2) без учета нагрузки в точке E.

Ответ: $P_1 = 2{,}25$ *т*.

4.20. Балка длиной 10 *м* несет нагрузку 20 *т*, равномерно распределенную на ее длине. Она опирается на три одинаковых гидравлических домкрата, находящихся под одним и тем же внутренним давлением и помещенных на расстояниях 2 *м*, 5 *м* и 8 *м* от одного из концов балки.

а) Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

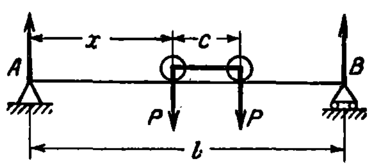
б) Оставляя средний домкрат неподвижным и симметрично перемещая крайние, показать на эпюрах результат их перемещений на расстояния 1 *м* и 9 *м* от одного из концов.

Ответ: а) $M_{min} = -5$ *тм*; $Q_{max} = 4$ *т*;
б) $M_{max} = 4{,}45$ *тм*; $Q_{max} = 4{,}67$ *т*.

4.21. Балка, нагруженная по всей своей длине равномерно распределенной нагрузкой, имеет пролет l и две консоли длиной a каждая. Определить отношение $\frac{l}{a}$, при котором посредине пролета изгибающий момент будет равен нулю, и то отношение $\frac{l}{a}$, при котором величина наибольшего изгибающего момента в пролете будет равна изгибающему моменту над опорой.

Ответ: $a = \frac{l}{2}$; $a = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot l$.

4.22. По балке мостового крана перемещается двухосная тележка, передающая давление P от каждой оси. Как нужно



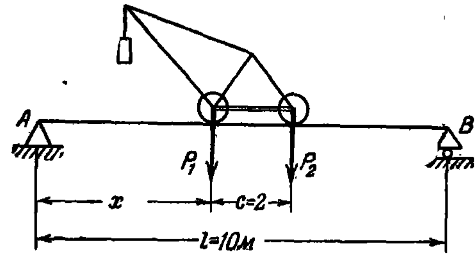
К задаче 4.22.

расположить тележку, чтобы получить наибольшее значение изгибающего момента?

Указание. Обозначив расстояние от левой опоры до груза P через x, определяем величину опорных реакций в виде функций от x. Изгибающий момент в сечении под силой окажется функцией второй степени от x. Исследуя M на максимум, найдем искомое значение x.

Ответ: $x = \frac{l}{2} - \frac{c}{4}$.

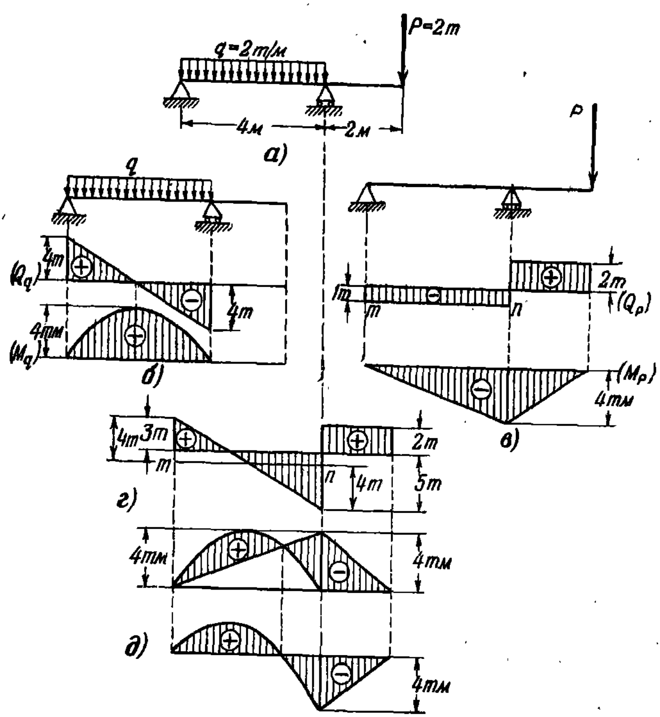
4.23. Двухосная тележка подъемного крана перемещается по двум подкрановым балкам. Расстояние между осями $c = 2$ *м*. Пролет балок $l = 10$ *м*. Давления колес крана на каждую балку равны



К задаче 4.23.

$P_1 = 5$ *т* и $P_2 = 1$ *т*. Найти опасное положение грузов и подсчитать $\max M$.

Ответ: $x = \frac{l}{2} - \frac{c}{12}$.



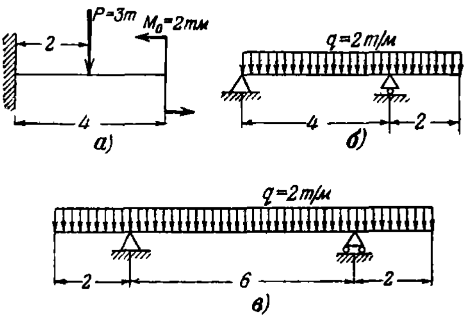
К задаче 4.24.

4.24. Пользуясь методом сложения действия сил, построить эпюры Q и M для балки, изображенной на рисунке *а*).

Решение. Рассматриваем балку, как состоящую из двух: одну, нагруженную только сплошной нагрузкой, и другую — только силой на конце. Для каждой из этих балок эпюры Q и M показаны на рисунках *б*) и *в*). Для получения суммарных эпюр графики одинакового знака прикладываем один к другому, а разных знаков — накладываем один на другой.

Результаты сложения показаны на рисунке *г*). Эпюра Q_P нижней линией mn совмещается с нулевой осью эпюры Q_q, чем осуществляется автоматическое сложение обоих графиков.

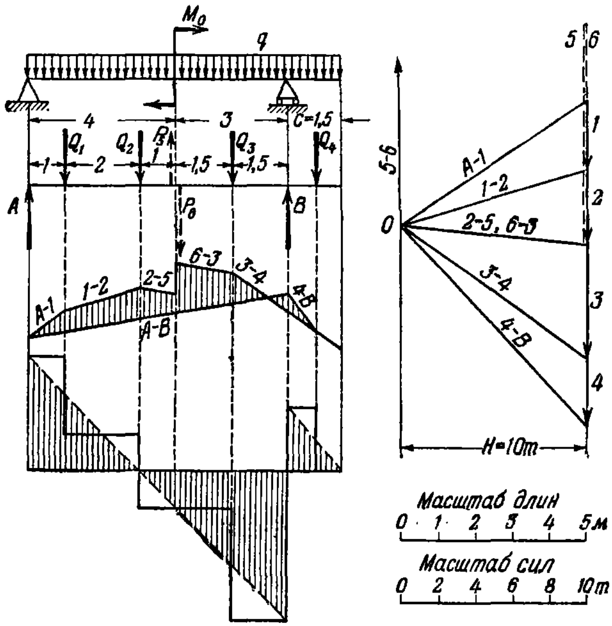
Суммарная эпюра M, показанная на рисунке *г*), приведена к горизонтальной нулевой оси на рисунке *д*).



К задаче 4.26.

4.25. Пользуясь методом сложения действия сил, построить эпюры Q и M для балок, рассмотренных в задаче 4.5.

4.26. Применяя метод сложения действия сил, построить эпюры изгибающих моментов для балок, изображенных на рисунке. Размеры показаны в метрах.



К задаче 4.27.

4.27. Балка на двух опорах пролетом $l = 7$ *м* с консолью $c = 1{,}5$ *м* загружена сплошной равномерно распределенной нагрузкой $q = 2$ *т/м* и парой сил с моментом $M_0 = 6$ *тм*, приложенной на расстоянии $a = 4$ *м* от левой опоры A. Пользуясь графическим методом, построить эпюры Q и M.

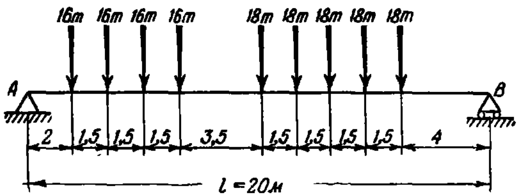
Решение. Выбрав масштаб длин (см. рисунок), вычерчиваем схему балки. Сплошную нагрузку заменяем несколькими сосредоточенными силами, разделив ее, например, на четыре части: $Q_1 = Q_2 = 4$ *т*, $Q_3 = 6$ *т* и $Q_4 = 3$ *т*. Пару сил заменяем двумя вертикальными силами P_5 и P_6 бесконечно большой величины с бесконечно малым плечом между ними.

Выбрав масштаб сил и полюсное расстояние H, строим силовой и веревочный многоугольники. В силовом многоугольнике луч *5—6* параллелен силам, так как линия, соединяющая полюс O с концом силы P_5, пересекается с направлением силы в бесконечности. При построении веревочного многоугольника сторона его, параллельная лучу *5—6*, вертикальна и равна по величине $M_0 = 6$ *тм*. Так как $M = H \cdot \eta = 6$ *тм*, а при построении принято $H = 10$ *т*, то вверх ($M_0 > 0$) отложено $\eta = 0{,}6$ *м*.

При бесконечном увеличении числа сосредоточенных сил Q веревочный многоугольник в пределе обратится в веревочную кривую, а ступенчатая эпюра Q — в наклонную прямую, как показано на рисунке пунктиром.

4.28. Для балок, рассмотренных в задачах 4.3 и 4.8, построить эпюры изгибающих моментов, пользуясь графическим способом.

4.29. Пользуясь графическим способом, построить эпюры Q и M для главной балки моста, загруженной системой сосредоточенных



К задаче 4.29.

сил, заменяющих давление колес паровоза. Размеры показаны в метрах.

Ответ: $\max Q = 81{,}9$ *т*; $\max M = 451$ *тм*.

§ 15. Моменты инерции плоских фигур

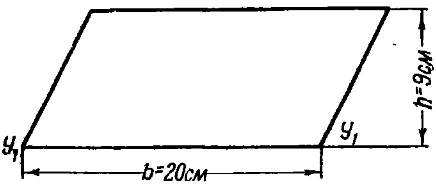
4.30. Вычислить момент инерции площади прямоугольника со сторонами $b = 12$ *см* и $h = 20$ *см* относительно оси y_1, проходящей через его основание, и центробежный момент инерции относительно осей, совпадающих с его сторонами.

Ответ: $J_y' = 32\,000$ *см*^{4}; $J_{yz}' = \frac{b^2h^2}{4} = 14\,400$ *см*^{4}.

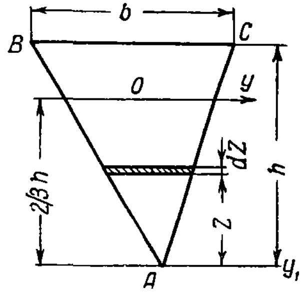
4.31. Найти момент инерции площади параллелограмма (см. рисунок) относительно оси y_1.

Ответ: $J_y' = 4860$ $см^4$.

4.32. Вычислить момент инерции площади треугольника ABC (см. рисунок) относительно оси y_1, проходящей через



К задаче 4.31.



К задаче 4.32.

вершину A параллельно основанию BC. Найти также момент инерции треугольника относительно центральной оси y_0.

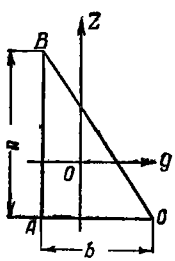
Указание. Выделив элементарную полоску площадью $dF = b(z)\,dz$ и выразив ширину полоски $b(z)$ из подобия треугольников, вычислить $J_y' = \int\limits_F z_1^2\,dF$.

Для определения момента инерции относительно центральной оси y воспользоваться формулой перехода к параллельным осям.

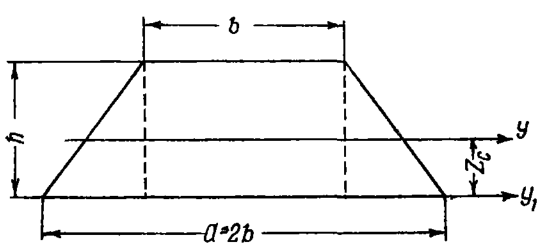
Ответ: $J_y' = \frac{bh^3}{4}$; $J_y = \frac{bh^3}{36}$.

4.33. Найти осевые и центробежный моменты инерции площади прямоугольного треугольника ABC относительно центральных осей Oy и Oz, параллельных катетам (см. рисунок). Вычислить также момент инерции треугольника относительно основания AC.

Ответ: $J_{yz}^0 = -\frac{b^2h^2}{72}$; $J_{AC} = \frac{bh^3}{12}$.



К задаче 4.33.



К задаче 4.34.

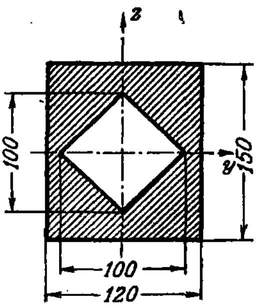
4.34. Вычислить момент инерции площади равнобокой трапеции (см. рисунок) относительно центральной оси y, параллельной основанию.

Указание. Рекомендуется разбить фигуру на части, для которых имеются готовые формулы, хотя бы на прямоугольник и два треугольника.

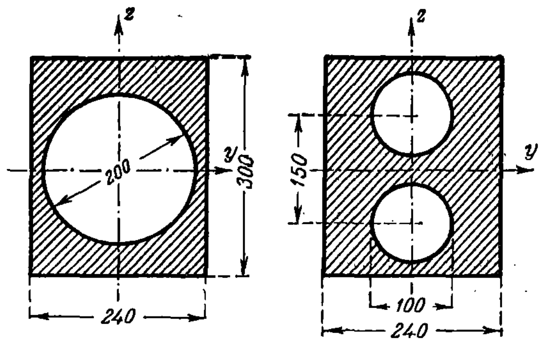
Ответ: $J_y = \frac{13}{108} bh^3 \approx 0{,}12bh^3$.

4.35. Определить момент инерции относительно нейтральной оси y сечения, изображенного на рисунке. Размеры показаны в *мм*.

Ответ: $J_y = 3167$ *см*^{4}.



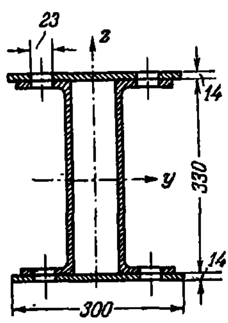
К задаче 4.35.



К задаче 4.36.

4.36. Как изменятся площадь и момент инерции J_y сечения трубчатой балки, изображенной на рисунке *а*), если заменить одно отверстие диаметром 20 *см* — двумя, диаметром каждое по 10 *см*, расположенными, как показано на рисунке *б*)?

Ответ: Площадь увеличится на 38,6%, а момент инерции уменьшится на 2%.



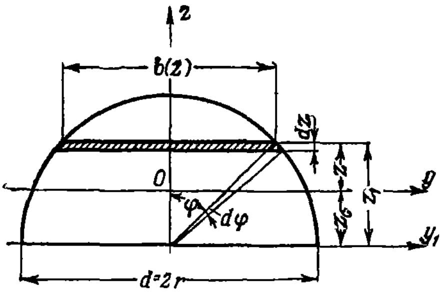
К задаче 4.37.

4.37. Сечение балки состоит из двух швеллеров № 33, усиленных двумя листами 14 × 300 *мм*, приклепанных к полкам. Определить момент инерции сечения относительно центральной оси y с учетом ослабления его заклепочными отверстиями $d = 23$ *мм* (см. рисунок) и оценить ослабление сечения (в процентах к моменту инерции неослабленного сечения).

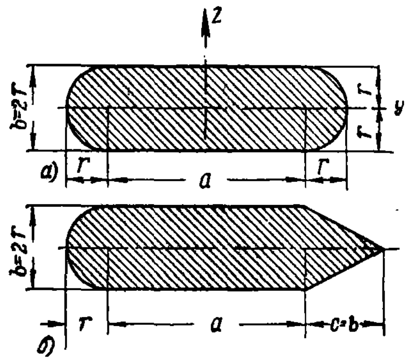
Ответ: $J_{\text{брутто}} = 40\,800$ *см*^{4}; $J_{\text{нетто}} = 34\,300$ *см*^{4}; $\Delta J = 15{,}9\%$.

4.38. Найти моменты инерции полукруга относительно главных центральных осей инерции (см. рисунок).

Ответ: $z_C = \frac{4r}{3\pi}$; $J_y = \frac{\pi r^4}{8}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \approx 0{,}11 r^4$; $J_z = J_y' = \frac{1}{2} J = \frac{\pi r^4}{8}$.



К задаче 4.38.



К задаче 4.39.

4.39. Найти главные моменты инерции сечения мостовых быков, изображенных на схеме.

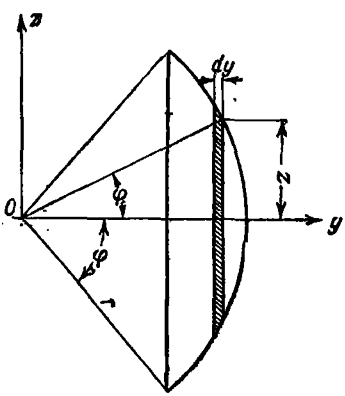
Ответ:

Для *а*) $J_y = \frac{ab^3}{12} + \frac{\pi b^4}{64}$;

$J_z = \frac{ab}{12}(a^2 + 2b^2) + \frac{\pi b^2}{64}(b^2 + 4a^2)$;

для *б*) $J_y = \frac{ab^3}{12} + \frac{\pi r^4}{8} + \frac{cb^3}{48} =$

$= \frac{r^3}{24}(16a + 3\pi r + 8r)$.



К задаче 4.40.

4.40. Вычислить моменты инерции кругового сегмента радиуса r относительно оси y (см. рисунок).

Решение. Момент инерции элементарной полоски высотой $2z$ с основанием dy равен $dJ_y = \frac{dy\,(2z)^3}{12} = \frac{2}{3} z^3\,dy$. Переходя к полярным координатам, имеем

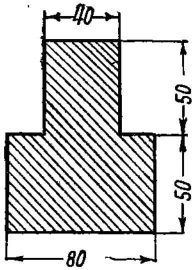
$$y = r\cos\varphi;\quad z = r\sin\varphi;\quad dy = -r\sin\varphi;\quad dJ_y = -\frac{2}{3} r^4 \sin^4\varphi\,d\varphi.$$

Имея в виду, что при изменении переменной y от $y = r\cos\varphi_0$ до $y = r$ угол φ изменяется в пределах от φ_0 до нуля, получим

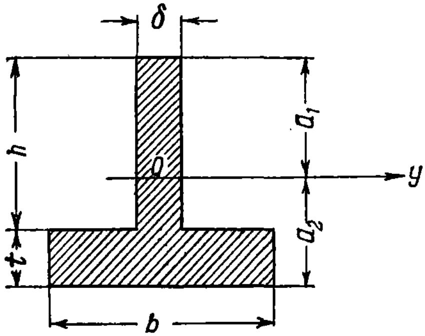
$$J_y = -\frac{2}{3} r^4 \int_{\varphi_0}^{0} \sin^4\varphi\,d\varphi = \frac{r^4}{48}(12\varphi_0 - 8\sin 2\varphi_0 + \sin 4\varphi_0),$$

4.41. Найти момент инерции площади таврового сечения, изображенного на рисунке, относительно центральной оси Oy, параллельной основанию (размеры даны в *мм*).

Ответ: $J_y \approx 458$ *см*^{4}.



К задаче 4.41.



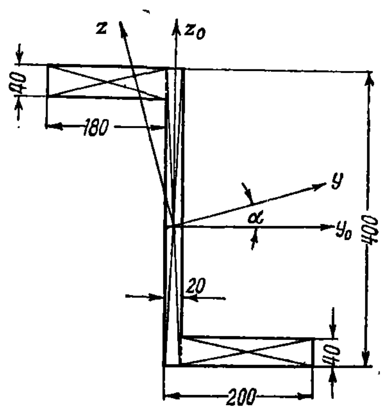
К задаче 4.42.

4.42. По какому закону будет меняться момент инерции площади таврового сечения относительно центральной оси (см. рисунок), если увеличивать толщину полки t, не меняя ширины ее b и сохраняя размеры стенки δ и h?

Ответ: $S_y = \frac{bt^2}{2} + \frac{h\delta}{2}(h+2t)$;

$$J_y^0 = \frac{1}{3}\left[\delta a_1^3 + b a_2^3 - (b-t)(a_2-t)^3\right].$$

4.43. Найти положение главных центральных осей инерции и подсчитать величину главных моментов инерции и наибольшего момента сопротивления для зетового сечения, изображенного на рисунке (размеры даны в *мм*).



К задаче 4.43.

Решение. Центр тяжести сечения совпадает с серединой стенки. Проводим через центр тяжести сечения взаимно перпендикулярные центральные оси так, чтобы они были параллельны сторонам прямоугольников, на которые удобно разбить сечение.

Находим моменты инерции относительно центральных осей инерции y_0 и z_0:

$$J_y^0 = \frac{2\cdot 40^3}{12} + 2\left(\frac{18\cdot 4^3}{12} + 18\cdot 4\cdot 18^2\right) = 57\,500 \text{ см}^4;$$

$$J_z^0 = \frac{2^3\cdot 40}{12} + 2\left(\frac{4\cdot 18^3}{12} + 4\cdot 18\cdot 10^2\right) = 18\,320 \text{ см}^4;$$

$$J_{yz}^0 = -2\cdot 18\cdot 4\cdot 18\cdot 10 = -25\,900 \text{ см}^4.$$

Угол наклона главных осей к осям y_0 и z_0 будет

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J^0_{yz}}{J^0_z - J^0_y} = \frac{-25\,900}{18\,320 - 57\,500} \approx 1{,}322;$$

$$2\alpha = 52^\circ 50' \quad \text{и} \quad \alpha = 26^\circ 25'; \qquad \sin\alpha = 0{,}445;$$

$$\cos\alpha = 0{,}896; \quad \sin 2\alpha = 0{,}797; \quad \cos 2\alpha = 0{,}604.$$

Главные моменты инерции определяются по формулам:

$$J_y = J^0_y \cos^2\alpha + J^0_z \sin^2\alpha - J^0_{yz} \sin 2\alpha;$$

$$J_z = J^0_y \sin^2\alpha + J^0_z \cos^2\alpha + J^0_{yz} \sin 2\alpha.$$

Подставляя значения величин, входящих в эти формулы, получим

$$J_y = 57\,500 \cdot 0{,}896^2 + 18\,320 \cdot 0{,}445^2 - (-25\,900) \cdot 0{,}797^2 = 70\,400 \text{ см}^4;$$

$$J_z = 57\,500 \cdot 0{,}445^2 + 18\,320 \cdot 0{,}896^2 - 25\,900 \cdot 0{,}797 \approx 5420 \text{ см}^4.$$

Проверка.

$$J_y + J_z = 70\,400 + 5420 = 75\,820 \text{ см}^4; \quad J^0_y + J^0_z = 57\,500 + 18\,320 \approx 75\,820 \text{ см}^4;$$

$$J_{yz} = \frac{J^0_y - J^0_z}{2} \sin 2\alpha + J^0_{yz} \cos 2\alpha = \frac{57\,500 - 18\,320}{2} \cdot 0{,}797 - 25\,900 \cdot 0{,}604 \approx 0.$$

Наибольшее расстояние от оси y до края полки

$$z_{\max} = z_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha,$$

где расстояния наиболее удаленной точки от центральных осей y_0 и z соответственно равны:

$$y_0 = -19 \text{ см}; \quad z_0 = 20 \text{ см}.$$

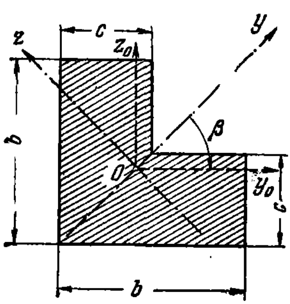
Отсюда

$$z_{\max} = 20 \cdot 0{,}896 + 19 \cdot 0{,}445 = 26{,}37 \text{ см}$$

и момент сопротивления

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{70\,400}{26{,}37} = 2670 \text{ см}^3.$$

4.44. Найти главные моменты инерции уголкового толстостенного профиля, показанного на рисунке, если $b = 2c$.



К задаче 4.44.

Найти также центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей, параллельных полкам.

Ответ: $J_{\max} = \frac{5}{64} b^4; \qquad J_{\min} = \frac{7}{192} b^4;$

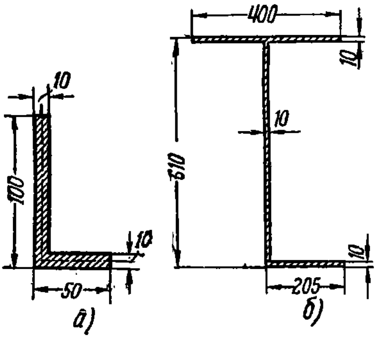
$$J^0_{zy} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin 2\beta =$$

$$= \frac{b^4}{2}\left(\frac{5}{64} - \frac{7}{192}\right) \sin(-90^\circ) = -0{,}022 b^4.$$

4.45. Найти центробежный момент инерции неравнобокого уголка $160 \times 100 \times 10$ относительно центральных осей, параллельных полкам.

Ответ: $J^0_{yz} = -213 \text{ см}^4$.

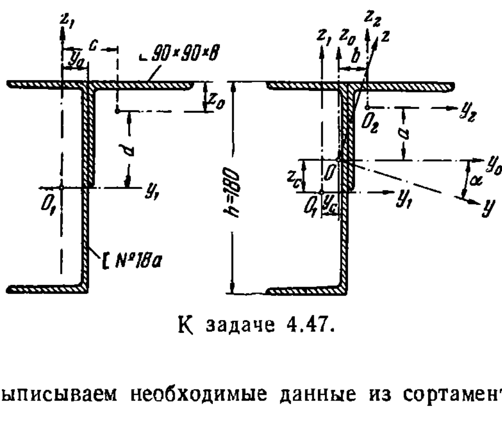
4.46. Найти положение главных центральных осей инерции и вычислить значеиия главных моментов инерции для сечений, изображенных на рисунке. Размеры даны в *мм*.



К задаче 4.46.

Ответ: а) $\alpha = 14°23'$; $J_y = 150$ *см*^{4}; $J_z = 15{,}7$ *см*^{4};
б) $\alpha = 6°26'$; $J_y = 69\,700$ *см*^{4}; $J_z = 6930$ *см*^{4};
в) $\alpha = 31°15'$; $J_y = 78\,100$ *см*^{4}; $J_z = 6000$ *см*^{4}.

4.47. Найти положение главных центральных осей и подсчитать величину главных моментов инерции сечения, составленного из прокатных профилей (см. рисунок).



К задаче 4.47.

Решение. Выписываем необходимые данные из сортамента (ГОСТ 8240—56 и 8509—57):

для швеллера № 18а: $F_1 = 22{,}2$ *см*^{2}; $J_{y_1} = 1190$ *см*^{4}; $J_{z_1} = 105$ *см*^{4}; $y_0 = 2{,}13$ *см*;

для уголка $90 \times 90 \times 8$: $F_2 = 13{,}9$ *см*^{2}; $J_{y_2} = J_{z_2} = 106$ *см*^{2}; $J_{max} = 168$ *см*^{4}; $J_{min} = 43{,}8$ *см*^{4}; $z_0 = 2{,}51$ *см*.

Площадь составного сечения $F = 22{,}2 + 13{,}9 = 36{,}1$ *см*^{2}.

В качестве вспомогательных осей выбираем главные оси швеллера y_1 и z_1. Расстояния от этих осей до центра тяжести уголка:

$$c = y_0 + z_0 = 2{,}13 + 2{,}51 = 4{,}64 \text{ см};$$

$$d = \frac{h}{2} - z_0 = 9 - 2{,}51 = 6{,}49 \text{ см}.$$

Статические моменты сечения относительно осей y_1 и z_1:

$$S_{y_1} = F_2 d = 13{,}9 \cdot 6{,}49 = 90 \text{ см}^3;$$

$$S_{z_1} = F_2 c = 13{,}9 \cdot 4{,}64 = 64{,}5 \text{ см}^3.$$

Расстояния от осей y_1 и z_1 до центра тяжести сечения:

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{64{,}5}{36{,}1} \cong 1{,}80 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{90}{36{,}1} \cong 2{,}50 \text{ см}.$$

Пользуясь формулами перехода к параллельным осям, подсчитаем моменты инерции сечения относительно центральных осей y_0 и z_0:

$$J_{y_0} = \sum (J_y^c + F_i a_i^2); \quad J_{z_0} = \sum (J_z^c + F_i b_i^2); \quad J_{z_0 y_0} = \sum (J_{yz}^c + F_i a_i b_i)$$

или

$$J_{y_0} = (1190 + 22{,}2 \cdot 2{,}5^2) + [106 + 13{,}9\,(6{,}49 - 2{,}50)^2] = 1655 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_0} = (105 + 22{,}2 \cdot 1{,}79^2) + [106 + 13{,}9\,(4{,}64 - 1{,}79)^2] = 395 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0 z_0} = (22{,}2 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}79) + \left[\frac{168 - 43{,}8}{2} + 13{,}9\,(6{,}49 - 2{,}50)\,(4{,}64 - 1{,}79)\right] = 320 \text{ см}^4.$$

(В последней формуле центробежный момент инерции швеллера относительно собственных осей $J_{zy}^c = J_{z_1 y_1} = 0$, а собственный центробежный момент инерции площади уголка $J_{zy}^c = J_{z_2 y_2} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin 2\beta$, где $\beta = 45°$.)

Угол наклона главных осей инерции к центральным осям y_0 и z_0:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{y_0 z_0}}{J_{z_0} - J_{y_0}} = \frac{2 \cdot 320}{395 - 1655} = -0{,}509,$$

$$2\alpha = -27°; \quad \alpha = -13°30'; \quad \sin\alpha = -0{,}233; \quad \cos\alpha = 0{,}972; \quad \sin 2\alpha = -0{,}454;$$
$$\cos 2\alpha = 0{,}891.$$

Главные моменты инерции сечения:

$$J_y = J_{y_0} \cos^2\alpha + J_{z_0} \sin^2\alpha - J_{y_0 z_0} \cdot \sin 2\alpha =$$
$$= 1655 \cdot 0{,}972^2 + 395 \cdot 0{,}233^2 + 320 \cdot 0{,}454 = 1732 \text{ см}^4;$$

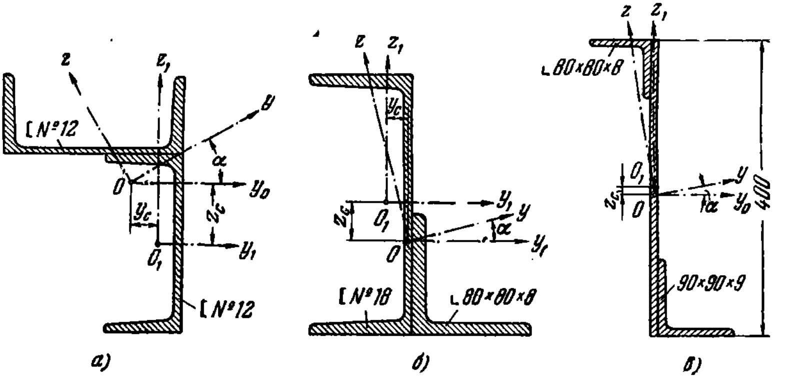
$$J_z = J_{y_0} \sin^2\alpha + J_{z_0} \cos^2\alpha + J_{y_0 z_0} \sin^2\alpha =$$
$$= 1655 \cdot 0{,}233^2 + 395 \cdot 0{,}972^2 - 320 \cdot 0{,}454 = 317 \text{ см}^4.$$

Проверки: 1) $J_y + J_z = J_{y_0} + J_{z_0}$; 2) $J_{yz} = 0$;

1) $J_y + J_z = 1732 + 317 = 2049$ см^4; $J_{y_0} + J_{z_0} = 1655 + 395 = 2050$ см^4;

2) $J_{yz} = \frac{J_{y_0} + J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha = \frac{395 - 1655}{2} \cdot 0{,}454 + 320 \cdot 0{,}981 \approx 0.$

4.48. Найти положение главных центральных осей инерции и вычислить главные моменты инерции брутто для сечений, составленных из прокатных профилей (см. рисунок). Размеры даны в *мм*.



К задаче 4.48.

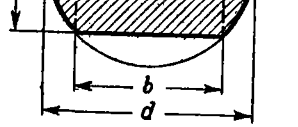
Ответ: а) $y_c = -2{,}23$ *см*; $z_c = 3{,}77$ *см*; $\alpha = 30°15'$; $J_y = 844$ *см*^{4}; $J_z = 332$ *см*^{4};

б) $y_c = 1{,}57$ *см*; $z_c = 2{,}51$ *см*; $\alpha = 11°40'$; $J_y = 1565$ *см*^{4}; $J_z = 243$ *см*^{4};

в) $y_c = 0{,}2$ *см*; $z_c = -0{,}8$ *см*; $\alpha = 6°20'$; $J_y = 14\,220$ *см*^{4}; $J_z = 256$ *см*^{4}.

4.49. Найти момент инерции относительно оси y сечения, образованного из круга срезом сегментов (см. рисунок).

Ответ: $J_y = \frac{d^4}{32}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)$.



К задаче 4.49.

4.50. Найти наивыгоднейшие с точки зрения прочности на изгиб размеры прямоугольного поперечного сечения бруса, который может быть выпилен из бревна диаметром d (см. рисунок к задаче 4.49).

Указание. Выразить один из размеров прямоугольника через диаметр и другой размер, составить затем выражение для момента сопротивления сечения W_y и исследовать его на максимум.

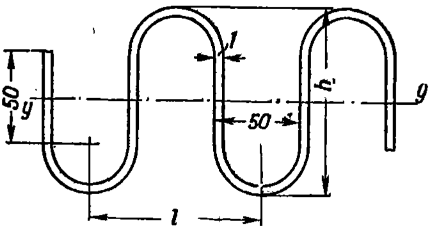
Ответ: $W_y = \frac{b}{6}(d^2 - b^2)$; $b = \frac{d}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577d$;

$$h = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}816d.$$

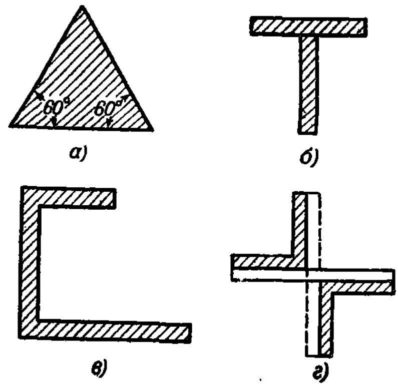
4.51. Найти момент инерции относительно центральной оси y площади поперечного сечения листа волнистого железа шириной

$a = 1{,}0$ *м*, если толщина листа $b = 1$ *мм*, высота волны $h = 100$ *мм*, длина волны $l = 100$ *мм*, а средние радиусы полукругов $r = 25$ *мм* (см. рисунок).

Ответ: $J_y = 280$ *см*^{4}.



К задаче 4.51.

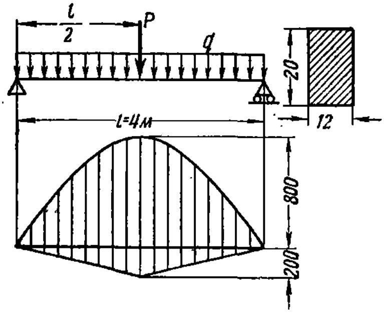


К задаче 4.52.

4.52. Показать примерное расположение главных осей и эллипсов инерции для фигур, изображенных на рисунке.

§ 16. Нормальные напряжения при изгибе

4.53. Определить наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении шарнирно-опертой деревянной балки пролетом $l = 4$ *м*, загруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 400$ *кг/м* и сосредоточенной силой $P = 200$ *кг*, приложенной посредине пролета. Сечение балки — прямоугольник размером $b \times h = 12 \times 20$ *см*^{2}.



К задаче 4.53.

Решение. Наибольший изгибающий момент в силу симметрии будет посредине пролета, причем от равномерно распределенной нагрузки

$$M_q = \frac{ql^2}{8} = \frac{400 \cdot 4^2}{8} = 800 \text{ кгм},$$

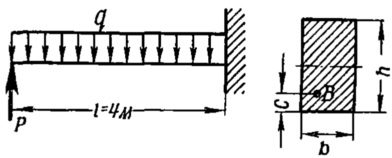
от сосредоточенной силы

$$M_P = \frac{Pl}{4} = \frac{200 \cdot 4}{4} = 200 \text{ кгм}.$$

Суммарный изгибающий момент посредине пролета равен $\max M = 800 + 200 = 1000$ *кгм* $= 1 \cdot 10^5$ *кгсм*. Эпюра изгибающих моментов показана на рисунке.

Момент сопротивления сечения $W = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 20^2}{6} = 800$ *см*^{3}. Наибольшие нормальные напряжения в крайних точках опасного сечения балки $\sigma_{max} = \frac{\max M}{W} = \frac{10^5}{800} = 125$ *кг/см*^{2}.

4.54. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения размером 20×30 *см*, защемленная одним концом в стену, поддерживается на другом конце силой $P=500$ *кг* и нагружена сплошной

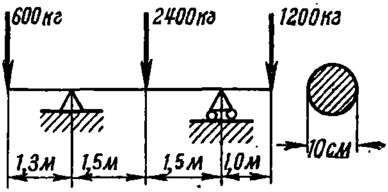


К задаче 4.54.

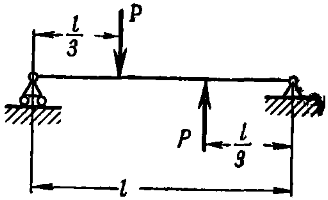
нагрузкой $q=600$ *кг/м*. Сечение балки — прямоугольник со сторонами $b=20$ *см* и $h=30$ *см*. Построить эпюры Q и M и подсчитать нормальные напряжения в крайних точках опасного сечения и в точке, отстоящей от нижнего края на расстояние $c=4$ *см*.

Ответ: $\sigma_{max}=\pm 93$ *кг/см*^{2}; $\sigma_c=-68$ *кг/см*^{2}.

4.55. Для балки круглого сечения, изображенной на рисунке, построить эпюры M и Q и определить наибольшее нормальное напряжение. *Ответ*: $\sigma=1220$ *кг/см*^{2}.



К задаче 4.55.



К задаче 4.56.

4.56. Подобрать по ГОСТу двутавровое сечение балки пролетом 6 *м*, загруженной силами $P=6$ *т*, как показано на рисунке. Допускаемое напряжение принять $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}.

Ответ: I № 22.

4.57. Для балок, защемленных одним концом и загруженных, как показано в таблице на рисунке, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать сечение балок (по сортаменту) при допускаемом напряжении $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}; размеры даны в метрах.

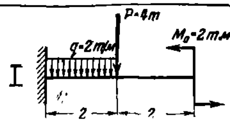
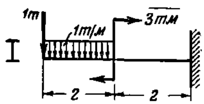
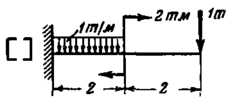
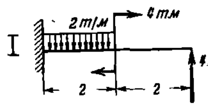
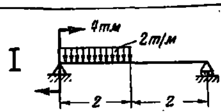
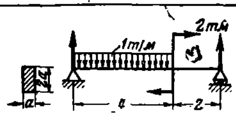
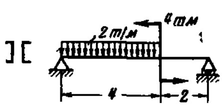
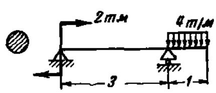
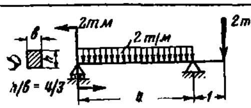
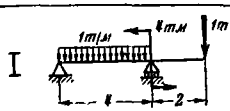
Ответ: См. схемы *а — г* на стр. 130.

4.58[1]. Для двухопорных балок, изображенных на рисунке, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать сечения их. Допускаемые напряжения принять: для прокатных профилей $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}; для квадратных и круглых (сосна) $[\sigma]=$ $=120$ *кг/см*^{2}. Длины участков балок показаны в метрах.

Ответ: См. схемы *д — к* на стр. 130.

[1]) В таблице приведено 10 однотипных схем, обозначенных буквами от *а* до *г* (задача 4.57) и *д — к* (задача 4.58).

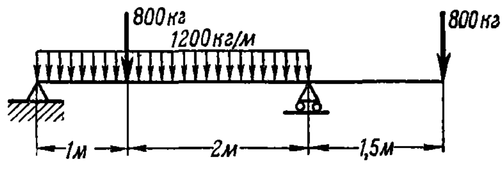
Таблица к задачам 4.57 и 4.58

	Схема балки и нагрузки	Ответ:		Размеры сечения
		Q	M	
		т	тМ	
а		8,0	10,0	I № 33
б		3,0	7,0	I № 30
в		3,0	8,0	2[№ 24*а*
г		4,0	8,0	I № 30*а*
д		2,0	5,0	I № 24*а*
е		2,33	3,33	$a = 16$ *см*
ж		6,0	9,0	2[№ 27
з		4,0	2,0	$d = 25{,}5$ *см*
и		4,0	2,0	18×24
к		2,5	3,12	I № 20*а*

4.59. Две прокатные двутавровые балки № 20*а* расположены рядом и поддерживают стену постоянной высоты. Они заменяются одной двутавровой балкой. Какой № балки следует взять?

Ответ: I № 27*а*.

4.60. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения шириной 15 *см* и высотой 30 *см* нагружена, как указано на рисунке. Построить эпюры M и Q и определить наибольшее нормальное напряжение.



К задаче 4.60.

Ответ: $\sigma_{max} = 60$ *кг/см²*.

4.61. Чугунная труба с наружным диаметром 25 *см* и толщиной стенки 1 *см* лежит на двух опорах, расположенных на взаимном расстоянии 12 *м*, и наполнена водой. Каковы наибольшие нормальные напряжения в трубе, если удельный вес чугуна 7,8?

Ответ: $\sigma_{max} = 412$ *кг/см²*.

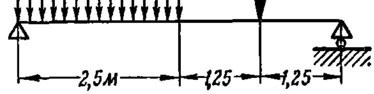
4.62. Балка пролетом 2 *м* свободно лежит на двух опорах, имеет прямоугольное сечение шириной 6 *см* и высотой 10 *см*. Она нагружена сосредоточенной силой 0,5 *т*, приложенной посредине пролета, и сосредоточенной силой 1 *т*, приложенной на расстоянии 0,33 *м* от правой опоры. Определить нормальное напряжение в точке поперечного сечения, отстоящего на 0,33 *м* от левой опоры. Точка находится на расстоянии 2 *см* от верхней грани балки. Силы направлены сверху вниз.

Ответ: $\sigma = -83$ *кг/см²*.

4.63. Балка длиной 6 *м* лежит на двух опорах, расположенных на взаимном расстоянии 4,5 *м*; причем правый конец балки свешивается на 0,5 *м*. Погонный метр балки весит 66 *кг*; кроме того, на расстоянии 2,25 *м* от левой опоры балка нагружена сосредоточенной силой 1 *т*. Определить величину нагрузки, которую нужно приложить к концу левой консоли для того, чтобы изгибающий момент в сечении, где приложена сила 1 *т*, был бы равен нулю. Определить опорные реакции при этих условиях.

Ответ: $P = 2540$ *кг*.

4.64. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, показанной на рисунке. Найти диаметр круглого поперечного сечения балки при $[\sigma] = 1100$ *кг/см²*.



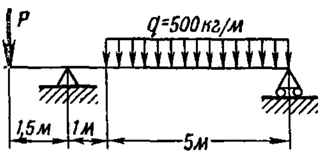
К задаче 4.64.

Ответ: $d = 11,3$ *см*.

4.65. Две балки, одна из которых квадратного, другая — круглого поперечного сечения, имеют одинаковые длину и площадь и выполнены из одинакового материала. Для балки круглого сечения безопасная величина сосредоточенного груза, приложенного посредине пролета, равна 1 *т*. Какова будет для балки квадратного поперечного сечения того же пролета величина безопасного груза, так же приложенного посредине пролета?

Ответ: 1180 *кг*.

4.66. Найти наибольшую величину груза P, который можно безопасно приложить к балке, если допускаемое напряжение равно 1600 $кг/см^2$ и профиль балки — двутавр № 30а. Схема балки показана на рисунке.



К задаче 4.66.

Ответ: $P = 5,52$ *т*.

4.67. Величина сосредоточенного груза, приложенного посредине пролета, который безопасно может выдержать балка постоянного поперечного сечения, опертая по концам, равна 5 *т*. Определить наибольшую величину груза, который может быть приложен к данной балке: а) в четверти пролета и б) равномерно распределенным по всей ее длине.

Ответ: а) 6,67 *т*; б) 10 *т*.

4.68. Двое рабочих должны нести стальной ($\gamma = 7,85$ $г/см^3$) стержень длиной 12 *м* с квадратным поперечным сечением 3×3 $см^2$. Если они возьмут его за концы, то чему будет равно наибольшее нормальное напряжение? Если каждый рабочий возьмет стержень на одинаковом расстоянии a от конца, то в каких местах они должны его взять, чтобы нормальное напряжение не превысило 1400 $кг/см^2$?

Ответ: 1) $\sigma = 2820$ $кг/см^2$; 2) $a \cong 4,25$ *м*.

4.69. На постройке применяются брусья сечением 10×30 *см*, длиной 8,5 *м*. Возник вопрос, можно ли один из этих брусьев применить в качестве временного мостика для перехода рабочих с одной части конструкции на другую при пролете 7 *м*? Можно ли разрешить такое применение бруса, если его положить плашмя? Если да, то можно ли было бы по нему переходить одновременно более чем одному рабочему? Допускаемое напряжение 100 $кг/см^2$, вес рабочего 80 *кг*.

Ответ: Можно разрешить одновременный переход трем рабочим.

4.70. Поперечное сечение чугунной балки пролетом $l = 2,4$ *м* показано на рисунке. Определить величину допускаемой нагрузки, которая может быть приложена посредине пролета при допускаемом напряжении на растяжение $[\sigma] = 150$ $кг/см^2$. Какой величины достигнет при этом наибольшее сжимающее напряжение?

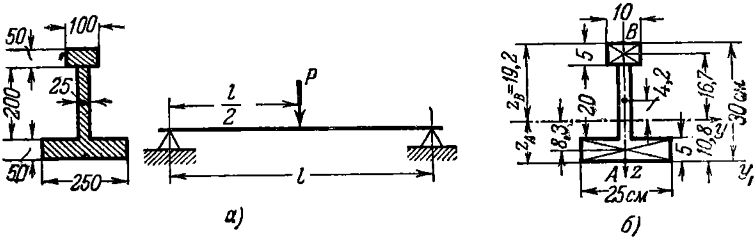
Решение. Разбивая сечение на три прямоугольника, находим: площадь сечения $F = 225$ $см^2$; статический момент сечения относительно оси y_1, проходящей через основание фигуры, $S'_y = 5 \cdot 10\,(30 - 2,5) + 2,5 \cdot 20\,(10 + 5) + 5 \cdot 25 \cdot 2,5 = 2437,5$ $см^3$; расстояние от оси y_1 до центра тяжести сечения

$$z_C = \frac{S'_y}{F} = \frac{2437,5}{225} = 10,8 \text{ см}.$$

Момент инерции сечения относительно центральной оси Oy подсчитываем по формуле перехода к параллельным осям:

$$J_y = \frac{10 \cdot 5^3}{12} + 10 \cdot 5 \cdot 16{,}7^2 + \frac{2{,}5 \cdot 20^3}{12} + 2{,}5 \cdot 20 \cdot 4{,}2^2 + \frac{25 \cdot 5^3}{12} + 5 \cdot 25 \cdot 8{,}3^2 = 25\,470 \ см^4.$$

Величина изгибающего момента, который может быть безопасно допущен



К задаче 4.70.

в балке, определяется по формуле

$$\max \sigma = \frac{\max M}{J_y} \cdot z_A \leqslant [\sigma],$$

где z_A — расстояние от нейтральной оси до крайнего растянутого волокна, равное 10,8 *см*. Следовательно,

$$[M] = \frac{150 \cdot 25\,470}{10{,}8} = 354\,000 \ кгсм = 3{,}54 \ тм.$$

По схеме балки наибольший изгибающий момент

$$\max M = \frac{Pl}{4} \leqslant [M].$$

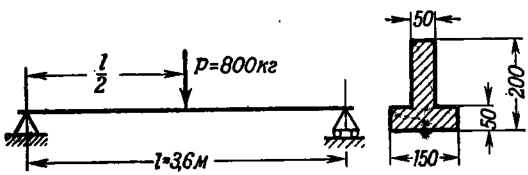
Отсюда искомая величина силы

$$P = \frac{4\,[M]}{l} = \frac{4 \cdot 3{,}54}{2{,}4} = 5{,}9 \ т.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в опасном сечении будут

$$\max \sigma = \frac{\max M z_B}{J_y} = \frac{354\,000 \cdot 19{,}2}{25\,470} = 267 \ кг/см^2.$$

4.71. Тавровая балка (см. рисунок) нагружена сосредоточенной силой посредине пролета. Материал балки имеет предел пропорцио-



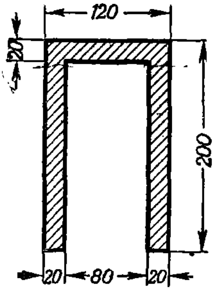
К задаче 4.71.

нальности при растяжении 300 *кг/см²* и при сжатии — 600 *кг/см²*. Определить наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения в среднем сечении балки и найти запасы прочности по отношению к пределу пропорциональности.

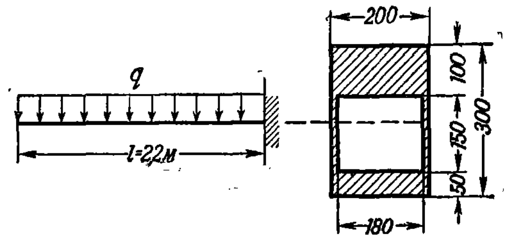
Ответ: $\sigma_{max} = 102$ *кг/см²*; $\sigma_{min} = -170$ *кг/см²*.

4.72. Определить величину наибольших нормальных напряжений в балке П-образного сечения с пролетом $l = 1,1$ *м*, защемленной одним концом и нагруженной силой $P = 4,0$ *т* на другом конце. Размеры сечения показаны на рисунке в *мм*.

Ответ: $\sigma_{max} = 1350$ *кг/см²*.



К задаче 4.72.



К задаче 4.73.

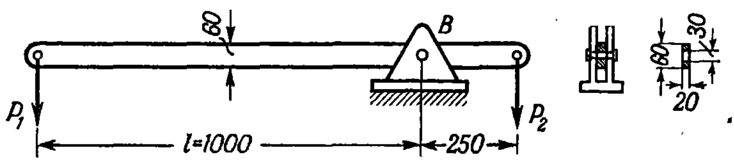
4.73. Определить грузоподъемность чугунной балки, сечение которой и схема нагрузки изображены на рисунке, при допускаемом напряжении на растяжение 120 *кг/см²*, а на сжатие 500 *кг/см²*.

Ответ: $q = 1,41$ *т/м*.

4.74. Как изменится грузоподъемность балки квадратного сечения, если ее повернуть вокруг продольной оси на 45°?

Ответ: Уменьшится на 29,3%.

4.75. Стальной рычаг тормозного устройства состоит из штанги прямоугольного поперечного сечения 20×60 *мм*, опирающейся в точке B (см. рисунок) на шарнирный болт, пропущенный сквозь



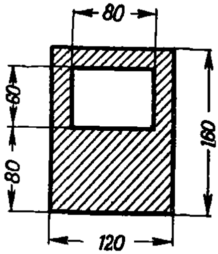
К задаче 4.75.

отверстие в штанге. Центр отверстия расположен на оси штанги; диаметр его $d = 30$ *мм*. Найти, какие силы можно безопасно приложить к концам рычага при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1400$ *кг/см²* и при учете ослабления сечения болтовым отверстием.

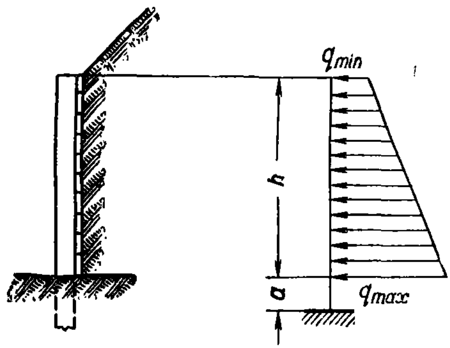
Ответ: $P_1 = 147$ *кг*; $P_2 = 588$ *кг*.

4.76. Чугунная балка трубчатого сечения, свободно лежащая на двух опорах, несет сплошную равномерно распределенную нагрузку по всему пролету $l=2$ *м*. Размеры сечения показаны на рисунке в *мм*. Найти величину нагрузки q_1, если она вызывает в опасном сечении балки сжимающие напряжения $\sigma=400$ *кг/см²*.

Ответ: $q=3$ *т/м*.



К задаче 4.76.

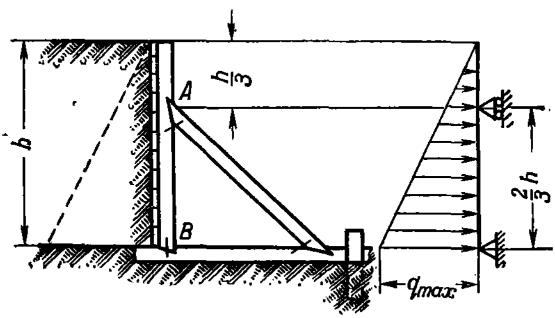


К задаче 4.77.

4.77. Подпорная стенка для ограждения насыпи состоит из круглых свай, поставленных на расстоянии 1,2 *м* друг от друга и обшитых досками шириной $b=20$ *см* (см. рисунок). Давление со стороны насыпи возрастает по линейному закону от $q_{\min}=0,5$ *т/м²* до $q_{\max}=1,8$ *т/м²*. Высота подпорной стенки $h=1,5$ *м*. Вследствие податливости грунта у свободной поверхности, место защемления сваи считается ниже поверхности грунта на величину, которую для рассматриваемого случая можно принять $a=0,25$ *м*. Считая доски обшивки как балки, шарнирно опертые на сваи, с пролетом $l=1,2$ *м*, определить необходимую толщину досок t и подобрать диаметр сваи d при допускаемом напряжении на растяжение и сжатие дерева при изгибе $[\sigma]=100$ *кг/см²*.

Указание. Интенсивность нагрузки на сваю меняется от $q_1=q_{\min}\cdot l=0,6$ *т/м* до $q_2=2,16$ *т/м*. Давление на нижнюю доску $q=\frac{b}{100}q_{\max}$.

Ответ: Для сваи max $M=1,78$ *тм*; $d=26$ *см*. Для доски max $M=0,065$ *тм*; $t=4,4$ *см*.



К задаче 4.78.

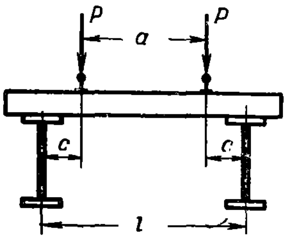
4.78. Подобрать квадратное сечение стоек и толщину досок обшивки для подпорной стенки, изображенной на рисунке. Стойки, поставленные через каждые 2 *м*, опираются на лежни и поддерживаются подкосами, вследствие чего каждая стойка может рассматриваться как балка, шарнирно опертая в точках A и B и нагруженная давлением, передающимся от грунта через обшивку. Продольной силой, возникающей в стойках, пренебречь.

Доски шириной $b = 20$ *см* считать как шарнирно опертые балки, разрезанные на опорах. Высота насыпи $h = 1{,}5$ *м*. Давление грунта возрастает по линейному закону от нуля до $q_{max} = 1{,}3$ *т/м*. Допускаемое напряжение на растяжение и сжатие при изгибе $[\sigma] = 100$ *кг/см²*.

Ответ: Для стойки 16×16 *см²*; для обшивки $t = 6{,}25$ *см*.

§ 17. Касательные напряжения при изгибе

4.79. Балка прямоугольного поперечного сечения пролетом 2 *м*, шириной 7,5 *см* и высотой 15 *см* шарнирно оперта по концам. Определить нормальные и касательные напряжения в точке, отстоящей на 5 *см* вверх от нейтральной оси в поперечном сечении, расположенном на расстоянии 75 *см* от левой опоры. Балка нагружена сосредоточенной силой 400 *кг*, приложенной посредине пролета.

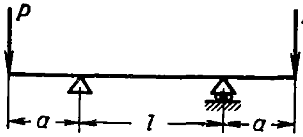


К задаче 4.80.

Ответ: $\sigma = 35{,}5$ *кг/см²*; $\tau_c = 1{,}5$ *кг/см²*.

4.80. Подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения деревянного мостового бруса с отношением сторон $\frac{h}{b} = \frac{4}{3}$ при допускаемых напряжениях: на растяжение и сжатие при изгибе $[\sigma] = 100$ *кг/см²* и на скалывание при изгибе $[\tau] = 25$ *кг/см²*. Пролет бруса $l = 2{,}0$ *м*, расстояние между осями рельсов $a = 1{,}6$ *м*. Давления, передающиеся на брус от колес подвижного состава через рельсы, $P = 9{,}8$ *т* (см. рисунок).

Указание. Предварительный подбор сечения производится из условия прочности по нормальным напряжениям в сечении, где $M = M_{max}$. Затем проверяется прочность этого сечения по касательным напряжениям и в случае необходимости выполняется окончательный подбор сечения из условия прочности по касательным напряжениям.



К задаче 4.81.

Ответ: 21×28 *см²*.

4.81. Подобрать сечение двутавровой балки, изображенной на рисунке, при допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие при изгибе $[\sigma] = 1600$ *кг/см²* и на срез $[\tau] = 1000$ *кг/см²*. Балка изгибается сосредоточенными силами $P = 20$ *т*, $l = 2$ *м*, $u = 0{,}2$ *м*.

Ответ: I № 33.

4.82. Балка прямоугольного поперечного сечения шириной 10 *см* и высотой 15 *см* свободно лежит на двух опорах, имея пролет 4 *м*; она нагружена на длине 2 *м* симметрично относительно своей середины равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 2 *т/м*. Определить величину касательного напряжения в точке, отстоящей на 4 *см* от нижней грани балки и лежащей в сечении, находящемся на расстоянии 0,5 *м* от правой опоры.

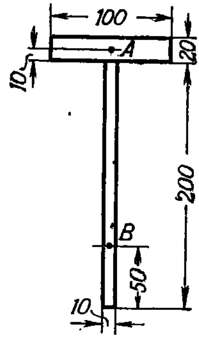
Ответ: $\tau = 15{,}6$ *кг/см*^{2}.

4.83. Определить наибольшие касательные напряжения в двутавровой балке № 18, свободно опертой на пролете 4 *м*; балка нагружена по всему пролету равномерно распределенной нагрузкой, вызывающей наибольшее нормальное напряжение, равное 1400 *кг/см*^{2}.

Ответ: $q = 1$ *т/м*; $\max\tau = 248$ *кг/см*^{2}.

4.84. Сечение балки изображено на рисунке. От действия поперечной силы $Q = 6$ *т* определить касательные напряжения в точках A и B.

Ответ: 19 *кг/см*^{2} и 207 *кг/см*^{2}.

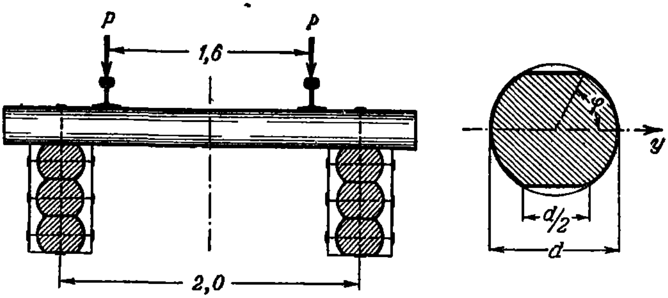


К задаче 4.84.

4.85. Определить величину наибольших касательных напряжений в подвергающейся изгибу круглой трубе с наружным диаметром $D = 20$ *см* и внутренним $d = 18$ *см*, если поперечная сила $Q = 6$ *т*.

Ответ: $\max\tau = 200$ *кг/см*^{2}.

4.86. Поперечные мостовые брусья, состоящие из бревен диаметром $d = 25$ *см*, отесанных на два канта, несут нагрузку, передающуюся через рельсы от колес паровоза, — $P = 6$ *т* (см. рисунок). Проверить прочность брусьев



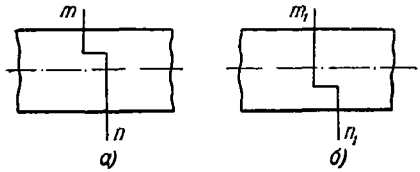
К задаче 4.86.

при допускаемых напряжениях на изгиб $[\sigma] = 100$ *кг/см*^{2} и на скалывание при изгибе $[\tau] = 20$ *кг/см*^{2}.

Указание. Момент инерции сечения круга со срезанным сегментом $J_y = \frac{d^4}{32}(\varphi - 0{,}25\sin 4\varphi)$; статический момент полусечения относительно центральной оси y равен $S_y = \frac{d^3}{12}(1 - \cos^3\varphi)$ [см. задачу 4.49].

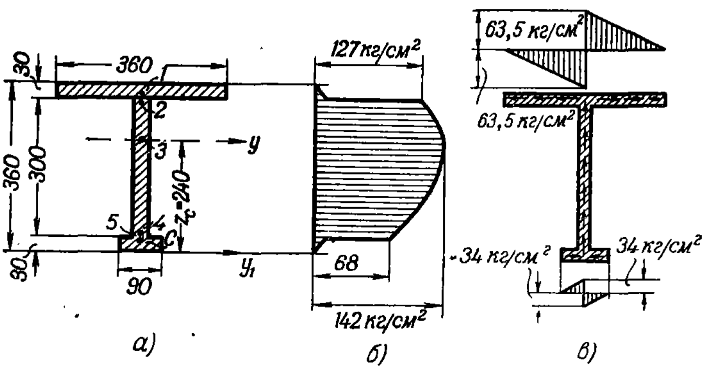
Ответ: $\max\sigma = 86$ *кг/см*^{2}; $\max\tau = 18$ *кг/см*^{2}.

4.87. Показать направление касательных напряжений, передающихся через ступенчатый разрез балки прямоугольного сечения от правой части балки на левую и обратно при положительной и отрицательной поперечной силе в сечении (см. рисунок).



К задаче 4.87.

4.88. Построить эпюру распределения касательных напряжений по высоте несимметричного двутаврового сечения, показанного на рисунке, с вычислением значений τ в точках сопряжения стенки



К задаче 4.88.

с полками и на уровне нейтрального слоя, если $Q=12$ *т*. Размеры сечения даны в *мм*. Толщина стенки $\delta=30$ *мм*.

Решение. Расстояние до центра тяжести сечения от оси y_1 вычислено по формуле $z_C=\frac{S'y}{F}$ и равно $z_C\approx 24$ *см*.

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси y равен $J_y=35\,640$ *см*^{4}.

Статические моменты сдвигающейся части сечения соответственно равны:

верхней полки $S_1=3\cdot 36\cdot 10{,}5=1135$ *см*^{3};

нижней полки $S_2=9\cdot 3\cdot 22{,}5=607$ *см*^{3};

$$\text{полусечения } S=S_2+3\cdot 21\cdot\frac{21}{2}=607+663=1270 \text{ см}^3.$$

При вычислении горизонтальных касательных напряжений, действующих вдоль полок, для точек *1* и *4* в формулу τ вводятся соответственно $0{,}5S_1$ и $0{,}5S_2$, а вместо ширины сечения — толщина полки.

Подсчет касательных напряжений в точках выполнен в таблице:

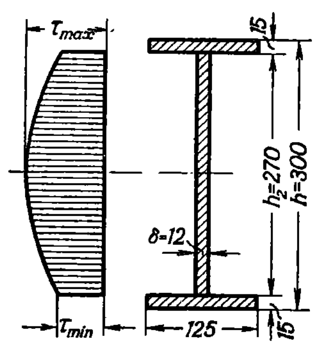
Касательные напряжения

№ точек	Место расположения точек	Ширина сечения $b(z)$ *см*	Статический момент $S_y(z)$ *см*^{3}	$\tau=\dfrac{QS(z)}{J_y b(z)}$ *кг/см*^{2}
1	В верхней полке	3,0	567,5	$\tau_1=\dfrac{12\,000\cdot567,5}{35\,640\cdot3}=63,5$
2	В стенке	3,0	1135	$\tau_2=\dfrac{12\,000\cdot1135}{35\,640\cdot3}=127$
3	» »	3,0	1270	$\tau_3=\dfrac{12\,000\cdot1270}{35\,640\cdot3}=142$
4	» »	3,0	607	$\tau_4=\dfrac{12\,000\cdot607}{35\,640\cdot3}=68$
5	В нижней полке	3,0	303,5	$\tau_5=\dfrac{12\,000\cdot303,5}{35\,640\cdot3}=34$

В стенке касательные напряжения направлены вертикально, в полках — горизонтально — в противоположные стороны. Эпюра распределения касательных напряжений по сечению и их направление показаны на рисунках *б*) и *в*).

4.89. Найти величину наибольших и наименьших касательных напряжений в стенке двутавровой балки, возникающих от действия поперечной силы $Q=30$ *т*. Найти долю поперечной силы, воспринимаемой стенкой. Размеры поперечного сечения балки в *мм* показаны на рисунке.

Ответ: $\tau_{max}=980$ *кг/см*^{2};
$\tau_{min}=698$ *кг/см*^{2};
$Q_{ст}=0,96Q\approx28,8$ *т*.



К задаче 4.89.

4.90. Деревянная балка квадратного трубчатого сечения пролетом $l=3$ *м*, свободно лежащая на двух шарнирных опорах, нагружена сплошной нагрузкой $q=1$ *т/м*. Размеры сечения: наружные 20×20 *см*^{2}, внутренние 10×10 *см*^{2}. Найти величину наибольших нормальных и касательных напряжений в сечениях, где M_{max} и Q_{max}.

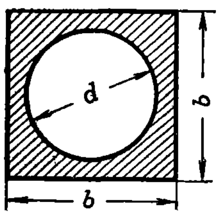
Ответ: $\max\sigma=90$ *кг/см*^{2}; $\max\tau=10,5$ *кг/см*^{2}.

4.91. Чугунная балка трубчатого сечения, свободно лежащая на двух опорах, нагружена двумя равными симметрично расположенными силами $P=6,0$ *т*, приложенными на расстояниях $a=0,7$ *м* от опор.

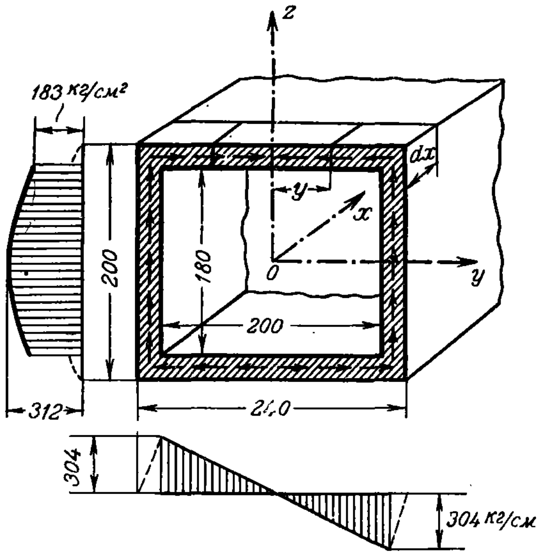
Найти наибольшую величину нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки, если пролет $l = 3{,}0$ *м*, а размеры сечения $b = 24$ *см*, $d = 20$ *см* (см. рисунок).

Ответ: $\max \sigma = 254$ *кг/см²*; $\max \tau = 80$ *кг/см²*.

4.92. Стальная балка прямоугольного трубчатого сечения пролетом $l = 4$ *м* свободно оперта по концам и нагружена двумя равными силами P, приложенными

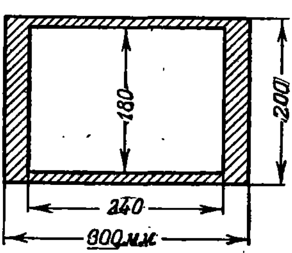


К задаче 4.91.



К задаче 4.92.

в одинаковых расстояниях $a = 0{,}5$ *м* от опор. Сечение балки показано на рисунке, размеры даны в *мм*. Найти величину сил P из условия прочности по нормальным напряжениям при $[\sigma] = 1600$ *кг/см²* и построить эпюры изменения касательных напряжений по высоте и ширине сечения.



К задаче 4.93.

Ответ: $P = 20$ *т*. Эпюры $\tau(y)$ и $\tau(z)$ показаны на рисунке. В местах сопряжения вертикальных и горизонтальных стенок они даны условно.

4.93. Определить величину наибольших касательных напряжений, возникающих в стенках прямоугольного трубчатого сечения балки (см. рисунок) под действием вертикальной поперечной силы $Q = 24$ *т*.

В какой из стенок сечения касательные напряжения будут больше — в вертикальной или горизонтальной? Построить эпюры распределения касательных напряжений по высоте и ширине сечения.

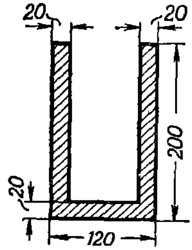
Ответ: $\max \tau = 395$ *кг/см²*. Величина наибольших касательных напряжений в горизонтальных стенках на 30% выше, чем в вертикальных по нейтральному слою.

4.94. Как изменится отношение между величинами горизонтальных и вертикальных касательных напряжений в сечении балки, рассмотренной в предыдущей задаче, если повернуть сечение на 90°, сделав длинную сторону его высотой?

Ответ: Наибольшие касательные напряжеиия в вертикальных стенках сечения станут в 3,9 раза больше, чем в горизонтальных стенках.

4.95. Балка прямоугольного поперечного сечения пролетом $l=4$ *м*, свободно лежащая на двух опорах, загружена сплошной равномерио распределенной нагрузкой $q=4$ *т/м*. Найти величину наибольших касательных напряжений в сечении посредине пролета балки, если размеры сечения 10×20 *см*². По какой площадке возникнут τ_{max}?

Ответ: $\tau_{max}=600$ *кг/см*².



К задаче 4.96.

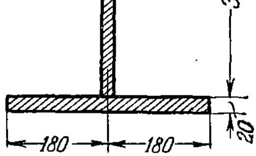
4.96. Найти величину наибольших нормальных и касательных напряжений в балке корытного сечения (см. рисунок), свободно лежащей на двух опорах и нагруженной двумя сосредоточенными силами по 15 *т* каждая. Пролет балки 3 *м*. Силы приложены на равных расстояниях 0,3 *м* от опор. Показать распределение касательных напряжеиий по высоте и ширине сечения балки.

Ответ: $\sigma_{max}=1380$ *кг/см*², $\tau_{max}=265$ *кг/см*².

4.97. Из условия прочиости по нормальным напряжениям определить грузоподъемность широкополочного двутавра пролетом $l=3$ *м*, свободно лежащего на двух опорах и загруженного сосредоточенной силой P, приложенной посредине пролета. Подсчитать величину наибольших касательных напряжений и построить эпюры распределения касательных напряжеиий по высоте стенки и ширине полок. Допускаемые напряжения принять: $[\sigma]=1600$ *кг/см*², $[\tau]=1000$ *кг/см*².

Размеры сечения показаны на рисунке в *мм*.

Ответ: $P=61$ *т*; $\tau=700$ *кг/см*².



К задаче 4.97.

4.98. Построить эпюры распределения касательных напряжений по высоте стенки и ширине полок и определить положение центра изгиба несимметричного двутаврового сечения тонкостенной балки при следующих данных (см. рисунок): размеры сечения равны $h=100$ *мм*, $a=40$ *мм*, $b=60$ *мм*, $t=5$ *мм*, $\delta=6$ *мм*. Поперечная сила, приложенная в центре изгиба, $Q=1800$ *кг*.

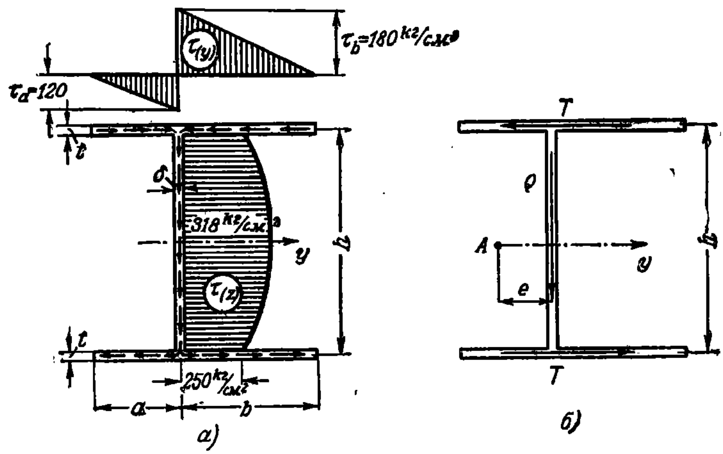
Решение. Момент инерции сечения относительно центральной оси y равен:

$$J_y=2(a+b)t\left(\frac{h}{2}\right)^2+\frac{\delta(h-t)^3}{12}=2\cdot 10\cdot 0{,}5\cdot 5^2+\frac{0{,}6\cdot 9{,}5^3}{12}=300\ см^4.$$

Наибольшие горизонтальные напряжения в полках у мест сопряжения их со стенкой соответственно равны:

$$\tau_a = \frac{Qah}{2J_y}; \qquad \tau_b = \frac{Qbh}{2J_y}.$$

Эпюры касательных напряжений показаны на рисунке. Эти напряжения суммируются в потоки касательных усилий, направленных вдоль



К задаче 4.98.

стенки и полок сечения. Равнодействующая вертикальных усилий принята равной Q. Горизонтальные усилия в полках:

$$T_a = \frac{1}{2}\tau_a at = \frac{Qa^2ht}{4J_y};$$

$$T_b = \frac{1}{2}\tau_b bt = \frac{Qb^2ht}{4J_y}.$$

Таким образом, на каждую полку придутся усилия $T = T_b - T_a = \frac{Qht}{4J_y}(b^2 - a^2)$, образующие пару сил с плечом h (рисунок б)).

Положение центра изгиба найдем из условия:

$$Th - Q\cdot e = 0.$$

Отсюда

$$e = \frac{Th}{Q} = \frac{h^2t}{4J_y}(b^2 - a^2).$$

Подставляя цифровые значения величин, получим

$$e = \frac{10^2\cdot 0,5}{4\cdot 300}\cdot(6^2 - 4^2) = 0,833 \text{ см}.$$

Так как ось y является осью симметрии, то центр изгиба A лежит на этой оси в расстоянии $e = 0,833$ *см* от середины вертикальной стенки (см. 6.113).

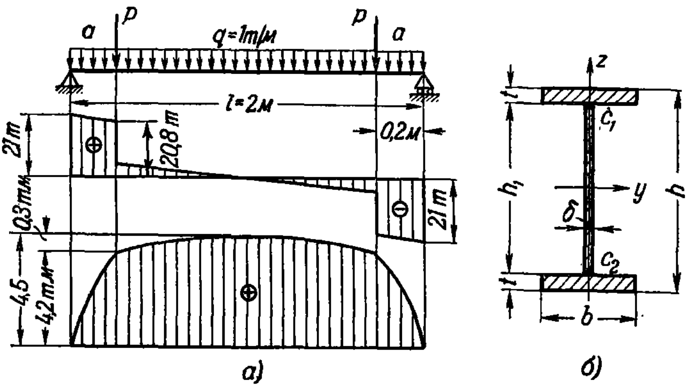
4.99. Балка корытного профиля № 20*а*, защемленная одним концом, нагружена сосредоточенной силой $P = 2{,}0$ *т*, приложенной на другом конце.

В каком расстоянии от центра тяжести сечения балки следует приложить силу P, чтобы избежать скручивания балки? Какие при этом возникнут наибольшие нормальные и касательные напряжения в опасном сечении балки, если пролет ее $l = 1{,}2$ *м*. Сечение рассматривать как состоящее из прямоугольников.

Ответ: Силу следует приложить в центре изгиба, отстоящем от центра тяжести сечения в расстоянии $y_A = -5{,}12$ *см*; $\max\sigma = 1440$ *кг/см²*; $\max\tau = 220$ *кг/см²*.

§ 18. Полная проверка прочности балок

4.100. Произвести полную проверку прочности балки двутаврового сечения (I № 33, ГОСТ 8239—56) по 3-й теории прочности.



К задаче 4.100.

Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой $q = 1$ *т/м* и двумя сосредоточенными силами $P = 20$ *т*, приложенными в равных расстояниях от опор по $a = 0{,}2$ *м* (см. рисунок). Пролет балки $l = 2$ *м*. Допускаемые напряжения принять: на растяжение и сжатие $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*, на срез $[\tau] = 1050$ *кг/см²*. Сечение балки можно схематизировать, рассматривая его состоящим из прямоугольников (рис. *б*).

Решение. Эпюры Q и M изображены на рис. *а*). $Q_{\max} = 21$ *т*; $M_{\max} = 4{,}5$ *тм*. Размеры сечения и геометрические его характеристики (см. приложение, табл. 3) соответственно равны:

$$h = 33 \text{ см};\ b = 14 \text{ см};\ t = 1{,}12 \text{ см};\ \delta = 0{,}7 \text{ см};\ J_y = 9840 \text{ см}^4;$$

$$W_y = 597 \text{ см}^3;\ S_{\max} = 339 \text{ см}^3.$$

а) Проверка по нормальным напряжениям производится для точек опасного сечения (где $M=M_{max}$), наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_y}=\frac{4{,}5\cdot 10^5}{597}=755\ кг/см^2.$$

В рассматриваемом сечении имеется излишний запас прочности $\Delta k=\frac{1600-755}{1600}\cdot 100=53\%$. Однако пока не выполнены другие проверки, еще нельзя судить о прочности балки в целом.

б) Проверка по касательным напряжениям в сечении балки над опорой (где $Q=Q_{max}$) производится для точек нейтрального слоя по формуле Журавского:

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}S_{max}}{J_y\cdot\delta}=\frac{21000\cdot 339}{9840\cdot 0{,}7}=1035\ кг/см^2<1050\ кг/см^2.$$

Для этих точек запас прочности только немногим больше 1%.

в) Проверка по главным напряжениям производится для точек, где σ и τ имеют большие значения, т. е. для того сечения балки, где M и Q достаточно велики. Такие сечения имеются под силами P, где $Q=20{,}8\ т$, а $M=4{,}2\ тм$; опасными точками в этих сечениях являются точки c_1 и c_2, принадлежащие стенке двутавра и расположенные у мест сопряжения ее с полками. В этих точках как нормальные, так и касательные напряжения (в зависимости от которых вычисляются главные напряжения σ_1 и σ_3) близки по величине к наибольшим в этом сечении.

Заметим, что горизонтальные касательные напряжения в полках профиля, где σ несколько выше, заведомо значительно меньше, чем в точках «С» стенки. Поэтому проверка прочности для точек, принадлежащих полкам, излишня.

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений (3-я теория) для плоского напряженного состояния при изгибе имеет вид

$$\sigma_{расч}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma],$$

где

$$\sigma=\sigma_c=\frac{Mz_c}{J_y}\quad и\quad \tau=\tau_c=\frac{QS_y^c}{J_y\delta}.$$

Здесь:

расстояние от нейтральной оси y до точки C

$$z_c=\frac{h_1}{2}=\frac{h-2t}{2}=\frac{30{,}8}{2}=15{,}4\ см;$$

статический момент площади полки, расположенной выше точки C_1,

$$S_y^c=bt\,\frac{h-t}{2}=14\cdot 1{,}12\,\frac{33-1{,}12}{2}\approx 250\ см^3.$$

Величины нормальных и касательных напряжений в точке C, входящие в расчетную формулу, будут:

$$\sigma_c=\frac{M\cdot z_c}{J_y}=\frac{4{,}2\cdot 10^5}{9840}\cdot 15{,}4=656\ кг/см^2,$$

$$\tau_c=\frac{Q\cdot S^c}{J_y\delta}=\frac{20800\cdot 250}{9840\cdot 0{,}7}=752\ кг/см^2.$$

После подстановки получим

$$\sigma_{расч}=\sqrt{\sigma_c^2+4\tau_c^2}=\sqrt{656^2+4\cdot 752^2}=1640\ кг/см^2>1600.$$

В рассматриваемых точках сечения получено перенапряжение, составляющее $\Delta k = \frac{1640 - 1600}{1600} \cdot 100 = 2{,}5\%$, что допустимо.

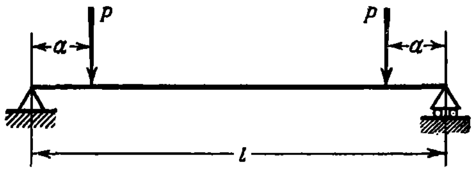
Произведенная проверка прочности показывает, что профиль балки выбран «в обрез», хотя величина наибольших нормальных напряжений в крайних волокнах опасного сечения сравнительно невелика.

4.101. Подобрать сечение балки двутаврового профиля и произвести полную проверку прочности при следующих данных (см. рисунок):

$$P = 20\ т; \quad a = 0{,}3\ м; \quad l = 3{,}0\ м;$$

$$[\sigma] = 1600\ кг/см^2; \quad [\tau] = 1000\ кг/см^2.$$

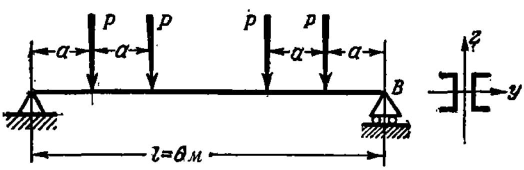
Воспользоваться энергетической теорией прочности.



К задаче 4.101.

Ответ: I № 33; $\sigma_{max} = 1010\ кг/см^2$; $\tau_{max} = 985\ кг/см^2$; $\sigma_{расч} = 1570\ кг/см^2$.

4.102. Балка пролетом $l = 6\ м$, свободно лежащая на двух опорах, загружена четырьмя одинаковыми симметрично расположенными силами $P = 16\ т$ (см. рисунок). Подобрать сечение балки из двух швеллеров, удовлетворяющее условиям прочности по нормальным



К задаче 4.102.

касательным и главным напряжениям, если расстояние между силами $a = 0{,}5\ м$, а допускаемые напряжения приняты $[\sigma] = 1600\ кг/см^2$ и $[\tau] = 800\ кг/см^2$. Воспользоваться 3-й теорией прочности.

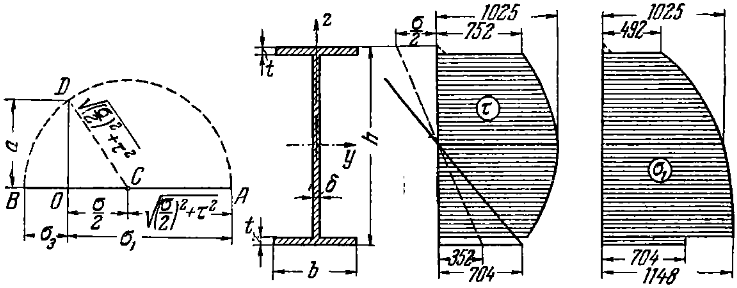
Ответ: Два швеллера № 40.

4.103. Двутавровая балка, свободно лежащая на двух опорах, нагружена силой P, приложенной посредине пролета. При каком пролете l величина наибольших нормальных напряжений в опасном сечении $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$ будет равна величине главного напряжения σ_1

в точке сопряжения стенки с полкой того же сечения? Сечение балки I № 24а.

Ответ: $l=\dfrac{4S^{п}}{\delta\sqrt{2ht}}=147$ *см*.

4.104. Построить эпюры распределения нормальных, касательных и главных напряжений по высоте двутаврового профиля № 33 для сечения под силой P по данным задачи 4.100.



а) *б*)

К задаче 4.104.

Указание. Так как

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2},$$

то после построения эпюр σ и τ (в одном масштабе) можно получить для каждой точки величину σ_1, рассматривая ее как сумму катета и гипотенузы прямоугольного треугольника ODC, катеты которого соответственно равны

$$\frac{\sigma}{2}=OC \text{ и } \tau=OD \text{ (рис. } a).$$

Развернув гипотенузу

$$CD=\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$$

в положение CA, получим величину σ_1. Точно так же строится и эпюра σ_3, для чего гипотенузу CD следует вычесть из $\frac{\sigma}{2}$, т. е. развернуть в другую сторону (CB). Эпюры касательных и главных напряжений по высоте полок следует считать условными.

Ответ: см. рисунок *б*).

4.105. Руководствуясь третьей теорией прочности, произвести полную проверку прочности балки трубчатого прямоугольного сечения с наружными размерами 24×20 *см* и внутренними — 20×18 *см* (см. рисунок к задаче 4.92), если изгибающий момент в опасном сечении балки равен $M=9{,}5$ *тм*, а поперечная сила $Q=20$ *т*.

В каких точках сечения расчетное напряжение получит наибольшее значение? Какова величина главных напряжений в этих точках?

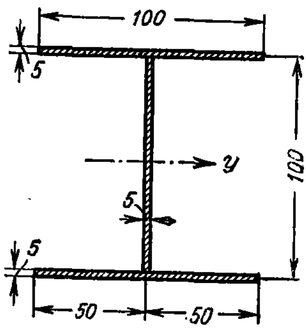
Ответ: В точках горизонтальной стенки трубы около мест сопряжения ее с вертикальными стенками.

$$\sigma_1 = 1580 \text{ кг/см}^2;$$
$$\sigma_3 = -60 \text{ кг/см}^2.$$

4.106. Тонкостенная балка двутаврового сечения подвергается изгибу в вертикальной плоскости. Определить величину главных напряжений в опасных точках стенки и полки, если изгибающий момент в сечении $M = 800$ *кгм*, а поперечная сила $Q = 3600$ *кг*.

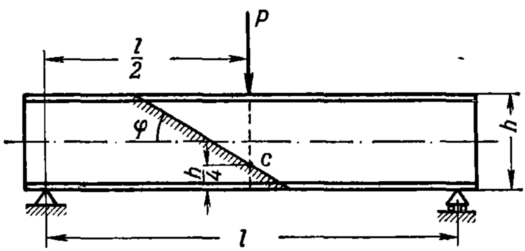
Размеры сечения показаны на рисунке в *мм*.

Ответ: В полке $\sigma_1 = 1515$ *кг/см²*;
$\sigma_3 = -45$ *кг/см²*.
В стенке $\sigma_1 = 1580$ »
$\sigma_3 = -250$ »



К задаче. 4.106.

4.107. Двутавровая балка № 36, свободно лежащая на двух опорах, изгибается сосредоточенной силой $P = 12$ *т*, приложенной посредине пролета балки, $l = 4$ *м* (см. рисунок). Найти величину нормальных и касательных



К задаче 4.107.

напряжений по площадке, наклоненной на угол $\varphi = 35°$ к оси балки, в точке c опасного сечения mn, взятой на четверти высоты от оси балки левее силы P.

Ответ: $\sigma_c = 810$ *кг/см²*; $\tau_c = 235$ *кг/см²*; $\sigma_1 = 873$ *кг/см²*; $\sigma_3 = 63$ *кг/см²*; $\alpha = 70°$; $\sigma_\alpha = 46$ *кг/см²*; $\tau_\alpha = 259$ *кг/см²*.

4.108. Балка двутаврового сечения (I № 24а), свободно лежащая на двух опорах, испытывается на изгиб силой, прикладываемой посредине пролета равными ступенями $\Delta P = 4$ *т*.

Тензометры, расположенные левее опасного сечения в точках оси балки под углом 45° к оси, дают среднее приращение отсчетов (соответствующее ступени нагрузки) $\Delta A = 2{,}61$ *мм*. База тензометров $b = 20$ *мм*, коэффициент увеличения $k = 1200$. Принимая значение модуля упругости $E \approx 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*, найти величину коэффициента Пуассона материала μ.

Указание. Относительное удлинение волокна, измеренное тензометром,

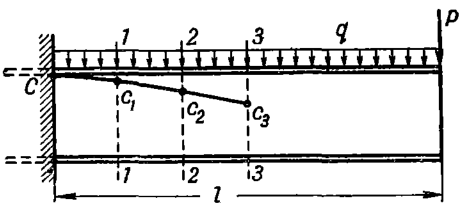
$$\varepsilon = \frac{\Delta A}{kb}.$$

С другой стороны, это удлинение, определяемое из условия чистого сдвига через главные напряжения ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$), выражается формулой

$$\varepsilon_{45} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu).$$

Ответ: $\mu = 0{,}3$.

4.109. Балка двутаврового сечения (⌶ № 27), защемленная одним концом и нагруженная силой $P = 5$ *т* на другом конце, несет



К задаче 4.109.

сплошную нагрузку $q = 2$ *т/м* по всей длине $l = 1$ *м*. Построить траекторию наибольшего главного напряжения σ_1, проходящую через точку C защемленного сечения у места сопряжения стенки с полкой.

Указание. Построить эпюры Q и M. Затем подсчитать σ и τ в заданной точке C и найти величину и направление главного напряжения σ_1 в этой точке. Наметить по длине балки четыре-пять промежуточных сечений, для которых найти значения Q и M. Продолжив найденное в точке C направление σ_1 до встречи с сечением *1—1* (точка C_1) вычислить σ и τ для этой точки и, определив направление главного напряжения σ_{C_1}, продолжить его до пересечения с сечением *2—2* и т. д. В полученную ломаную линию вписать плавную кривую.

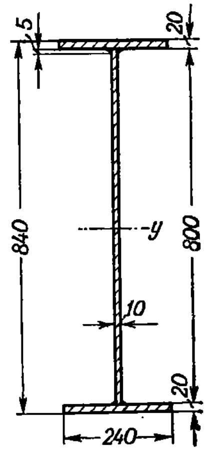
4.110. По данным предыдущей задачи построить траекторию главного сжимающего напряжения σ_3, проходящую через точку пересечения нейтрального слоя с линией *3—3*, проведенной в среднем сечении балки.

§ 19. Расчет составных балок

4.111. Для усиления двутавровой балки № 65 к полкам ее привариваются два горизонтальных листа 240×20 *мм*. При допускаемом напряжении на срез шва $[\tau_э] = 900$ *кг/см²* определить необходимую высоту катета сварных швов (сплошных по длине балки), если поперечная сила $Q = 80$ *т*. Найти также величину наибольших касательных напряжений в стенке усиленного двутавра.

Ответ: $t \approx 5$ *мм*; $\max \tau = 1090$ *кг/см²*.

4.112. Проверить прочность поперечной сварной балки моста, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной сплошной равномерно распределенной нагрузкой $q = 4$ *т/м* и двумя сосредоточенными силами $P = 48$ *т*, приложенными на равных расстояниях от опор $a = 1$ *м*. Пролет балки $l = 8{,}0$ *м*. Сечение показано на рисунке. Размеры даны в *мм*. Катеты швов равны $t = 5$ *мм*. Допускаемые напряжения принять на растяжение и сжатие $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*, на срез основного металла и сварных швов $[\tau] = 1000$ *кг/см²*.



К задаче 4.112.

Решение. Построив эпюры M и Q, находим:

$$\max M = 80\ \textit{тм};\quad \max Q = 64\ \textit{т}.$$

В сечении под силой $M_1 = 62$ *тм*; $Q_1 = 60$ *т*.

Момент инерции и момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси y

$$J_y = \frac{1{,}80^3}{12} + 2\left(\frac{24\cdot 2^3}{12} + 242\cdot 41^2\right) \approx 214\,000\ \textit{см}^4;$$

$$W_y = \frac{214\,000}{42} = 5100\ \textit{см}^3.$$

Статические моменты относительно оси y: а) одной из полок $S_п = 2\cdot 24\cdot 41 = 1970$ *см³*; б) полусечения $S = 1970 + 1\cdot 40\cdot 20 = 2770$ *см³*.

Проверка прочности сечения

а) по нормальным напряжениям:

$$\max\sigma = \frac{\max M}{W} = \frac{80\cdot 10^5}{5100} = 1570\ \textit{кг/см}^2 < 1600;$$

б) по касательным напряжениям:

$$\max\tau = \frac{QS_{\max}}{J_y\delta} = \frac{64\,000\cdot 2770}{214\,000\cdot 1} = 828\ \textit{кг/см}^2 < 1000;$$

в) по главным напряжениям на уровне поясных швов в сечении под силой.

Составляющие напряжения равны:

$$\sigma_C = \frac{M_1 z_C}{J_y} = \frac{62\cdot 10^5\cdot 40}{214\,000} = 1160\ \textit{кг/см}^2;\quad \tau_C = \frac{Q_1 S_п}{J_y\delta} = \frac{60\,000\cdot 1970}{214\,000\cdot 1} = 552\ \textit{кг/см}^2.$$

Расчетное напряжение по энергетической теории прочности

$$\sigma = \sqrt{\sigma_C^2 + 3\tau_C^2} = \sqrt{1160^2 + 3\cdot 552^2} = 1510\ \textit{кг/см}^2 < 1600\ \textit{кг/см}^2.$$

Проверка прочности сварных швов

Наибольшая сдвигающая сила, приходящаяся на 1 *пог. см* длины швов,

$$N=\frac{QSe}{J}=\frac{64\,000\cdot 1970}{214\,000}\cdot 1=590 \text{ кг}.$$

Площадь сечения двух швов, препятствующих сдвигу полки,

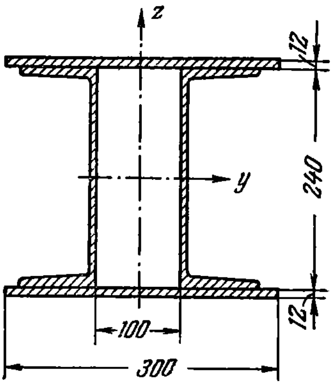
$$F_э=2\cdot 0{,}7t\cdot e=1{,}4\cdot 0{,}5\cdot 1=0{,}7 \text{ см}^2.$$

Напряжение в материале шва

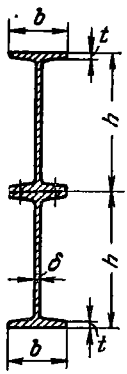
$$\tau_э=\frac{N}{F_э}=\frac{QS_{y}e}{J\cdot 2\cdot 0{,}7t\cdot e}=\frac{590}{0{,}7}=840 \text{ кг/см}^2 < 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Все проверки прочности удовлетворены.

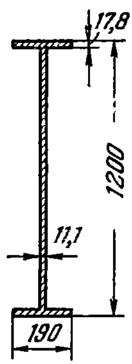
4.113. Балка пролетом $l=6$ *м*, свободно лежащая на двух опорах, состоит из двух швеллеров № 24, усиленных двумя листами 12×300 *мм*, приклепанными к полкам (см. рисунок). Какие силы P можно приложить на равных расстояниях от опор $a=0{,}1l$, чтобы наибольшие нормальные напряжения не превзошли $[\sigma]=1600$ *кг/см²*? Какой наибольший шаг e заклепок диаметром $d=23$ *мм* можно



К задаче 4.113.



К задаче 4.114.



К задаче 4.115.

будет принять по условию прочности на срез при $[\tau]=1000$ *кг/см²*?

Ответ: $P=29$ *т*; $e=110$ *мм*.

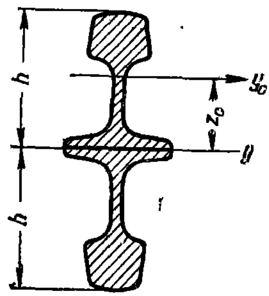
4.114. Главные балки временного моста пролетом $l=11{,}5$ *м*, состоящие из двух двутавров № 60, расположенных один над другим и склепанных полками, рассчитаны на изгиб равномерно распределенной нагрузкой q при допускаемых напряжениях $[\sigma]=1650$ *кг/см²*. Определить наибольший допустимый шаг заклепок диаметром $d=23$ *мм* по условию прочности на срез, если $[\tau]=900$ *кг/см²*.

Ответ: $e=19{,}8\approx 20$ *см*.

4.115. Сравнить грузоподъемность составной балки из двух двутавров № 60 (см. рисунок к предыдущей задаче) с грузоподъемностью сварной балки, все размеры которой (высота, ширина и толщина полок и стенки) выбраны соответственно равными размерам балки задачи 4.14. Сравнить также веса этих балок.

Ответ: Грузоподъемность балки из двух двутавров на 2% выше, а вес на 34% больше, чем сварной.

4.116. Найти величину сдвигающего усилия, приходящегося на одну заклепку рельсового пакета, лежащего на двух опорах и несущего сплошную равномерно распределенную нагрузку $q = 1{,}8$ *т/м*.

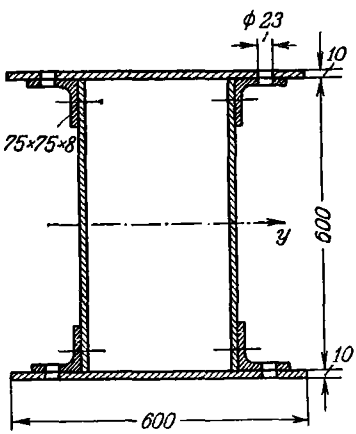


К задаче 4.116.

Пакет состоит из двух рельсов типа Ia, склепанных подошвами. Площадь сечения рельса $F = 55{,}6$ *см*², высота $h = 140$ *мм*, расстояние от подошвы до центра тяжести сечения рельса $z_c = 69{,}6$ *мм*; момент инерции сечения рельса относительно центральной оси y_0 равен $J_y^0 = 1476$ *см*⁴. Пролет балки $l = 6{,}5$ *м*, шаг заклепок $e = 150$ *мм*. Определить также величину наибольших нормальных напряжений.

Ответ: $N \approx 2$ *т*; $\sigma_{max} = 1590$ *кг/см*².

4.117. Балка коробчатого составного сечения, склепанная из листов 10×600 *мм* и уголков $75 \times 75 \times 8$ *мм* (см. рисунок), работает на изгиб в вертикальной плоскости. Изгибающий момент в опасном сечении $M = 80$ *тм*, поперечная сила $Q = 48$ *т*. Проверить прочность сечения при допускаемых напряжениях $[\sigma] = 1600$ *кг/см*² и $[\tau] = 1000$ *кг/см*².



К задаче 4.117.

Ослабление сечения заклепочными отверстиями принять 15%.

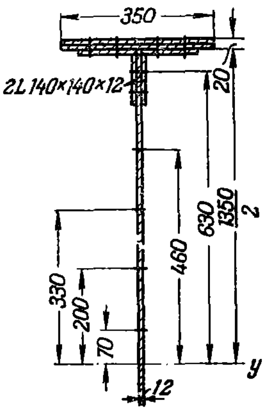
Ответ: $J_{брутто} = 183\,600$ *см*^{4}; $\max\ \sigma = 1590$ *кг/см*$^2 \approx 1600$; $\max\ \tau = 442$ *кг/см*$^2 < 1000$.

4.118. Для сечения, изображенного на рисунке к задаче 4.117, проверить прочность горизонтальных поясных заклепок диаметром $d = 23$ *мм* на срез и смятие при допускаемых напряжениях $[\tau] = 1000$ *кг/см*^{2} и $[\sigma_{см}] = 2800$ *кг/см*^{2}, если шаг заклепок $a = 120$ *мм*, поперечная сила $Q = 48$ *т*.

Сравнить также величину сдвигающих усилий, приходящихся на горизонтальные и вертикальные заклепки, соединяющие уголки со стенкой и с полками сечения.

Ответ: $\tau = 935$ *кг/см*$^2 < 1000$; $\sigma_{см} = 2100$ *кг/см*$^2 < 2800$;

$T_{гор} : T_{верт} = 1{,}35$.



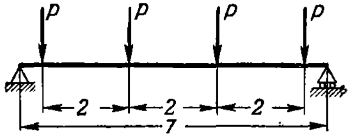
К задаче 4.119.

4.119. Проверить прочность двутавровой клепаной балки пролетом $l = 12$ *м*, лежащей на двух опорах и нагруженной пятью сосредоточенными силами $P = 25$ *т*, симметрично расположенными через каждые два метра по длине балки. Собственный вес балки принимается $q = 0{,}4$ *т/м*. Сечение балки состоит из стенки (лист 12×1350 *мм*), поясных уголков $140 \times 140 \times 12$ и полок — каждая из двух листов 10×350 *мм* (см. рисунок). Шаг заклепок $e = 130$ *мм*, диаметр $d = 20$ *мм*. Допускаемые напряжения принять $[\sigma] = 1400$ *кг/см*^{2}; $[\tau] = 800$ *кг/см*^{2} и $[\sigma_{см}] = 2400$ *кг/см*^{2}.

Указание. Считать ослабление каждого уголка двумя заклепками — вертикальной и горизонтальной, а каждой полки — двумя вертикальными заклепками.

Ответ: $M_{\max} = 232{,}2$ *тм*; $Q_{\max} = 64{,}9$ *т*; $J_{бр} = 1430000$ *см*^{4};
$J_{нетто} = 1352400$ *см*^{4}; $\sigma_{\max} = 1200$ *кг/см*^{2};
$\tau_{\max} = 440$ *кг/см*^{2}; $\tau_з = 840$ *кг/см*^{2}; $\sigma_{см} = 2200$ *кг/см*^{2}.

4.120. Подобрать сечение двутавровой сварной балки (см. схему), лежащей на двух опорах и загруженной четырьмя симметрично



К задаче 4.120.

расположенными силами $P = 24$ *т*. Пролет балки $l = 7$ *м*. Размеры на рисунке в метрах. Допускаемые напряжения на растяжение и сжатие при изгибе $[\sigma]=1400$ *кг/см*²; на срез основного металла $[\tau]=1000$ *кг/см*²; на срез металла швов $[\tau_э]=800$ *кг/см*².

Указание. Подробные указания см. в главе XVI курса. Высота стенки может быть назначена в пределах от $\frac{l}{8}$ до $\frac{l}{12}$ по эмпирической формуле

$$h \approx 1{,}3\sqrt{W} \div 1{,}5\sqrt{W}$$

(где W в *см*³).

Толщина стенки по условию устойчивости должна быть не менее

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{12{,}5}\ см.$$

Ширина полок принимается

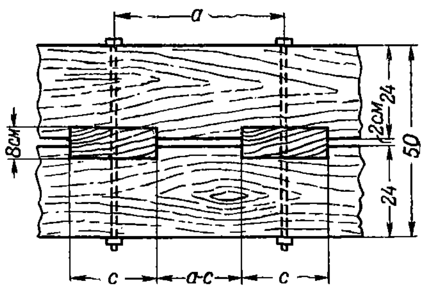
$$b = 0{,}25h \div 0{,}4h,$$

но не более тридцати толщин. Толщина же их подбирается так, чтобы получить необходимый момент сопротивления сечения.

Задавшись размерами сечения, производим проверку его прочности (см. задачу 4.112). Если отклонения от допускаемых напряжений превысят $\pm 5\%$, размеры сечения следует соответственно увеличить или уменьшить, что проще всего сделать путем изменения ширины полок. Высота катета шва определяется из расчета на срез

$$\delta_э \geqslant \frac{QS_п}{1{,}4J\,[\tau]}.$$

4.121. Деревянная составная балка состоит из двух сосновых брусьев сечением 20×24 *см*², связанных между собой с помощью сосновых же колодок прямоугольного сечения и болтов (см. рисунок). Балка свободно лежит на двух опорах и нагружена сосредоточенной силой $P=6$ *т*, приложенной посредине пролета. Пролет балки $l=6{,}0$ *м*. Определить необходимые размеры и число колодок, если допускаемое напряжение на смятие сосны вдоль волокон $[\sigma_c]=70$ *кг/см*², а на скалывание $[\tau]=12$ *кг/см*². Принято считать, что болты сдвигу не препятствуют.

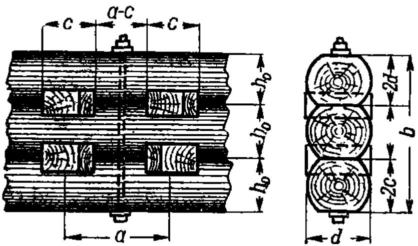


К задаче 4.121.

Ответ: $a\approx45$ *см*; $c=17{,}5$ *см*; $n\approx14$ шт.

4.122. Определить необходимые размеры и число дубовых шпонок для прогона временного моста пролетом $l=6$ *м*, состоящего из трех бревен, отесанных на два канта и связанных между собой болтами $d=16$ *мм* и шпонками (см. рисунок).

Диаметр бревен 22 *см*, толщина стесанного горбыля 2,5 *см*. Площадь сечения одного бревна $F_0 = 390$ *см*^{2}, момент инерции



К задаче 4.122.

$J_y^0 = 8800$ *см*^{4}. Нагрузка $q = 1{,}1$ *т/м*. Глубину врезки шпонки принять $d_ш = 3$ *см*.

Проверить также прочность прогона при учете ослабления сечения болтовым отверстием.

Допускаемые напряжения принять:

а) для материала балки:

на растяжение и сжатие при изгибе $[\sigma] = 80$ *кг/см*^{2} [1]);

на смятие вдоль волокон $[\sigma_c] = 70$ *кг/см*^{2};

на скалывание вдоль волокон $[\tau] = 12$ *кг/см*^{2};

б) для материала шпонки:

на смятие поперек волокон $[\sigma_{90}] = 50$ *кг/см*^{2};

на скалывание поперек волокон $[\tau_{90}] = 10$ *кг/см*^{2}.

Ответ: $n = 18$ шт.; $c = 15$ *см*; $\sigma = 54$ *кг/см*^{2}.

---

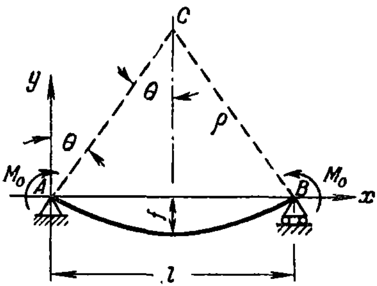
[1]) Основное допускаемое напряжение снижено, так как составная балка работает хуже цельной вследствие неизбежных сдвигов одного бруса по другому.

ГЛАВА 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГИБЕ И РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

§ 20. Аналитический способ определения деформаций

5.1. Стальная линейка пролетом $l=1$ *м* прямоугольного поперечного сечения 5×60 *мм* изгибается двумя парами сил с моментами $M_0=100$ *кгсм*, приложенными по концам (см. рисунок). Установить, по какой кривой согнется линейка. Найти наибольший угол поворота сечения и наибольший прогиб линейки.



К задаче 5.1.

Решение. Значения угловых и линейных перемещений θ и f мы получим путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси

$$EJy''=M(x)=M_0. \tag{1}$$

Проинтегрировав дважды, получим:

$$EJy'=M_0x+C;$$

$$EJy=\frac{M_0x^2}{2}+Cx+D.$$

Постоянные C и D найдем из условий закрепления концов:

$$\text{при } x=0\ y=0 \text{ и } D=0; \quad \text{при } x=l\ y=0 \text{ и } C=-\frac{M_0l}{2}.$$

Подставив значения произвольных постоянных, получим:

$$y'=\frac{M_0}{EJ}\left(x-\frac{l}{2}\right); \tag{2}$$

$$y=\frac{M_0}{2EJ}(x^2-lx) \tag{3}$$

(уравнение параболы).

В этих уравнениях момент инерции сечения $J=\frac{bh^3}{12}=\frac{6\cdot 0,5^3}{12}=0,0625\,см^4$.

Наибольший угол поворота сечения будет на одной из опор; например, при $x=0$ из уравнения (2):

$$\theta_A=-\frac{M_0 l}{2EJ}=-\frac{100\cdot 100}{2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 0,0625}=-0,04$$

(знак минус показывает, что на опоре A сечение поворачивается по часовой стрелке).

Наибольший прогиб будет посредине пролета, т. е. $\max y=f$ при $x=\frac{l}{2}$:

$$f=-\frac{M_0 l^2}{8EJ}=-\frac{100\cdot 100^2}{8\cdot 2\cdot 10^6\cdot 0,0625}=-1\ см$$

(здесь минус указывает на то, что направление прогиба не совпадает с положительным направлением оси y).

Полученные результаты решения являются не вполне точными, так как они найдены из приближенного уравнения (1). Точное решение может быть получено из следующих соображений. Так как $M(x)=M_0=\text{const}$, то кривизна изогнутой оси балки $\frac{1}{\varrho}=\frac{M(x)}{EJ}$ будет постоянной.

Следовательно, линейка согнется не по параболе, а по дуге *окружности* радиуса

$$\varrho=\frac{EJ}{M_0}=\frac{2\cdot 10^6\cdot 0,0625}{100}=1250\ см.$$

Угол поворота концевого сечения найдем как отношение дуги к радиусу:

$$\theta=\frac{l}{2\varrho}=\frac{100}{2\cdot 1250}=0,04.$$

Прогиб посредине пролета определится как стрелка между дугою длиной l и стягивающей ее хордой:

$$f=\varrho(1-\cos\theta)=\varrho\left(1-\cos\frac{l}{2\varrho}\right)=1250\ (1-0,999206)=0,993\ см.$$

Расхождение между приближенным и точным решением составляет около 0,7%.

5.2. Стержень длиной $l=1$ *м* и сечением 2×2 *см*^{2}, защемленный одним концом, изгибается парой сил с моментом $M_0=10$ *кгм*, приложенным на другом конце. Найти величину модуля упругости материала и радиус кривизны оси балки, если угол поворота концевого сечения равен $\theta=0,0375$.

Ответ: $E=2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}; $\varrho=26,75$ *м*.

5.3. Балка пролетом 2 *м*, лежащая на двух опорах, изогнута по дуге круга. Ее прогиб посредине пролета равен 0,5 *см*.

При $E=1\cdot 10^5$ *кг/см*^{2} и $J=230$ *см*^{4} определить радиус кривизны изогнутой оси балки и величину изгибающего момента.

Ответ: $\varrho=100$ *м*; $M=2300$ *кгсм*.

5.4. Для определения модуля упругости кирпичной кладки мостового быка произведено измерение горизонтального перемещения верхнего его сечения под действием тормозной силы $T = 24$ *т*. Измеренный прогиб оказался равным $f = 8{,}75$ *мм*.

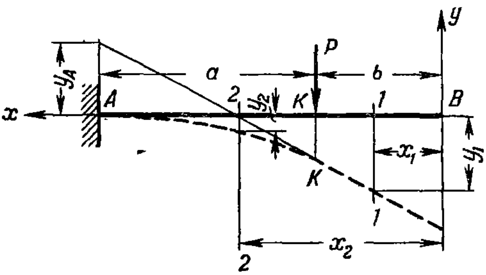
Какую величину имеет модуль упругости материала, если высота быка от обреза фундамента $h = 12$ *м*, а размеры сечения показаны на рисунке? Деформацией фундамента и грунта пренебречь.

Ответ: $E = 8{,}08 \cdot 10^4$ *кг/см*^{2}.

5.5. Найти угол поворота и прогиб концевого сечения балки пролетом $l = 3$ *м*, защемленной одним концом и загруженной сосредоточенной силой $P = 1$ *т*, приложенной на расстоянии $a = 2$ *м* от защемления (см. рисунок). Сечение балки — I № 18. Материал — Ст. 3.

Решение. Будем составлять дифференциальные уравнения изогнутой оси для обоих участков от одного

К задаче 5.4.



К задаче 5.5.

начала координат (правый конец балки) и интегрирование производить без раскрытия скобок. Дифференциальные уравнения и их интегралы примут вид:

Первый участок		Второй участок	
$EJy_1'' = 0;$	(1)	$EJy_2'' = -P(x_2 - b);$	(2)
$EJy_1' = C_1;$	(а)	$EJy_2' = -\frac{P}{2}(x_2 - b)^2 + C_2;$	(в)
$EJy_1 = C_1x_1 + D_1.$	(б)	$EJy_2 = -\frac{P}{6}(x_2 - b)^3 + C_2x_2 + D_2.$	(г)

Из условий сопряжения смежных участков балки в общей для них точке K следует, что при $x_1 = x_2 = b$

$$\theta_K = y_1' = y_2' \text{ и } f_K = y_1 = y_2.$$

Отсюда по уравнениям (а) и (в) найдем $C_1 = C_2 = C$. Из уравнений (б) и (г) найдем $D_1 = D_2 = D$.

Величины произвольных постоянных C и D определяются из условий закрепления балки в защемленном конце, где угловое и линейное перемещения равны нулю, т. е. при $x_2=l$ и $y_2'=0$ и $y_2=0$, откуда

$$C=\frac{P(l-b)^2}{2}=\frac{Pa^2}{2};\quad D=\frac{P(l-b)^3}{6}-\frac{Pa^2l}{2}=\frac{Pa^2}{6}(a-3l).$$

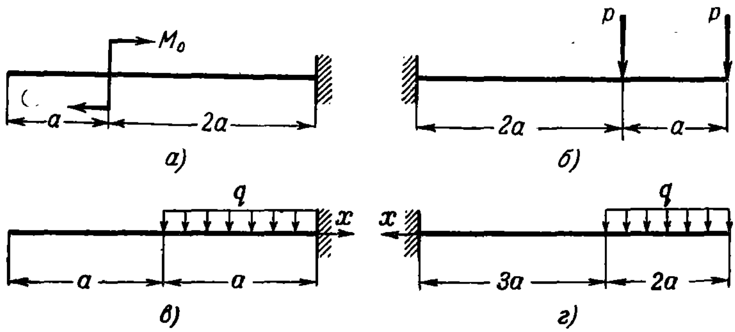
Теперь искомые перемещения концевого сечения балки могут быть определены из уравнений первого участка (а) и (б) при $x_1=0$:

$$\theta_B=y_1' \text{ при } x_1=0;\ \theta_B=\frac{Pa^2}{2EJ}=\frac{1000\cdot 200^2}{2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 1290}=0{,}00775\,^{1)};$$

$$f_B=y_1 \text{ при } x_1=0;$$

$$f_B=\frac{Pa^2(a-3l)}{6EJ}=\frac{1000\cdot 200^2}{6\cdot 2\cdot 10^6\cdot 1290}(200-3\cdot 300)=-1{,}81\ \textit{см}.$$

5.6. Путем интегрирования дифференциального уравнения упругой линии найти угловые и линейные перемещения свободного конца



К задаче 5.6.

балки, защемленной одним концом и нагруженной, как показано на рисунке (по схемам *а*), *б*), *в*), *г*)).

Ответ: а) $\theta=-\frac{2M_0a}{EJ}$; $f=\frac{4M_0a^2}{EJ}$;

б) $\theta=-\frac{13Pa^2}{2EJ}$; $f=-\frac{41Pa^3}{3EJ}$;

в) $\theta=\frac{qa^3}{6EJ}$; $f=-\frac{7qa^4}{24EJ}$;

г) $\theta=-\frac{49qa^3}{3EJ}$; $f=-\frac{59qa^4}{EJ}$.

5.7. Какой строительный подъем[2]) нужно придать стальной двутавровой балке № 60, свободно лежащей на двух опорах, чтобы

---

[1]) Знак плюс показывает, что поворот концевого сечения на угол θ_B происходит по часовой стрелке, так как ось x направлена справа налево.

[2]) Строительным подъемом называется предварительно осуществляемый прогиб балки вверх, во избежание провисания ее под нагрузкой.

при загружении ее силой $F = 14$ *т*, приложенной посредине пролета $l = 12$ *м*, она выпрямилась. Собственным весом балки пренебречь.

Ответ: Стрела подъема $f = 3{,}35$ *см*.

5.8. Подобрать двутавровое сечение балки, защемленной одним концом и равномерно загруженной по всей длине $l = 2$ *м* нагрузкой $q = 1$ *т/м*, из условия, чтобы прогиб свободного конца балки не превосходил допускаемого $[f] = \frac{l}{450}$. Удовлетворит ли при этом балка условию прочности при $[\sigma] = 1400$ *кг/см*^{2}?

Ответ: I № 22; $\max \sigma = 862$ *кг/см*^{2}.

5.9. Прокатная двутавровая стальная балка № 45 свободно оперта по концам при пролете 10 *м*. Наибольший прогиб не должен превышать $^1/_{600}$ пролета. Чему равна наибольшая интенсивность равномерно распределенной нагрузки, которую может нести балка, и каковы соответствующие наибольшие нормальные напряжения?

Ответ: $q = 0{,}702$ *т/м*; $\sigma_{max} = 720$ *кг/см*^{2}.

5.10. Две балки постоянного поперечного сечения совершенно подобны; все размеры одной из них, включая пролет, в два раза больше соответствующих размеров другой балки.

Сравнить напряжения и прогибы, вызванные их собственным весом. Сравнить также нагрузку на погонный метр, которая может быть допущена, если: а) одинаковы наибольшие нормальные напряжения и б) одинаковы отношения наибольшего прогиба к пролету.

Ответ: $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$; $\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{8}$; а) $\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$.

5.11. Балка двутаврового сечения высотою $h = 60$ *см*, защемленная одним концом в стену, изгибается в вертикальной плоскости силой P, приложенной на свободном конце балки. Определить прогиб концевого сечения балки, если сила вызывает в опасном сечении наибольшие нормальные напряжения $\max \sigma = 1600$ *кг/см*^{2}. Пролет балки $l = 2{,}5$ *м*; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

Указание. Выразить прогиб через напряжение и высоту балки.

Ответ: $f = 0{,}53$ *см*.

5.12. Стальная балка двутаврового профиля № 24, свободно лежащая на двух опорах, изгибается силой P, приложенной посредине пролета и вызывающей в опасном сечении наибольшие нормальные напряжения $\sigma = 1660$ *кг/см*^{2} и касательные напряжения в точках нейтрального слоя $\tau = 270$ *кг/см*^{2}. Найти пролет балки l и величину прогиба f в сечении под силой.

Ответ: $l = 3$ *м*; $f = 5{,}2$ *мм*.

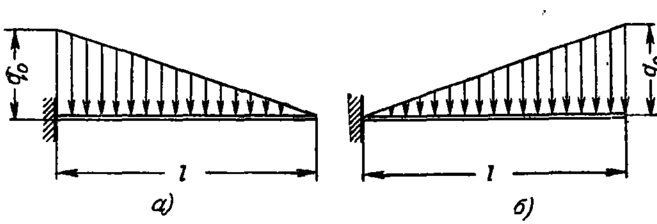
5.13. Стальная балка постоянного прямоугольного поперечного сечения, опертая по концам, нагружена равномерно распределенной нагрузкой. Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении равно 600 *кг/см*², а наибольший прогиб $^1/_{600}$ пролета. Определить отношение высоты балки к ее пролету.

Ответ: $\frac{h}{l}=0{,}0375$.

5.14. Стальная балка высотой h и пролетом l, опертая по концам, нагружена равномерно распределенной нагрузкой q. Во сколько раз пролет l может быть больше высоты h, если наибольший прогиб не должен превышать $^l/_{400}$, а наибольшее нормальное напряжение 1400 *кг/см*²?

Ответ: $l=\frac{120}{7}\,h$.

5.15. Деревянная балка прямоугольного сечения 20×24 *см*, защемленная одним концом, загружена сплошной нагрузкой $q(x)$,



К задаче 5.15.

изменяющейся по закону треугольника (см. рисунок *а*)), с равнодействующей $Q=\frac{q_0 l}{2}=3$ *т*.

а) Найти наибольший прогиб и угол поворота сечения, если пролет балки $l=1{,}5$ *м*.

б) Во сколько раз возрастет величина наибольших нормальных напряжений и наибольшего прогиба, если балку загрузить той же треугольной нагрузкой, но расположенной, как указано на рисунке *б*)?

Ответ: а) $f=-\frac{Ql^3}{15EJ}=0{,}29$ *см*, $\theta_{\max}=-\frac{Ql^2}{12EJ}=-0{,}00245$,

б) $\max\sigma_б=2\max\sigma_а$, $f_б=2{,}75\,f_а$.

5.16. Балка заданного пролета, свободно лежащая на двух опорах, загружена сплошной равномерно распределенной нагрузкой. Сечение балки симметрично относительно обеих главных осей.

Найти, как зависит наибольший прогиб балки от высоты сечения, если $\sigma_{\max}=[\sigma]$.

Ответ: $\max f=\frac{5}{24}\frac{l^2}{E}\frac{[\sigma]}{h}$.

5.17. Двутавровая стальная балка пролетом $l=6$ *м* нагружена сплошной нагрузкой $q(x)$, распределенной по закону треугольника (см. рисунок), с наибольшей интенсивностью $q_0=6$ *т/м*.

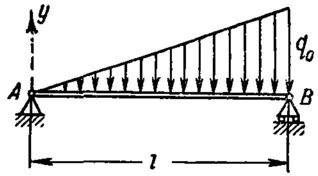
Подобрать сечение балки при $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2} и найти величину наибольшего прогиба f_{max} и углов поворота опорных сечений θ_A и θ_B.

Ответ: Двутавр № 40;

$$\theta_A=-\frac{7}{360}\frac{ql^3}{EJ}=-0{,}0067;$$

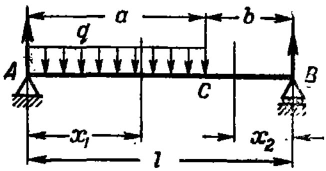
$$\theta_B=\frac{q_0 l^3}{45EJ}=0{,}0076;$$

$$f_{max}=0{,}0065\frac{ql^4}{EJ}=1{,}33\,см\ (\text{при } x=0{,}52l).$$



К задаче 5.17.

5.18. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения 20×15 *см*^{2} шарнирно оперта своими концами на пролете $l=6$ *м*. На участке длиной $a=4$ *м* (см. рисунок), примыкающем к левому концу балки, расположена равномерно распределенная нагрузка, равная $Q=1{,}2$ *т*. Определить прогиб посредине пролета.



К задаче 5.18.

Решение. Интенсивность сплошной нагрузки равна

$$q=\frac{Q}{a}=\frac{1{,}2}{4}=0{,}3\ т/м.$$

Так как расположение нагрузки выделяет на балке два участка, то составляем два дифференциальных уравнения, обозначая прогибы на левом участке через y_1, а на правом через y_2. Абсциссы на обоих участках отсчитываем от опор балки навстречу друг другу и обозначаем их соответственно через x_1 и x_2. Определяем реакции опор левой A и правой B:

$$A=\frac{qa\left(l-\frac{a}{2}\right)}{l}=\frac{0{,}3\cdot4\cdot4}{6}=0{,}8\ т,\quad B=\frac{qa^2}{2l}=\frac{0{,}3\cdot4^2}{2\cdot6}=0{,}4\ т.$$

Составляем дифференциальные уравнения и интегрируем их:

$$EJy_1''=Ax_1-\frac{qx_1^2}{2};\qquad EJy_2''=Bx_2;$$

$$EJy_1'=\frac{Ax_1^2}{2}-\frac{qx_1^3}{6}+C_1;\qquad EJy_2'=\frac{Bx_2^2}{2}+C_2;$$

$$EJy_1=\frac{Ax_1^3}{6}-\frac{qx_1^4}{24}+C_1x_1+D_1;\qquad EJy_2=\frac{Bx_2^3}{6}+C_2x_2+D_2.$$

Для определения четырех постоянных интегрирования имеем следующие условия: а) прогибы на опорах равны нулю; б) в точке C раздела участков прогибы равны по величине (для обоих участков), а углы поворота равны по величине, но обратны по знаку, вследствие того, что оси x_1 и x_2 направлены в противоположные стороны.

Аналитически эти условия приводятся к четырем уравнениям:

а) при $x_1=0$ $y_1=0$;

б) при $x_2=0$ $y_2=0$;

в) при $x_1=a$ и $x_2=l-a=b$ $\theta_C=-y_1'=y_2'$;

г) при $x_1=a$ и $x_2=l-a=b$ $f_C=y_1=y_2$.

Первые два уравнения указывают, что $D_1=D_2=0$; третье уравнение принимает вид

$$\frac{Aa^2}{2}-\frac{qa^3}{6}+C_1=-\frac{Bb^2}{2}-C_2;$$

четвертое уравнение приводится к следующему:

$$\frac{Aa^3}{6}-\frac{qa^4}{24}+C_1a=\frac{Bb^3}{6}+C_2b.$$

Так как в решении задачи не был использован метод уравнивания произвольных постоянных интегрирования, то для их определения придется совместно решать два уравнения. В результате совместного решения найдем:

$$C_1=-\frac{1}{a+b}\left[\frac{Aa^2}{6}(a+3b)+\frac{Bb^3}{3}-\frac{qa^3}{24}(a+4b)\right]=$$

$$=-\frac{1}{6}\left[\frac{0,8\cdot4^2}{6}(4+3\cdot2)+\frac{0,4\cdot2^3}{3}-\frac{0,3\cdot4^3}{24}(4+4\cdot2)\right]=-2,133\ тм^2;$$

$$C_2=-\frac{1}{a+b}\left[\frac{Aa^3}{3}+\frac{Bb^2}{6}(3a+b)-\frac{qa^4}{8}\right]=$$

$$=-\frac{1}{6}\left[\frac{0,8\cdot4^3}{3}+\frac{0,4\cdot2^2}{6}(3\cdot4+2)-\frac{0,3\cdot4^4}{9}\right]=-1,867\ тм^2.$$

Для вычисления прогиба f посредине пролета надо в уравнении для первого участка положить $x_1=\frac{l}{2}=3$ *м*; тогда

$$EJf=0,8\frac{3^3}{6}\ \frac{0,3\cdot3^4}{24}-2,133\cdot3=-3,812\ тм^3=-3812\cdot10^6\,кгсм^3.$$

Момент инерции сечения и жесткость равны:

$$J=\frac{20^3\cdot15}{12}=10^4\ см^4;\ EJ=1\cdot10^5\cdot10^4=10^9\ кгсм^2.$$

Следовательно,

$$f=-\frac{3812\cdot10^6}{10^9}=-3,81\ см.$$

Найдем место и величину *наибольшего* прогиба. При $y=y_{max}$ должно быть $\frac{dy}{dx}=0$, т. е. $EJy_1'=\frac{Ax_1^2}{2}-\frac{qx_1^3}{6}+C_1=0$, откуда $x_1=2,889$ *м* и $f=\max y_1=3,818$ *см*.

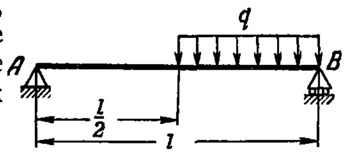
Как видно, прогиб посредине пролета почти не отличается от наибольшего.

Отношение прогиба к пролету равно

$$\frac{f}{l}=\frac{3,82}{600}=\frac{1}{158}=0,00635.$$

В целях упрощения задачи определения произвольных постоянных рекомендуем учащемуся решить этот же пример с использованием метода уравнивания произвольных постоянных интегрирования.

5.19. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечення 18×20 *см* пролетом $l = 4$ *м* свободно опирается по концам и загружена сплошной нагрузкой $Q = 2$ *т*, равномерно распределенной на половине длины балки. Найти прогиб посредине пролета балки и углы поворота опорных сечений.



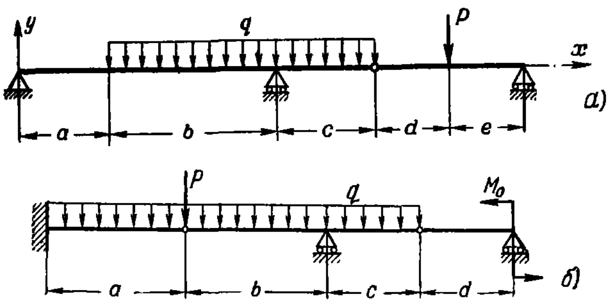
К задаче 5.19.

Ответ:

$$J_{\max} = -\frac{5Ql^3}{384EJ} = -1{,}39 \text{ см}.$$

$$\theta_A = -\frac{7Ql^2}{192EJ} = -0{,}0097; \quad \theta_B = \frac{9Ql^2}{192EJ} = 0{,}0125.$$

5.20. Сколько дифференциальных уравнений придется интегрировать для определения прогиба под силой для балки, изображенной

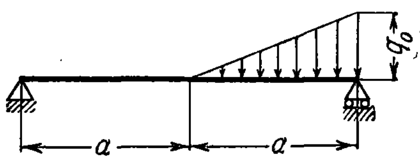


К задаче 5.20.

на рисунках *а*) и *б*)? Сколько произвольных постоянных интегрирования придется определить? Написать необходимые условия для их определения.

Как изменятся ответы, если в задаче потребуется найти угол поворота правого концевого сечения балки?

5.21. Найти прогиб посредине пролета балки, изображенной на рисунке. $l = 2a = 6$ *м*; $q_0 = 4$ *т/м*. Сечение (двутавровое) подобрать



К задаче 5.21.

по наибольшему изгибающему моменту при $[\sigma] = 1600$ *кг/см*^{2}. Материал — Ст. 3.

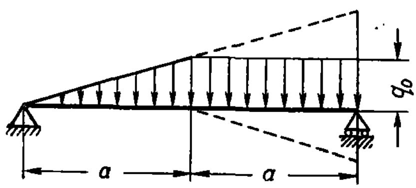
Ответ: Двутавр № 22 а; $f = -\frac{3q_0a^4}{80EJ} = -2{,}18$ *см*.

5.22. Используя метод уравнивания произвольных постоянных интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, найти прогиб посредине пролета балки, показанной на рисунке.

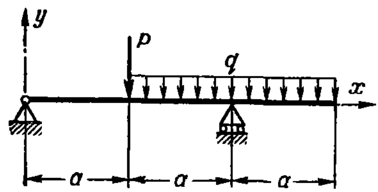
Указание. Догрузить балку треугольной нагрузкой вверх и вниз, как показано на рисунке пунктиром.

Ответ: $f=-\dfrac{4,1q_0a^4}{24EJ}\approx-\dfrac{q_0a^4}{6EJ}$.

5.23. Пользуясь методом начальных параметров, найти прогиб свободного конца балки, изображенной на рисунке.



К задаче 5.22.



К задаче 5.23.

Решение. Общее уравнение изогнутой оси, написанное по методу начальных параметров, имеет вид

$$EJy=EJf_0+EJ\theta_0\frac{x}{1!}+\frac{M_0x^2}{2!}+\frac{Q_0x^3}{3!}+\sum\frac{M_i(x-a_i)^2}{2!}+$$
$$+\sum\frac{P_i(x-b_i)^3}{3!}+\sum\frac{q_i(x-c_i)^4}{4!},$$

где f_0, θ_0, Q_0 и M_0 — начальные параметры, т. е. геометрические и силовые факторы в начале координат (при $x=0$), определяемые из условий закрепления балки; M_i, P_i, q_i — заданные силовые факторы (в том числе и опорные реакции); a_i и b_i — расстояння от начала координат до сечений, в которых приложены сосредоточенные силы и пары, а c_i — расстояния до сечений, где начинается сплошная нагрузка.

В рассматриваемом случае

$$A=\frac{P}{2};\quad B=\frac{P}{2}+2qa.$$

Начальные параметры при начале координат в точке A соответственно будут:

$$M_0=0;\ Q_0=A=\frac{P}{2};\ f_0=0;$$

что касается θ_0, то его придется определнть из условия, что при $x=2a$ $y=0$. Уравнение упругой линни получит вид

$$EJy=EJ\theta_0x+\frac{P}{2}\frac{x^3}{3!}-\frac{P(x-a)^3}{3!}+\left(\frac{P}{2}+2qa\right)\frac{(x-2a)^3}{3!}-\frac{q(x-a)^4}{4!};$$

положив $x=2a$, найдем

$$0=EJ\theta_0\cdot 2a+\frac{P}{2}\cdot\frac{(2a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{Pa^2}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{qa^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

откуда

$$EJ\theta_0=\frac{qa^3}{48}-\frac{Pa^2}{4}.$$

Теперь, подставив найденное значение начального параметра θ_0 и положив $x=3a$, найдем искомое перемещение свободного конца балки D:

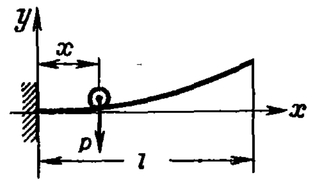
$$EJf_D=\left(\frac{qa^3}{48}-\frac{Pa^2}{4}\right)\cdot 3a+\frac{P}{2}\,\frac{(3a)^3}{6}-\frac{P}{6}\,(2a)^3+\left(\frac{P}{2}+2qa\right)\frac{a^3}{6}-\frac{q\,(2a)^4}{24}.$$

Отсюда

$$f_D=\frac{Pa^3}{4EJ}-\frac{13\cdot qa^4}{48EJ}.$$

5.24. Пользуясь методом начальных параметров, установить, по какой кривой следует предварительно изогнуть свободно лежащую на двух опорах балку пролетом l, чтобы после загружения ее равномерно распределенной нагрузкой q она выпрямилась.

Ответ: $y=-\dfrac{ql^4}{24EJ}\left(\dfrac{x^4}{l^4}-\dfrac{2x^3}{l^3}+\dfrac{x}{l}\right)$.

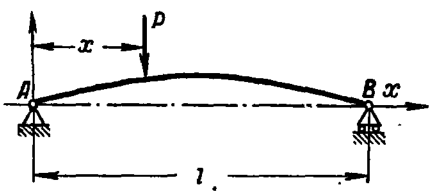


К задаче 5.25.

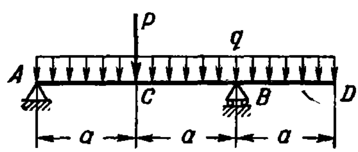
5.25. По балке, защемленной одним концом, перемещается груз P (см. рисунок). По какой кривой следует предварительно изогнуть балку, чтобы груз при перемещении все время оставался на постоянной высоте?

Ответ: $y=\dfrac{Px^3}{3EJ}$.

5.26. По какой кривой надо предварительно изогнуть балку AB, свободно лежащую на двух опорах, чтобы при перемещении по ней груза P точка приложения его находилась бы все время на уровне опор AB (см. рисунок)?



К задаче 5.26.



К задаче 5.27.

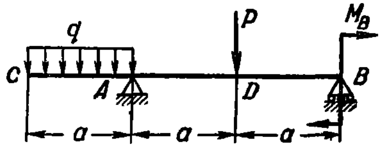
Ответ: $y=\dfrac{Px^2}{3EJl}(x^2-2lx+l^2)$.

5.27. Пользуясь методом начальных параметров, найти прогибы посредине пролета и на свободном конце балки, изображенной на рисунке.

$a=2$ *м*; $q=1$ *т/м*; $P=qa=2$ *т*. Сечение I № 20.

Ответ: $f_C=-\dfrac{qa^4}{4EJ}=-1{,}09$ *см*; $f_D=\dfrac{qa^4}{8EJ}=0{,}545$ *см*.

5.28. Пользуясь методом начальных параметров, найти прогиб концевого сечения деревянной балки, изображенной на рисунке,

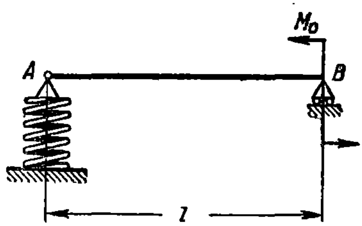


К задаче 5.28.

если $q=400$ *кг/м*, $a=2$ *м*, $P=qa=800$ *кг*, $M_B=Pa$, а размеры сечения 16×20 *см*.

Ответ: $f=-3{,}25$ *см*.

5.29. Балка AB пролетом l опирается правым концом на шарнирную опору, а левым на винтовую пружину и изгибается парой сил, приложенной в точке B (см. рисунок). Составить уравнение



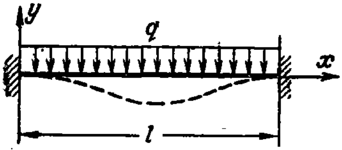
К задаче 5.29.

изогнутой оси балки, если радиус пружины R, радиус стержня пружины r и число витков n.

Указание. При $x=0$ прогиб равен осадке пружины ($y_A=-\lambda$).

Ответ: $y=\dfrac{M_0 x}{6EJl}(x^2-l^2)+\dfrac{\lambda}{l}x-\lambda$, где $\lambda=\dfrac{4M_0R_0^3n}{G\cdot l\cdot r^4}$.

5.30. Пользуясь методом начальных параметров, найти прогиб посредине пролета для балки, защемленной обоими концами и загруженной сплошной равномерно распределенной нагрузкой (см. рисунок). Продольные реакции считать равными нулю.



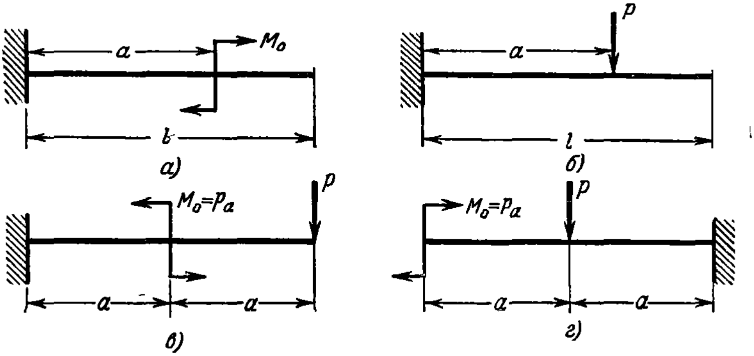
К задаче 5.30.

Указание. Выбрав координатные оси, как показано на рисунке, замечаем, что начальные прогиб и угол поворота равны нулю. По условию симметрии $Q_0=A=\dfrac{ql}{2}$, а M_0 следует найти из условия, что при $x=l$ $y=0$.

Ответ: $f=-\dfrac{ql^4}{384EJ}$.

§ 21. Графоаналитический и графический способы определения деформаций

5.31. Пользуясь графоаналитическим способом определения перемещений, найти величину прогибов и углов поворота концевого сечения для балок, изображенных на рисунке.



К задаче 5.31.

Ответ: а) $f = \frac{M_0 a}{2EJ}(a-2l)$, $\theta = -\frac{M_0 a}{EJ}$;

б) $f = \frac{Pa^2}{6EJ}(a-3l)$, $\theta = -\frac{Pa^2}{2EJ}$;

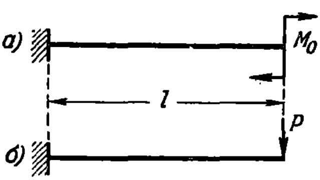
в) $f = -\frac{7}{6}\frac{Pa^3}{EJ}$, $\theta = -\frac{Pa^2}{EJ}$;

г) $f = \frac{7}{6}\frac{Pa^3}{EJ}$, $\theta = \frac{3}{2}\frac{Pa^2}{EJ}$.

5.32. Стальная балка двутаврового сечения № 40, защемленная одним концом, изгибается силою P, приложенной на другом конце. Какова должна быть величина силы P и длина балки l, чтобы прогиб концевого сечения $f = 1$ *см*, а угол поворота $\theta = 0{,}005$?

Ответ: $l = 3{,}0$ *м*; $P = 4{,}2$ *т*.

5.33. 1) В каком из двух случаев загружения балки заданной длины и сечения (см. рисунок): а) парой сил M_0 или б) сосредоточенной силой P, — в ней возникнут большие нормальные напряжения, если прогиб концевого сечения балки в обоих случаях одинаков?



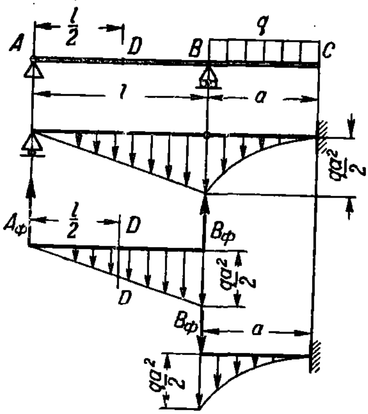
К задаче 5.33.

2) Сравнить величину прогибов свободного конца балки в случаях а) и б) при условии, чтобы наибольшие нормальные напряжения равнялись допускаемым.

Ответ: 1) Во втором на 50%; 2) $f_а = \frac{3}{2} f_б$.

5.34. Графоаналитическим способом определить прогибы балки ABC, изображенной на рисунке, в точках D и C, а также углы поворота опорных сечений θ_A и θ_B.

Решение. Строим эпюру изгибающих моментов. Эту эпюру рассматриваем как сплошную фиктивную нагрузку, направленную вниз, так как $M < 0$, а нулевую ось эпюры — как ось фиктивной балки, опорные закрепления которой выбраны в соответствии с условиями закрепления заданной балки. Шарнир, введенный в точке B фиктивной балки, делит ее на две балки: подвесную AB и основную BC. Подсчитываем грузовые площади ω_1 и ω_2 эпюры M и фиктивные реакции подвесной балки $A_ф$ и $B_ф$:



К задаче 5.34.

$$\omega_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{qa^2}{2}l=\frac{qa^2}{4}l;$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}\frac{qa^2}{2}\cdot a=\frac{qa^3}{6};$$

$$A_ф=\frac{1}{3}\omega_1=\frac{qa^2}{12}l;$$

$$B_ф=\frac{2}{3}\omega_1=\frac{qa^2}{6}l.$$

Изгибающий момент в сечении D от действия фиктивной нагрузки

$$M_D^ф=A_ф\cdot\frac{l}{2}-\omega_D\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{2},$$

где ω_D — грузовая площадь, лежащая левее сечения DD и равная

$$\omega_D=\frac{1}{2}\cdot\frac{qa^2}{4}\cdot\frac{l}{2}=\frac{qa^2l}{16}.$$

Следовательно:

$$M_D^ф=\frac{qa^2l}{12}\cdot\frac{l}{2}-\frac{qa^2l}{16}\cdot\frac{l}{6}=\frac{qa^2l^2}{32},$$

а

$$f_D=\frac{M_D^ф}{EJ}=\frac{qa^2l^2}{32EJ}.$$

Для определения прогиба концевого сечения балки C рассматриваем отдельно фиктивную балку BC. Действие опирающейся на нее подвесной балки AB заменяем давлением, передающимся через шарнир и равным $B_ф$. Тогда

$$M_C^ф=-B_ф a-\omega_2\cdot\frac{3}{4}\cdot a=-\frac{qa^2l}{6}a-\frac{qa^3}{6}\cdot\frac{3}{4}a=-\frac{qa^3}{24}(4l+3a)$$

и

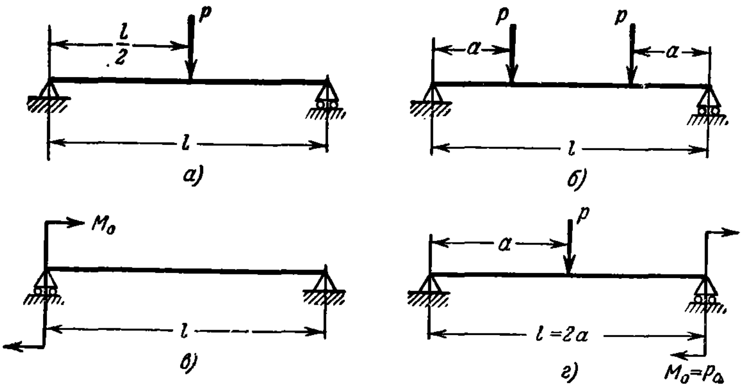
$$f_C=-\frac{qa^3}{24EJ}(4l+3a).$$

Углы поворота опорных сечений A и B балки определятся по формуле

$$\theta=\frac{Q_\Phi}{EJ}, \text{ где } Q_A^\Phi=A_\Phi, \text{ а } Q_B^\Phi=-B_\Phi;$$

$$\theta_A=\frac{A_\Phi}{EJ}=\frac{qa^2l}{12EJ}; \ \theta_B=-\frac{B_\Phi}{EJ}=-\frac{qa^2l}{6EJ}.$$

5.35. Графоаналитическим способом определить величину прогибов посредине пролета и углов поворота опорных сечений для балок, изображенных на рисунке.



К задаче 5.35.

Ответ: а) $f=-\frac{Pl^3}{48EJ}$, $\theta_A=-\theta_B=-\frac{Pl^2}{16EJ}$;

б) $f=\frac{Pa}{24EJ}(4a^2-3l^2)$, $\theta_A=-\frac{Pa}{2EJ}(l-a)$;

в) $f=-\frac{M_0l^2}{16EJ}$, $\theta_A=-\frac{M_0l}{3EJ}$, $\theta_B=\frac{M_0l}{6EJ}$;

г) $f=\frac{Pa^3}{12EJ}$, $\theta_A=\frac{Pa^2}{12EJ}$, $\theta_B=-\frac{5}{12}\frac{Pa^2}{EJ}$.

5.36. Деревянная балка квадратного поперечного сечения свободно лежит на двух опорах и нагружена сосредоточенной силой посредине пролета. Наибольшие напряжения не должны превосходить 80 *кг/см*², а наибольший прогиб посредине пролета $^1/_{400}$ пролета. Определить необходимую высоту балки при пролете 6 *м*.

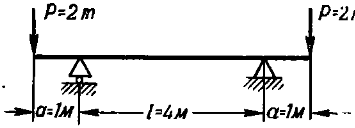
Ответ: $h=32$ *см*.

5.37. Свободно опертая по концам стальная двутавровая балка № 27 пролетом 5 *м* нагружена на расстоянии 1,3 *м* от левой опоры сосредоточенной силой 6 *т*. Определить, выполнены ли следующие условия: а) наибольшее нормальное напряжение не должно превышать 1600 *кг/см*²; б) наибольший прогиб не должен превышать $^1/_{400}$ пролета.

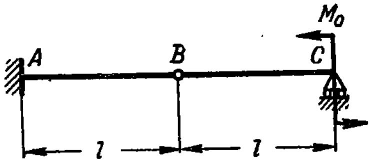
Ответ: $\sigma=1555$ *кг/см*²; $f=1,12$ *см* $< l/400$.

5.38. Найти графоаналитически прогибы посредине пролета и на концах консолей для балки, представленной на рисунке. Проверить величину прогиба посредине пролета графическим построением; $EJ = 2 \cdot 10^9$ *кгсм*^{2}.

Ответ: $f_1 = \frac{Pal^2}{8EJ} = 2$ *см*; $f_2 = -\frac{Pa^2}{6EJ}(3l + 2a) = -2{,}33$ *см*.



К задаче 5.38.



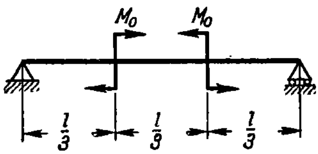
К задаче 5.39.

5.39. Для балки, изображенной на рисунке, найти прогиб точки B.

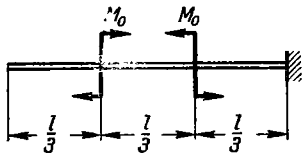
Ответ: $f = -\frac{M_0 l^2}{3EJ}$.

5.40. Найти графически и графоаналитически прогиб посредине пролета для балки, изображенной на рисунке, если $M_0 = 3$ *тм*, $l = 6$ *м*, $EJ = 3 \cdot 10^9$ *кгсм*^{2}.

Ответ: $f = -\frac{5}{72} \cdot \frac{M_0 l^2}{EJ} = 2{,}5$ *см*.



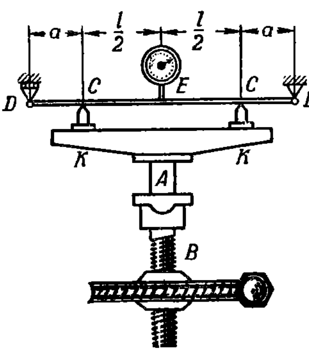
К задаче 5.40.



К задаче 5.41.

5.41. Найти графически и графоаналитически прогиб конца балки, изображенной на рисунке, при $M_0 = 6$ *тм*, $l = 3$ *м* и $EJ = 3 \cdot 10^9$ *кгсм*^{2}.

Ответ: $f = \frac{M_0 l^2}{6EJ} = 3$ *см*.



К задаче 5.42.

5.42. В испытательных машинах системы Коробова усилие, передающееся при помощи винта B на испытуемый образец A, измеряется по величине прогиба стальной балочки DD (см. рисунок). Давление на балочку DD передается в точках C с помощью жесткой траверсы KK.

При размерах балочки $DD = 1$ *м*, $a = 0{,}1$ *м* и поперечном сечении ее $b = 6$ *см* и $h = 4$ *см* установить величину нагрузки P, приложенной к образцу, при приращении отсчетов по прогибомеру E на 1 *мм*. На каком расстоянии a следует расположить опорные призмы на траверсе, чтобы прогибу балочки DD в 1 *мм* соответствовала нагрузка $P=500$ *кг*?

Ответ: $P=1040$ *кг*; $a=23$ *см*.

5.43. Свободно опертая по концам стальная двутавровая балка № 24а пролетом 5 *м* нагружена силой P в сечении, отстоящем на четверть пролета от левой опоры. Определить наибольший прогиб балки при допускаемом напряжении 1400 *кг/см*^{2}.

Ответ: $f=1{,}13$ *см*.

5.44. Стальная балка двутаврового профиля № 30а, свободно опертая по концам, нагружена силой P, приложенной посредине пролета. С помощью тензометров, установленных в четверти пролета на уровне нейтрального слоя, измерены величины главных напряжений у оси балки, оказавшихся равными $\sigma_1=+400$ *кг/см*^{2} $=-\sigma_2$. Определить величину угла поворота опорного сечения балки, если пролет ее равен $l=2{,}0$ *м*. Найти также величину наибольших нормальных напряжений в опасном сечении балки.

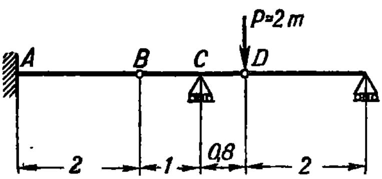
Ответ: $\theta=\frac{\sigma_1 l^2}{8ES}\delta=0{,}00222$; $\sigma_{\max}=1340$ *кг/см*^{2},

где S — статический момент полусечения, а δ — толщина стенки.

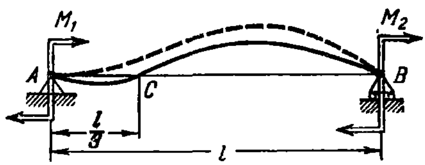
5.45. Для балки, изображенной на рисунке, графоаналитическим методом найти прогиб точки D и угол поворота сечения C. Жесткость балки $EJ=5\cdot10^9$ *кгсм*^{2}; размеры пролетов даны на рисунке в метрах.

Ответ: $f_D=-0{,}85$ *см*; $\theta_C=-0{,}0096$.

5.46. Балка AB, свободно лежащая на двух опорах, изгибается парами сил, приложенными к ее концам (см. рисунок). Каково соотношение между величинами моментов этих пар, если точка перегиба



К задаче 5.45.



К задаче 5.46.

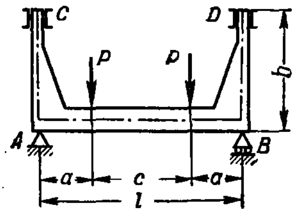
изогнутой оси оказалась на расстоянии $\frac{1}{3}l$ от левой опоры? Чему равны углы наклона касательных к изогнутой оси в точке перегиба C и на опоре A? Уточнить вид изогнутой оси балки (сплошной линией или пунктиром?).

Ответ: $M_2=2M_1$; $\theta_C=\frac{M_1 l}{6EJ}$; $\theta_A=0$.

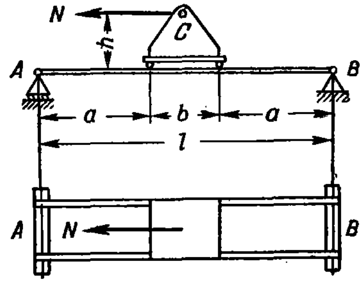
5.47. Поперечная балка AB открытого моста изгибается симметрично расположенными вертикальными силами P (см. рисунок).

Найти сближение верхних поясов C и D, если жесткость поперечной балки постоянна и равна EJ.

Ответ: $\delta = \frac{Pah}{2EJ}(a+c)$.



К задаче 5.47.



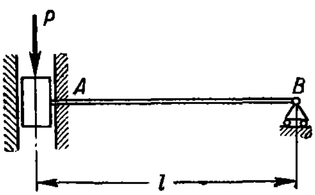
К задаче 5.48.

5.48. Ручная лебедка закреплена на двух деревянных балках круглого поперечного сечения $d = 24$ *см*, как это схематически показано на рисунке. Определить величину горизонтального перемещения точки C лебедки под действием горизонтального натяжения троса $N = 4$ *т*, если $l = 6$ *м*; $b = 1$ *м*; $h = 1$ *м*. Продольной силой, возникающей в балках, пренебречь.

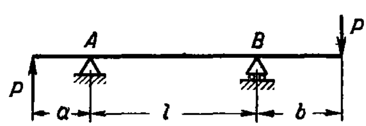
Ответ: $\delta = 3{,}74$ *мм*.

5.49. Балка, на одном конце которой жестко закреплен ползун, свободно (без трения) скользящий вдоль вертикальных направляющих, другим концом опирается на подвижную шарнирную опору (см. рисунок). Определить величину перемещения ползуна, если к нему приложить вертикальную силу P. Как следует выбрать опорные закрепления фиктивной балки?

Ответ: $f = -\frac{Pl^3}{3EJ}$.



К задаче 5.49.



К задаче 5.50.

5.50. Балка пролетом l с двумя консолями a и b загружена двумя равными силами P, приложенными к ее концам. При какой длине консоли b сечение балки на опоре A не поворачивается?

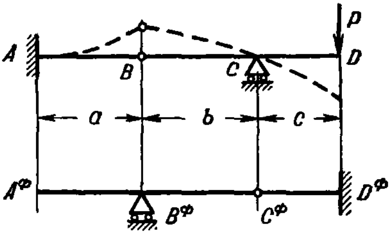
Ответ: $b = 2a$.

5.51. На каком расстоянии от защемления следует расположить шарнир B, чтобы оси основной и подвесной балок AB и BC имели общую касательную в точке B?

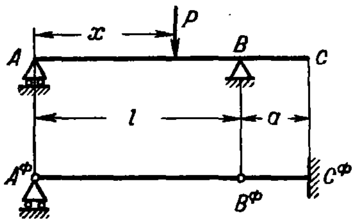
Указание. Чтобы обеспечить равенство углов $\theta_{B,a}=\theta_{B,c}$, надо добиться равенства нулю фиктивной реакции в точке B.

Ответ: $a=\frac{b}{2}$.

5.52. Балка пролетом l, с консолью a, свободно опертая в точках A и B, изгибается сосредоточенной силой P. На каком расстоя-



К задаче 5.51.



К задаче 5.52.

нии x от опоры A следует приложить силу P, чтобы получить наибольший прогиб свободного конца балки C (см. рисунок).

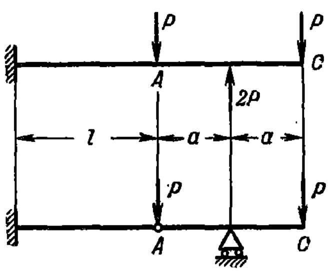
Указание. Выразить фиктивную реакцию в точке B в виде функции от расстояния x и исследовать ее на максимум. $\max f_C$ определится в зависимости от $\max B^{\Phi}$.

Ответ: $x=\frac{l}{\sqrt{3}}\approx 0{,}577l$.

5.53. В какой из двух балок, изображенных на рисунке, возникнут большие угловые и линейные перемещения в точках A и C — в первой или во второй? Определить величины этих перемещений.

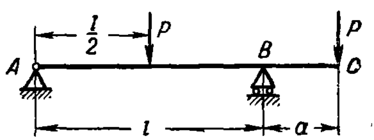
Ответ: а) $\theta_A=0$, $f_A=0$, $\theta_C=-\frac{Pa^2}{EJ}$, $f_C=-\frac{Pa^3}{EJ}$;

б) $\theta_A=\frac{Pa^2}{6EJ}$, $f_A=0$, $\theta_C=-\frac{5Pa^2}{6EJ}$, $f_C=-\frac{2Pa^3}{3EJ}$.



К задаче 5.53.

5.54. Балка ABC на двух опорах с консолью изгибается двумя равными силами P, приложенными посредине пролета и на свободном

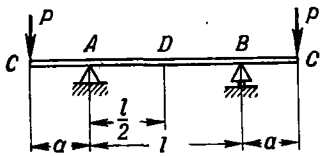


К задаче 5.54.

конце (см. рисунок). При какой длине a консоли прогиб в точке C будет равен нулю?

Ответ: $a=0{,}16l$.

5.55. а) При какой длине консолей прогибы балки, показанной на рисунке, в точках C и D будут одинаковы по абсолютной величине? б) При какой длине консолей наибольшее по абсолютной величине значение прогиба балки будет иметь место посредине пролета? Общая длина балки $L = l + 2a$ остается в обоих случаях одинаковой.



К задаче 5.55.

Ответ: а) $a = 0{,}152L$;
б) $a = 0{,}167L$.

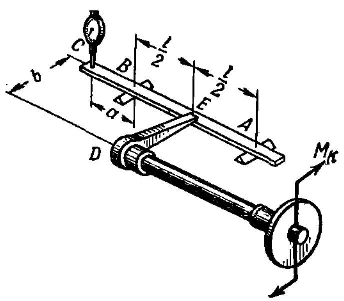
5.56. Балка постоянного поперечного сечения лежит на двух равноотстоящих от ее концов опорах. Определить расстояние между опорами a в функции длины балки l, при котором наибольший прогиб от собственного веса получит наименьшее значение.

Ответ: $a = 0{,}52l$.

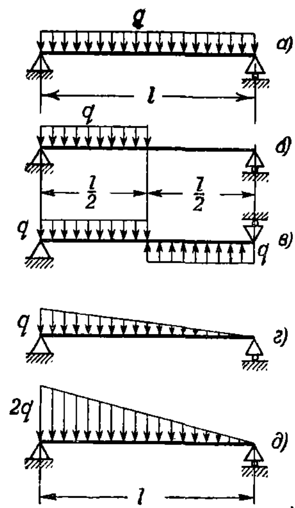
5.57. В одной из машин для испытаний на кручение величина крутящего момента, передающегося через испытываемый вал, измеряется по величине прогиба стальной балочки AB с консолью $BC = a$. На рисунке показана схема силоизмерительного устройства, в котором испытываемый вал вместе с захватами и жестким рычагом DE работает как одно целое. При закручивании вала рычаг DE передает давление на балочку AB в точке E (посредине пролета).

При какой величине крутящего момента $M_к$, приложенного к валу, показание прогибомера, установленного в точке C, изменится на 1 *мм*, если длина рычага $b = 20$ *см*, пролет балочки $l = 60$ *см*, $a = 10$ *см*, размеры сечения балки 35×10 *мм*?

Ответ: $M_к = 5{,}2$ *кгм*.



К задаче 5.57.



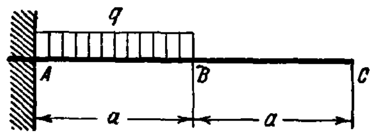
К задаче 5.58.

5.58. Руководствуясь методом сложения действия сил, сравнить прогибы посредине пролета одинаковых балок, показанных на рисунке.

Приняв прогиб балки *а*) за единицу, подсчитать прогибы серединного сечения остальных четырех балок. Установить, во сколько раз наибольший прогиб балки *а*) больше максимального прогиба балки *в*).

Ответ: В 16 раз.

5.59. Найти, как изменится величина угловых и линейных перемещений концевого сечения балки, изображенной на рисунке, если сплошную нагрузку, равномерно распределенную по длине $AB = a$, переместить на участок BC.



К задаче 5.59.

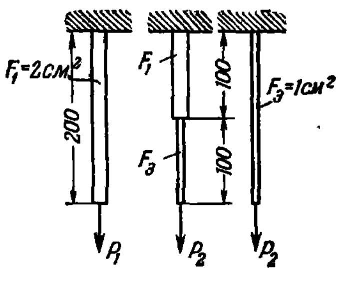
Ответ: Угол поворота увеличится в 7 раз, а прогиб в 5,85 раза.

5.60. Стальной стержень длиной l поднимается краном с помощью троса, прикрепленного к середине стержня. Каковы будут наибольшие нормальные напряжения и прогибы концов от действия собственного веса стержня, если изгиб происходит: а) в плоскости наибольшей жесткости, б) в плоскости наименьшей жесткости? Сечение стержня — двутавр № 40; длина $l = 10$ *м*.

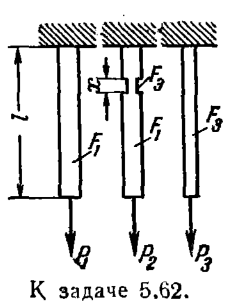
Ответ: а) $\sigma = 74$ *кг/см²*, $f = 0{,}116$ *см*;
б) $\sigma = 815$ *кг/см²*, $f = 3{,}3$ *см*.

§ 22. Энергетические способы определения деформаций

5.61. Сравнить количество потенциальной энергии в трех стальных стержнях, показанных на рисунке, при условии, что напряжения в нижней части второго стержня и в стержнях первом и третьем равны 2000 *кг/см²*. *Ответ*: 8:3:4.



К задаче 5.61.



К задаче 5.62.

5.62. Сравнить количество потенциальной энергии в трех стержнях (см. рисунок), выполненных из стали, при условии, что наибольшие напряжения не превосходят предела упругости $\sigma_y = 2000$ *кг/см²*.

Размер надреза x вдоль оси второго стержня крайне незначителен; $F_1 = 2$ *см²*; $F_2 = 1$ *см²*; $l = 100$ *см*; $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*.

Ответ: 200 *кгсм*; 50 *кгсм*; 100 *кгсм*.

5.63. Определить наибольшее значение упругой удельной потенциальной энергии растянутых стержней из следующих материалов:

Название материала	E в *кг/см²*	$\sigma_п$ в *кг/см²*	*Ответ:* a в *кгсм/см³*
Серый чугун (растяжение)	$1\cdot10^6$	500	0,125
Серый чугун (сжатие)	$1,1\cdot10^6$	1000	0,455
Мягкая сталь	$2\cdot10^6$	2000	1,000
Дуб	$1,2\cdot10^5$	250	0,260
Сосна	$0,9\cdot10^5$	150	0,125
Каучук	80	20	2,500

5.64. Два круглых стержня диаметрами d_1 и d_2 имеют одинаковую длину, сделаны из одного материала и скручиваются равными моментами. Как относятся количества потенциальной энергии этих стержней?

Ответ: $U_1:U_2 = d_2^4:d_1^4$.

5.65. Вал, передающий 100 *л. с.* при 120 об/мин, закручен на 1° на длине 3,6 *м*. Найти потенциальную энергию, накопленную в 1 *пог. м* вала.

Ответ: 1,45 *кгм*.

5.66. Вал передает 100 *л. с.* при 120 об/мин. Определить потенциальную энергию, накопленную в 1 *пог. м* вала, если наибольшее касательное напряжение равно 350 *кг/см²*, а модуль упругости при сдвиге равен $8\cdot10^5$ *кг/см²*.

Ответ: 274 *кгсм*.

5.67. Сплошной вал круглого сечения диаметром 10 *см* подвергнут действию постоянного изгибающего момента 34 500 *кгсм* и одновременно крутящего момента 46 000 *кгсм*. Определить потенциальную энергию, накопленную в 1 *пог. м* вала; $E = 2\cdot10^6$ *кг/см²*; $G = 8\cdot10^5$ *кг/см²*.

Ответ: $\sim$195 *кгсм*.

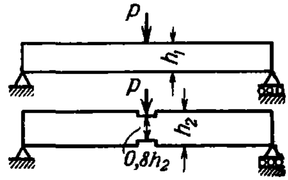
5.68. Две проволоки — одна стальная, другая бронзовая — имеют одинаковую длину и одинаковый диаметр. Из них изготовлены две одинаковые винтовые цилиндрические пружины. Предел упругости стали в четыре раза больше, чем предел упругости бронзы. Модуль упругости стали в два раза больше, чем модуль упругости бронзы. Определить отношение наибольших запасов потенциальной энергии пружин. Найти отношение безопасных нагрузок пружин.

Ответ: 8:1 и 4:1.

5.69. Балка прямоугольного сечения 12×20 *см²* лежит на двух опорах и загружена по всему пролету $l = 2$ *м* равномерно распределенной нагрузкой $q = 1,2$ *т/м*. Модуль упругости материала балки (сосна) $E = 1\cdot10^5$ *кг/см²*. Подсчитать количество потенциальной энергии. Насколько изменится это количество, если балку положить на опоры плашмя?

Ответ: $U=\frac{q^2l^5}{240EJ}=240$ *кгсм*. Увеличится до 667 *кгсм*.

5.70. Сравнить количество потенциальной энергии в двух балках (показанных на рисунке), испытываемых на изгиб и имеющих прямоугольное сечение одинаковой ширины. Наибольшее напряжение в каждой балке под действием сил P доведено до предела упругости. Первая балка имеет по всей длине постоянную высоту, вторая — имеет под силой P надрез, уменьшающий высоту на одну пятую. Длина надреза вдоль оси балки незначительна.



К задаче 5.70.

Ответ: $U_2:U_1=0{,}512$.

5.71. Стальная балка круглого сечения диаметром 5 *см* пролетом 75 *см* свободно оперта по концам и нагружена посредине пролета сосредоточенной силой. Наибольшее нормальное напряжение равно $[\sigma]=1000$ *кг/см*^{2}. Найти запас потенциальной энергии, накопленной балкой.

Ответ: $\frac{2}{3}\frac{[\sigma]^2}{Ed^2}\frac{J}{}l=30{,}7$ *кгсм*.

5.72. Балка прямоугольного поперечного сечения испытывает действие постоянного изгибающего момента; наибольшие нормальные напряжения равны σ, модуль нормальной упругости E, площадь поперечного сечения F, длина балки l. Вычислить запас потенциальной энергии.

Ответ: $\frac{\sigma^2Fl}{6E}$.

5.73. Балка двутаврового сечения (№ 20*а*) пролетом 6 *м* опирается одним концом на шарнирную неподвижную опору, а другой конец балки поддерживается цилиндрической винтовой пружиной диаметром 10 *см*. Диаметр стержня пружины 2 *см* при десяти витках. Балка и пружина — из стали, имеющей модуль упругости: $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2} и $G=8\cdot10^5$ *кг/см*^{2}. Определить количество потенциальной энергии, накопленной этой балкой под действием вертикальной силы в 2 *т*, приложенной посредине пролета балки.

Решение. Обозначим осадку рессоры через Δl, а величину прогиба, отсчитываемого от прямой горизонтальной оси балки, под действием силы P через f. Тогда количество потенциальной энергии балки выразится так:

$$U=A=\frac{1}{2}P\left(f+\frac{1}{2}\Delta l\right)=$$

$$=\frac{P^2l^3}{96EJ}+\frac{P^2R^3n}{2Gr^4}=\frac{P^2}{10^6}\left(\frac{600^3}{96\cdot2\cdot2030}+\frac{5^3\cdot10}{2\cdot0{,}8\cdot1^4}\right)=4\,(553+782)=5340 \text{ кгсм}.$$

Ответ: $U=5340$ *кгсм*.

5.74. Балка из углеродистой стали, защемленная концом в стене и нагруженная на противоположном конце силой, вызывающей наибольшее нормальное напряжение, равное пределу пропорциональности (2000 *кг/см²*), имеет круглое поперечное сечение диаметром 25 *мм* и длину 120 *см*. Какой необходим диаметр, если изготовить эту балку из никелевой стали при условии, что количество накопленной потенциальной энергии не изменится, а наибольшее нормальное напряжение будет тоже равно пределу пропорциональности (3500 *кг/см²*)? Которая из балок выдержит бо́льшую статическую нагрузку, будучи нагружена до предела пропорциональности? Модули нормальной упругости материала обеих балок считать одинаковыми.

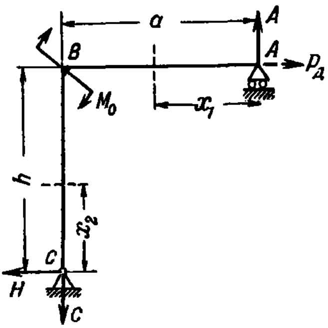
Ответ: $d_2 = 1{,}43$ *см*; первая в 3,06 раза бо́льшую.

5.75. Стержень круглого поперечного сечения диаметром d и длиной l нагружен грузом P: а) растягивающим стержень вдоль оси; б) изгибающим стержень посредине его длины при шарнирно опертых концах. Сравнить энергию стержня в обоих случаях и показать, что удельная энергия любого стержня, нагруженного любым образом, пропорциональна квадрату напряжения.

Ответ: $1 : \frac{l^2}{3d^2}$; $a_а = \frac{\sigma^2}{2E}$; $a_б = \frac{\sigma^2_{max}}{24E}$.

5.76. Найти при помощи теоремы Кастильяно горизонтальное перемещение точки A конструкции, изображенной на рисунке.

Решение. Для нахождения горизонтального перемещения точки A надо продифференцировать потенциальную энергию системы по дополнительной горизонтальной силе, прикладываемой в точке A.



К задаче 5.76.

Горизонтальное перемещение точки A равно

$$\Delta_A = \int \frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial P_д} + \int \frac{M_2\,dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial P_д}.$$

При принятом на рисунке способе отсчета пределы для первого интеграла будут 0 и a, для второго — 0 и h. Определим реакции от заданной нагрузки M_0 и от дополнительной силы $P_д$:

$$H = P_д, \quad A = C = \frac{M_0 + P_д h}{a}.$$

Затем подсчитаем изгибающие моменты M_1 и M_2 и их производные по $P_д$:

$$M_1 = Ax_1 = \frac{M_0 + P_д h}{a}x_1; \qquad \frac{\partial M_1}{\partial P_д} = +\frac{h}{a}x_1;$$

$$M_2 = Hx_2 = P_д x_2; \qquad \frac{\partial M_2}{\partial P_д} = +x_2$$

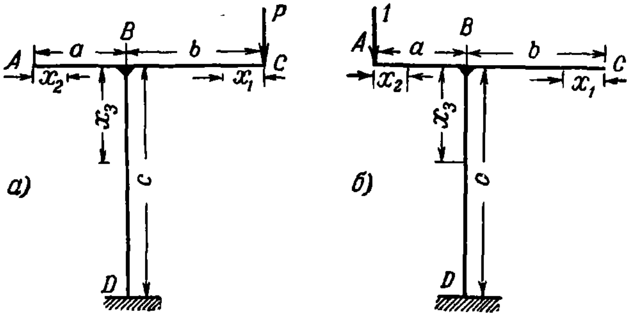
и полученные значения подставим в формулу для вычисления Δ_A:

$$\Delta_A = \frac{1}{EJ}\int_0^a (M_0 + P_д h)\frac{x_1}{a}\frac{h}{a}x_1\,dx + \frac{1}{EJ}\int_0^h P_д x_2 x_2\,dx,$$

и так как $P_д = 0$, то второй интеграл равен нулю, а

$$\Delta_A = \frac{1}{EJ}\int_0^a M_0 \frac{h}{a^2} x_1^2 dx = \frac{M_0 ha}{3EJ}.$$

5.77. Определить прогиб конца A левой консоли рамы $ABCD$, изображенной на рисунке a), под действием груза P на конце другой консоли способом Максвелла—Мора.



К задаче 5.77.

Решение. В сечении, где определяем прогиб, приложим силу $P^0 = 1$ (рис. $б$)).

Напишем выражения изгибающего момента от силы P и от силы $P^0 = 1$ на каждом из трех участков рамы:

$$M_1 = -Px_1; \qquad M_1^0 = 0;$$

$$M_2 = 0; \qquad M_2^0 = -x_2;$$

$$M_3 = -Pb; \qquad M_3^0 = a.$$

Искомое перемещение будет равно

$$f_A = \frac{1}{EJ}\sum \int_{(l)} MM^0\, dx.$$

Так как на первом участке $M_1^0 = 0$, а на втором $M_2 = 0$, то остается вычислить интеграл для одного только третьего участка:

$$f_A = \frac{1}{EJ}\int_0^c -Pba\, dx = -\frac{Pabc}{EJ}.$$

Знак минус обозначает, что конец A поднимется кверху (против направления силы $P^0 = 1$).

5.78. Определить способом Верещагина величину горизонтального перемещения шарнира D симметричной рамы, показанной на рисунке и загруженной равномерно распределенной нагрузкой на ригеле. Поперечные сечения ног рамы и ригеля одинаковы.

Решение. Любое перемещение $\Delta = \dfrac{\omega M_C^0}{EJ}$, а при нескольких участках загружения

$$\Delta = \sum \frac{\omega M_C^0}{EJ}.$$

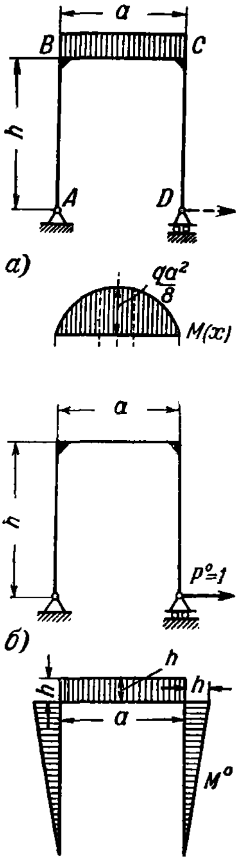
ω — площадь эпюры $M(x)$ от заданной иагрузки (рисунок *а*)); M_C^0 — ордиината эпюры изгибающего момента от нагрузки $P^0 = 1$, приложенной в сечении, где отыскивается деформация (рисуиок *б*)). Ордината M_C^0 берется в том сеченин участка балки или рамы, против которого приходится центр тяжести эпюры $M(x)$ от заданной нагрузки.

Рассматривать будем только горизонтальный участок, так как $M(x)$ в ногах рамы равен нулю:

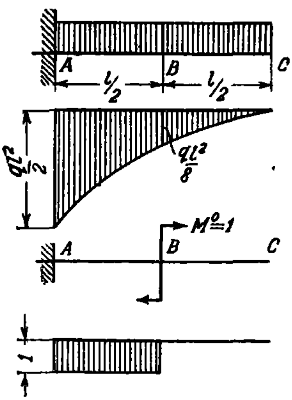
$$\omega M_C^0 = \left[\frac{2}{3}\,\frac{qa^2}{8}\,a\right] h = \frac{qa^3 h}{12};$$

перемещение опоры D

$$\Delta_D = \frac{qa^3 h}{12EJ}.$$



К задаче 5.78.



К задаче 5.79.

5.79. Определить угол поворота сечения B балки, представленной на рисунке и загруженной равномерно распределенной нагрузкой q. Применить способ Верещагина.

Решение. Грузовая площадь

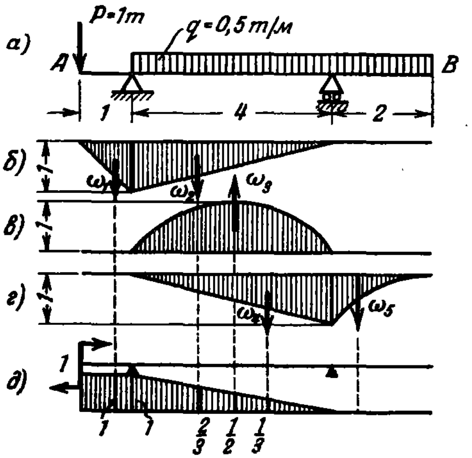
$$\omega = -\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{l}{2} = -\frac{7ql^2}{48}.$$

Ордината единичной нагрузки моментом $M^0=1$, приложенным в сечении B, берется под центром тяжести эпюры M: $M_C^0=-1$. Искомый угол поворота

$$\theta_B=+\frac{7}{48}\cdot\frac{ql^3}{EJ}.$$

Знак + показывает, что направление поворота сечения B совпадает с направлением M^0.

5.80. Определить угол поворота конца левой консоли балки AB, находящейся под действием нагрузки, показанной на рисунке; применить способ Верещагина; $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}; $J=2000$ *см*^{4}.



К задаче 5.80.

Решение. Применим принцип сложения действия сил, для чего построим отдельно эпюры: от силы P (эпюра *б*), от нагрузки q в пределах пролета (*в*), от нагрузки q на консоли (*г*).

Подсчитаем площади этих эпюр:

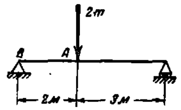
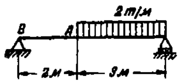
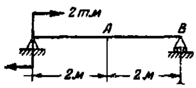
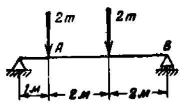
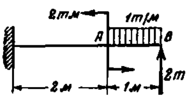
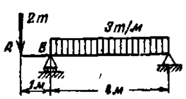
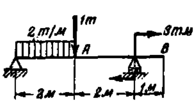
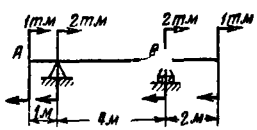
$$\omega_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=0,5\ тм^2;\qquad \omega_2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4=2\ тм^2;$$

$$\omega_3=\frac{2}{3}\cdot1\cdot4=\frac{8}{3}\ тм^2;$$

$$\omega_4=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4=2\ тм^2;$$

$$\omega_5=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2=\frac{2}{3}\ тм^2.$$

Приложим к балке момент $M^0=1$ на конце левой консоли и построим эпюру M^0 от этой нагрузки (схема *д*). Вычислим и отметим на этой эпюре значения ординат M_C^0, приходящихся против центров тяжести вычисленных

	Схема балки	J в $см^4$	Ответ:	
			f_A в см	θ_B
а		1500	−1,6	−0,0107
б		4000	−1,237	−0,00769
в		2000	−0,5	+0,00333
г		2500	−0,96	+0,0096
д		3000	+1,611	+0,0164
е		3500	+0,667	−0,0076
ж		2500	−0,333	−0,00133
з		2500	+0,5	−0,04

выше грузовых площадей. Произведем подсчеты:

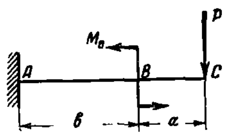
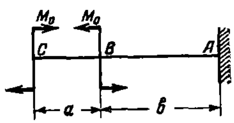
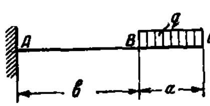
$$EJ\cdot\theta_A = -0{,}5\cdot 1 - 2\cdot\frac{2}{3} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{6}\ \textit{тм}^2;$$

$$\theta_A = -\frac{7\cdot 10^7}{6\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^3} = -\frac{7}{2400}.$$

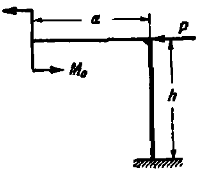
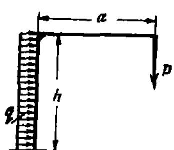
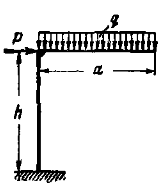
5.81. Определить прогиб точек, указанных буквой A, и угол поворота сечений, указанных буквой B, для балок, схемы которых приведены в таблице на стр. 182; $E = 2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

5.82. Балка постоянного сечения ABC защемлена одним концом и загружена, как указано ниже на схемах. Определить прогибы и углы поворота в сечениях B и C. Данные: $P = 2$ *т*; $M_0 = 4$ *тм*;

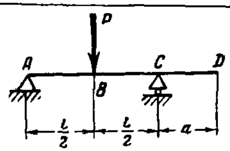
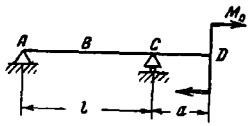
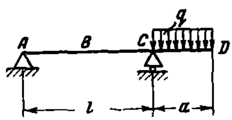
	Схема балки	*Ответ:*
а		$\theta_B = -\frac{Pb(2a+b)}{2EJ} + \frac{M_0 b}{EJ} = -0{,}0094$ $\theta_C = -\frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{M_0 b}{EJ} = -0{,}0135$ $f_B = -\frac{Pb^2}{6EJ}(3a+2b) + \frac{M_0 b^2}{2EJ} = -1{,}88$ *см* $f_C = -\frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{M_0 b}{2EJ}(2a+b) = -4{,}3$ *см*
б		$\theta_B = 0$; $\theta_C = -\frac{M_0 a}{EJ} = -0{,}0083$ $f_B = 0$; $f_C = -\frac{M_0 a^2}{2EJ} = 0{,}83$ *см*
в		$\theta_B = -\frac{qabl}{2EJ} = -0{,}03125$ $\theta_C = -\frac{qa}{6EJ}(a^2+3ab+3b^2) = -0{,}034$ $f_B = -\frac{qab^2}{12EJ}(3a+4b) = -5{,}6$ *см* $f_C = -\frac{qa}{24EJ}(3a^3+12a^2b+18ab^2+8b^3) =$ $= -12{,}3$ *см*

$q=2$ *т/м*; $b=3$ *м*; $a=2$ *м*; $E=2\cdot 10^6$ *кг/см*²; $J=4800$ *см*⁴; $l=a+b=5$ *м*.

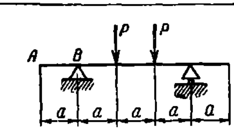
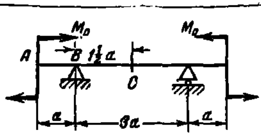
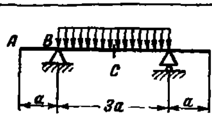
5.83. Для приведенных ниже схем *а*, *б*, *в* загружения рамы постоянного сечения из стали ($E=2\cdot 10^6$ *кг/см*²) определить величину вертикального перемещения f, горизонтального перемещения Δ и угла поворота θ свободного конца.

	Схема полурамы	Числовые условия	*Ответ:*
а		$P=2$ *т* $M_0=1$ *тм* $a=2$ *м* $h=4$ *м* $J=10^4$ *см*⁴	$f=\frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{a^2}{2}+M_0ah+\frac{Pah^2}{2}\right]=2{,}1$ *см* $\Delta=\frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{h^2}{2}+\frac{Ph^3}{3}\right]=2{,}53$ *см* $\theta=\frac{1}{EJ}\left[M_0(a+h)+\frac{Ph^2}{2}\right]=0{,}0111$
б		$P=2$ *т* $q=1$ *т/м* $a=1$ *м* $h=4$ *м* $J=$ $=8000$ *см*⁴	$f=\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pa^3}{3}+Pa^2h+\frac{qah^3}{6}\right]=1{,}21$ *см* $\Delta=\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pah^2}{2}+\frac{qh^4}{8}\right]=3$ *см* $\theta=\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pa^2}{2}+Pah+\frac{qh^3}{6}\right]=0{,}0123$
в		$P=2$ *т* $q=1$ *т/м* $a=1$ *м* $h=3$ *м* $J=$ $=4000$ *см*⁴	$f=\frac{1}{EJ}\left[\frac{qa^4}{8}+\frac{qa^3h}{2}+\frac{Pah^2}{2}\right]=1{,}33$ *см* $\Delta=\frac{1}{EJ}\left[\frac{qa^2h^2}{4}+\frac{Ph^3}{3}\right]=2{,}53$ *см* $\theta=\frac{1}{EJ}\left[\frac{qa^3}{6}+\frac{qa^2h}{2}+\frac{Ph^2}{2}\right]=0{,}0133$

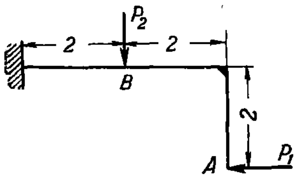
5.84. Для заданных схем загружения одноконсольной стальной балки ($E=2\cdot 10^6$ *кг/см*²) постоянного сечения ($J=2000$ *см*⁴) пролетом $l=4$ *м*, с консолью $a=1$ *м* определить прогибы в сечениях B и D и углы поворота в сечениях A, B, C и D от нагрузок: $P=1$ *т*; $q=2$ *т/м*; $M_0=4$ *тм*.

	Схема балки и нагрузки	*Ответ*:					
		Прогибы, *см*		Углы поворота			
		B	*D*	*A*	*B*	*C*	*D*
а		−0,33	+0,25	−0,0025	0	0,0025	0,0025
б		1,00	−1,83	0,00667	0,00167	−0,01333	−0,02333
в		0,25	−0,396	0,00167	0,00042	0,00333	−0,00417

5.85. Для заданных схем симметричного загружения двухконсольной стальной балки постоянного сечения определить прогибы в середине пролета и в конце консоли и углы поворота консоли *A* и сечения над опорой *B*: $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}; $J=2400$*см*^{4}; $a=1$ *м*; $M_0=4$*тм*; $P=2$ *т*; $q=2$ *т/м*.

	Схема загружения	Деформации на конце консоли *A*	Углы поворота на опоре; прогиб в середине пролета
а		$\theta=-\frac{Pa^2}{EJ}=-0{,}00417$ $f=+\frac{Pa^3}{EJ}=+0{,}42$ *см*	$\theta=-\frac{Pa^2}{EJ}=-0{,}00417$ $f=-\frac{23}{24}\frac{Pa^3}{EJ}=-0{,}4$ *см*
б		$\theta=-\frac{5M_0a}{2EJ}=-0{,}0125$ $f=+\frac{2M_0a^2}{EJ}=+1{,}67$ *см*	$\theta=-\frac{3M_0a}{2EJ}=-0{,}0208$ $f=-\frac{9}{8}\frac{M_0a^2}{EJ}=-0{,}94$ *см*
в		$\theta=-\frac{9}{8}\frac{qa^3}{EJ}=-0{,}0047$ $f=+\frac{9}{8}\frac{qa^4}{EJ}=+0{,}47$ *см*	$\theta=-\frac{9}{8}\frac{qa^3}{EJ}=-0{,}0047$ $f=-\frac{135}{128}\frac{qa^4}{EJ}=-0{,}44$ *см*

5.86. Балка с ломаной осью, показанная на рисунке, загружена силой $P_1 = 1$ *т* и $P_2 = 2$ *т*. Момент инерции сечения постоянный по всей длине и равен 3000 *см*^{4}. Определить величину перемещения конца балки A по направлению силы P_1 и угол поворота сечения B; $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.



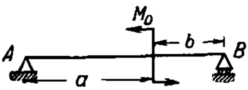
К задаче 5.86.

Ответ: 4,45 *см*; 0,0133.

5.87. Балка ABC длиной 5 *м* имеет опоры в точке A и в точке B, отстоящей от A на расстоянии 3 *м*. При отсутствии нагрузки конец C находится на одном уровне с A и B. На всей длине балки расположена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью 3 *т/м*. Какой величины груз, приложенный на половине расстояния между A и B, заставит точку C вернуться в прежнее положение?

Ответ: 10 *т*.

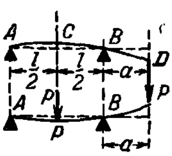
5.88. Балка на двух опорах (см. рисунок) загружена сосредоточенным моментом M_0. Определить величину прогиба в сечении, где приложен M_0, и углы поворота концевых сечений A и B.



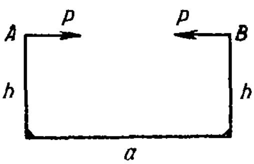
К задаче 5.88.

Ответ: $\dfrac{M_0 ab(a-b)}{3EJ(a+b)}$; $\dfrac{M_0}{EJ}\,\dfrac{a^2+2ab-2b^2}{6(a+b)}$; $\dfrac{M_0}{EJ}\,\dfrac{b^2+2ab-2a^2}{6(a+b)}$.

5.89. Балка с консолью свободно лежит на опорах A и B, изгибается в одном случае силой P, приложенной в точке D, и в другом случае той же силой, но приложенной в середине пролета в точке C (см. рисунок). Показать, что прогиб в точке C при первом загружении равен прогибу точки D при втором загружении.



К задаче 5.89.



К задаче 5.90.

Ответ: Каждый прогиб равен $\dfrac{Pal^2}{16EJ}$.

5.90. Найти сближение точек A и B конструкции, показанной на рисунке. Сечение стержней на всех участках одинаковое. Решить ту же задачу, приложив вместо сил P моменты M_0.

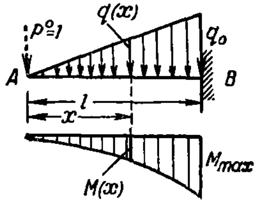
Ответ: $\dfrac{Ph^2}{3EJ}(2h+3a)$;

$\dfrac{M_0 h}{EJ}(h+a)$.

5.91. Определить величнну прогиба свободного конца A балки AB, защемленной концом P и загруженной нагрузкой, меняющейся по закону треугольника. Определить также величину угла поворота сечения A.

Решение. Применим способ Максвелла—Мора. Интенсивность нагрузки в любом сечении $q(x)=q_0\frac{x}{l}$; величина $M(x)=-q_0\frac{x^3}{6l}$. Прикладываем в точке A единичную силу $P^0=1$; $M^0=-x$. Искомый прогиб $f_A=$ $=\frac{1}{EJ}\int\limits_0^l -\frac{qx^3}{6l}(-x)\,dx=\frac{q_0l^4}{30EJ}$. Для определения угла поворота сечения A приложим в этом сечении $M^0=1$; то же значение будет иметь M^0 и в любом сечении. Искомый угол поворота

$$\theta_A=\frac{1}{EJ}\int\limits_0^l -\frac{qx^3}{6l}(-1)\,dx=\frac{q_0l^3}{24EJ}.$$



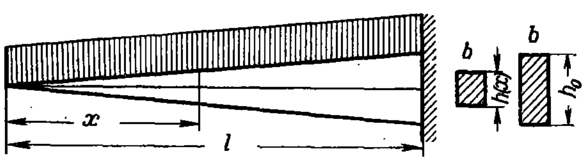
К задаче 5.91.

5.92. Балка пролетом 3 *м* имеет справа консоль такой же длины. В середине пролета приложена сосредоточенная сила 1,5 *т*. Поднятию конца консоли препятствует хомут. Правую опору опускают вниз до тех пор, пока хомут не перестанет нажимать на балку. Определить величину опускания опоры. Собственным весом балки пренебречь; $E=1\cdot10^5$ *кг/см*², $J=7500$ *см*⁴.

Ответ: 1,7 *см*.

§ 23. Балки переменного сечения

5.93. Найти форму балки равного сопротивления, защемленной одним концом и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q. Пролет балки l, сечение—прямоугольное с постоянной шириной b



К задаче 5.93.

и переменной высотой $h(x)$. Найти наибольший прогиб и сравнить его с прогибом (f_0) балки постоянного сечения.

Решение. Условие равного сопротивления изгибу:

$$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W(x)}=\frac{M_0}{W_0}=[\sigma].$$

Подставляя значения изгибающих моментов и моментов сопротивления, получим

$$\frac{qx^2\cdot6}{2\cdot b\,[h(x)]^2}=\frac{ql^2\cdot6}{2\cdot bh_0^2}.$$

Устанавливаем закон изменения высоты сечения и момента инерции:

$$h(x)=h_0\frac{x}{l}\ ;\ J(x)=J_0\frac{x^3}{l^3}\ .$$

Напишем уравнение изогнутой оси балки:

$$EJ(x)\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{qx^2}{2}\ ;\ EJ_0\frac{x^3}{l^3}\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{qx^2}{2}\ ;\ EJ_0y''=-\frac{ql^3}{2}\frac{1}{x}\ .$$

Интегрируем это уравнение:

$$EJ_0y'=-\frac{ql^3}{2}\ln x+C$$

и определим величину C из условия, что при $x=l$ $y'=0$:

$$C=\frac{ql^3}{2}\ln l;\quad EJ_0y'=-\frac{ql^3}{2}\ln x+\frac{ql^3}{2}\ln l.$$

Интегрируем вторично

$$EJ_0y=-\frac{ql^3}{2}x\ln x-\frac{ql^3}{2}x-\frac{ql^3}{2}x\ln l+D.$$

Из условия, что при $x=l$ $y=0$, находим D:

$$D=\frac{ql^4}{2}\ .$$

Окончательное уравнение прогибов и величина наибольшего прогиба:

$$EJ_0y=-\frac{ql^3}{2}(x\ln x-x-x\ln l+l);\quad f_{max}=-\frac{ql^4}{2EJ_0}\text{, т. е. } f_{max}=4f_0.$$

5.94. Две балки равного сопротивления имеют одинаковое квадратное сечение в защемлении и загружены одинаковыми силами на свободном конце. У первой балки меняется ширина, у второй — высота. Какая будет легче? У какой из них наибольший прогиб будет больше?

Ответ: $v_1:v_2=f_1:f_2=3:4$.

5.95. Как будет изменяться наибольшее касательное напряжение по длине каждой из двух балок предыдущей задачи?

Ответ: $\tau_1=\tau_0\frac{l}{x}$; $\tau_2=\tau_0\sqrt{\frac{l}{x}}$, где $\tau_0=\frac{3}{2}\frac{P}{a^2}$.

5.96. Найти, как должна меняться высота балки равного сопротивления с квадратным сечением, защемленной одним концом и несущей равномерно распределенную нагрузку q. Допускаемое напряжение $[\sigma]$. Найти прогиб свободного конца.

Ответ: $[a(x)]^3=\frac{3qx^2}{[\sigma]}$; $f=-\frac{3ql^4}{8EJ_0}$.

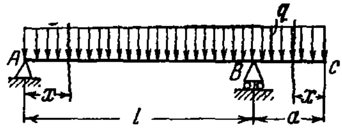
5.97. По какому закону нужно менять высоту $h(x)$ прямоугольного поперечного сечения балки, защемленной одним концом, чтобы под действием силы на другом конце балка изгибалась по дуге круга?

Ответ: $h(x)=h_0\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$.

5.98. Найти закон изменения диаметра балки ABC круглого поперечного сечения из условия, чтобы наибольшие нормальные напряжения в каждом сечении равнялись бы допускаемому напряжению.

Ответ: Для участка AB $d^3 = \frac{16qx}{\pi l[\sigma]}(l^2 - a^2 - lx)$.

Для участка BC $d^3 = \frac{16qx^2}{\pi[\sigma]}$.



К задаче 5.98.

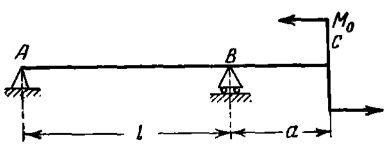
5.99. Стальная полоса длиной 128 *см* и шириной $b = 5$ *см* имеет переменную толщину. В середине пролета толщина равна $t_0 = 1$ *см* и падает до нуля к концам балки по закону $t = t_0\sqrt[3]{\frac{2x}{l}}$, где x — расстояние сечения от конца балки. Полоса оперта по концам и нагружена посредине сосредоточенной силой P. Найти величину груза P, вызывающего в середине пролета прогиб, равный 2,5 *см*. Модуль упругости $E = 2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 31,7 *кг*.

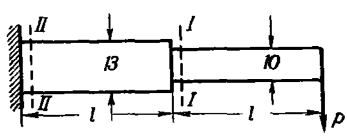
5.100. Найти форму равного сопротивления для балки, изображенной на рисунке. Сечение балки — прямоугольник с высотой h и с переменной шириной $b(x)$. Найти прогиб сечения C.

Ответ: $\frac{M_0 a}{2EJ}(l + a)$.

5.101. Балка, защемленная одним концом, несет на другом конце сосредоточенную силу P. Половина балки, ближайшая к защемлению,



К задаче 5.100.



К задаче 5.101.

имеет сечение диаметром 13 *см*, вторая половина — диаметром 10 *см*. Где находится опасное сечение балки? (Влияние концентрации напряжений не учитывать.)

Ответ: В сечении $II—II$ напряжения составляют 0,91 от напряжений в сечении $I—I$.

5.102. Найти величину прогиба конца балки задачи 5.101, приняв $P = 100$ *кг*, $l = 40$ *см*, $E = 10^5$ *кг/см*^{2}.

Решение. Применим теорему Кастильяно. Значения изгибающих моментов на каждом участке и производных от них по силе P:

$$M_1 = P\cdot x;\quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = x;\quad M_2 = P\cdot x;\quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = x.$$

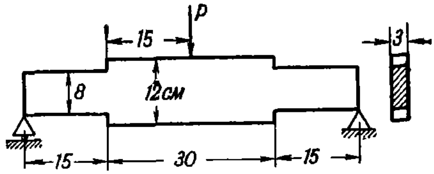
Моменты инерции: $J_1 = 490$ *см*^{4}; $J_2 = 1400$ *см*^{4};

$$J_2 : J_1 = 2{,}86.$$

Прогиб концевого сечения балки:

$$f=\frac{1}{EJ_1}\int\limits_0^l Px^2\,dx+\frac{1}{EJ_2}\int\limits_l^{2l} Px^2\,dx=\frac{Pl^3}{3\,EJ_1}\left(1+\frac{7}{2,86}\right)=0,15\,см.$$

5.103. Балка переменного сечения (см. рисунок) загружена силой $P=400$ *кг* посредине пролета. Ширина балки 3 *см*. Определить



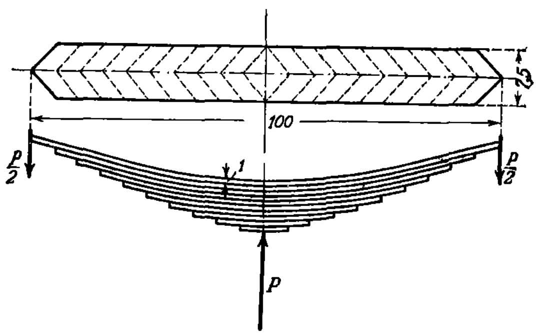
К задаче 5.103.

величину наибольших нормальных и касательных напряжений, не учитывая влияния концентрации напряжений.

Ответ: $\sigma_{\max}=94$ *кг/см²*; $\tau_{\max}=12,5$ *кг/см²*.

5.104. Рессора, показанная на рисунке, состоит из 10 листов шириной 7,5 *см* и толщиной 10 *мм*. Пролет рессоры $l=1$ *м*. Допускаемое напряжение 4000 *кг/см²*. Модуль нормальной упругости рессорной стали равен $2\cdot10^6$ *кг/см²*. Определить грузоподъемность рессоры и величину прогиба посредине пролета.

Ответ: $[P]=2000$ *кг*, $f=\frac{[\sigma]\,l^2}{4Et}=5$ *см*.



К задаче 5.104.

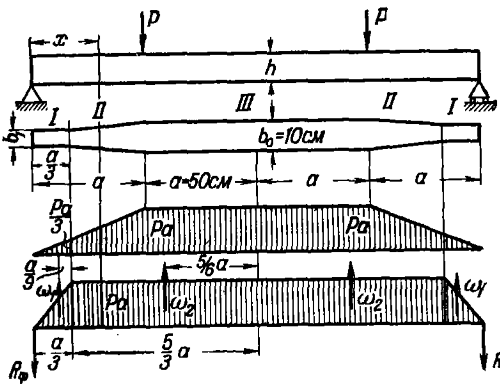
5.105. Плоская рессора равного сопротивления длиной 75 *см* изготовлена из полос шириной 7 *см* и толщиной 0,8 *см*. Сколько необходимо полос, если рессора должна поддерживать посредине пролета сосредоточенный груз 0,5 *т* при допускаемом напряжении 1500 *кг/см²*? Каков будет наибольший прогиб, если модуль упругости равен $2\cdot10^6$ *кг/см²*?

Ответ: 9 полос; 1,2 *см*.

5.106. Шкив, вращающийся посредине пролета вала круглого сечения (постоянного по длине вала), передает на вал усилие 1500 *кг*, вызывающее изгиб вала. Определить диаметр вала при допускаемом напряжении 600 *кг/см*², не учитывая его собственного веса. Пролет вала 2,4 *м*. Определить прогиб (f_1) вала в сечении под шкивом и подсчитать, чему будет равен прогиб (f_2), если валу придать форму балки равного сопротивления изгибу.

Ответ: $d=11{,}5$ *см*; $f_1=0{,}25$ *см*; $f_2=\frac{3}{80}\frac{Pl^3}{EJ_0}=0{,}45$ *см*.

5.107. Балка из сосны переменного сечения имеет форму и размеры, показанные на рисунке. Величина силы $P=200$ *кг*. Допускаемые напряжения: $[\sigma]=110$ *кг/см*²; $[\tau]=12$ *кг/см*². Модуль нормальной упругости сосны $E=10^5$ *кг/см*². Найти высоту сечения балки h



К задаче 5.107.

и наименьшую ширину b_1. Определить величину прогиба в середине пролета балки.

Решение. Высоту балки $h=7{,}5$ *см* находим из условия прочности по нормальным напряжениям. Наименьшую ширину балки $b_1=3{,}33$ *см* находим из условия прочности по касательным напряжениям.

Для определения прогиба применим графоаналитический метод. Строим эпюру изгибающего момента. Балка состоит из участков: I — где ширина b_1 постоянна и составляет 1:3 от наибольшей ширины b_0, II — где ширина меняется от величины b_1 до b_0, и III — где ширина постоянна. Моменты инерции на этих участках соответственно равны: $J_1=\frac{1}{3}J_0$, $J_2=J(x)=J_0\frac{x}{a}$, $J_3=J_0$.

Для определения прогибов служит формула $f=\frac{M_ф}{EJ}$.

Заменим эпюру $M(x)$ эпюрой, приведенной к одинаковому моменту инерции для всех участков J_0. Для этого ординаты эпюры $M(x)$ на участках I увеличим в 3 раза, на участках II — в отношении $\frac{a}{x}$, а на участке III оставим без изменения. Исправленная таким образом эпюра показана на рисунке внизу.

Находим величину фиктивной реакции $R_ф$ и площадей ω_1 и ω_2:

$$R_ф=\frac{11}{6}Pa^2; \quad \omega_1=\frac{Pa^2}{6}; \ \omega_2=\frac{5}{3}Pa^2.$$

Величина фиктивного изгибающего момента в середине пролета

$$M_ф=-\frac{11}{6}Pa^2\cdot 2a+\frac{1}{6}Pa^2\left(\frac{5}{3}a+\frac{1}{9}a\right)+\frac{5}{3}Pa^2\cdot\frac{5}{6}a=-\frac{107}{54}Pa^3.$$

Величина наибольшего прогиба

$$f_{max}=-\frac{107}{54}\frac{Pa^3}{EJ_0}=-1{,}41\ см.$$

Если считать, что ширина балки меняется от 0 на опоре до сечения под силой по прямой (без перелома), то

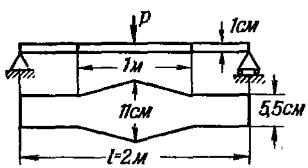
$$f_{max}=-\frac{2Pa^3}{EJ_0}=-1{,}42\ см.$$

Ответ: 7,5 *см*; 3,33 *см*; 1,41 *см*.

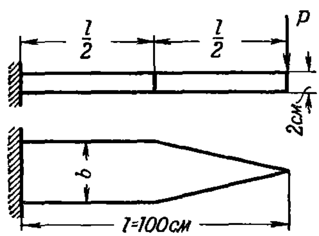
5.108. Вычислить наибольший прогиб стальной полосы под действием силы $P=10$ *кг* и найти наибольшее напряжение. Размеры показаны на рисунке.

Ответ: $\frac{11}{384}\frac{Pl^3}{EJ_0}=1{,}25$ *см*; 273 *кг/см²*.

5.109. Определить необходимую ширину стальной балки при допускаемом напряжении $[\sigma]=1500$ *кг/см²*. Вычислить величину



К задаче 5.108.



К задаче 5.109.

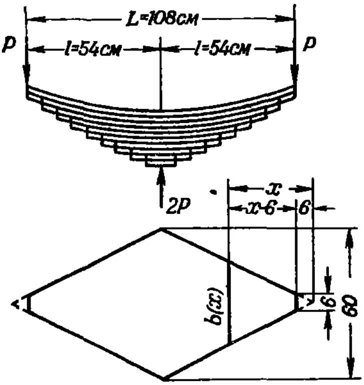
наибольшего прогиба. Размеры и очертания балки показаны на рисунке; $P=40$ *кг*.

Ответ: $b_0=4$ *см*; $f=\frac{17}{48}\frac{Pl^3}{EJ_0}=2{,}66$ *см*.

5.110. Определить необходимую ширину деревянной балки равного сопротивления, защемленной одним концом в стену и несущей на другом, свободном, конце на расстоянии $l=1{,}2$ *м* от стены груз 300 *кг*. Высота балки по всей длине 10 *см*. Допускаемое напряжение на изгиб 100 *кг/см²*, на скалывание 12 *кг/см²*. Найти прогиб конца балки, приняв $E=10^5$ *кг/см²*.

Ответ: $b_{\min} = 4$ *см* на длине $a = 22$ *см* от свободного конца; $b_0 = 22$ *см* в опорном сечении; $f = \frac{P}{6EJ_0}(11a^3 + 3l^3 - 2la^2) = 1{,}41$ *см*. Если принять $a = 0$, $b_{\min} = 0$, то $f = \frac{Pl^3}{2EJ_0} = 1{,}42$ *см*.

5.111. Листовая рессора состоит из девяти листов, составляющих брус равного сопротивления изгибу постоянной высоты, и десятого листа таких же размеров, как и самый длинный из девяти. Ширина



К задаче 5.111.

каждого листа $b = 6$ *см*, толщина 1 *см*. Пролет рессоры $L = 108$ *см*, $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*. Найти прогиб рессоры от груза $P = 1{,}2$ *т*.

Решение. Изобразим внизу рисунка рессору как брус переменной ширины. Ширина листа посредине пролета $10 \times 6 = 60$ *см*. Ширина у концов равна ширине десятого листа, т. е. 6 *см*. Расстояние x до любого сечения отсчитываем от точек пересечения боковых граней бруса, отстоящих на 6 *см* от концов рессоры. Производим следующие вычисления:

$$b(x) = b_0 \frac{x}{l+6} = 60 \frac{x}{60} = x;$$

$$J(x) = J_0 \frac{x}{l+6}; \quad M(x) = P(x-6); \quad \frac{\partial M(x)}{\partial P} = x - 6;$$

$$f_P = \int_6^{60} \frac{M(x)}{EJ(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P}\, dx =$$

$$= \frac{P(l+6)}{EJ_0} \left\{ \left| \frac{x^2}{2} \right|_6^{60} - \left| 12x \right|_6^{60} + 36 \left| l_n(x) \right|_6^{60} \right\} = 8{,}6 \text{ см}.$$

Для рессоры же из девяти листов (без верхнего) прогиб при тех же условиях выражался бы формулой

$$f_P = \frac{Pl^3}{2EJ_0} = \frac{1200 \cdot 54 \cdot 54 \cdot 54 \cdot 12}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 1^3} = 10{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: 8,6 *см*.

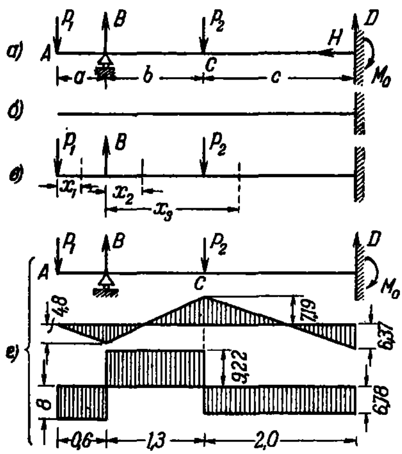
§ 24. Расчет статически неопределимых систем

5.112. Построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы для стальной балки, изображенной на рисунке. Подобрать двутавровое сечение при допускаемом нормальном напряжении 1000 *кг/см*². $P_1 = 8$ *т*; $P_2 = 16$ *т*; $a = 60$ *см*; $b = 130$ *см*; $c = 2$ *м*; $l = b + c = 3{,}3$ *м*.

Решение. Возможные реакции опор: B, D, H и M_0. Задача — статически неопределимая; лишних неизвестных — одна. Составляем уравнения статики:

$$H = 0;\ B + D = P_1 + P_2;$$
$$-P_1(a + b + c) + B(b + c) - P_2 c + M_0 = 0.$$

За лишнее неизвестное принимаем реакцию B. Основная расчетная схема балки приведена на рисунке *б*). Загружаем эту балку заданной нагрузкой



К задаче 5.112.

P_1 и P_2 и лишней неизвестной *силой B* (рисунок *в*)). Для того чтобы балка по рисунку *в*) была равноценна заданной балке (рисунок *а*)), добавляем к схеме балки условие

$$f_B = 0.$$

Раскрываем условие $f_B = 0$ при помощи теоремы Кастильяно:

$$f_B = \frac{\partial U}{\partial B} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial B}\,dx + \int_0^b M_2 \frac{\partial M_2}{\partial B}\,dx + \int_b^{b+c} M_3 \frac{\partial M_3}{\partial B}\,dx\right\} = 0,$$

где M_1, M_2 и M_3 — изгибающие моменты иа трех участках балки. Жесткость EJ принимаем по длине балки постоянной.

Вычисляем подынтегральные величины

$$M_1 = -P_1 x_1; \qquad \frac{\partial M_1}{\partial B} = 0;$$

$$M_2 = -P_1(x_2 + a) + Bx_2; \qquad \frac{\partial M_2}{\partial B} = x_2;$$

$$M_3 = -P_1(x_3 + a) + Bx_3 - P_2(x_2 - b); \qquad \frac{\partial M_2}{\partial B} = x_3.$$

Подставляем вычисленные значения M и $\frac{\partial M}{\partial B}$ в уравнение $f_B = 0$

$$\int\limits_0^b (-P_1x^2 - P_1ax + Bx^2)\,dx + \int\limits_b^{b+c} (-P_1x^2 - P_1ax + Bx^2 - P_2x^2 + P_2bx)\,dx = 0;$$

$$\int\limits_0^{b+c} (-P_1x^2 - P_1ax + Bx^2)\,dx + \int\limits_b^{b+c} (-P_2x^2 + P_2bx)\,dx = 0.$$

После интегрирования и решения уравнения относительно B получаем:

$$B = P_1\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a}{b+c}\right) + P_2\left(1 - \frac{3}{2}\frac{b}{b+c} + \frac{b^3}{2(b+c)^3}\right).$$

Подставляя значение a, b и c и учтя, что $P_2 = 2P_1$, получим:

$$B = 2{,}15\,P_1 = 17{,}22\ m.$$

Из условий равновесия определяем:

$$D = P_1 + P_2 - B = 8 + 16 - 17{,}22 = 6{,}78\ m;$$

$$M_0 = P_1(a + b + c) + P_2c - B(b + c) = 8\cdot 3{,}9 + 16\cdot 2 - 17{,}22\cdot 3{,}3 = 6{,}37\ \textit{тм}.$$

Зная все опорные реакции, строим эпюры M и Q (рисунок *г*)); $M_{\max} = +7{,}19$ *тм*; необходимый момент сопротивления

$$W = \frac{719\,000}{1000} = 719\ \textit{см}^3.$$

Двутавр № 36 имеет $W = 743$ *см*^{3}.

5.113. Определить опорные реакции балки, показанной на рисунке (схема *а*)). Построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы.

Решение. Для раскрытия статической неопределимости применим *способ сравнения линейных деформаций*. За лишнее закрепление выберем опору C. Расчетная схема статически определимой балки показана на рис. *б*). Балка загружается заданной нагрузкой (схема *в*)) и лишней неизвестной силой C (схема *г*)). Прогиб балки в точке C под действием заданной нагрузки обозначим f_{cp}, а под действием силы C — f_{cc}. В заданной балке в точке C опора, следовательно, $f_c = f_{cp} + f_{cc} = 0$.

Для вычисления прогибов удобно воспользоваться графоаналитическим методом: строим эпюры изгибающего момента от нагрузок q и M_0 (схема *д*)) и от силы C (схема *е*)). Принимаем нулевую линию эпюр за ось фиктивных балок, показываем закрепления фиктивных балок, подсчитываем площади эпюр, определяем давление, передаваемое левой фиктивной балкой на правую в шарнире B. Далее рассматриваем только правые фиктивные балки (схема *ж*)). Пишем равенство нулю суммы фиктивных изгибающих моментов в сечении C:

$$\frac{ql_1^3}{24}\cdot l_2-\frac{M_0 l}{3}\cdot l_2+\frac{Cl_1l_2}{3}\cdot l_2+\frac{Cl_2^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l_2=0.$$

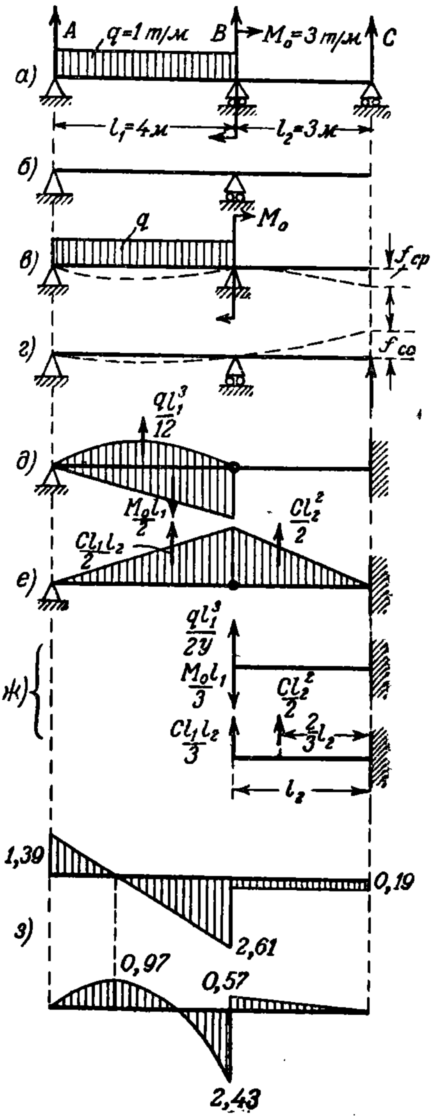
Из этого уравнения получаем:

$$C=\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{M_0-\frac{ql_1^2}{8}}{l_1+l_2}=0{,}19\ m.$$

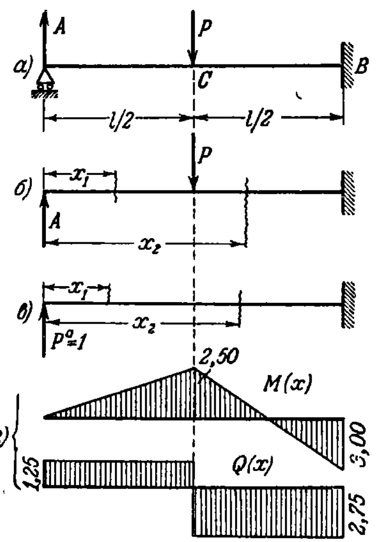
Из уравнений равновесия для балки схемы *а*) получаем:

$$A=1{,}39\ m;\ B=2{,}42\ m.$$

Далее обычными приемами строим эпюры M и Q, показанные на схеме з).



К задаче 5.113.



К задаче 5.114.

5.114. Балка ACB заделана концом B и оперта на подвижную опору концом A. Посредине балки приложена сила $P=4$ *т*.

Построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы.

Решение. При раскрытии статической неопределимости применим *способ Мора*. За лишнее закрепление примем опору A. В расчетной статически определимой схеме балку загрузим как заданной силой P, так и лишней неизвестной силой A (схема *б*)). Такую же балку загружаем силой $P^0=1$, приложенной в точке A и направленной по направлению силы A (схема *в*)).

Подсчитываем значения изгибающих моментов $M(x)$ и $M^0(x)$:

I участок: $M(x)=A\cdot x_1$;
$M^0(x)=x_1$;

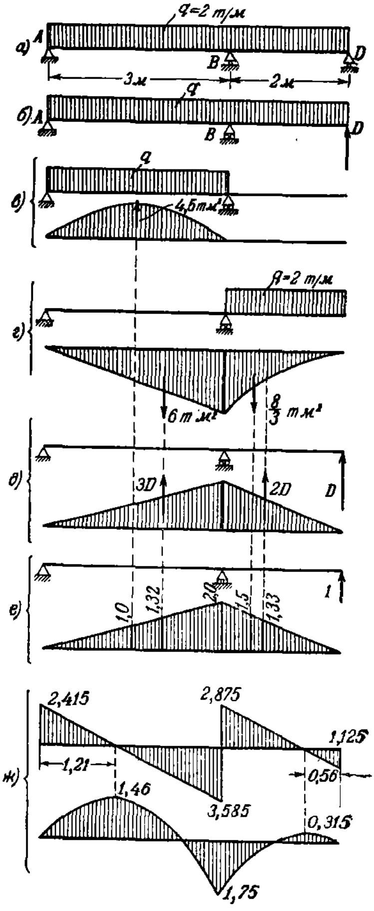
II участок: $M(x)=A\cdot x_2-P(x_2-0,5l)$; $M^0(x)=x_2$.

Подсчитываем интегралы Мора и приравниваем сумму их нулю:

$$\int_0^{0,5l} Ax_1^2\,dx+\int_{0,5l}^{l}\left[Ax_2^2-P(x_2-0,5l)\,x_2\right]dx=0.$$

Из этого уравнения получаем: $A={}^5/_{16}\,P$. Зная A, можно обычными приемами построить эпюры M и Q, показанные на схеме *г*).

5.115. Для балки ABD, показанной на рисунке, построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы.



К задаче 5.115.

Решение. При раскрытии статической неопределимости применим *способ Верещагина*. За лишнее закрепление возьмем правую опору. Выбранная расчетная схема с полной нагрузкой — заданными силами и лишней неизвестной D — показана на схеме *б*). Условие совместности деформаций: $f_D=0$. При пользовании формулой Верещагина это условие переписывается так: $\sum\omega\cdot M_D^0=0$. Для составления этой суммы показываем балку под действием каждой из нагрузок в отдельности и под каждой такой балкой строим эпюры изгибающего момента: от нагрузки q на пролете AB (схема *в*)), от нагрузки q на консоли BD (схема *г*)), от лишней неизвестной D (схема *д*)) и от нагрузки силой $P^0=1$, приложенной в точке D по направлению силы D (схема *е*)). На первых трех эпюрах указываем величины площадей эпюр и положение центров тяжести площадей, на четвертой же эпюре (*е*) — величины ординат M_C^0, приходящихся против центров тяжести площадей предыдущих эпюр.

Условие совместности будет таким:

$$4{,}50\cdot 1-6\cdot\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\cdot 1{,}5+5D\cdot\frac{4}{3}=0.$$

Отсюда получаем $D=1{,}125$ *т*.

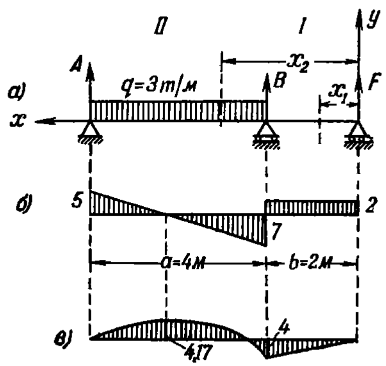
Из уравнений равновесия для балки *а*) находим величины остальных реакций:

$$A=2{,}415\ т;$$

$$B=6{,}460\ т.$$

Эпюры M и Q, построенные обычными приемами, показаны на схеме *ж*).

5.116. Определить опорные реакции балки, показанной на рисунке. Построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы.



К задаче 5.116.

Решение. Применим *метод начальных параметров*. Напишем общее уравнение прогибов:

$$EJy=EJy_0+EJ\theta_0\cdot\frac{x}{1!}+\sum\frac{M\,(x-l_0)^2}{2!}+\sum\frac{P\,(x-l_0)^3}{3!}+\sum\frac{q\,(x-l_0)^4}{4!}.$$

Применим его дважды к опорным сечениям B и A:

$$EJ\theta_A\cdot b+\frac{Fb^3}{6}=0; \qquad (1)$$

$$EJ\theta_A\,(b+a)+\frac{F\,(b+a)^3}{6}+B\,\frac{a^3}{6}-q\,\frac{a^4}{24}=0. \qquad (2)$$

Добавим уравнение статики:

$$F\,(a+b)+Ba-\frac{qa^2}{2}=0. \qquad (3)$$

Из (1) определим $EJ\theta_A$ и подставим в (2):

$$-F\,\frac{b^2}{6}\cdot(b+a)+F\,\frac{(b+a)^3}{b}+B\,\frac{a^3}{6}-q\,\frac{a^4}{24}=0. \qquad (4)$$

Умиожим (3) на $\frac{a^2}{6}$ и вычтем из (4):

$$-F\frac{b^2}{6}(b+a)+F\frac{(b+a)^3}{6}-F\frac{a^2}{6}(b+a)=\frac{qa^4}{24}-\frac{qa^4}{12}.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$F=-\frac{qa^3}{8b(a+b)}=-2m.$$

Из (3) следует $B=9$ m. Определим положение сечения на участке II с наибольшим изгибающим моментом и самый момент:

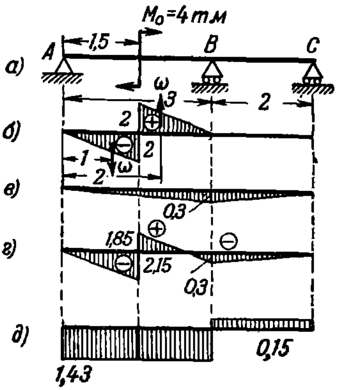
$$-F-B-q(x_0-b)=0;$$

$$2-9+3x_0-6=0;$$

$$x_0=4{,}333 \text{ м},$$

$$M_{\max}=-2\cdot\frac{13}{3}+9\cdot\frac{7}{3}-3\cdot\frac{49}{9\cdot 2}=\frac{25}{6}=4{,}17 \text{ тм}.$$

5.117. Двухпролетная неразрезная балка загружена, как указано на рисунке a). Определить опорные реакции, построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы. Подобрать сечение балки,



К задаче 5.117.

считая его прямоугольным при отношении $h:b=2$. Допускаемые нормальные напряжения при изгибе принять равными 110 $кг/см^2$.

Решение. Применим для раскрытия статической неопределимости теорему о трех моментах. Построим для левого пролета, как для простой балки, эпюру изгибающего момента (рисунок б)). Расстояния каждой равнодействующей фиктивной нагрузки ω от левой опоры указаны на рисунке.

Напишем формулу трех моментов для опоры B:

$$M_A l_1+2M_B(l_1+l_2)+M_C l_2=-6\left(-\omega\frac{1}{3}+\omega\frac{2}{3}\right).$$

Крайние опорные моменты равны нулю, следовательно,

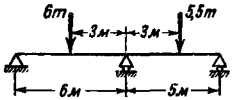
$$2M_B(l_1+l_2)=-\frac{6}{3}\,\omega;$$

$$M_B=-0{,}3\ \textit{тм}.$$

Построим эпюру опорных моментов (рисунок *в*)) и сложим ее с эпюрой левой простой балки (рисунок *б*)). Суммарная эпюра показана на рисунке *г*).

Определим опорные реакции и построим эпюру поперечных сил, показанную на рисунке *д*).

Необходимый момент сопротивления $W=1950\ \textit{см}^3$. Из него определяется необходимая высота поперечного сечения $h=28{,}8\ \textit{см}\approx 29\ \textit{см}$.

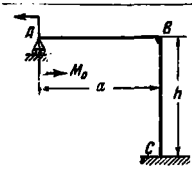
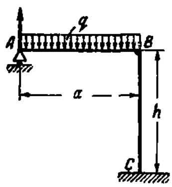
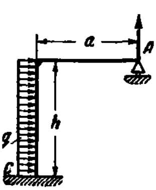


К задаче 5.118.

5.118. Для балки, схема которой показана на рисунке, определить величину опорных реакций и наибольшего и наименьшего изгибающих моментов. При допускаемом напряжении 1600 $\textit{кг}/\textit{см}^2$ подобрать номер двутавра.

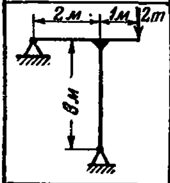
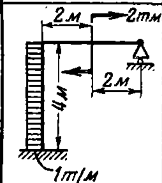
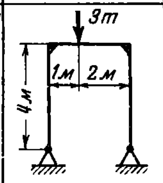
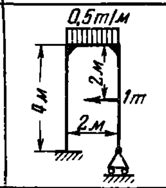
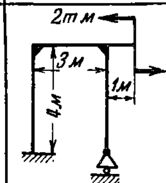
Ответ: Реакции: 2,04 *т*, 7,31 *т*, 2,15 *т*. Изгибающие моменты: 6,12 *тм*, —5,76 *тм*. Номер двутавра 27.

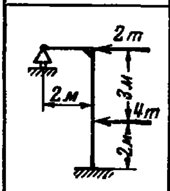
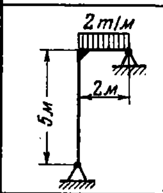
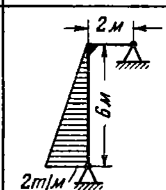
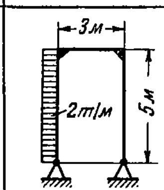
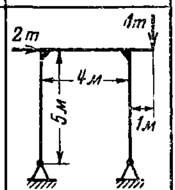
5.119. Для рам, загруженных, как указано ниже на схемах, построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы.

Схема	Числовые данные	*Ответ*:
	$M_0=4\ \textit{тм}$ $a=2\ \textit{м}$ $h=4\ \textit{м}$	$A=\frac{3}{2}\,\frac{M_0}{a}\,\frac{a+2h}{a+3h}=2{,}14\ \textit{т}$ $M_C=0{,}28\ \textit{тм}$
	$q=2\ \textit{т}/\textit{м}$ $a=2\ \textit{м}$ $h=6\ \textit{м}$	$A=\frac{3}{8}\,qa\,\frac{a+4h}{a+3h}=1{,}95\ \textit{т}$ $M_{max}=0{,}95\ \textit{тм}$
	$q=2\ \textit{т}/\textit{м}$ $a=2\ \textit{м}$ $h=5\ \textit{м}$	$A=\frac{qh^3}{2a\,(a+3h)}=3{,}67\ \textit{т}$ $M_C=-17{,}67\ \textit{тм}$

5.120. Для рам, показанных в таблице, определить опорные реакции, применяя для раскрытия статической неопределимости любой способ. Построить эпюры изгибающего момента, поперечной силы и нормальной силы.

Под схемами рам даны ответы — наибольшие по абсолютному значению величины изгибающего момента и поперечной силы.

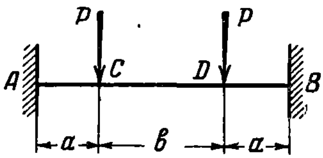
а	*б*	*в*	*г*	*д*
				
2 тм	5,94 тм	1,47 тм	2,39 тм	2 тм
2 т	4 т	2 т	1 т	0,734 т

е	*ж*	*з*	*и*	*к*
				
12,18 тм	0,86 тм	3,40 тм	14,15 тм	5,73 тм
6,00 т	2,14 т	3,48 т	8,33 т	2,75 т

К задаче 5.120.

5.121. Построить эпюры M и Q для статически неопределимых балок, загруженных, как изображено в таблице на стр. 202. Раскрытие статической неопределимости произвести любым способом.

5.122. Подобрать сечение двутавровой балки, защемленной обоими концами и загруженной, как указано на рисунке. Принять: $a = 1{,}5$ *м*, $b = 3$ *м*, $P = 6$ *т*. Допускаемое напряжение — 1600 *кг/см*^{2}.

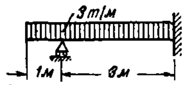
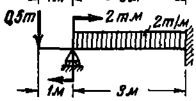
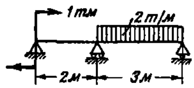
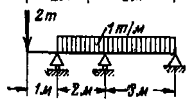
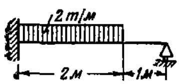
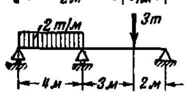
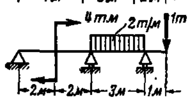
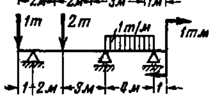
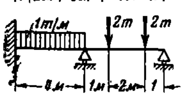
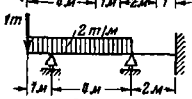
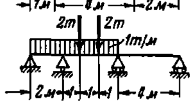
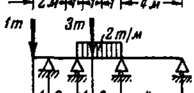


К задаче 5.122.

Указание. При раскрытии статической неопределимости использовать симметрию балки и нагрузки. Применить метод сравнения угловых деформаций.

Ответ: $M_A = -P \cdot a \cdot \dfrac{a+b}{2a+b} = -6{,}75$ *тм*;

$M_C = P \cdot \dfrac{a^2}{2a+b} = 2{,}25$ *тм*; двутавр № 27*а*.

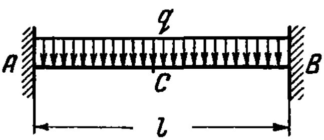
	Схемы балок	Ответ: $\dfrac{M_{max}}{min}$ в *тм*	Ответ: $\dfrac{Q_{max}}{min}$ в *т*
а		+1,35 —2,62	+4,13 —4,87
б		+1,31 —3,00	+1,50 —4,50
в		+1,54 —1,55	+3,52 —2,48
г		+0,90 —2,00	+1,76 —2,00
д		+0,88 —1,78	+3,26 —0,74
е		+2,57 —3,18	+3,21 —4,79
ж		+1,48 —2,52	+3,01 —2,99
з		+1,27 —1,32	+2,08 —1,92
и		+1,54 —1,86	+2,46 —2,20
к		+1,90 —2,18	+3,95 —4,05
л		+1,78 —1,79	+3,77 —3,23
м		+2,42 —1,80	+5,22 —3,78

5.123. Пользуясь указаниями, данными в задаче 5.122, подобрать сечение двутавровой балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 1{,}2\ т/м$ при пролете $l = 4\ м$.

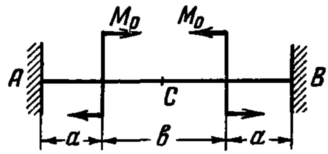
Ответ: $M_A = -\frac{ql^2}{12} = -1{,}6\ тм$; $M_C = \frac{ql^2}{24} = 0{,}8\ тм$; двутавр № 16.

5.124. Пользуясь указаниями, данными в задаче 5.122, подобрать сечение двутавровой балки, загруженной двумя моментами $M_0 = 3\ тм$, при следующих размерах: $a = 2\ м$, $b = 4\ м$.

Ответ: $M_A = -M_0\frac{b}{2a+b} = -1{,}5\ тм$; $M_C = M_0\frac{2a}{2a+b} = +1{,}5\ тм$; двутавр № 16.

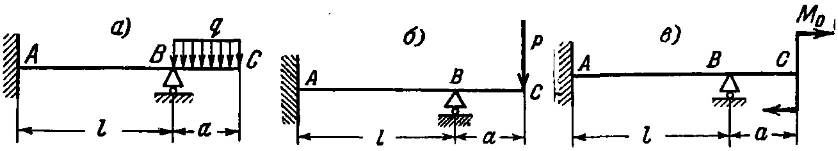


К задаче 5.123.



К задаче 5.124.

5.125. Раскрыть статическую неопределимость балки любым способом, определить опорные реакции, построить эпюры M и Q.

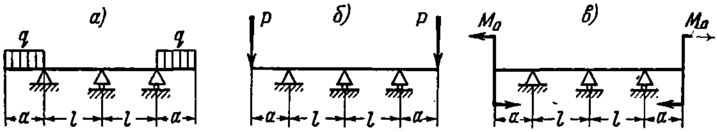


К задаче 5.125.

Ответ: а) $B = qa\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{l}\right)$; б) $B = P\left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{l}\right)$;

в) $B = \frac{3}{2}\cdot\frac{M_0}{l}$.

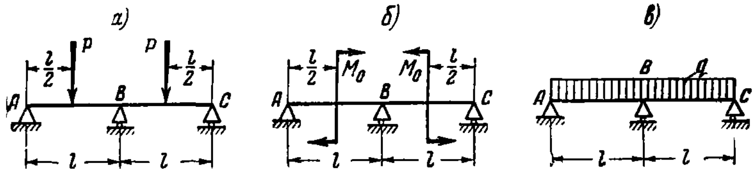
5.126. Неразрезная двухпролетная балка постоянного сечения с консолями загружена, как указано на рисунке. Воспользовавшись



К задаче 5.126.

результатами решения предыдущей задачи, построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы. Проверить ответ, применив теорему о трех моментах.

5.127. Двухпролетная неразрезная балка загружена, как указано на рисунке. Определить величину реакции средней опоры методом сравнения линейных деформаций. Построить эпюры M и Q.



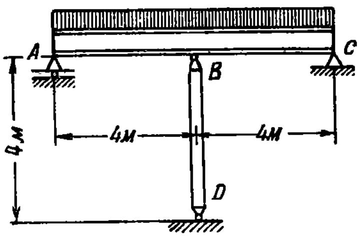
К задаче 5.127.

Ответ: а) $B = 1{,}375\,P$, $M_{max} = -0{,}1875\,P$;

б) $B = 2{,}25\,\frac{M_0}{l}$, $M_{max} = -0{,}5625\,M_0$;

в) $B = 1{,}25\,ql$, $M_{max} = -0{,}125ql^2$.

5.128. Двутавровая стальная балка № 40 оперта в точках A и C на жесткие опоры, а в точке B поддерживается чугунной трубчатой колонной BD. Длина балки 8 *м*, высота колонны 4 *м*; наружный диаметр колонны 20 *см*, внутренний 15 *см*. Балка несет



К задаче 5.128.

равномерно распределенную нагрузку $q = 2\ m/м$. Определить усилие в стойке BD. Чему равнялась бы реакция средней опоры, если бы опора была абсолютно жесткая?

Решение. Уравнение совместности деформаций для данного случая запишется так:

$$\frac{5}{384}\frac{qL^4}{E_c J} - \frac{BL^3}{48E_c J} = \frac{BH}{E_ч F}.$$

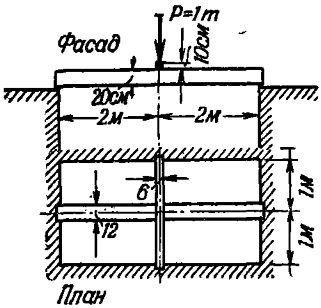
Отсюда можно вычислить B:

$$B = \frac{\frac{5}{8}\,qL}{1 + \frac{E_c}{E_ч}\frac{48HJ}{FL^3}} = \frac{\frac{5}{8}\,qL}{1{,}0086} = 9915\ кг.$$

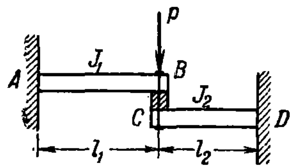
При жесткой опоре в середине пролета $B = \frac{5}{8}\,qL = 10\,000$ **кг.**

5.129. Прямоугольное помещение перекрыто двумя деревянными балками, нагруженными в месте пересечения вертикальной силой. Размеры балок показаны на рисунке. Определить наибольшее нормальное напряжение в каждой из балок. Балки оперты свободно.

Ответ: 167 *кг/см*^{2} (в короткой балке) и 83 *кг/см*^{2}.



К задаче 5.129.



К задаче 5.130.

5.130. В месте соединения двух балок AB и CD приложена сила P. Найти, как распределяется сила P между балками, если известны отношения их пролетов и жесткостей: $l_1 : l_2 = 3:2$; $EJ_1 : EJ_2 = 4:5$.

Ответ: $P_1 = 0{,}19P$; $P_2 = 0{,}81P$.

5.131. Две балки прямоугольного сечения AB и CD имеют одинаковую ширину и длину, но высота балки AB вдвое меньше, чем балки CD. Балка CD свободно оперта концами. Три жесткие опоры помещены на балке CD по ее концам и посредине длины. Балка AB лежит на этих опорах и нагружена сосредоточенной силой P посредине пролета балки CD. Определить давления на опоры балки AB, пренебрегая ее весом.

Ответ: $\frac{1}{18}P$; $\frac{8}{9}P$; $\frac{1}{18}P$.

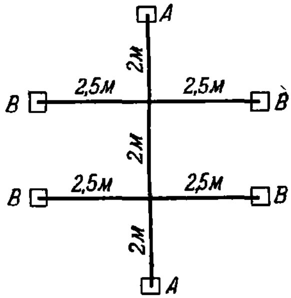
5.132. Пролет перекрыт тремя параллельными балками прямоугольного сечения. Ширина сечения всех балок одинакова. Высота средней балки вдвое больше крайних. Верхние грани балок находятся первоначально в горизонтальной плоскости и перекрыты посредине пролета абсолютно жесткой поперечиной, передающей на балки сосредоточенный груз P. Какая часть нагрузки воспринимается каждой из балок?

Ответ: 1:8:1.

5.133. Балка длиной 5 *м* защемлена одним концом в стену. Свободный ее конец опирается на середину пролета другой такой же балки той же длины, но шарнирно опертой по концам. К первой балке на расстоянии 4 *м* от защемления приложена сила $Q = 6$ *т*. Определить реакции балки, лежащей на двух опорах.

Ответ: 1,99 *т*.

5.134. На рисунке AA изображает в плане балку на двух опорах, а BB — две балки на двух опорах, опирающихся также на балку AA. В точках пересечения осей балок приложены две силы по 400 *кг*. Все три балки одинакового поперечного сечения. Определить реакции опор A и B.



К задаче 5.134.

Ответ: $A=112{,}4$ *кг*; $B=143{,}8$ *кг*.

5.135. Двухпролетная неразрезная балка ABC с пролетами длиной l нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Реакция средней опоры B равна ql. Найти величину вертикального расстояния между опорой B и прямой, соединяющей опоры A и C.

Решение. Обозначим величину реакции средней опоры B. Искомое расстояние представляет собой возможный прогиб сечения B. Воспользуемся методом сравнения деформаций. Удалив среднюю опору, можем вычислить прогиб в точке B под действием нагрузки q по формуле $f_{Bq}=\frac{5q\,(2l)^4}{384EJ}=\frac{5ql^4}{24EJ}$. Прогиб в том же сечении под действием силы B вычислим также по известной формуле

$$f_{BB}=\frac{B\,(2l)^3}{48EJ}=\frac{ql\,(2l)^3}{48EJ}=\frac{ql^4}{6EJ}.$$

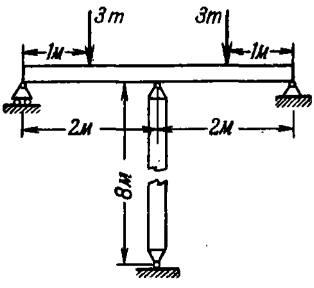
Возможный прогиб сечения B:

$$f_B=f_{Bq}-f_{BB}=\left(\frac{5}{24}-\frac{1}{6}\right)\frac{ql^4}{EJ}=\frac{ql^4}{24EJ}.$$

Следовательно, опора расположена ниже крайних опор на $\frac{ql^4}{24EJ}$.

5.136. Стальная балка лежит на трех опорах, расположенных на одинаковом расстоянии, и несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью 500 *кг/м*. Средняя опорная реакция равна 2,5 *т*. Оба пролета по 4 *м*. Найти положение по высоте средней опоры.

Ответ: Опоры расположены на одном уровне.



К задаче 5.137.

5.137. Стальная двутавровая балка № 22 на двух опорах подперта посредине своего пролета деревянной стойкой квадратного поперечного сечения $20\times\times20$ *см*² (см. рисунок). Найти наибольшие нормальные напряжения в балке и в стойке.

Ответ: Усилие в стойке 3,83 *т*. Напряжения в балке 469 *кг/см*².

5.138. Балка длиной $2l$ постоянного поперечного сечения свободно оперта по концам A и B, а также посредине длины в точке C. Опоры A и B — жесткие, опора C упруго опускается на величину μC, где C — нагрузка, приходящаяся на эту опору. Показать, что если на балке расположена нагрузка Q, равномерно распределенная по всей длине, то усилие, приходящееся на среднюю опору, равно

$$\frac{5}{8}\frac{Q}{1+\frac{6EJ}{l^3}\mu}.$$

5.139. Балка постоянного поперечного сечения длиной l, весом Q защемлена одним концом и оперта шарнирно вторым концом на колонну, опускающуюся на 1 *см* под действием осевого давления α. Обе опоры находились первоначально на одном уровне. Под действием веса балки верх колонны опустился. Вычислить, чему равно осевое усилие, сжимающее колонну.

Ответ: $S=\frac{3}{8}\frac{Q}{K}$, где $K=1+\frac{3EJ}{\alpha l^3}$.

5.140. Балка длиной 4 *м* защемлена одним концом и нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 400 *кг/м*; балка поддержена на расстоянии 2,5 *м* от защемления опорой так, что изгибающий момент в защемлении равен нулю.

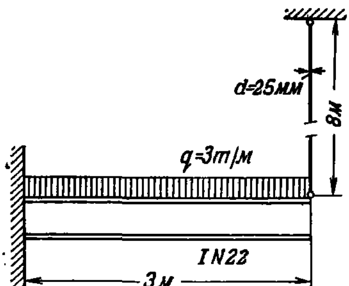
Найти давление на опору и построить эпюру изгибающего момента и поперечной силы для балки.

Ответ: 1280 *кг*;

$$M_{max}=0{,}13\ \textit{тм};\quad M_{min}=-0{,}45\ \textit{тм};$$
$$Q_{min}=-0{,}6\ \textit{т};\quad Q_{max}=-0{,}68\ \textit{т}.$$

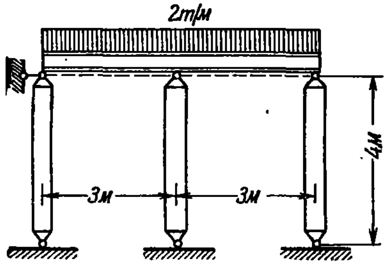
5.141. Балкон опирается на горизонтальную двутавровую балку 22, защемленную одним концом в стену; второй конец подвешен к вертикальному стальному стержню. Нагрузка на балку распределена равномерно (см. рисунок). Предполагая, что верхнее закрепление стержня неподвижно, определить величину усилия в стержне и величину наибольшего нормального напряжения в балке. Как изменятся усилие и напряжения, если стержень окажется на 2,5 *мм* длиннее проектного.

Ответ: Усилия в стержне: 3230 *кг* и 3090 *кг*. Напряжения в балке: в пролете 750 и 686 *кг/см²*, в защемлении 1640 и 1830 *кг/см²*.



К задаче 5.141.

5.142. Балка постоянного поперечного сечения весом Q лежит на трех одинаковых упругих стойках, помещенных по концам балки и посредине ее длины. Сила, необходимая для укорочения стоек на 1 *см*, равна α. Длина балки l.



К задаче 5.142.

Показать, что нагрузка, приходящаяся на среднюю стойку, равна

$$B = \frac{Q}{9}\,\frac{5l^3\alpha + 192EJ}{l^3\alpha + 72EJ}.$$

5.143. Стальная двухпролетная двутавровая балка №18 длиной $l = 6$ *м* свободно лежит на трех деревянных стойках круглого поперечного сечения диаметром $d = 25$ *см* и высотой 4 *м*. Балка несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью 2 *т/м*.

Определить наибольшие нормальные напряжения в балке и напряжения во всех стойках, воспользовавшись формулой для B задачи 5.142; $E_с = 2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}; $E_д = 10^5$ *кг/см*^{2}.

Ответ: $B = 7480$ *кг*; 1545 *кг/см*^{2}; 4,6 *кг/см*^{2}; 15,3 *кг/см*^{2}; 4,6 *кг/см*^{2}.

5.144. Стальная балка постоянного поперечного сечения длиной l оперта по концам на жесткие фундаменты, а в точках, отстоящих на $^1/_3$ от ее концов, на стальные колонны постоянного поперечного сечения высотой h. Когда балка не нагружена, все четыре опоры находятся на одном уровне.

Показать, что, для того чтобы равномерно распределенная по длине балки нагрузка вызывала одинаковые у всех четырех опор реакции, необходимо, чтобы площади поперечного сечения колонн равнялись $486hJ/7l^3$, где J — момент инерции поперечного сечения балки.

5.145. Двухпролетная неразрезная балка с пролетами l_1 и l_2 защемлена одним концом и свободно оперта другим. Груз P помещен на пролете l_2 на расстоянии a от свободно опертого конца. Получить выражение для изгибающего момента в защемлении и на средней опоре.

Ответ: $M_{ср} = -2M_з$; $M_з = \dfrac{Pa\,(l_2^2 - a^2)}{l_2(3l_1 + 4l_2)}$.

5.146. Неразрезная балка имеет два пролета, каждый длиной l. Левый конец ее защемлен.

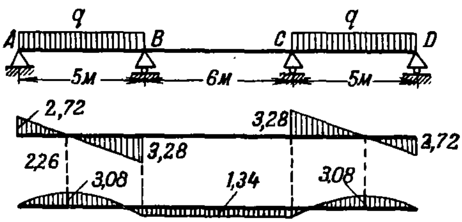
Определить реакции опор, если балка нагружена сосредоточенной силой P посредине левого пролета.

Ответ: $\frac{17}{28}P$; $\frac{25}{56}P$; $-\frac{3}{56}P$.

5.147. Неразрезная балка имеет два пролета AB и BC, каждый длиной l. Посредине пролетов AB и BC приложены соответственно грузы $2P$ и P. Момент инерции поперечного сечения части AB вдвое больше, чем части BC. Найти опорные реакции и изгибающий момент над средней опорой.

Ответ: $\frac{3}{4}P$; $2P$; $\frac{1}{4}P$; $-\frac{Pl}{4}$.

5.148. Трехпролетная неразрезная двутавровая балка № 22 имеет крайние пролеты по 5 *м*, средний 6 *м*; крайние пролеты нагружены



К задаче 5.148.

равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 1200 *кг/м*, средний пролет не нагружен (см. рисунок). Определить наибольшее нормальное напряжение в балке.

Указание. Ввиду симметричности балки и нагрузки, $M_B = M_C$, вследствие чего достаточно написать одно уравнение трех моментов.

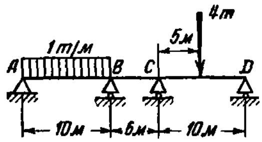
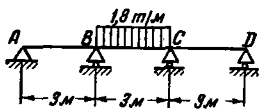
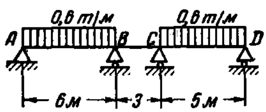
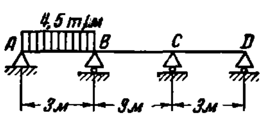
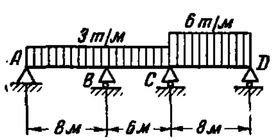
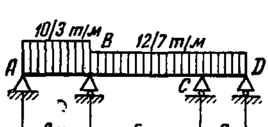
Ответ: $M_B = -1{,}34$ *тм* $= M_C$.

Эпюры поперечной силы и изгибающего момента даны на рисунке.

Наибольшее напряжение $\sigma = \frac{M_{max}}{W} = \frac{308\,000}{232} = 1328$ *кг/см²*.

5.149. Неразрезная трехпролетная двутавровая балка загружена, как указано на схеме в таблице на стр. 210. Построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы. Определить номер двутавра при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*.

5.150. Построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы для балки пролетом 12 *м*, защемленной обоими концами и нагруженной силами 8 *т* на расстоянии 5 *м* и 15 *т* на расстоянии 9 *м* от левой опоры (рисунок *а*)).

Схема балки и нагрузки		Ответ:					
		$M \frac{\max}{\min}$ в *тм*	*A* в *т*	*B* в *т*	*C* в *т*	*D* в *т*	№ I
а		—7,18 +9,17	4,28	6,36	1,69	1,67	33
б		—0,81 +1,22	—0,27	2,97	2,97	—0,27	14
в		—1,66 +1,93	1,52	2,35	1,40	1,33	18
г		—2,70 +3,80	5,85	8,78	—1,35	+0,22	22
д		—30,4 +34,0	10,38	19,72	39,70	20,20	60
е		—3,92 +2,13	3,69	10,85	7,08	0,38	22а

Решение. Заменяя защемление с каждой стороны дополнительными пролетами, получаем расчетную схему в виде трех балок с пролетами l_0, l и l_0 (рисунок *б*)). Строим эпюры изгибающего момента от $P_1 = 8\,m$ и $P_2 = 12\,m$ (рисунки *в*) и *г*)), подсчитываем площади ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4, принимаемые за фиктивную нагрузку, направленную вверх. Указываем положение фиктивных равнодействующих, обозначив на рисунке нужные расстояния, и вычисляем их значения:

$$\omega_1 = \frac{243}{2}\ тм^2;$$

$$a_1 = 6\ м;$$
$$b_1 = 6\ м;$$

$$\omega_2 = \frac{81}{2}\ тм^2;$$

$$a_2 = 10\ м;$$
$$b_2 = 2\ м;$$

$$\omega_3 = \frac{175}{3}\ тм^2;$$

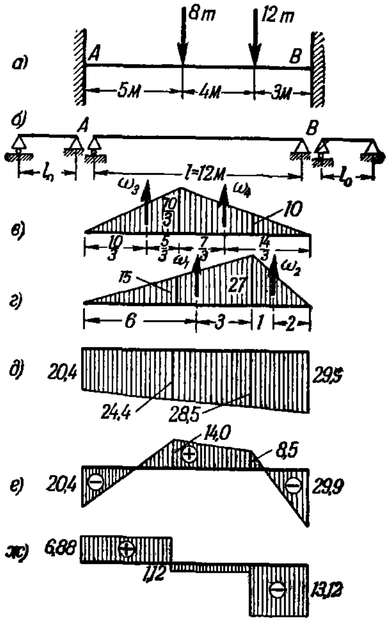
$$a_3 = \frac{10}{3}\ м;$$

$$b_3 = \frac{26}{3}\ м;$$

$$\omega_4 = \frac{245}{3}\ тм^2;$$

$$a_4 = \frac{22}{3}\ м;$$

$$b_4 = \frac{14}{3}\ м.$$



К задаче 5.150.

Пишем дважды формулу трех моментов — для опоры A и для опоры B:

$$M_1 l_0 + 2M_A(l_0 + l) + M_B l = -6\left[\omega_1 \frac{b_1}{l} + \omega_2 \frac{b_2}{l} + \omega_3 \frac{b_3}{l} + \omega_4 \frac{b_4}{l}\right];$$

$$M_A l + 2M_B(l + l_0) + M_4 l_0 = -6\left[\omega_1 \frac{a_1}{l} + \omega_2 \frac{a_2}{l} + \omega_3 \frac{a_3}{l} + \omega_4 \frac{a_4}{l}\right].$$

Принимаем $l_0 = 0$ и подставляем значения остальных величин:

$$24M_A + 12M_B = -\frac{6}{12}\left(\frac{243}{2}\cdot 6 + \frac{81}{2}\cdot 2 + \frac{175}{3}\cdot\frac{26}{3} + \frac{245}{3}\cdot\frac{14}{3}\right);$$

$$12M_A + 24M_B = -\frac{6}{12}\left(\frac{243}{2}\cdot 6 + \frac{81}{2}\cdot 10 + \frac{175}{3}\cdot\frac{10}{3} + \frac{245}{3}\cdot\frac{22}{3}\right);$$

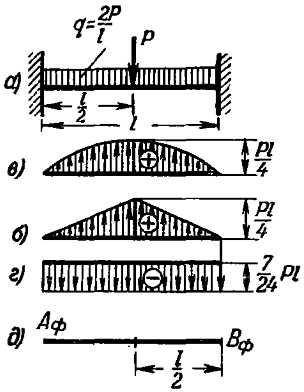
$$2M_A + M_B = -70{,}7; \quad M_A = -20{,}4\ тм;$$
$$M_A + 2M_B = -80{,}3; \quad M_B = -29{,}9\ тм.$$

По ординатам эпюр на рисунках *в*) и *г*) и по полученным значениям M_A и M_B (рисунок *д*)) можно построить эпюру изгибающего момента сложением эпюр или, определив опорные реакции, можно построить эпюру обычным методом (рисунок *е*)).

Для построения эпюры поперечных сил определим опорные реакции:

$$-20{,}4+A\cdot 12-8\cdot 7-12\cdot 3=-29{,}9;\quad A=6{,}88\ m;$$
$$-29{,}9+B\cdot 12-108-40=-20{,}4;\quad B=13{,}12\ m.$$

5.151. Определить грузоподъемность стальной двутавровой балки № 33 пролетом 6 *м*, защемленной обоими концами и загруженной сосредоточенной силой P посредине пролета и равномерно распределенной нагрузкой $2P$. Допускаемое напряжение $1200\ кг/см^2$. Вычислить величину прогиба под силой P.



К задаче 5.151.

Решение. Значения опорных моментов от сосредоточенной силы

$$M_A=M_B=-\frac{Pl}{8};$$

от равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q=\frac{2P}{l}$

$$M_A=M_B=-\frac{ql^2}{12}=-\frac{Pl}{6},$$

от одновременного действия P и q

$$M_A=M_B=-\frac{7}{24}Pl.$$

Положительный наибольший изгибающий момент (под силой P) имеет меньшее значение: $M_P=\frac{5}{24}Pl$. Условие прочности для опасного сечения

$$\frac{7}{24}Pl:W=[\sigma].$$

После подстановки $l=6\ м$, $W=597\ см^3$ и $[\sigma]=1200\ кг/см^2$ получим

$$P=12\cdot 597\cdot\frac{4}{7}=4090\ кг.$$

Для определения велнчины прогиба применнм графоаналитическнй способ. Строим эпюры изгибающего момента, принимаемые за фнктивные нагрузки: от P (рисунок *б*)), от q (рисунок *в*)) и от $M_A=M_B$ (рисунок *г*)). Фиктивная балка не имеет опор (рисунок *д*)). $A_ф=B_ф=0$.

Подсчитаем фнктивный изгибающий момент в сечении посредине пролета балки:

$$M_ф=\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{l}{2}-\frac{7}{24}Pl\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}=-\frac{Pl^3}{96}.$$

Прогиб сечения под силой P:

$$f=-\frac{Pl^3}{96EJ}=-\frac{4090\cdot 600^3}{96\cdot 2\cdot 10^6\cdot 9840}=-0{,}47\ см.$$

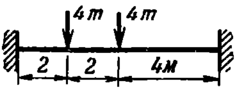
5.152. Балка пролетом 6 *м* защемлена концами и загружена сосредоточеннной силой P посредине пролета. Материал балки—сосна

($[\sigma] = 70$ *кг/см²*, $E = 10^5$ *кг/см²*). Сечение — прямоугольное, шириной 12 *см*, высотой 30 *см*. Определить грузоподъемность балки и величину прогиба под силой P.

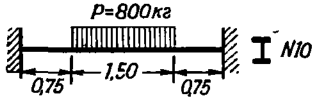
Ответ: $P = 1{,}68$ *т*; $f = 0{,}7$ *см*.

5.153. Для балки, показанной на рисунке, построить эпюры M и Q. Подобрать двутавровое сечение при $[\sigma] = 1400$ *кг/см²*. Найти прогиб середины пролета.

Ответ: $M_{max} = 8{,}5$ *тм*; I № 33; 0,815 *см*.



К задаче 5.153.



К задаче 5.154.

5.154. Определить опорные моменты и прогиб середины пролета балки, изображенной на рисунке. Построить эпюры M и Q. Чему равно наибольшее нормальное напряжение в этой балке? Чему равен прогиб посредине пролета?

Ответ: 692 *кг/см²*; 0,23 *см*.

5.155. Балка пролетом 4 *м* защемлена обоими концами и нагружена одной сосредоточенной силой. Момент на левой опоре равен 3 *тм*, на правой 1,5 *тм*. Сечение с наибольшим прогибом находится на расстоянии 1,8 *м* от левой опоры. Определить изгибающий момент в этом сечении, наибольший изгибающий момент, положение и величину нагрузки.

Ответ: 1,39 *тм*; 2,02 *тм*; 5,08 *т* на расстоянии 2,67 *м* от правой опоры.

5.156. Определить опорные моменты балки пролетом l, защемленной обоими концами и нагруженной распределенной по треугольнику нагрузкой с интенсивностью у одной опоры нуль, а у другой — q.

Ответ: $-\dfrac{ql^2}{30}$; $-\dfrac{ql^2}{20}$.

5.157. Балка защемлена двумя концами и имеет две промежуточные опоры, делящие балку на три одинаковые части, каждая длиной l. Определить опорные реакции и моменты под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q.

Ответ: $B = C = ql$; $M_A = M_B = -\dfrac{ql^2}{12}$.

5.158. Неразрезная балка AE постоянного поперечного сечения оперта в точках A, B, C и D. Часть DE — консоль; $AB = 3{,}6$ *м*; $BC = 2{,}4$ *м*; $CD = 1{,}8$ *м* и $DE = 1{,}2$ *м*. На расстоянии 2,4 *м* от A приложена сосредоточенная сила 6 *т*. На пролете BC расположена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью 6 *т/м*. На пролете CD имеется сосредоточенная сила 4 *т* на расстоянии

0,6 *м* от *C*. В точке *E* приложена сосредоточенная сила 5 *т*. Найти изгибающие моменты в характерных точках балки и реакции опор.

Ответ: Изгибающие моменты (*тм*): +2,13; —4,01; +2,16 (в 5,03 *м* от *A*); —0,61; —0,47; —6,0. Опорные реакции (*т*): 0,89; 13,7; 5,17; 9,64.

5.159. Четырехпролетная неразрезная балка, с равными пролетами по 2 *м* каждый, нагружена по всей длине равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 450 *кг/м*. Подобрать прямоугольное поперечное сечение с высотой, равной удвоенной ширине при $[\sigma] = 70$ *кг/см²*.

Ответ: $7{,}5 \times 15$ *см²*.

5.160. Четырехпролетная неразрезная балка двутаврового поперечного сечения № 33 имеет следующие длины пролетов: 3 *м*, 4 *м*, 4 *м* и 3 *м*. Все четыре пролета нагружены равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью: в первом и четвертом пролетах 2,4 *т/м*, а во втором и в третьем пролетах 3,6 *т/м*. Определить наибольшее нормальное напряжение в балке.

Ответ: 894 *кг/см²*.

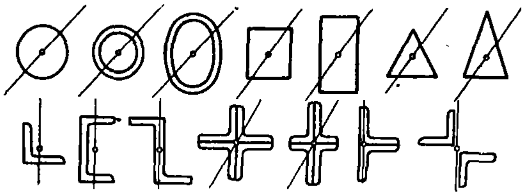
ГЛАВА 6

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

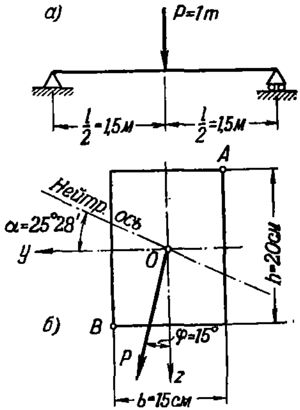
§ 25. Косой изгиб

6.1. На рисунке изображены различные поперечные сечения балок и положения плоскости действия изгибающих балку моментов. Указать, в каких случаях будет плоский, в каких — косой изгиб.

6.2. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения шириной $b = 15$ *см* и высотой $h = 20$ *см*, шарнирно опертая по концам, нагружена посредине пролета $l = 3$ *м* сосредоточенной силой $P = 1$ *т*.



К задаче 6.1.



К задаче 6.2.

Плоскость действия нагрузки составляет угол $\varphi = 15°$ с вертикальной плоскостью, проходящей через ось балки (см. рисунок). Определить положение нейтральной оси и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении балки. Определить также полный прогиб среднего сечения балки по величине и направлению.

Решение. Тангенс угла наклона нейтральной оси к оси y находим по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \varphi = \frac{12bh^3}{12hb^3} \operatorname{tg} \varphi = \frac{h^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{20^2}{15^2} \cdot 0,268 = 0,476 = \operatorname{tg} 25°28'.$$

Положение нейтральной оси показано на рисунке. Опасными точками являются наиболее удаленные от нейтральной оси точки A и B. В точке A имеет место наибольшее сжимающее напряжение, для вычисления которого воспользуемся формулой

$$\sigma_A = -M_{\max}\left(\frac{\cos\varphi}{W_y}+\frac{\sin\varphi}{W_z}\right).$$

Так как $M_{\max}=\frac{Pl}{4}$, то

$$\sigma_A = -\frac{Pl}{4}\left(\frac{6\cos\varphi}{bh^2}+\frac{6\sin\varphi}{hb^2}\right) = -\frac{3\,Pl}{2bh}\left(\frac{\cos\varphi}{h}+\frac{\sin\varphi}{b}\right) =$$

$$= -\frac{3\cdot1000\cdot300}{2\cdot15\cdot20}\left(\frac{0{,}966}{20}+\frac{0{,}259}{15}\right) = -98{,}3\ кг/см^2.$$

Наибольший прогиб балки будет в сечении посредине пролета. Составляющие этого прогиба в направлении осей y и z могут быть вычислены по формулам

$$f_y=\frac{P_yl^3}{48EJ_z} \quad и \quad f_z=\frac{P_zl^3}{48\,EJ_y},$$

где $P_y=P\sin\varphi$ и $P_z=P\cos\varphi$ — составляющие силы P по осям y и z. Полный прогиб будет равен

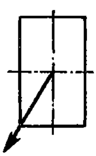
$$f=\sqrt{f_y^2+f_z^2}=\sqrt{\left(\frac{Pl^3\sin\varphi}{48EJ_z}\right)^2+\left(\frac{Pl^3\cos\varphi}{48EJ_y}\right)^2}=$$

$$=\frac{Pl^3}{48E}\sqrt{\left(\frac{12\sin\varphi}{hb^3}\right)^2+\left(\frac{12\cos\varphi}{bh^3}\right)^2}=\frac{Pl^3}{4Ebh}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{b^4}+\frac{\cos^2\varphi}{h^4}}=$$

$$=\frac{1000\cdot300^3}{4\cdot10^5\cdot20\cdot15}\sqrt{\frac{0{,}259^2}{15^4}+\frac{0{,}966^2}{20^4}}=0{,}605\ см.$$

Направление прогиба будет составлять с направлением оси z угол $\alpha=25^\circ28'$.

6.3. Какое положение займет нейтральный слой в балке прямоугольного поперечного сечения, если плоскость действия нагрузки будет совпадать с одной из диагональных плоскостей (см. рисунок)?



К задаче 6.3.

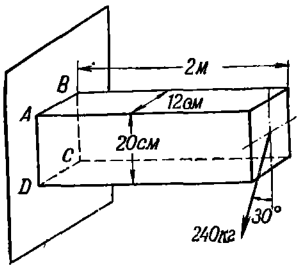
Ответ: Совпадет с другой диагональной плоскостью.

6.4. Деревянная балка длиной 2 *м*, имеющая прямоугольное поперечное сечение 12×20 *см*, защемлена одним концом и нагружена сосредоточенной силой 240 *кг* на другом конце. Нагрузка лежит в плоскости поперечного сечения балки и проходит через его центр тяжести (см. рисунок).

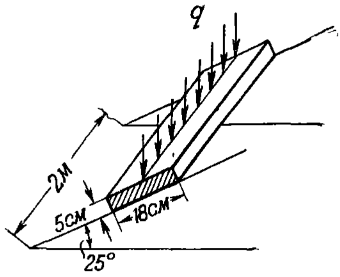
Построить эпюры нормальных напряжений по сторонам защемленного сечения и определить полный прогиб свободного конца балки.

Ответ: $\sigma_A=+2\ кг/см^2$; $\sigma_B=+102\ кг/см^2$;
$\sigma_C=-2\ кг/см^2$; $\sigma_D=-102\ кг/см^2$; $f=1{,}31\ см$.

6.5. Крыша наклонена под углом 25° к горизонту. Обрешетины из досок 5×18 *см*, шарнирно опертые по концам, имеют пролет 2 *м* и нагружены вертикально действующей равномерно распределенной



К задаче 6.4.



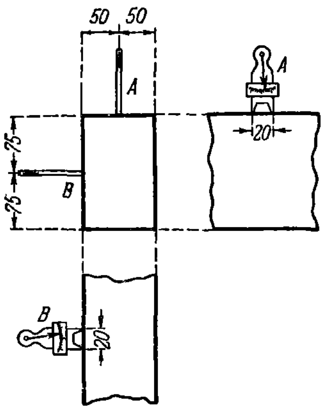
К задаче 6.5.

нагрузкой интенсивности q (см. рисунок). Определить наибольшую допускаемую величину этой нагрузки при $[\sigma]=100$ *кг/см*^{2} и вычислить полный прогиб обрешетины посредине ее пролета.

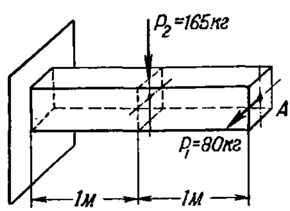
Ответ: 146 *кг/м*; 1,47 *см*.

6.6. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения 10×15 *см*, шириной 2,4 *м*, шарнирно опертая по концам, нагружена посредине пролета сосредоточенной силой P. На установленных в опасном сечении балки тензометрах A и B (см. рисунок), с базой 20 *мм* и увеличением в 1000 раз, при этом отмечены такие изменения отсчетов: A — уменьшение на 7 *мм*, B — увеличение на 10 *мм*. Определить величину и направление силы P, а также величину наибольшего нормального напряжения в балке.

Ответ: $P=302$ *кг*; $\varphi=43°36'$; $\sigma_{\max}=85$ *кг/см*^{2}.



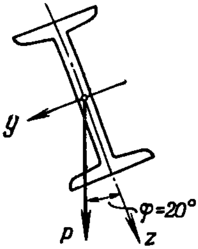
К задаче 6.6.



К задаче 6.7.

6.7. Деревянная балка длиной 2 *м*, защемленная одним концом, изгибается силами P_1 и P_2 (см. рисунок). Подобрать прямоугольное сечение балки с отношением высоты к ширине, равным 2, и определить полный прогиб ее в сечении A по величине и направлению. Высота балки параллельна плоскости действия силы $P_2 \cdot [\sigma] = 100$ *кг/см²*.

Ответ: 9×18 *см*; $f_A = 1{,}98$ *см* (под углом 80°52′ к вертикали).



К задаче 6.8.

6.8. К двутавровой балке, шарнирно опертой по концам, посредине пролета $l = 4$ *м* приложена вертикально направленная сила $P = 1000$ *кг*. Плоскость стенки двутавра составляет угол $\varphi = 20°$ с вертикальной плоскостью (см. рисунок). Подобрать сечение балки по сортаменту при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*.

Решение. Условие прочности в данном случае (сечение с выступающими углами) имеет вид

$$\sigma_{\max} = M_{\max}\left(\frac{\cos\varphi}{W_y} + \frac{\sin\varphi}{W_z}\right) = \frac{Pl}{4W_y}\left(\cos\varphi + \frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right) \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$W_y \geqslant \frac{Pl}{4\,[\sigma]}\left(\cos\varphi + \frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{1000 \cdot 400}{4 \cdot 1600}\left(0{,}940 + \frac{W_y}{W_z}\,0{,}342\right) = 58{,}75 + 21{,}38\,\frac{W_y}{W_z}.$$

Сечение подбираем путем последовательных проб. Отношение $\frac{W_y}{W_z}$ для всех номеров двутавровых балок, имеющихся в сортаменте, меняется примерно от 6 (для самых малых номеров) до 15 (для самых больших номеров). Если принять $\frac{W_y}{W_z} = 6$, то

$$W_y \geqslant 58{,}75 + 21{,}38 \cdot 6 = 185 \text{ см}^3;$$

если же $\frac{W_y}{W_z} = 15$, то

$$W_y \geqslant 58{,}75 + 21{,}38 \cdot 15 = 380 \text{ см}^3.$$

Для двутавра № 27 момент сопротивления $W_y = 371$ *см³*, для двутавра № 20 $W_y = 184$ *см³*. Таким образом, искомый номер двутавра предположительно должен заключаться между номерами 27 и 20. Испробуем двутавр № 24, для которого $W_y = 289$ *см*, $W_z = 34{,}5$ *см³* и $\frac{W_y}{W_z} = \frac{289}{34{,}5} = 8{,}38$. Вычисляем наибольшее нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{4W_y}\left(\cos\varphi + \frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{1000 \cdot 400}{4 \cdot 289}(0{,}940 + 8{,}38 \cdot 0{,}342) = 1317 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее напряжение получается значительно ниже допускаемого. Следует взять двутавр с меньшим номером. Испробуем двутавр № 22, для которого $W_y = 232$ *см³*, $W_z = 28{,}6$ *см³* и $\frac{W_y}{W_z} = \frac{232}{28{,}6} = 8{,}11$. Наибольшее нормальное напряжение равно

$$\sigma_{max} = \frac{1000 \cdot 400}{4 \cdot 232}(0{,}940 + 8{,}11 \cdot 0{,}342) = 1601 \text{ кг/см}^2 \approx [\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

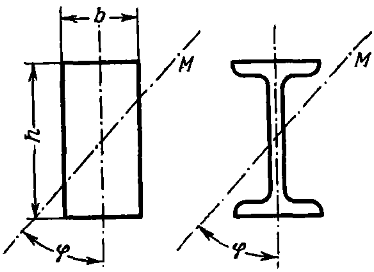
Останавливаем свой выбор на двутавре № 22.

6.9. При установке на опоры двутавра № 60, предназначенного для работы на изгиб в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью стенки, была допущена ошибка, и стенка двутавра отклонилась от вертикали на угол $\varphi = 1^\circ$.

Определить связанное с этим увеличение наибольших нормальных напряжений и полного прогиба двутавра.

Ответ: Напряжения увеличились на 24,2%, полный прогиб — на 25,9%.

6.10. При каком угле наклона плоскости действия изгибающего момента (M) к вертикальной плоскости грузоподъемность балок (см. рисунок) окажется наименьшей?



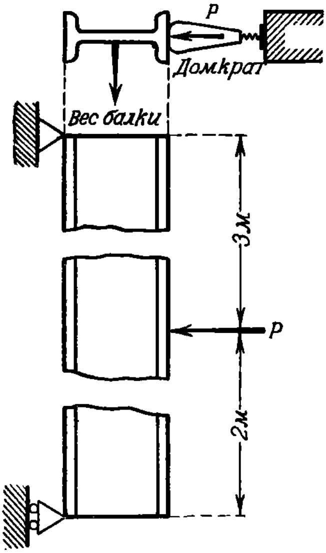
К задаче 6.10.

Ответ: При угле φ, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \frac{W_{max}}{W_{min}}$. Для прямоугольника $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{b} = n$; при этом грузоподъемность балки ниже грузоподъемности ее при плоском изгибе в горизонтальной плоскости в отношении $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$. Для двутавра угол φ меняется от 80°42′25″ (№ 10) до 86°7′35″ (№ 70); при этом грузоподъемность соответственно снижается на 1,31% (№ 10) и 0,23% (№ 60с).

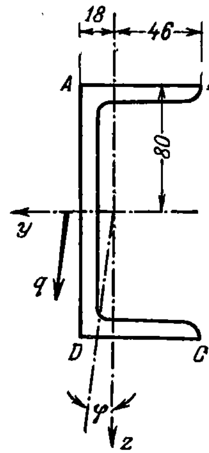
6.11. Защемленная одним концом двутавровая балка № 24а длиной 1,4 *м*, нагруженная на свободном конце сосредоточенной силой P, прогнулась под силой на 3 *мм*. Направление прогиба совпало с биссектрисой угла между главными осями инерции поперечного сечения балки. Определить величину и направление силы P, а также наибольшее растягивающее напряжение в балке.

Ответ: $P = 1765$ *кг*; $\varphi = 3^\circ 54' 50''$; $\sigma_{max} = 1184$ *кг/см*².

6.12. Двутавровая балка № 40, шарнирно опертая по концам пролета 5 *м* при горизонтальном положении стенки, временно использована в качестве опоры для горизонтально расположенного домкрата, установленного на расстоянии 2 *м* от одной из опор (см. рисунок). Учитывая собственный вес балки, определить наибольшую допускаемую нагрузку на домкрат. Для материала балки $[\sigma] = 1600$ *кг/см*². *Ответ*: 11 *т*.



К задаче 6.12.



К задаче 6.13.

6.13. Защемленная одним концом балка длиной 2 *м* несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $q = 500$ *кг/м*. Поперечное сечение балки — швеллер № 16. Стенка швеллера наклонена к плоскости действия нагрузки, проходящей через линию центров изгиба, под углом $\varphi = 3°$ (см. рисунок).

Определить нормальные напряжения в точках A, B, C и D опасного сечения балки.

Решение. Нормальные напряжения в любой точке опасного сечения балки определяем по формуле

$$\sigma = -M_{\max}\left(\frac{y\sin\varphi}{J_z} + \frac{z\cos\varphi}{J_y}\right).$$

Знак минус перед $M_{\max}$ поставлен потому, что в квадранте с положительными значениями координат y и z нормальные напряжения являются сжимающими, т. е. отрицательными.

Так как

$$M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2 = \frac{5\cdot 200^2}{2} = 10\,000 \text{ кгсм}, \quad \sin\varphi = \sin 3° = 0{,}05234,$$

$\cos\varphi = \cos 3° = 0{,}9986$ и для швеллера № 16 $J_y = 747$ *см*⁴, а $J_z = 63{,}3$ *см*⁴, то

$$\sigma = -100\,000\left(\frac{0{,}05234}{63{,}3}y + \frac{0{,}9986}{747}z\right) = -82{,}7\,y - 133{,}7\,z.$$

В точке A с координатами $y_A = +1{,}8$ *см* и $z_A = -8$ *см*

$$\sigma_A = -82{,}7 \cdot 1{,}8 + 133{,}7 \cdot 8 = 921 \text{ кг/см}^2.$$

Аналогично этому,

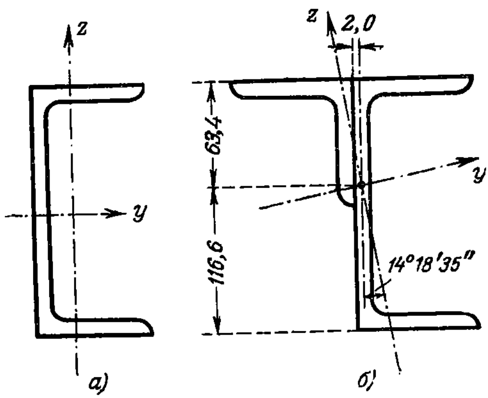
$$\sigma_B = 82{,}7 \cdot 4{,}6 + 133{,}7 \cdot 8 = 1450 \text{ кг/см}^2;$$
$$\sigma_C = 82{,}7 \cdot 4{,}6 - 133{,}7 \cdot 8 = 689 \text{ кг/см}^2;$$
$$\sigma_D = -82{,}7 \cdot 1{,}8 - 133{,}7 \cdot 8 = -1218 \text{ кг/см}^2.$$

6.14. Шарнирно опертая по концам балка несет посредине пролета длиной 3 *м* сосредоточенную нагрузку P. Поперечное сечение балки — швеллер № 18а (рис. *а*)). К стенке швеллера на протяжении всей длины балки предположено приварить дополнительный уголок $90 \times 90 \times 9$ *мм* (рис. *б*)). Положение главных центральных осей y и z предполагаемого сечения балки показано на рис. *б*); моменты инерции относительно этих осей равны:

$$J_y = 1777 \text{ см}^4$$

и

$$J = 336 \text{ см}^4.$$



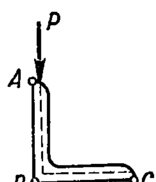
К задаче 6.14.

Определить при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1600$ *кг/см*^{2} наибольшую грузоподъемность: а) одного швеллера и б) швеллера с приваренным к нему уголком, полагая, что плоскость действия нагрузки в обоих случаях параллельна плоскости стенки швеллера и проходит через центр изгиба сечения.

Ответ: а) 2815 *кг*; б) 2460 *кг*; добавление уголка понижает грузоподъемность балки более чем на 12%.

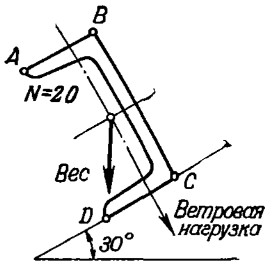
6.15. Уголок $200 \times 200 \times 20$ *мм* длиной 4 *м* работает как балка с шарнирно опертыми концами; посредине пролета он нагружен сосредоточенной силой $P = 2500$ *кг*, направление которой проходит через центр изгиба сечения (см. рисунок). Определить в опасном сечении нормальные напряжения в точках A, B и C.

Ответ: $\sigma_A = -1458$ *кг/см*^{2}; $\sigma_B = +1206$ *кг/см*^{2}; $\sigma_C = -361$ *кг/см*^{2}.



К задаче 6.15.

6.16. Стропильные ноги крыши отстоят друг от друга на 3 *м* и наклонены к горизонту под углом 30°. К ним прикреплены обрешетины из швеллеров № 20 на расстоянии 2 *м* друг от друга. Ветровая нагрузка, направленная перпендикулярно к плоскости крыши, имеет интенсивность 100 *кг/м*^{2}, а собственный вес кровли, действующий вертикально, имеет интенсивность 75 *кг/м²*. Определить в опасном сечении нормальные напряжения в точках A, B, C и D (см. рисунок). Скручивание швеллера во внимание не принимать.

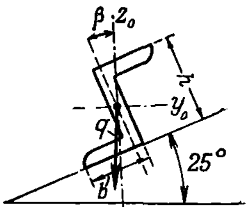


К задаче 6.16.

Ответ:

$\sigma_A = +169$ *кг/см²*; $\sigma_B = -399$ *кг/см²*;
$\sigma_C = +90$ *кг/см²*; $\sigma_D = +657$ *кг/см²*.

6.17. Обрешетина кровли зетового сечения № 14 работает как шарнирно опертая по концам балка пролетом 2,5 *м*, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q, плоскость действия которой проходит через центр изгиба сечения (см. рисунок). Положение главных центральных осей сечения указано на рисунке;



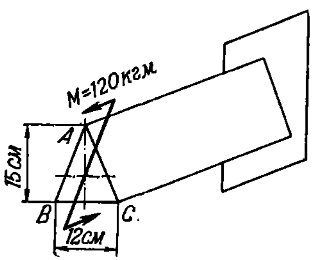
К задаче 6.17.

$$\beta = 21°48'; \quad J_{y_0} = 847 \text{ см}^4, \quad J_{z_0} = 61{,}4 \text{ см}^4,$$
$$b = 65 \text{ мм}, \quad h = 140 \text{ мм}.$$

Определить наибольшую допускаемую величину нагрузки при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*, а также величину и направление полного прогиба обрешетины от этой нагрузки посредине пролета.

Ответ: 1,5 *т/м*; 0,57 *см*; 34°26′ к вертикали.

6.18. Балка треугольного поперечного сечения (см. рисунок) изгибается моментом $M = 120$ *кгм* в плоскости, параллельной стороне AB. Определить положение нейтральной линии и напряжения в вершинах углов треугольника. Определить также наибольшую величину момента M при изгибе балки в вертикальной плоскости; $[\sigma] = 100$ *кг/см²*.



К задаче 6.18.

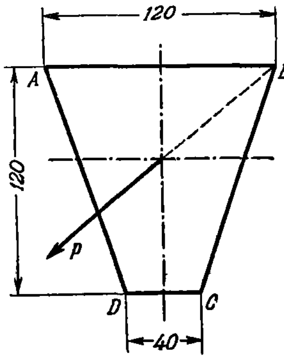
Ответ:

$\alpha = 39°48'$;
$\sigma_A = -\sigma_B = 99$ *кг/см²*;
$\sigma_C = 0$;
$M = 112{,}5$ *кгм*.

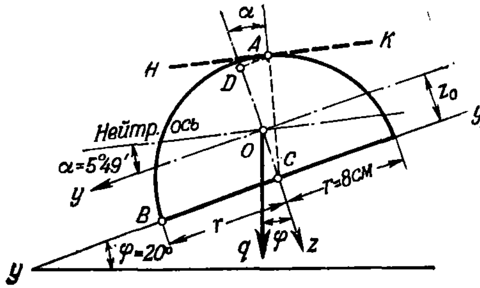
6.19. Чугунный брус с поперечным сечением в виде трапеции (см. рисунок) имеет длину 1,6 *м*, шарнирно оперт по концам и нагружен посредине пролета сосредоточенной силой P, направление которой проходит через центр тяжести поперечного сечения и точку B. Определить наибольшую допускаемую величину нагрузки P и при этой нагрузке величину нормальных напряжений в вершинах углов трапеции. Допускаемое напряжение для чугуна на растяжение равно 400 *кг/см*², на сжатие — 1200 *кг/см*².

Ответ: $P \approx 1500$ *кг*; $\sigma_C = +111$ *кг/см*²; $\sigma_D = +399$ *кг/см*²; $\sigma_A = +250$ *кг/см*²; $\sigma_B = -614$ *кг/см*².

6.20. Балка с поперечным сечением в виде полукруга диаметром 16 *см*, имеющая длину 2 *м* и свободно опертая по концам,



К задаче 6.19.



К задаче 6.20.

нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 200$ *кг/м* (см. рисунок). Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в балке.

Решение. Центр тяжести сечения балки находится в точке O на расстоянии $z_0 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 3,14} = 3,4$ *см* от диаметральной оси y_1. Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей y и z равны

$$J_z = \frac{1}{2}\,\frac{\pi r^4}{4} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{8} = 1608 \text{ см}^4$$

и

$$J_y = J_{y_1} - z_0^2 F = \frac{\pi r^4}{4} - z_0^2\,\frac{\pi r^4}{2} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{8} - 3,4^2 \cdot \frac{3,14 \cdot 8^2}{2} = 450 \text{ см}^4.$$

Угол наклона нейтральной оси к оси y определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_y}{J_z}\operatorname{tg}\varphi = \frac{J_y}{J_z}\operatorname{tg}20^\circ = \frac{450}{1608} \cdot 0,364 = 0,1019;$$

угол $\alpha = 5^\circ 49'$; $\cos\alpha = 0,995$, $\sin\alpha = 0,1013$. Наибольшие нормальные напряжения возникнут в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси; это будут точки B и A (точка, в которой линия HK, параллельная нейтральной оси, касается контура сечения).

Нормальные напряжения в опасном сечении балки (посредине ее пролета) определяем по формуле

$$\sigma = M_{max}\left(\frac{\cos\varphi}{J_y} z + \frac{\sin\varphi}{J_z} y\right).$$

Так как

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{200\cdot 2^2}{8}=100\ \text{кгм},$$

то

$$\sigma=10\,000\left(\frac{0,940}{450}z+\frac{0,342}{1608}y\right)=20,89z+2,13y\ (\text{кг/см}^2).$$

Нормальное напряжение в точке B с координатами $z_B=z_0=3,4$ *см* и $y_B=$ $=r=8$ *см* будет растягивающим, оно равно $\sigma_B=20,89\cdot z_B+2,13y_B=20,89\times$ $\times 3,4+2,13\cdot 8=88$ *кг/см²*. Координаты точки A:

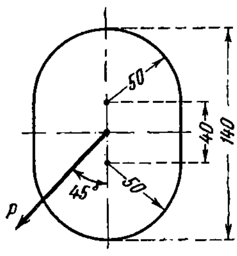
$$|z_A|=\overline{OD}=\overline{CD}-\overline{OC}=r\cos\alpha-z_0=8\cdot 0,995-3,4=4,56\ \text{см}$$

и

$$|y_A|=\overline{AD}=\overline{AC}\sin\alpha=r\sin\alpha=8\cdot 0,1013=0,81\ \text{см};$$

обе координаты отрицательны, напряжение в точке A будет сжимающим; оно равно

$$\sigma_A=20,89z_A+2,13y_A=$$
$$=-20,89\cdot 4,56-2,13\cdot 0,81=-97\ \text{кг/см}^2.$$



К задаче 6.21.

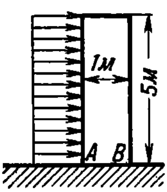
6.21. Деревянный брус с поперечным сечением, изображенным на рисунке, шарнирно оперт по концам. Посредине пролета на брус действует сосредоточенная сила P, направленная под углом 45° к оси симметрии сечения. Пролет балки равен 3 *м*.

При допускаемом напряжении 100 *кг/см²* определить наибольшую допускаемую величину силы P.

Ответ: 222 *кг*.

§ 26. Совместное действие изгиба с растяжением или сжатием

6.22. Кирпичный столб квадратного поперечного сечения 1×1 *м*, высотой 5 *м*, нагружен своим собственным весом и поперечным равномерно распределенным давлением ветра, равным 80 *кг/м²* (см. рисунок). Удельный вес кладки столба равен 1,6. Определить величину наибольшего и наименьшего сжимающих напряжений в основании столба.



К задаче 6.22.

Ответ: $\sigma_A=-2$ *т/м²*; $\sigma_B=-14$ *т/м²*.

6.23. Каменная подпорная стенка, поперечный разрез которой схематически изображен на рисунке, поддерживает земляную насыпь. Удельный вес кладки равен 1,8. Давление земли q направлено горизонтально и распределено по высоте стенки по закону треугольника; наибольшее давление у основания стенки равно 1,5 *т/м²*.

Определить величину наибольшего и наименьшего сжимающего напряжения в основании стенки.

Решение. Выделим из стенки по ее длине участок в 1 *м*; этот участок стенки можно рассматривать как брус, защемленный нижним концом, изгибаемый давлением земли и сжимаемый собственным весом. Сечение бруса в основании стенки будет наиболее напряженным. Наибольшее и наименьшее сжимающие напряжения в этом сечении могут быть вычислены по формуле

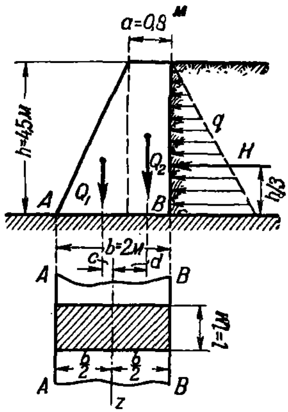
$$\sigma_{\min}^{\max}=\frac{N}{F}\pm\frac{M}{W}.$$

Сила N равна собственному весу выделенного участка стенки: $N=Q_1+Q_2$, где Q_1 — вес треугольной, а Q_2 — прямоугольной призмы. Так как

$$Q_1=\frac{1}{2}\,h\,(b-a)\,l\gamma=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4{,}5\,(2-0{,}8)\cdot 1\cdot 1{,}8=4{,}86\ m,$$

а

$$Q_2=hal\gamma=4{,}5\cdot 0{,}8\cdot 1\cdot 1{,}8=6{,}48\ m,$$



К задаче 6.23.

то $N=4{,}86+6{,}48=11{,}34\ m$.

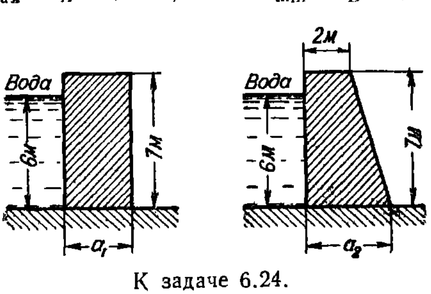
Изгибающий момент M равен сумме моментов сил веса Q_1 и Q_2 и равнодействующей давления земли H вокруг центральной оси основания стенки z:

$$M=Q_1\left(a+\frac{b-a}{3}-\frac{b}{2}\right)-Q_2\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)+\frac{q_{\max}h}{2}\cdot\frac{h}{3}=$$
$$=4{,}86\cdot 0{,}2-6{,}48\cdot 0{,}6+\frac{1{,}5\cdot 4{,}5}{2}\cdot\frac{4{,}5}{3}=2{,}15\ \text{тм}.$$

Так как $F=bl=2\cdot 1=2\ м^2$ и $W=W_z=\frac{lb^2}{6}=\frac{1\cdot 2^2}{6}=0{,}67\ м^2$, то

$$\sigma_{\min}^{\max}=\frac{11{,}34}{2}\pm\frac{2{,}15}{0{,}67}=5{,}67\pm 3{,}22\ m/м^2;$$

таким образом, $\sigma_{\max}=\sigma_A=8{,}89\ m/м^2$ и $\sigma_{\min}=\sigma_B=2{,}45\ m/м^2$.



К задаче 6.24.

6.24. На рисунке схематически изображены два варианта поперечного разреза бетонной плотины высотой 7 *м*. Принимая удельный вес бетона равным 2, определить необходимую ширину плотины

a_1 и a_2 так, чтобы в ее основании не возникло растягивающих напряжений.

Ответ: $a_1 = 3{,}93$ *м*, $a_2 = 3{,}52$ *м*.

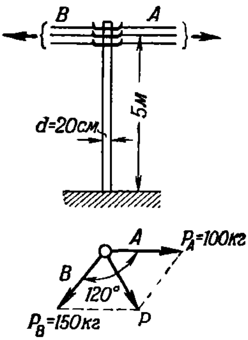
6.25. Заводская труба в виде полого усеченного конуса имеет высоту 32 *м*; наружный диаметр верхнего сечения трубы равен 2 *м*, наружный диаметр основания 3,5 *м*; толщина стенки соответственно равна 25 *см* и 1 *м*. Вес 1 $м^3$ кладки трубы равен 1,6 *т*.

Определить наибольшую величину ветровой нагрузки на 1 $м^2$ вертикальной проекции трубы, при действии которой в основании трубы не будет растягивающих напряжений. Давление ветра по диаметральному сечению трубы считать равномерно распределенным.

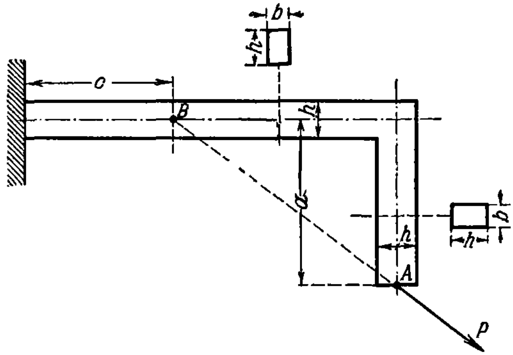
Ответ: 89,5 $кг/м^2$.

6.26. Столб диаметром 20 *см* несет на высоте 5 *м* над землей две группы горизонтальных проводов: *A* и *B*, угол между направлениями которых равен 120° (см. рисунок). Воспринимаемое столбом горизонтальное усилие от группы проводов *A* равно 100 *кг*, от группы проводов *B* — 150 *кг*. Передающийся на столб вес проводов обеих групп равен 280 *кг*; вес столба 90 *кг*. Определить наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения в поперечном сечении столба у земли.

Ответ: Наибольшее растягивающее напряжение $\max \sigma_p = 83$ $кг/см^2$, наибольшее сжимающее $\max \sigma_c = 85{,}4$ $кг/см^2$.



К задаче 6.26.



К задаче 6.27.

6.27. Коленчатый стержень прямоугольного поперечного сечения (см. рисунок) нагружен силой *P*, направление действия которой проходит через центры тяжести сечений *A* и *B*. В какой точке нормальное напряжение будет наибольшим?

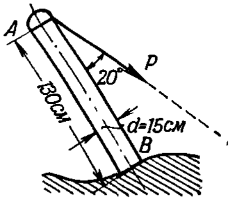
Чему оно будет равно, если $P = 2$ *т*, $h = 10$ *см*, $b = 6$ *см*, $a = 90$ *см*, $c = 80$ *см* и длина горизонтального колена $l = 2$ *м*?

Ответ: 1407 $кг/см^2$.

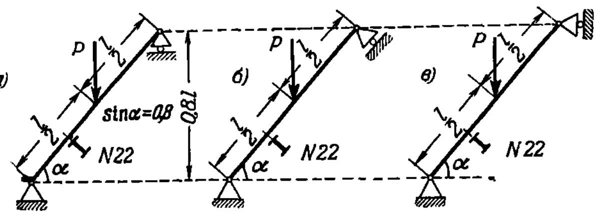
6.28. Деревянный столб *AB* круглого поперечного сечения диаметром 15 *см* (см. рисунок) удерживает канат, который натянут силой P. Считая столб в сечении B защемленным, определить наибольшее возможное натяжение каната, если допускаемое напряжение для материала столба равно 100 *кг/см²*.

Ответ: 622 *кг*.

6.29. Наклонно установленная двутавровая балка № 22*а* длиной $l = 2{,}5$ *м* нагружена посредине пролета вертикально направленной



К задаче 6.28.

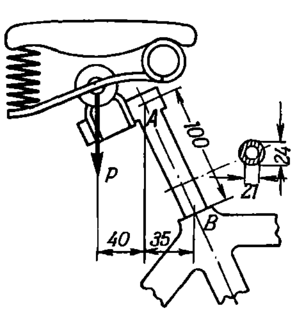


К задаче 6.29.

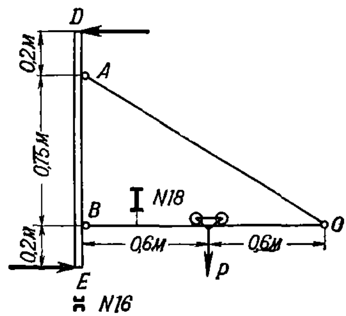
сосредоточенной силой $P = 8$ *т* (см. рисунок). Построить эпюры изменения по длине балки изгибающего момента и продольной силы и определить величину наибольшего сжимающего напряжения в балке для каждого из вариантов расположения верхней шарнирной опоры.

Ответ: а) 1398 *кг/см²*; б) 1502 *кг/см²*; в) 1561 *кг/см²*.

6.30. Определить нормальное напряжение в трубке AB, на которой укреплено седло велосипеда (см. рисунок), если нагрузка



К задаче 6.30.



К задаче 6.31.

$P = 80$ *кг*. Наружный диаметр трубки равен 24 *мм*, внутренний 21 *мм*. Конец B трубки считать защемленным.

Ответ: 1139 *кг/см²*.

6.31. Двутавровая балка BC (двутавр № 18) настенного крана шарнирно соединена со стойкой DE и тягой AC (см. рисунок).

Определить наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки при грузе $P = 4$ *т*, приложенном посредине пролета балки.

Ответ: 976 *кг/см*^{2}.

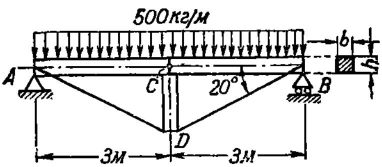
6.32. Стойка DE настенного крана (см. рисунок к задаче 6.31) составлена из двух швеллеров № 16, склепанных стенками; плоскость стенок параллельна плоскости чертежа. Определить наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении стойки, расположенном непосредственно под точкой A. Полагать, что груз $P = 4$ *т* находится в точке C.

Ответ: 557 *кг/см*^{2}.

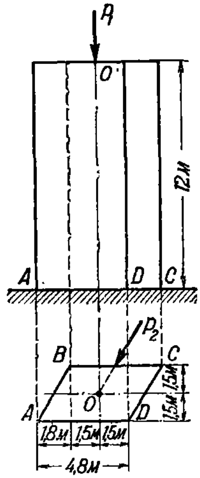
6.33. Деревянная шпренгельная балка прямоугольного поперечного сечения $\left(\text{с отношением } \frac{h}{b} = \frac{3}{2}\right)$, длиной 6 *м*, шарнирно опертая по концам, нагружена равномерно распределенной нагрузкой 500 *кг/м* (см. рисунок).

Определить размеры поперечного сечения балки при допускаемом напряжении 100 *кг/см*^{2} и диаметр стальных тяг AD и DB при допускаемом напряжении 1200 *кг/см*^{2}. При расчете считать, что балка AB в сечении C имеет шарнир.

Ответ: $h = 17{,}8$ *см*; $b = 11{,}9$ *см*; $d = 15{,}3$ *мм*.



К задаче 6.33.



К задаче 6.34.

6.34. Каменный бык косого в плане моста (см. рисунок) в верхнем сечении нагружен вертикальной силой $P_1 = 110$ *т* (вес пролетного строения моста и проходящего по мосту поезда), приложенной в точке O, и горизонтальной силой $P_2 = 20$ *т* (сила торможения поезда), параллельной сторонам AB и CD сечения быка. Высота быка 12 *м*, объемный вес кладки равен 2,2 *т/м*^{3}. Определить наибольшее и наименьшее сжимающие напряжения в горизонтальном сечении быка у его основания.

Ответ: $\sigma_{max} = \sigma_A = 64$ *т/м*^{2}; $\sigma_{min} = \sigma_C = 4{,}1$ *т/м*^{2}.

6.35. Деревянная стойка прямоугольного поперечного сечения 15×20 *см* нагружена продольной сжимающей силой 9 *т*, приложенной в точке N на расстоянии 3 *см* от каждой из главных осей инерции поперечного сечения (см. рисунок). Определить положение нейтральной оси и построить эпюры распределения нормальных напряжений по сторонам прямоугольника.

Решение. Для нахождения напряжений в поперечном сечении стойки воспользуемся формулой

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2}\right).$$

В данном случае: сила $P = -9000$ *кг* (сила сжимает стойку), $F = bh = 15\cdot 20 = 300$ *см*^{2}, $y_p = z_p = 3$ *см*, квадраты радиусов инерции поперечного сечения:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12} = \frac{15^2}{12} = \frac{75}{4}\ см^2$$

и

$$i_z^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{20^2}{12} = \frac{100}{3}\ см^2.$$

Подставляя значения P, F, y_p, z_p, i_y^2 и i_z^2 в формулу для вычисления напряжений, получаем

$$\sigma = -30\,(1 + 0{,}09y + 0{,}16z).$$

Положение нейтральной оси найдем, полагая в последнем выражении $\sigma = 0$. Имеем

$$1 + 0{,}09y_0 + 0{,}16z_0 = 0,$$

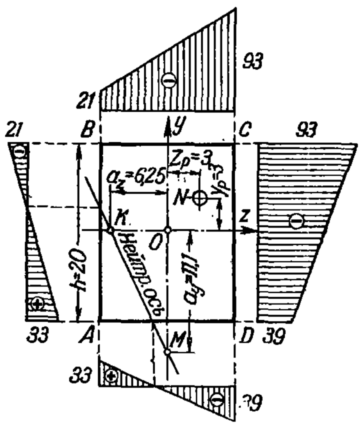
откуда при $z_0 = 0$

$$a_y = -\frac{1}{0{,}09} = -11{,}1\ см\ (\text{точка } M)$$

и при $y_0 = 0$

$$a_z = -\frac{1}{0{,}16} = -6{,}25\ см\ (\text{точка } K).$$

Нейтральная ось проходит через точки M и K.



К задаче 6.35.

Для построения эпюр распределения нормальных напряжений по сторонам сечения достаточно вычислить величину напряжений в точках A, B, C и D (вершинах углов прямоугольника), так как напряжения линейно зависят от координат y и z. В точке A ($y_A = -10$ *см*, $z_A = -7{,}5$ *см*) $\sigma_A = -30\,(1 - 0{,}09\cdot 10 - 0{,}16\cdot 7{,}5) = +33$ *кг/см*^{2} (растяжение). Аналогично:

в точке B $\sigma_B = -21$ *кг/см*^{2} (сжатие);

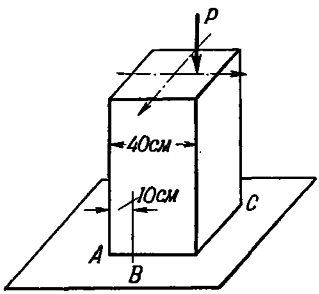
в точке C $\sigma_C = -93$ *кг/см*^{2} (сжатие);

в точке D $\sigma_D = -39$ *кг/см*^{2} (сжатие).

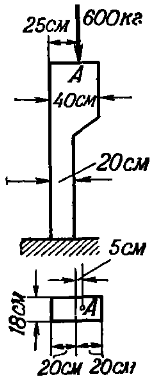
По значениям σ_A, σ_B, σ_C и σ_D построены требуемые эпюры напряжений (см. рисунок).

6.36. Нормальное напряжение в точке A сжатого бруса (см. рисунок) равно 20 $кг/см^2$ (растяжение), в точке B оно равно нулю. Чему равно напряжение в точке C?

Ответ: 60 $кг/см^2$.



К задаче 6.36.

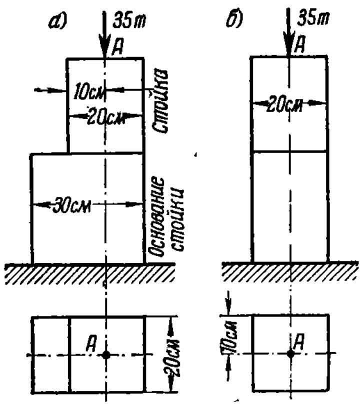


К задаче 6.37.

6.37. Проверить прочность нижней части бетонного столба, имеющей прямоугольное поперечное сечение 18×20 *см* (см. рисунок). Допускаемое напряжение на растяжение равно 6 $кг/см^2$, на сжатие—70 $кг/см^2$.

Ответ: $\max \sigma_р = 5{,}8$ $кг/см^2 < 6$ $кг/см^2$; $\max \sigma_{сж} = 9{,}2$ $кг/см^2 < 70$ $кг/см^2$.

6.38. Основание для стойки с поперечным сечением 20×20 *см* сделано из бруса с поперечным сечением 20×30 *см* (рисунок *а*)). Определить наибольшее нормальное напряжение в основании стойки, если сжимающая ее сила равна 35 *т*. Чему будет равно это напряжение, если основание стойки сделать из бруса с поперечным сечением 20×20 *см* (рисунок *б*))?



К задаче 6.38.

Ответ: 116,7 $кг/см^2$; 87,5 $кг/см^2$.

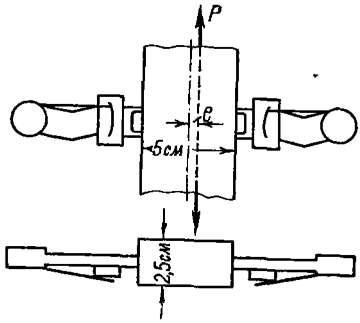
6.39. Определить толщину стальной полосы шириной 16 *см*, растягиваемой двумя параллельными ее оси силами 7 *т*, приложенными посредине толщины на расстоянии 4 *см* от края полосы; $[\sigma] = 1400$ $кг/см^2$.

Ответ: 7,8 *мм*.

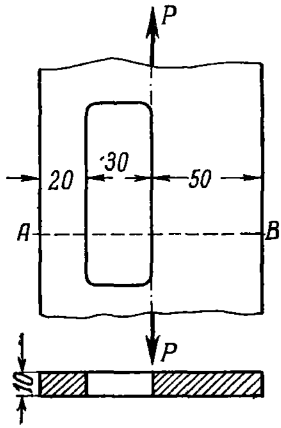
6.40. Во время испытания стержня прямоугольного поперечного сечения $2{,}5 \times 5$ *см* на растяжение при помощи тензометров (см. рисунок) было установлено, что под определенной нагрузкой напряжения на одной стороне равны $+300$ $кг/см^2$, а на другой стороне $+1200$ *кг/см²*. Определить величину и эксцентриситет растягивающей стержень силы, а также величину изгибающего момента.

Ответ: 9375 *кг*; 0,5 *см*; 4688 *кгсм*.

6.41. Стальная полоса шириной 100 *мм* и толщиной 10 *мм*, центрально растянутая силами $P=7$ *т*, имеет прорезь шириной 30 *мм* (см. рисунок). Не учитывая концентрации, построить эпюру распределения нормальных напряжений в сечении



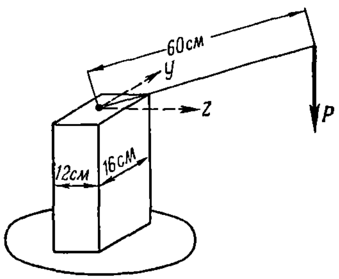
К задаче 6.40.



К задаче 6.41.

AB. При вычислении момента инерции обе части сечения считать жестко соединенными между собой. Какой ширины могла бы быть прорезь при той же величине наибольшего растягивающего напряжения, если бы она была расположена посредине ширины полосы?

Ответ: $\sigma_A = 1355$ *кг/см²*; $\sigma_B = 725$ *кг/см²*; 48,3 *мм*.

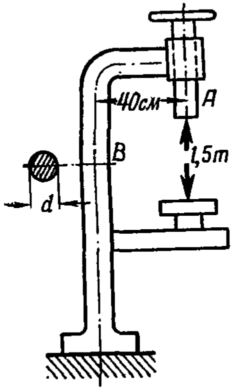


К задаче 6.42.

6.42. К короткому деревянному столбу с прямоугольным поперечным сечением 12×16 *см* прикреплена консоль длиной 60 *см*, проходящая через центр и вершину одного из углов прямоугольника. На конце консоли подвешен груз *P* (см. рисунок). Определить наибольшую допускаемую величину груза, если $[\sigma] = 100$ *кг/см²*.

Ответ: 519 *кг*.

6.43. При сверлении детали на шпиндель *A* сверлильного станка (см. рисунок) передается осевое давление 1500 *кг*. Определить диаметр круглой чугунной колонны *B*, если допускаемое напряжение на растяжение равно 350 *кг/см*².



К задаче 6.43.

Ответ: 122 *мм*.

6.44. Полый круглый стержень с наружным диаметром 75 *мм* и внутренним 50 *мм* растянут силами, линия действия которых параллельна оси стержня, но не совпадает с ней. Определить наибольший эксцентриситет сил, при котором максимальное напряжение не будет превосходить напряжение на оси стержня более чем на 25%.

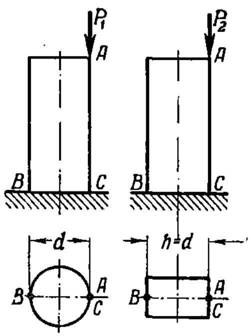
Ответ: 3,4 *мм*.

6.45. В точках *A* двух колонн (см. рисунок) приложены сжимающие силы. При этом в точках *C* обеих колонн сжимающие напряжения оказались одинаковыми. В какой колонне и насколько (в процентах) напряжение в точке *B* будет больше?

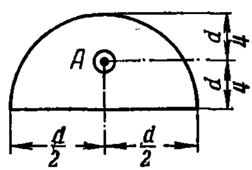
Ответ: В колонне круглого сечения напряжение будет больше на 20%.

6.46. Определить диаметр короткой деревянной стойки с поперечным сечением в виде полукруга, нагруженной продольной сжимающей силой $P = 5{,}6$ *т*, приложенной в точке *A* — посредине ширины и толщины стойки (см. рисунок); $[\sigma] = 100$ *кг/см*². Какого диаметра следовало бы взять стойку, если бы она работала на простое сжатие?

Ответ: 15,2 *см*, 12 *см*.



К задаче 6.45.

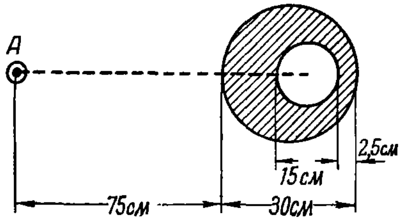


К задаче 6.46.

6.47. На рисунке показано поперечное сечение вертикальной колонны радиальной сверлильной машины. Давление на сверло нагружает колонну вертикальной растягивающей силой, проходящей через точку *A*.

Определить, насколько (в процентах) максимальное растягивающее напряжение в данном случае больше того, которое возникло бы в колонне, если бы толщина ее стенки была одинаковой.

Ответ: На 3,4%.

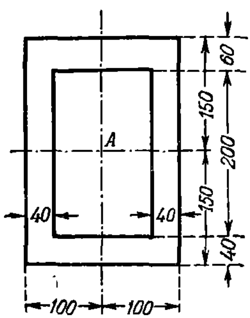


К задаче 6.47.

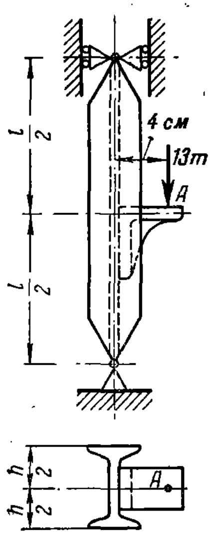
6.48. При отливке полой стальной колонны прямоугольного сечения толщина двух параллельных стенок ошибочно была сделана неодинаковой (см. рисунок).

Определить величину наибольшего и наименьшего напряжения в колонне от продольной сжимающей нагрузки 400 *т*, приложенной в точке *A*. Определить также величину наибольшего нормального напряжения в колонне в том случае, если бы толщина двух указанных стенок была сделана одинаковой (по 50 *мм*).

Ответ: 1225 *кг/см*²; 1007 *кг/см*²; 1111 *кг/см*².



К задаче 6.48.



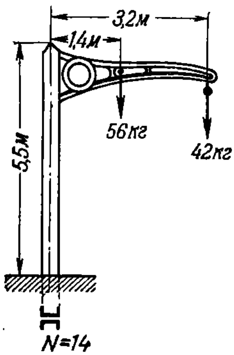
К задаче 6.49.

6.49. На короткую стойку двутаврового сечения, шарнирно закрепленную по концам, через кронштейн передается нагрузка $P = 13$ *т* (см. рисунок). Подобрать номер двутавра при допускаемом напряжении 1600 *кг/см*².

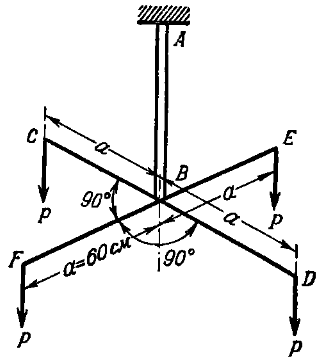
Ответ: № 24*а*.

6.50. Столб, служащий для подвески одиночного трамвайного провода, состоит из двух швеллеров № 14 (см. рисунок). Вес провода 42 *кг*, вес консоли, к которой подвешен провод, равен 56 *кг*. Учитывая собственный вес столба, определить наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения в сечении у основания столба.

Ответ: $+144$ *кг/см²*, -159 *кг/см²*.



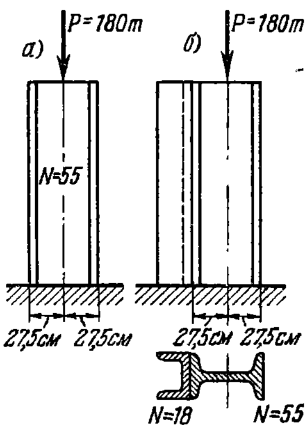
К задаче 6.50.



К задаче 6.51.

6.51. К крестовине *CDEF*, жестко скрепленной со стальной трубой *AB* (см. рисунок), симметрично подвешены четыре одинаковых груза $P=100$ *кг*. Труба *AB* имеет наружный диаметр 60 *мм* и толщину стенки 2 *мм*. Определить наибольшее растягивающее напряжение в трубе при четырех грузах, а также в том случае, если один из грузов будет снят.

Ответ: 110 *кг/см²*; 1255 *кг/см²*.



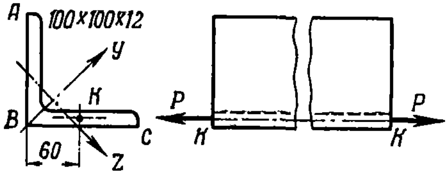
К задаче 6.52.

6.52. Короткая двутавровая стойка № 55, нагруженная центрально приложенной сжимающей силой $P=180$ *т* (рисунок *а*)), усилена швеллером № 18, приваренным к стойке по всей ее длине (рисунок *б*)). К усиленной стойке нагрузка $P=180$ *т* приложена также посредине высоты двутавра. Чему было равно наибольшее сжимающее напряжение в двутавровой стойке и чему оно равно в стойке, усиленной швеллером?

Ответ: 1579 *кг/см²*; 1706 *кг/см²*.

6.53. Уголок $100\times100\times12$ *мм* растягивается двумя силами $P=10$ *т*, приложенными в концевых сечениях посредине толщины одной из полок на расстоянии 60 *мм* от вершины угла уголка (см. рисунок). Определить положение нейтральной оси и напряжения в точках A, B и C сечения уголка.

Ответ: $a_z = -3{,}8$ *см*; $a_y = -6{,}91$ *см*; $\sigma_A = -189$ *кг/см²*; $\sigma_B = +177$ *кг/см²*; $\sigma_C = +1442$ *кг/см²*.

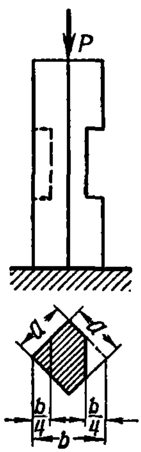


К задаче 6.53.

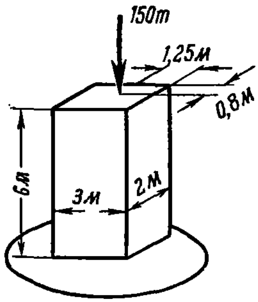
6.54. Насколько (в процентах) увеличится наибольшее сжимающее напряжение в короткой стойке квадратного поперечного сечения со стороной a, сжатой центрально приложенной силой P, если в ней сделать: а) врубку, как указано на рисунке, б) две такие одинаковые врубки с противоположных сторон стойки?

Ответ: На 70,2%; на 33,3%.

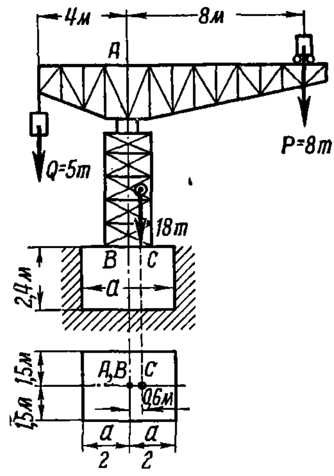
6.55. Каменный столб с объемным весом кладки 2 *т/м³* нагружен, как показано на рисунке. Определить наибольшее и наименьшее



К задаче 6.54.



К задаче 6.55.



К задаче 6.56.

сжимающие напряжения в его подошве и указать точки, где они имеют место.

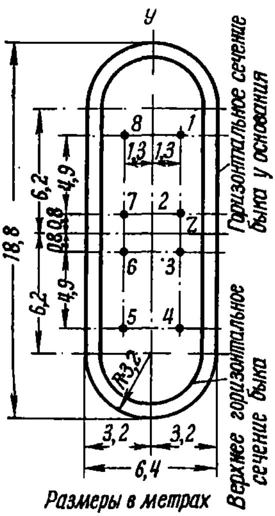
Ответ: 6,45 *кг/см²*; 0,95 *кг/см²*.

6.56. Кран для подъема и перемещения грузов до 8 *т* (см. рисунок) опирается на бетонный фундамент, причем ось AB крана проходит через центр фундамента. Считая, что вес крана, равный 18 *т* (без веса груза *P* и веса противовеса *Q*), приложен к фундаменту в точке *C* на расстоянии 0,6 *м* от оси *AB*, определить размер стороны *a* фундамента так, чтобы в основании его не возникало растягивающих напряжений. Определить, чему при выбранном значении *a* будет равно наибольшее давление на грунт. Удельный вес бетона равен 2,2.

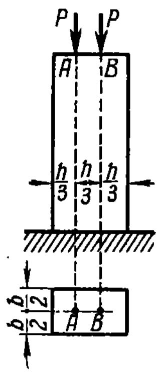
Ответ: 3,68 $м \approx 3{,}7$ *м*; 16,1 $т/м^2$.

6.57. На рисунке изображены горизонтальные сечения быка двухпутного железнодорожного моста. Вес быка 3200 *т*. В точках *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7* и *8* на бык передаются одинаковые силы веса пролетных строений моста, каждая из которых равна 120 *т*. Кроме того, в точках *1* и *2* на бык передаются одинаковые силы веса поезда, проходящего по одному из пролетных строений, каждая из которых равна 210 *т*. Определить положение нейтральной оси и наибольшее и наименьшее сжимающие напряжения в горизонтальном сечении быка у основания.

Ответ: $a_y = -86{,}7$ *м*; $a_z = -26{,}6$ *м*; $\sigma_{max} = 49{,}2$ $т/м^2$; $\sigma_{min} = 33{,}0$ $т/м^2$.



К задаче 6.57.

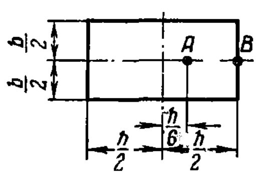


К задаче 6.58.

6.58. В точках *A* и *B* колонны прямоугольного сечения (см. рисунок) приложены одинаковые силы. Как изменится наибольшее сжимающее напряжение в материале колонны, если одну из них удалить?

Ответ: Не изменится.

6.59. От какого вида напряжений (растяжение или сжатие) произойдет разрушение бетонной колонны прямоугольного поперечного сечения (см. рисунок), если сжимающая ее сила будет приложена: а) в точке *A*, б) в точке *B*? Предел прочности бетона при сжатии в шесть раз больше предела прочности при растяжении.

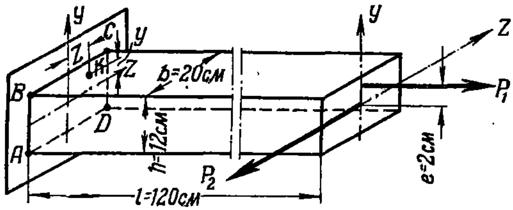


К задаче 6.59.

Ответ: а) Сжатие; б) растяжение.

6.60. Стержень прямоугольного поперечного сечения 12×20 *см*, длиной 120 *см*, защемленный одним концом, растягивается продольной силой $P_1 = 6$ *т* и изгибается поперечной силой $P_2 = 400$ *кг* (см. рисунок).

Определить нормальные напряжения в вершинах всех углов прямоугольника в опасном сечении стержня.



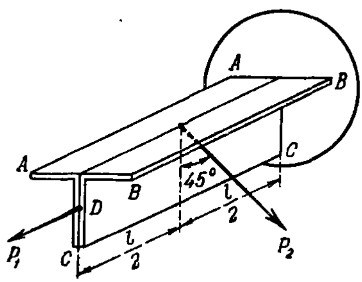
К задаче 6.60.

Ответ: $\sigma_A = -\ \ 60$ *кг/см*^{2} (сжатие);
$\sigma_B = -\ \ 10$ *кг/см*^{2} (сжатие);
$\sigma_C = +110$ *кг/см*^{2} (растяжение);
$\sigma_D = +\ \ 60$ *кг/см*^{2} (растяжение).

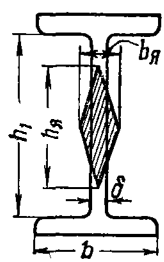
6.61. Балка длиной $l = 2$ *м*, составленная из двух неравнобоких уголков $125 \times 80 \times 10$ *мм*, жестко скрепленных между собой, защемлена одним концом (см. рисунок). Сила $P_1 = 15$ *т* параллельна оси балки и приложена на ее свободном конце в точке D (посредине высоты уголка); сила $P_2 = 800$ *кг*, действующая в плоскости, перпендикулярной к оси балки, проходит через центр изгиба среднего сечения под углом 45° к главной центральной оси инерции.

Определить величину нормальных напряжений в точках A, B и C опасного сечения, а также вертикальное и горизонтальное перемещения центра тяжести свободного конца балки.

Ответ:
$\sigma_A = +1854$ *кг/см*^{2};
$\sigma_B = -\ \ 762$ *кг/см*^{2};
$\sigma_C = +47$ *кг/см*^{2};
$f_{\text{верт}} = 0{,}129$ *см*;
$f_{\text{гор}} = 0{,}681$ *см*.



К задаче 6.61.



К задаче 6.62.

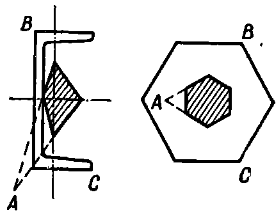
6.62. Как будет менять свои размеры ядро сечения двутавра (см. рисунок), если толщина стенки δ последнего будет уменьшаться? Какие предельные размеры оно будет иметь при уменьшении δ до нуля?

Ответ: $b_я = \frac{b}{3}$, $h_я \approx h_1$.

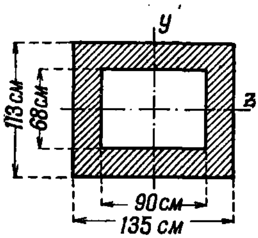
6.63. На рисунке изображены поперечные сечения швеллера и правильного шестиугольника, а также их ядра сечений. Как будет проходить в каждом из этих сечений нейтральная ось, если перпендикулярная к плоскости сечения сила будет приложена в точке A?

Ответ: Пройдет через точки B и C.

6.64. Кирпичный столб имеет полое прямоугольное поперечное сечение; размеры внешнего и внутреннего прямоугольника соответственно равны 135×113 *см* и 90×68 *см* (см. рисунок). Определить наибольшее расстояние от центра тяжести поперечного сечения до точки приложения сжимающей силы, при котором в столбе не будет растягивающих напряжений.

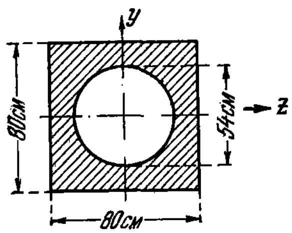


К задаче 6.63.



К задаче 6.64.

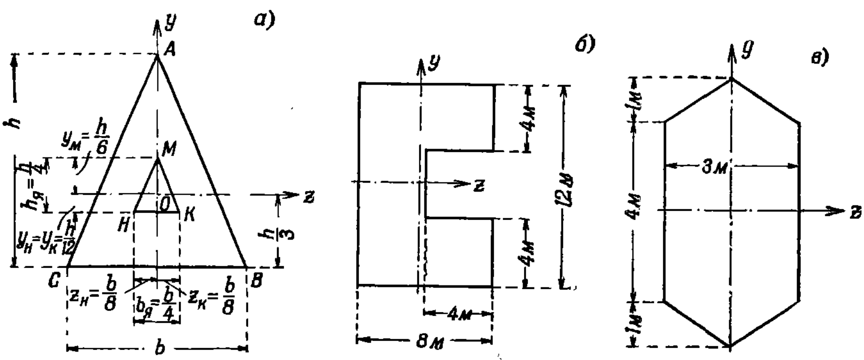
Ответ: 30,9 *см* по оси z и 26,9 *см* по оси y.



К задаче 6.65.

6.65. На рисунке изображено поперечное сечение цокольной части заводской трубы. Определить координаты вершин ядра сечения; сравнить с координатами вершин ядра сечения для квадрата 80×80 *см*.

Ответ: Труба: $y_я = 0$, $z_я = \pm 18{,}2$ *см*; $z_я = 0$, $y_я = \pm 18{,}2$ *см*; квадрат: $y_я = 0$, $z_я = \pm 13{,}3$ *см*; $z_я = 0$, $y_я = \pm 13{,}3$ *см*.



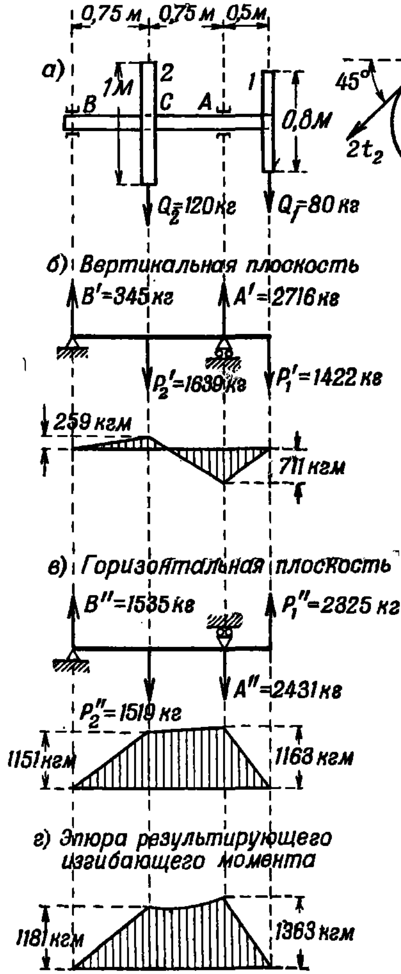
К задаче 6.66.

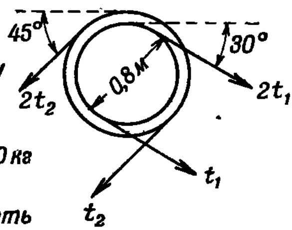
6.66. Построить ядро сечения для поперечных сечений, представленных на рисунках *а*)—*в*).

Ответ: а) См. рисунок; б) $y_я = 0$, $z_я = -1{,}18$ *м*; $y_я = 0$, $z_я = 1{,}44$ *м*; $z_я = 0$, $y_я = \pm 2{,}36$ *м*; в) $y_я = 0$, $z_я = \pm 0{,}45$ *м*; $y_я = \pm 0{,}722$ *м*, $z_я = \pm 0{,}15$ *м*.

§ 27. Изгиб и кручение

6.67. На вал (см. рисунок *а*)) насажены два шкива; первый — диаметром 80 *см*, весящий 80 *кг*, и второй — диаметром 1 *м*, весящий 120 *кг*. Через шкивы перекинуты ремни, ветви которых параллельны друг другу и наклонены к горизонту на первом шкиве под углом 30°, на втором — под углом 45°. От первого шкива ремень идет к электромотору; в этом ремне усилие в сбегающей ветви вдвое больше, чем в набегающей. От второго шкива ремень идет к станку; в этом ремне усилие в набегающей ветви вдвое больше, чем в сбегающей. Станок имеет мощность 100 *л. с.*; вал делает 200 оборотов в минуту. Используя четвертую теорию прочности, определить необходимый диаметр вала при допускаемом напряжении 800 *кг/см²*.





К задаче 6.67.

Решение. Вал подвергается изгибу, а часть его, расположенная между шкивами, и скручиванию. Крутящий момент определяется по формуле

$$M_к = \frac{2250}{\pi n} N = \frac{2250 \cdot 100}{3{,}14 \cdot 200} = 358 \text{ кгм.}$$

Обозначим натяжение набегающей ветви ремня, перекинутого через первый шкив, через t_1, тогда натяжение сбегающей ветви по условию равно $2t_1$. Для вращающего шкив момента, равного крутящему моменту $M_к$, имеем формулу

$$M_1 = M_к = \frac{D_1 t_1}{2},$$

где D_1 — диаметр первого шкива; отсюда

$$t_1 = \frac{2M_к}{D_1} = \frac{2\cdot 35\,800}{80} = 895 \ кг;$$

для второго шкива аналогично

$$t_2 = \frac{2M_к}{D_2} = \frac{2\cdot 35\,800}{100} = 716 \ кг.$$

Таким образом, в сечениях посадки шкивов вал нагружен наклонными силами:

$$R_1 = 3t_1 = 3\cdot 895 = 2685 \ кг \quad и \quad R_2 = 3t_2 = 3\cdot 716 = 2148 \ кг.$$

Кроме того, в тех же сечениях действуют вертикальные силы, равные весу шкивов.

Для вычисления наибольшего изгибающего момента определим сначала изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Для этого разложим силы R_1 и R_2 на вертикальную и горизонтальную составляющие; вертикальные составлиющие сложим с весами шкивов. Тогда вертикальная нагрузка от первого шкива будет равна

$$P_1' = Q_1 + R_1 \sin 30° = 80 + 2685\cdot 0{,}5 = 1422 \ кг,$$

а от второго шкива

$$P_2' = Q_2 + R_2 \sin 45° = 120 + 2148\cdot 0{,}707 = 1639 \ кг.$$

Горизонтальная нагрузка от первого шкива равна

$$P_1'' = R_1 \cos 30° = 2685\cdot 0{,}866 = 2325 \ кг,$$

а от второго шкива

$$P_2'' = R_2 \cos 45° = 2148\cdot 0{,}707 = 1519 \ кг.$$

При этом нагрузки P_1'' и P_2'' направлены в противоположные стороны (см. рисунок *в*)).

Для нагрузок P_1' и P_2', действующих в вертикальной плоскости, определяем обычным путем опорные реакции: $A' = 2716$ *кг* и $B' = 345$ *кг*, и строим эпюру изгибающих моментов $M_и'$ (см. рисунок *б*)).

Аналогично этому от нагрузок P_1'' и P_2'', действующих в горизонтальной плоскости, определием опорные реакции: $A'' = 2341$ *кг* и $B'' = 1535$ *кг*, и строим эпюру изгибающих моментов $M_и''$ (см. рисунок *в*)).

Результирующий изгибающий момент может достигнуть наибольшего значении либо на опоре A, либо в сечении C, так как обе эпюры моментов представляют собой ломаные линии с вершинами в этих сечениях. Величина результирующего момента в этих сечениях равна

$$M_A = \sqrt{(M_A')^2 + (M_A'')^2} = \sqrt{711^2 + 1163^2} = 1363 \ кгм$$

и

$$M_C = \sqrt{(M_C')^2 + (M_C'')^2} = \sqrt{259^2 + 1151^2} = 1180 \ кгм.$$

Таким образом, опасным сечением является сечение A. Эпюра результирующего изгибающего момента представлена на рисунке *г*).

Расчетный момент по IV теории прочности равен

$$M_p = \sqrt{M_A^2 + 0{,}75M_к^2} = \sqrt{1363^2 + 0{,}75\cdot 358^2} = 1398 \textit{ кгм}.$$

Необходимый диаметр вала находим по формуле

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_p}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 139\,800}{3{,}14\cdot 800}} = 12{,}1 \textit{ см}.$$

6.68. Сплошной стальной вал круглого поперечного сечения нагружен в опасном сечении изгибающим моментом 1,25 *тм* и крутящим моментом 1,25 *тм*. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 800$ *кг/см²*. Исходя из условий прочности по III и IV теориям прочности, определить необходимый диаметр вала.

Ответ: 131 *мм*, 128 *мм*.

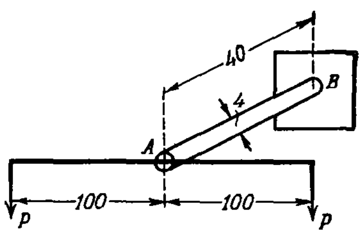
6.69. Полый стальной вал скручивается моментом 27 *тм* и изгибается моментом 14 *тм*. Внутренний диаметр вала должен составлять половину наружного.

Используя третью теорию прочности, определить наружный и внутренний диаметры вала при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1500$ *кг/см²*.

Ответ: 280 *мм* и 140 *мм*.

6.70. Определить наибольшее расчетное напряжение в круглом стальном стержне AB длиной 40 *см* и диаметром 4 *см*, нагруженном двумя одинаковыми грузами $P = 100$ *кг* (см. рисунок). Чему будет равно расчетное напряжение в стержне, если один из грузов будет снят? Использовать четвертую теорию прочности.

Ответ: 1273 *кг/см²*; 1518 *кг/см²*.



К задаче 6.70.

6.71. Полый чугунный вал с наружным и внутренним диаметрами, соответственно равными 200 *мм* и 120 *мм*, передает мощность 300 *л. с.* при 120 *об/мин*. Расстояние между опорными подшипниками равно 1,6 *м*; посредине этого расстояния к валу приложена поперечная сосредоточенная сила 3 *т*.

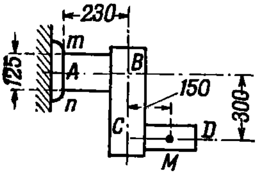
Определить величину наибольшего расчетного напряжения в опасном сечении вала, исходя из теории наибольших деформаций; $\mu = 0{,}25$.

Ответ: 263 *кг/см²*.

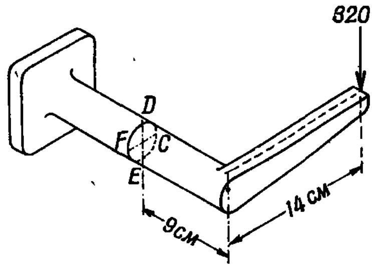
6.72. Стальной коленчатый стержень $ABCD$ закреплен, как указано на рисунке. Участок AB имеет круглое поперечное сечение диаметром 125 *мм*. Сила 2 *т* приложена в точке M перпендикулярно к плоскости чертежа. Пренебрегая касательными напряжениями от перерезывающей силы, определить в наиболее опасной точке сечения *mn* главные напряжения и расчетные напряжения по II, III и IV теориям прочности.

Концентрацию напряжений во внимание не принимать.

Ответ: $+451$ *кг/см*²; -54 *кг/см*²; 467 *кг/см*²; 505 *кг/см*²; 480 *кг/см*².



К задаче 6.72.



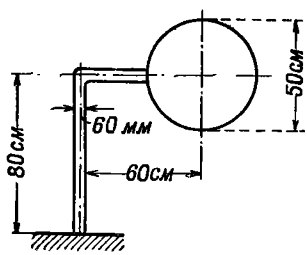
К задаче 6.73.

6.73. Кулачок (см. рисунок) нагружен силой 320 *кг*. Диаметр круглой части в сечении *DEFC* равен 50 *мм*. Определить главные и наибольшее касательное напряжения в точке *D*. Исходя из IV теории прочности, вычислить наибольшее расчетное напряжение в сечении *DEFC*.

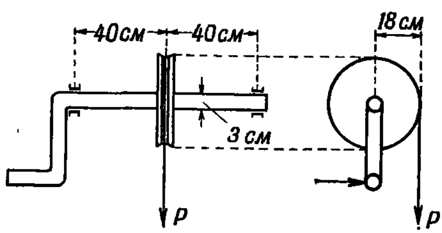
Ответ: $+335$ *кг/см*²; -99 *кг/см*²; 217 *кг/см*²; 394 *кг/см*².

6.74. Круглый дорожный знак укреплен на полой круглой стойке с наружным диаметром 60 *мм* (см. рисунок). Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить толщину стенки стойки при допускаемом напряжении $[\sigma]=600$ *кг/см*², если наибольшая ветровая нагрузка на знак равна 200 *кг/м*².

Ответ: 2,65 *мм*.



К задаче 6.74.



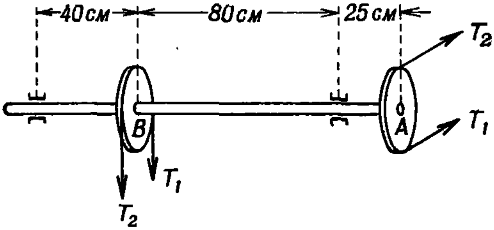
К задаче 6.75.

6.75. Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить наибольшую допускаемую величину груза *P*, который можно поднять при помощи ворота (см. рисунок). Вал ворота круглого поперечного сечения диаметром 30 *мм*. Допускаемое напряжение для материала вала равно 800 *кг/см*².

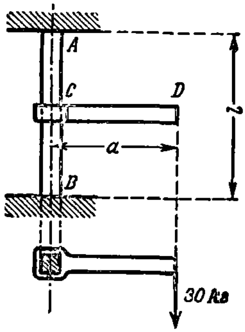
Ответ: 79 *кг*.

6.76. Два одинаковых шкива A и B насажены на вал (см. рисунок). Ведущий шкив A передает 10 *л. с.* при 100 об/мин. Обе ветви ремня на шкиве A горизонтальны, на шкиве B — вертикальны. Натяжение ремня $T_2 = 150$ *кг*. Диаметры шкивов равны 60 *см*. Весами шкивов можно пренебречь. Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить необходимый диаметр вала при допускаемом напряжении $[\sigma] = 800$ *кг/см²*.

Ответ: 59,6 *мм* $\approx$ 60 *мм*.



К задаче 6.76.

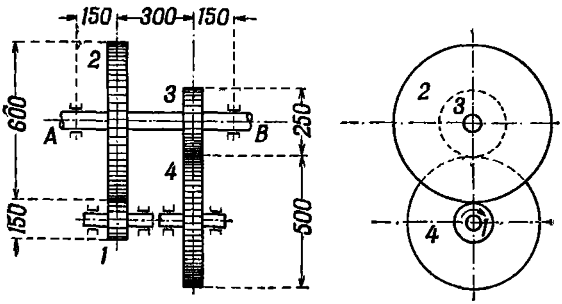


К задаче 6.77.

6.77. Оба конца стального бруска AB квадратного сечения 20×20 *мм²* защемлены. Посредине пролета $l = 160$ *см* к бруску жестко прикреплена стальная поперечина CD такого же сечения длиной $a = 30$ *см*; на свободном конце ее приложен груз $P = 30$ *кг* (см. рисунок).

Определить расчетные напряжения в бруске AB и поперечине CD по теории наибольших касательных напряжений, а также перемещение точки D в направлении действия силы P.

Ответ: 704 *кг/см²*; 675 *кг/см²*; 9,4 *мм*.



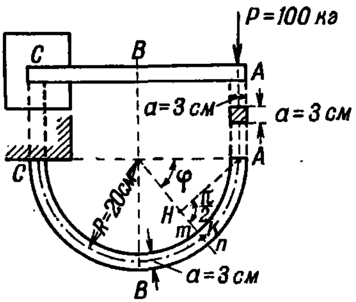
К задаче 6.78.

6.78. Определить диаметр вала AB цилиндрической зубчатой передачи (см. рисунок). Крутящий момент на зубчатом колесе *1* равен 30 *кгм*. Использовать III и IV теории прочности.

Собственными весами зубчатых колес пренебречь. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 800$ *кг/см*².

Ответ: 57,8 *мм*; 56,2 *мм*.

6.79. Стальной стержень ABC квадратного поперечного сечения 3×3 *см*, изогнутый в виде полукруга, защемлен концом C в стену и нагружен на свободном конце силой $P = 100$ *кг* (см. рисунок). Определить наибольшие расчетные напряжения в сечениях B и C стержня, исходя из теории наибольших касательных напряжений. Определить вертикальное перемещение точки A.



К задаче 6.79.

Решение. Сила P вызывает изгиб и скручивание стержня ABC. В произвольном сечении mn, наклоненном к сечению A под углом φ (см. рисунок), изгибающий момент

$$M_и = P\cdot HA = PR\sin\varphi,$$

а крутящий момент равен

$$M_к = P\cdot HK = P\cdot R\,(1-\cos\varphi).$$

В сечении B при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $M_и = M_к = PR$. Наибольшее нормальное напряжение от изгиба в этом сечении равно

$$\sigma_{max} = \frac{M_и}{W_и} = \frac{6PR}{a^3} = \frac{6\cdot 100\cdot 20}{3^3} = 444 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее касательное напряжение от кручения в этом же сечении:

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к} = \frac{PR}{\beta a^3};$$

для квадратного сечения коэффициент β равен 0,208 (см. таблицу 17 курса «Сопротивление материалов» Н. М. Беляева, изд. 1954 г.); таким образом,

$$\tau_{max} = \frac{100\cdot 20}{0{,}208\cdot 3^3} = 356 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее расчетное напряжение по III теории прочности в сечении B равно

$$\max\sigma_{р3} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2} = \sqrt{444^2 + 4\cdot 356^2} = 839 \text{ кг/см}^2.$$

В сечении C при $\varphi = \pi$ $M_и = 0$ и $M_к = 2PR$; поэтому $\sigma = 0$, а $\tau_{max} = 2\cdot 356 = 712$ *кг/см*². Расчетное напряжение в этом сечении равно

$$\max\sigma_{р3} = \sqrt{4\tau_{max}^2} = 2\tau_{max} = 2\cdot 712 = 1424 \text{ кг/см}^2.$$

Сечение C находится в худших условиях, чем сечение B.

Перемещение конца A стержня ABC в направлении действия силы P определим с помощью теоремы Кастильяно; при этом учтем потенциальную энергию изгиба и скручивания стержня. В элементе стержня длиной $ds = Rd\varphi$ потенциальная энергия изгиба и кручения равна

$$dU_и + dU_к = \frac{M_и^2 Rd\varphi}{2EJ_и} + \frac{M_к^2 Rd\varphi}{2GJ_к}.$$

Потенциальная энергия в объеме всего стержня

$$U=U_{\text{и}}+U_{\text{к}}=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{M_{\text{и}}^2R}{2EJ_{\text{и}}}+\frac{M_{\text{к}}^2R}{2GJ_{\text{к}}}\right)d\varphi.$$

По теореме Кастильяно

$$f_A=\frac{\partial U}{\partial P}=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{M_{\text{и}}\frac{\partial M_{\text{и}}}{\partial P}R}{EJ_{\text{и}}}+\frac{M_{\text{к}}\frac{\partial M_{\text{к}}}{\partial P}R}{GJ_{\text{к}}}\right)d\varphi.$$

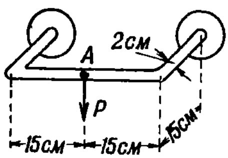
Так как $\frac{\partial M_{\text{и}}}{\partial P}=R\sin\varphi$, $\frac{\partial M_{\text{к}}}{\partial P}=R(1-\cos\varphi)$, $G=8\cdot10^5$ *кг/см*$^2=0{,}4E$, $J_{\text{и}}=\frac{a^4}{12}$ и $J_{\text{к}}=\alpha a^4$, где для квадратного сечения $\alpha=0{,}14$ (см. вышеупомянутую таблицу 17), то

$$f_A=\frac{PR^3}{Ea^4}\int\limits_0^{\pi}\left[12\sin^2\varphi+\frac{(1-\cos\varphi)^2}{0{,}4\alpha}\right]d\varphi=\frac{3\pi PR^3}{a^4E}\left(2+\frac{E}{2G\alpha}\right)=$$

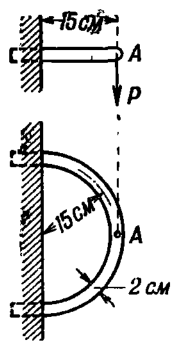
$$=\frac{3\cdot3{,}14\cdot100\cdot20^3}{3^4\cdot2\cdot10^6}\left(2+\frac{2\cdot10^6}{2\cdot8\cdot10^5\cdot0{,}14}\right)=0{,}51\text{ см}.$$

6.80. Стальная прямоугольная скоба круглого поперечного сечения диаметром 2 *см* защемлена двумя концами в стену и нагружена силой P (см. рисунок). Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить наибольшую допускаемую величину силы P, если допускаемое напряжение $[\sigma]=800$ *кг/см*^{2}. Определить также вертикальное перемещение точки A.

Ответ: 81,8 *кг*; 0,49 *мм*.



К задаче 6.80.



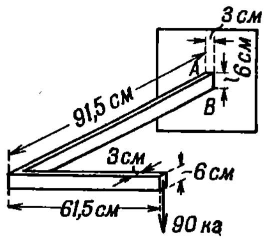
К задаче 6.81.

6.81. Стальной стержень круглого поперечного сечения диаметром 2 *см*, изогнутый в виде полукруга, заделан концами в стену (см. рисунок). Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить при допускаемом напряжении $[\sigma]=800$ *кг/см*^{2} наибольшую допускаемую величину силы P, приложенной в точке A. Определить также вертикальное перемещение точки A.

Сравнить результаты решения задачи с результатами решения задачи 6.80.

Ответ: 70,7 *кг*; 0,39 *мм*.

6.82. Коленчатый стержень прямоугольного поперечного сечения 3×6 *см* защемлен одним концом и нагружен сосредоточенной силой 90 *кг* на свободном конце (см. рисунок). Определить в точках A



К задаче 6.82.

и B защемленного сечения, расположенных посредине узких и широких сторон прямоугольника, расчетные напряжения по III и IV теориям прочности.

Ответ: По III теории $\sigma_{pA}=787$ *кг/см²*; $\sigma_{pB}=812$ *кг/см²*;
по IV теории $\sigma_{pA}=718$ *кг/см²*; $\sigma_{pB}=703$ *кг/см²*.

§ 28. Общий случай сложного сопротивления

6.83. Полый вал с наружным диаметром D и внутренним $\frac{D}{2}$ скручивается моментом 4,5 *тм* и сжимается осевой силой 50 *т*. Допускаемое напряжение $[\sigma]=1200$ *кг/см²*. Определить диаметры вала, исходя из III теории прочности.

Ответ: 202 *мм*; 101 *мм*.

6.84. Стальная труба с внутренним диаметром 100 *мм* и толщиной стенки 5 *мм* подвергнута действию: внутреннего, не вызывающего продольных напряжений, избыточного давления 10 *ат*, сжимающего вдоль оси усилия, равного 8 *т*, и крутящего момента 500 *кгм*. Определить величину главных напряжений и угол наклона к оси трубы площадок, по которым действует главное растягивающее напряжение.

Ответ: $+508$ *кг/см²*; -893 *кг/см²*; $32°41'$.

6.85. Вал диаметром 22 *см*, имеющий на конце консоли длиной 45 *см* гребной винт, передает мощность 4000 *л. с.* при 300 об/мин. Тяговое усилие на винте 17 *т*, вес винта 2 *т*. Определить величину главных напряжений в наиболее опасной точке на поверхности вала и построить диаграмму, показывающую изменение главных напряжений в этой точке за время одного оборота вала. Определить величину расчетного напряжения в той же точке по энергетической теории.

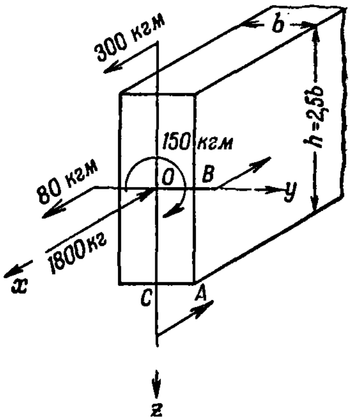
Ответ: $+524$ *кг/см²*; -398 *кг/см²*; 801 *кг/см²*.

6.86. Стержень прямоугольного сечения 10×3 *см²* скручивается моментом 90 *кгм* и растягивается центральной силой 2,4 *т*.

Определить величину наибольшего расчетного напряжения по третьей теории прочности.

Ответ: 731 *кг/см²*.

6.87. Определить размеры щеки коленчатого вала прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон $h:b = 2{,}5$, нагруженной, как указано на рисунке. Применить теорию касательных напряжений; $[\sigma] = 800$ *кг/см²*.



К задаче 6.87.

Решение. Наиболее опасными точками в сечении являются:

1) точка A, в которой нормальные напряжения от силы N и моментов M_y и M_z будут одного знака (сжатие); в этой точке не будет касательных напряжений от кручения;

2) точка B, в которой касательные напряжения от кручения будут наибольшими, а сжимающие нормальные напряжения возникнут только от силы N и момента M_z;

3) точка C, в которой касательные напряжения от кручения будут несколько меньше, чем в точке B; зато сжимающие нормальные напряжения возникнут от силы N и момента M_y бóльшего, чем момент M_z.

Составим условие прочности материала в каждой из этих точек, исходя из теории касательных напряжений.

Геометрические характеристики сечения, выраженные через размер b щеки, будут

$$F = bh = 2{,}5b^2;$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{2{,}5^2 b^3}{6} = 1{,}042b^3;$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{2{,}5b^3}{6} = 0{,}417b^3$$

и

$$W_к = \beta b^3 = 0{,}647b^3 \text{ (при } h:b = 2{,}5 \text{ коэффициент } \beta = 0{,}647).$$

Условие прочности материала в точке A, наиболее удаленной от осей y и z, имеет вид

$$\sigma_{pA} = |\sigma_A| = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{1800}{2{,}5b^2} + \frac{30\,000}{1{,}042b^3} + \frac{8000}{0{,}417b^3} =$$

$$= \frac{720}{b^2} + \frac{28\,800}{b^3} + \frac{19\,200}{b^3} = \frac{720}{b^2} + \frac{48\,000}{b^3} \leqslant [\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2.$$

Считая, что $\sigma_{pA}=[\sigma]$, получаем уравнение для определения величины b:

$$800b^3-720b-48\,000=0 \text{ или } b^3-0{,}9b-60=0;$$

путем подбора находим $b=3{,}99$ *см*.

Нормальное напряжение в точке B равно

$$|\sigma_B|=\frac{N}{F}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{720}{b^2}+\frac{19\,200}{b^3},$$

а касательное напряжение

$$\tau_B=\frac{M_\text{к}}{W_\text{к}}=\frac{15\,000}{0{,}647b^3}=\frac{23\,180}{b^3}.$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{pB}=\sqrt{\sigma_B^2+4\tau_B^2}=\sqrt{\left(\frac{720}{b^2}+\frac{19\,200}{b^3}\right)^2+4\left(\frac{23\,180}{b^3}\right)^2}\leqslant[\sigma]=800\ \textit{кг/см}^2.$$

Считая, что $\sigma_{pB}=[\sigma]$, получаем уравнение

$$b^6-0{,}81b^2-43{,}2b-3934=0;$$

путем подбора находим $b=4{,}00$ *см*.

Нормальное напряжение в точке C равно

$$|\sigma_C|=\frac{N}{F}+\frac{M_y}{W_y}=\frac{720}{b^2}+\frac{28\,800}{b^3},$$

а касательное напряжение

$$\tau_C=\gamma\frac{M_\text{к}}{W_\text{к}}=0{,}774\cdot\frac{15\,000}{0{,}647b^3}=\frac{17\,950}{b^3}$$

(при $h:b=2{,}5$ коэффициент $\gamma=0{,}774$).

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{pC}=\sqrt{\sigma_C^2+4\tau_C^2}=\sqrt{\left(\frac{720}{b^2}+\frac{28\,800}{b^3}\right)^2+4\left(\frac{17\,950}{b^3}\right)^2}\leqslant[\sigma]=800\ \textit{кг/см}^2.$$

Считая, что $\sigma_{pC}=[\sigma]$, получаем уравнение

$$b^6-0{,}81b^2-64{,}8b-3310=0;$$

путем подбора находим $b=3{,}91$ *см*.

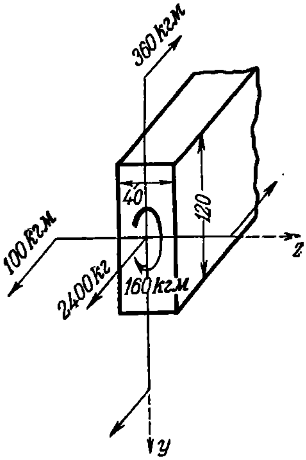
Наиболее опасной оказывается точка B. Размеры щеки вала необходимо принять равными $b=4$ *см* и $h=2{,}5b=10$ *см*.

6.88. Щека коленчатого вала прямоугольного поперечного сечения 4×12 *см*^{2} нагружена, как показано на рисунке.

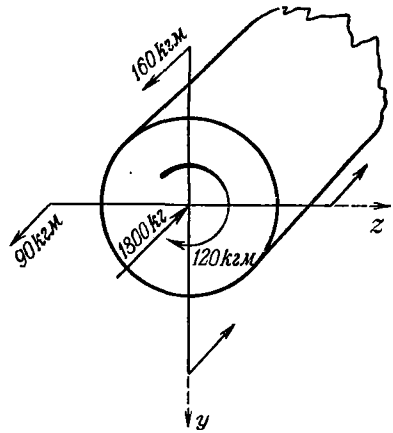
Определить положение нейтральной оси и, исходя из третьей теории прочности, вычислить расчетные напряжения в трех наиболее опасных точках поперечного сечения щеки (в вершине угла прямоугольника и в серединах его сторон).

Ответ: $a_y=-0{,}8$ *см*; $a_z=0{,}32$ *см*; $\sigma_p=738$ *кг/см*^{2}; $\sigma_p=722$ *кг/см*^{2}; $\sigma_p=634$ *кг/см*^{2}.

6.89. Мотылевая шейка коленчатого вала нагружена, как показано на рисунке.



К задаче 6.88.

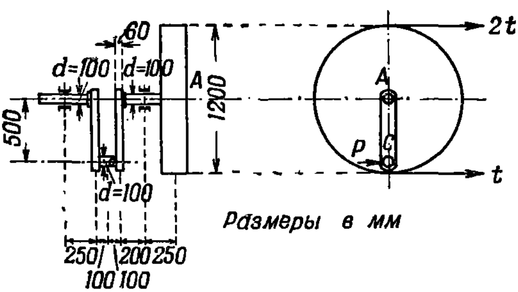


К задаче 6.89.

Исходя из условия прочности по третьей теории, определить диаметр шейки при $[\sigma] = 1200$ *кг/см²*. Указать координаты опасной точки.

Ответ: 58 *мм*; $z_0 = 1,42$ *см*; $y_0 = 2,53$ *см*.

6.90. Проверить прочность шеек и щек коленчатого вала (см. рисунок). Шкив *A* передает 100 *л. с.* при 150 об/мин. Допускаемое

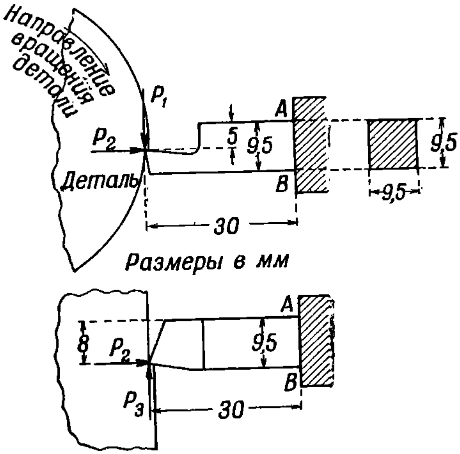


К задаче 6.90.

напряжение равно 800 *кг/см²*. Применить теорию касательных напряжений. Весом шкива пренебречь. Ширина щеки (*AC*) 130 *мм*.

Ответ: Коренная шейка вала — $\sigma_р = 779$ *кг/см²* $< [\sigma]$; мотылевая шейка вала — $\sigma_р = 585$ *кг/см²* $< [\sigma]$; правая щека вала — $\sigma_р = 743$ *кг/см²* $< [\sigma]$; левая щека вала — $\sigma_р = 428$ *кг/см²* $< [\sigma]$.

6.91. Острие резца токарного станка (см. рисунок) при обточке детали подвергается действию трех взаимно перпендикулярных усилий: P_1 — сопротивление резанию в узком смысле слова, P_2 — радиальное усилие, стремящееся отжать резец назад, и P_3 — осевое усилие, параллельное оси детали, или усилие подачи.

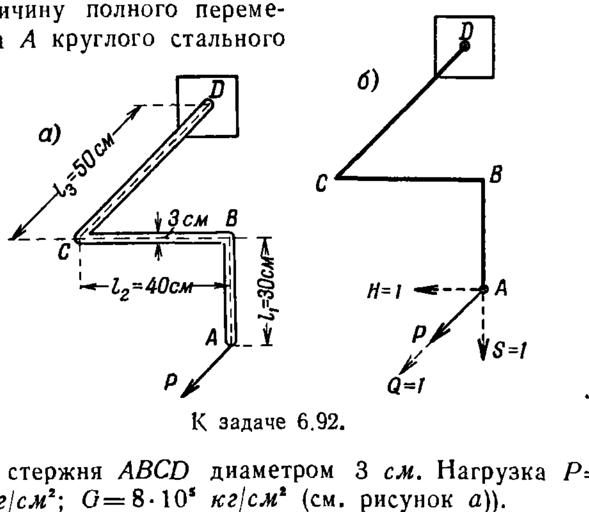


К задаче 6.91.

Исходя из теории касательных напряжений, определить расчетные напряжения в трех наиболее опасных точках и в центре сечения AB резца (считая резец в этом сечении защемленным) при условии, что $P_1 = 60$ *кг*, $P_2 = 0{,}15\ P_1$ и $P_3 = 0{,}35\ P_1$. При расчете принять во внимание и касательные напряжения от перерезывающих сил. Показать, какие напряжения действуют по граням элемента в упомянутых точках.

Ответ: 1733 *кг/см²*; 1305 *кг/см²*; 619 *кг/см²*; 212 *кг/см²*.

6.92. Определить величину трех составляющих перемещения, а также величину полного перемещения конца A круглого стального



К задаче 6.92.

коленчатого стержня $ABCD$ диаметром 3 *см*. Нагрузка $P = 40$ *кг*; $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*; $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см²* (см. рисунок *а*)).

Ответ: Перемещение точки A в направлении силы $S = 1$ равно

$$\delta_S = -\frac{Pl_1 l_3^2}{2EJ_и} = -0{,}189\ см;$$

точка A по вертикали перемещается в направлении, обратном направлению силы $S=1$, т. е. вверх.

Перемещение в направлении силы $H=1$ равно

$$\delta_H=\frac{Pl_2l_3^2}{2EJ_и}=0,252\ см.$$

Перемещение в направлении силы $Q=1$ равно

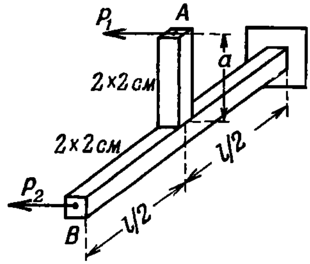
$$\delta_Q=1,008\ см.$$

Полное перемещение точки A в пространстве равно

$$\delta=\sqrt{\delta_Q^2+\delta_S^2+\delta_H^2}=\sqrt{1,008^2+0,189^2+0,252^2}=1,06\ см.$$

6.93. Определнть горизонтальные перемещения точек A и B стального коленчатого стержня (см. рисунок), имеющего во всех участках квадратное поперечное сечение 2×2 *см*. $P_1=6$ *кг*; $P_2=4$ *кг*; $a=20$ *см*; $l=80$ *см*.

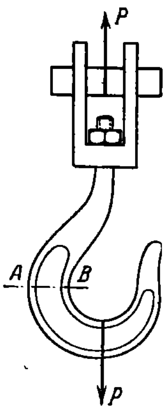
Ответ: $\delta_A=0,188$ *см*; $\delta_B=0,376$ *см*.



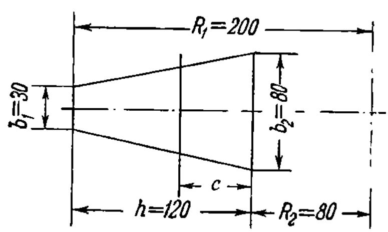
К задаче 6.93.

§ 29. Кривые стержни

6.94. Определить иаибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в опасном сечении крюка, поднимающего груз $P=10$ *т*. Размеры крюка даны на рисунке. (Закругления углов в сечении не показаны и при расчетах не учитываются.)



Решение. Опасным сечением будет сечение AB, где изгибающий момент $(M=PR_0)$ и нормальная сила $(N=P)$ достигают



К задаче 6.94.

наибольшего значения. Напряжения во внутренних и наружных волокнах указанного сечения определяются так:

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{M}{S}\cdot\frac{z}{\varrho},$$

Положение центра тяжести определится расстоянием его c от внутренней грани сечения:

$$c=\frac{h(2b_1+b_2)}{3(b_1+b_2)}=\frac{12\cdot 14}{3\cdot 11}=5{,}09\ см.$$

Положение нейтрального слоя определится его радиусом r:

$$r=\frac{h\dfrac{b_1+b_2}{2}}{\left(b_1+R_1\dfrac{b_2-b_1}{h}\right)\ln\dfrac{R_1}{R_2}-(b_2-b_1)}=\frac{12\cdot 5{,}5}{\left(3+20\cdot\dfrac{5}{12}\right)\ln\dfrac{20}{8}-5}=$$

$$=\frac{66}{11{,}33\cdot 2{,}303\cdot 0{,}3979-5}=\frac{66}{10{,}4-5}=12{,}22\ см.$$

Величины, необходимые для вычисления напряжений:

$$R_0=R_2+c=8+5{,}09=13{,}09\ см;$$
$$z_0=R_0-r=13{,}09-12{,}22=0{,}87\ см;$$
$$S=F\cdot z_0=5{,}5\cdot 12\cdot 0{,}87=57{,}4\ см^3;$$
$$z_1=h-c+z_0=12-5{,}09+0{,}87=7{,}78\ см;$$
$$z_2=c-z_0=5{,}09-0{,}87=4{,}22\ см.$$

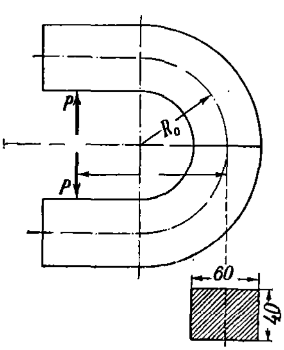
Определяем напряжения:

$$\sigma_2=+\frac{10\,000}{66}+\frac{10\,000\cdot 13{,}09}{57{,}4}\cdot\frac{4{,}22}{8}=152+1200=1352\ кг/см^2;$$

$$\sigma_1=+\frac{10\,000}{66}-\frac{10\,000\cdot 13{,}09}{57{,}4}\cdot\frac{7{,}78}{20}=152-890=-738\ кг/см^2.$$

6.95. Крюк имеет трапецеидальное сечение с основанием 5 *см* на внутренней стороне и 2,5 *см* на внешней стороне; высота опасного сечения 10 *см*; радиус внутренних волокон равен 10 *см*. Линия действия силы проходит через центр кривизны крюка.

Какой величины груз может поднимать крюк, если допускаемое напряжение равно 880 $кг/см^2$. *Ответ*: 2885 *кг* ($r=13{,}898$ *см*).



К задаче 6.97.

6.96. Радиус внутренних волокон кривого стержня трапецеидального сечения равен высоте сечения. Основание трапеции на вогнутой стороне в четыре раза больше основания на выпуклой стороне. Найти отношения напряжений в крайних волокнах кривого бруса к напряжениям в тех же волокнах прямого стержня, испытывающих одинаковый изгибающий момент.

Ответ: 1,28; 0,78 ($r=1{,}350\ h$).

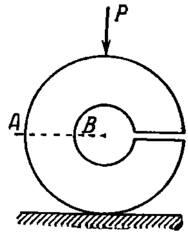
6.97. Стержень прямоугольного сечения шириной 6 *см* и толщиной 4 *см* изогнут в форме подковы со средним радиусом $R_0=7$ *см* (см. рисунок). На расстоянии $a=12$ *см* от центра среднего сечения приложены две равные и прямо противоположные силы по 1 *т* так, что они стремятся разогнуть стержень.

Найти наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения и построить эпюру распределения нормальных напряжений для среднего сечения.

Ответ: 750 *кг/см²*; —340 *кг/см²* ($r = 6{,}548$ *см*).

6.98. Найти грузоподъемность крюка с прямоугольным поперечным сечением. Толщина крюка равна 7,5 *см*; радиус внутренних волокон 15 *см*, а наружных — 25 *см*. Линия действия силы проходит на расстоянии 7,5 *см* от внутренних волокон. Допускаемое напряжение равно 700 *кг/см²*.

Ответ: 5,2 *т* ($r = 19{,}577$ *см*).



К задаче 6.99.

6.99. Кольцо, изображенное на рисунке, сделано из стержня круглого поперечного сечения диаметром 8 *см*. Внутренний диаметр кольца 12 *см*. Кольцо сжато силой $P = 2$ *т*. Найти напряжения в точках A и B.

Ответ: 260 *кг/см²*; —607 *кг/см²* ($r = 9{,}581$ *см*).

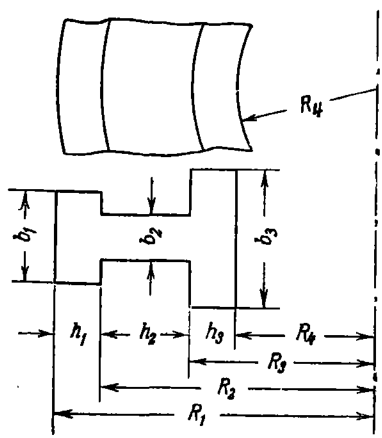
6.100. Кривой стержень круглого поперечного сечения диаметром 10 *см* имеет радиус кривизны внутренних волокон 2,5 *см*. Изгибающий момент, действующий на стержень, вызывает во внутренних волокнах растягивающее напряжение 200 *кг/см²*. Чему при этом будет равно напряжение в наружных волокнах?

Ответ: 59 *кг/см²* ($r = 6{,}545$ *см*).

6.101. У пустотелого кривого стержня радиус кривизны внутренних волокон равен 1,25 *см*. Сечение представляет собой полый квадрат с наружной стороной 2,5 *см* и внутренней 1,5 *см*.

Найти отношение напряжений в крайних волокнах кривого стержня к напряжениям в тех же волокнах прямого стержня при действии на них изгибающего момента одинаковой величины.

Ответ: 1,44; 0,78 ($r = 2{,}200$ *см*).



К задаче 6.102.

6.102. Определить положение нейтральной оси при изгибе кривого бруса парой сил. Сечение бруса двутавровое с размерами, указанными на рисунке. Числовые значения этих размеров следующие:

$$b_3 = 3 \text{ см}; \; b_2 = 1 \text{ см}; \; b_1 = 2 \text{ см};$$
$$R_4 = 3 \text{ см};$$
$$h_1 = 1 \text{ см}; \; h_2 = 2 \text{ см}; \; h_3 = 1 \text{ см}.$$

Решение. Точное решение дает следующий результат:

$$r=\frac{F}{\int\limits_F \frac{dF}{\varrho}}=\frac{b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3}{b_1\ln\frac{R_1}{R_2}+b_2\ln\frac{R_2}{R_3}+b_3\ln\frac{R_3}{R_4}}=$$

$$=\frac{2+2+3}{2\ln\frac{7}{6}+\ln\frac{3}{2}+3\ln\frac{4}{3}}=\frac{7}{1,577}=4,44\ \textit{см}.$$

При сложном поперечном сечении интегрирование становится трудным. Тогда его заменяют суммированием $\sum\frac{\Delta F}{\varrho}$, разбивая сечение на маленькие площадки.

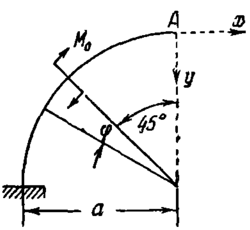
Для приближенного решения рассматриваемой задачи разделим все сечения на 11 полосок, параллельных основанию двутавра, высотой по 4 *мм* каждая, исключая третью и последнюю, высота которых по 2 *мм*. Вычисления знаменателя формулы r записаны в таблице:

№	ΔF в *см*^{2}	ϱ в *см*	$\frac{\Delta F}{\varrho}$ в *см*
1	1,2	3,2	0,375
2	1,2	3,6	0,333
3	0,6	3,9	0,154
4	0,4	4,2	0,0952
5	0,4	4,6	0,0870
6	0,4	5,0	0,0800
7	0,4	5,4	0,0742
8	0,4	5,8	0,0690
9	0,8	6,2	0,1290
10	0,8	6,6	0,1211
11	0,4	6,9	0,0580

$$\sum\frac{\Delta F}{\varrho}=1,5755.$$

Как видно из таблицы, результаты вычисления знаменателя оказываются близкими к точным.

6.103. Найти угол поворота, а также вертикальное и горизонтальное перемещения сечения A кривого стержня, изображенного на рисунке. Радиус оси стержня равен a.



К задаче 6.103.

Решение. Для определения деформаций кривого бруса воспользуемся формулой Мора:

$$\delta=\frac{1}{EJ}\int\limits_s M(\varphi)\,M^0ds+\frac{1}{EF}\int\limits_s N(\varphi)\,N^0ds.$$

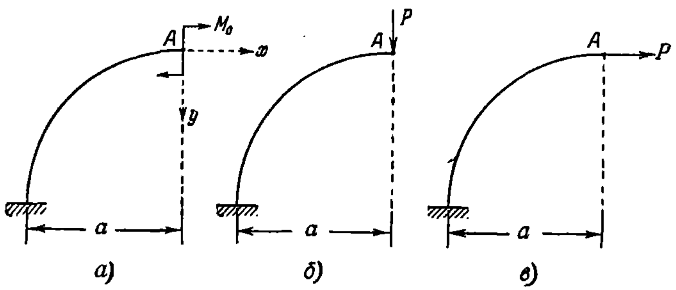
На правом участке от места приложения M_0 до точки A $M(\varphi)$ и $N(\varphi)$ равны нулю, поэтому в рассматриваемой задаче нужно вычислить интегралы только для левого участка $\left(\text{от } \varphi=0 \text{ до } \varphi=\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\theta_A=\frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{4}} M_0\cdot 1a\,d\varphi=\frac{\pi M_0 a}{4EJ};$$

$$y_A=\frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{4}} M_0 a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)a\,d\varphi=\frac{M_0a^2\cos\frac{\pi}{4}}{EJ}=0{,}707\frac{M_0a^2}{EJ};$$

$$x_A=\frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{4}} M_0 a\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\right]a\,d\varphi=\frac{M_0a^2}{EJ}\left[\frac{\pi}{4}-1+\sin\frac{\pi}{4}\right]=0{,}492\frac{M_0a^2}{EJ}.$$

6.104. Для каждой схемы загружения кривого бруса (см. рисунок) с постоянным сечением, очерченного по кругу радиуса a,



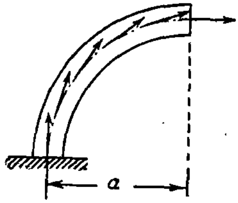
К задаче 6.104.

определить: угол поворота θ_A, вертикальное перемещение y_A и горизонтальное перемещение x_A свободного конца.

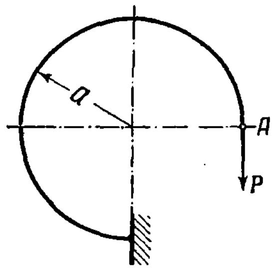
Ответ:	а)	б)	в)
θ_A	$\frac{\pi M_0 a}{2EJ}$	$\frac{Pa^2}{EJ}$	$0{,}571\frac{Pa^2}{EJ}$
y_A	$\frac{M_0a^2}{EJ}$	$\frac{\pi}{4}\frac{Pa^3}{EJ}+\frac{\pi}{4}\frac{Pa}{EF}$	$\frac{Pa^3}{2EJ}-\frac{Pa}{2EF}$
x_A	$0{,}571\frac{M_0a^2}{EJ}$	$\frac{Pa^3}{2EJ}-\frac{Pa}{2EF}$	$0{,}356\frac{Pa^3}{EJ}+\frac{\pi}{4}\frac{Pa}{EF}$

6.105. Найти вертикальное перемещение свободного конца кривого стержня, ось которого представляет собой четверть окружности радиуса a. Нагрузка q равномерно распределена вдоль оси стержня и направлена по касательной к ней, как показано на рисунке. При определении перемещения учитывать как влияние моментов, так и влияние нормальных сил.

Ответ: $\frac{qa^4}{EJ}\left[1-\frac{\pi}{4}\right]-\frac{\pi}{4}\frac{qa^2}{EF}$.



К задаче 6.105.

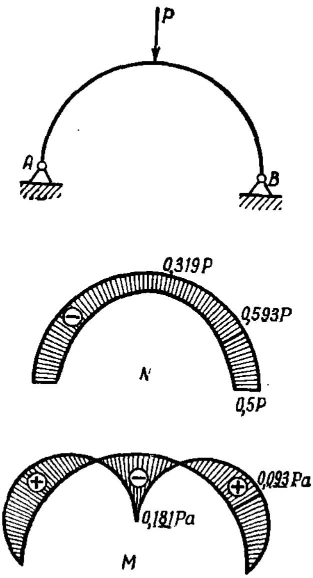


К задаче 6.106.

6.106. Будет ли точка A кривого бруса, изображенного на рисунке, перемещаться в горизонтальном направлении под влиянием нагрузки P? Как без расчета выяснить направление этого перемещения? Чему равна величина перемещения?

Ответ: Переместится влево;

$$x_A=\frac{Pa^2}{2EJ}-\frac{Pa}{2EF}.$$



К задаче 6.107.

6.107. Для арки, очерченной по полуокружности, определить изгибающие моменты и нормальные силы (построить эпюры) от действия сосредоточенной силы, приложенной к вершине.

Решение. Эта система статически неопределима. За лишнюю неизвестную принимаем горизонтальную реакцию H_B в шарнире B. Вертикальные составляющие реакций в шарнирах A и B определяются из уравнений статики. Они одинаковы:

$$V_A=V_B=\frac{P}{2}.$$

Для определения H_B ($H_A=H_B=H$) нужно воспользоваться условием отсутствия перемещения в шарнире B по направлению H:

$$x_B=0 \text{ или } \int_s M(\varphi)\cdot\frac{\partial M(\varphi)}{\partial H}\,ds=0.$$

Благодаря симметрии можно при интегрировании рассматривать только половину арки. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{Pa}{2}(1-\cos\varphi) + H a \sin\varphi \right] a \sin\varphi \cdot a\, d\varphi = 0.$$

После интегрирования и решения получим

$$H = \frac{P}{\pi}.$$

Теперь можно строить эпюры $M(\varphi)$ и $N(\varphi)$ по уравнениям:

$$M(\varphi) = -\frac{P}{2} a (1-\cos\varphi) + \frac{P}{\pi} a \sin\varphi = Pa\left(\frac{\cos\varphi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sin\varphi}{\pi}\right);$$

$$N(\varphi) = -\frac{P}{2}\cos\varphi - \frac{P}{\pi}\sin\varphi = -P\left(\frac{\cos\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{\pi}\right).$$

Результаты подсчета сведены в таблицу:

φ	0	30°	45°	60°	90°	32°30′
$\frac{M(\varphi)}{Pa}$	0	0,092	0,078	0,026	—0,181	0,093
$\frac{N(\varphi)}{P}$	—0,5	—0,592	—0,578	—0,526	—0,319	—0,593

Определим положения сечения с максимальными значениями $M(\varphi)$ и $N(\varphi)$

$$\frac{dM(\varphi)}{d\varphi} = 0;$$

$$-\frac{\sin\varphi}{2} + \frac{\cos\varphi}{\pi} = 0;$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637; \quad \varphi = \operatorname{arctg} 0{,}637 = 32°30'.$$

6.108. Решить предыдущую задачу при условии, что сила приложена в той же точке, но направлена горизонтально (вправо).

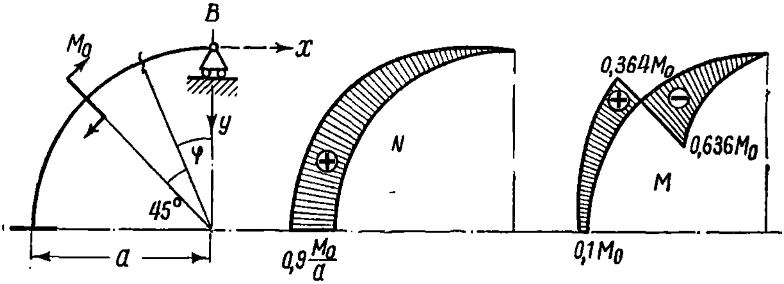
Ответ: $V_A = -V_B = H_A = H_B = \frac{P}{2}$;

$\max M = 0{,}207\ Pa$;

$\max N = 0{,}707\ P$.

6.109. В кривом стержне, изображенном на рисунке, определить реакцию опоры B, построить эпюры M и N и найти горизонтальное перемещение точки B (при определении деформаций и величины опорной реакции нормальную силу не учитывать).

Ответ: $B = 0{,}9\,\frac{M_0}{a}$, $\quad x_B = 0{,}042\,\frac{M_0 a^2}{FJ}$.

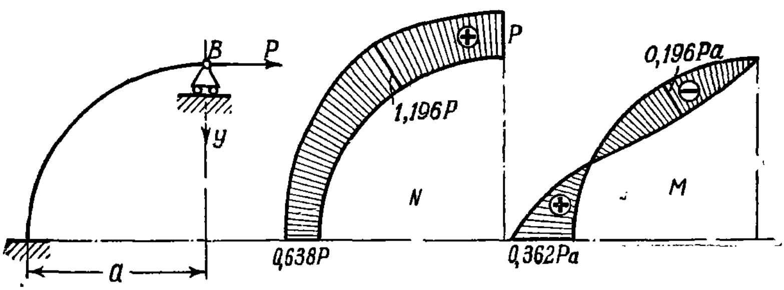


К задаче 6.109.

6.110. Определить величину вертикальной и горизонтальной составляющих реакции B в предположении, что опора B предыдущей задачи неподвижна.

Ответ: $B_y = 0{,}19\,\frac{M_0}{a}$, $\quad B_x = 1{,}12\,\frac{M_0}{a}$.

6.111. Найти реакцию опоры B, наибольший изгибающий момент и наибольшую нормальную силу (построив эпюры) для кривого



К задаче 6.111.

стержня, изображенного на рисунке. Определить горизонтальное перемещение точки B.

Ответ: $B_y = \frac{2}{\pi} P$; $\min M = 0{,}196\,Pa$;

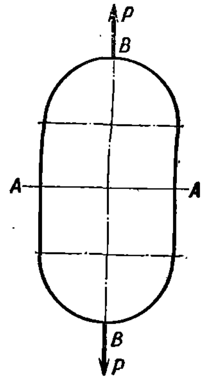
$\max M = 0{,}362\,Pa$;

$\max N = 1{,}196\,P$; $\quad x_B = 0{,}038\,\frac{Pa^3}{EJ}$.

6.112. Звено, составленное из двух круговых полуколец и двух прямолинейных участков, растягивается двумя силами P, как показано на рисунке. Найти изгибающие моменты в сечениях, совпадающих с осями симметрии.

Ответ: $M_A = -\dfrac{\pi-2}{2\dfrac{l}{a}+\pi}\cdot\dfrac{Pa}{2}$;

$$M_B = \left[1 - \frac{\pi-2}{2\dfrac{l}{a}+\pi}\right]\cdot\frac{Pa}{2}.$$

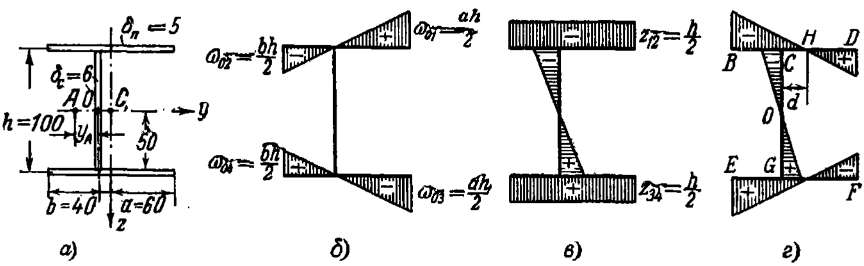


К задаче 6.112.

§ 30. Тонкостенные стержни

6.113. Для профиля, изображенного на рисунке *а*), определить положение центра изгиба, построить эпюру главных секториальных площадей и вычислить величину секториального момента инерции.

Решение. Так как сечение симметрично относительно оси y, то центр изгиба A будет лежать на этой оси, т. е. $z_A=0$. Для нахождения



К задаче 6.113.

расстояния y_A до центра изгиба от средней линии вертикальной стенки профиля воспользуемся формулой

$$y_A = \frac{S_{\omega_0 z}}{J_y},$$

где $S_{\omega_0 z}$ — секториально-линейный статический момент сечения относительно произвольно выбранного вспомогательного полюса и главной центральной оси инерции z, а J_y — момент инерции сечения относительно главной центральной оси y.

Выберем вспомогательный полюс в точке O (пересечение оси y со средней линией стенки профиля). Принимая эту же точку за начало отсчетов, построим эпюру секториальных площадей ω_0 (см. рисунок *б*)).

Интеграл $S_{\omega_0 z} = \int\limits_F \omega_0 z\,dF$ может быть вычислен по способу Верещагина путем умножения площадей эпюры ω_0 на ординаты эпюры z, лежащие под центрами тяжести площадей. Расстояния z до средней линии полок постоянны и равны $z_{12}=-\frac{h}{2}$ (для верхней полки) и $z_{34}=+\frac{h}{2}$ (для нижней полки); эпюра z приведена на рисунке *в*). Таким образом, для части верхней полки, расположенной справа от стенки, получим:

$$\delta_п \cdot \frac{1}{2}\omega_{01}az_{12}=\delta_п \cdot \frac{1}{2}\frac{ah}{2}a\left(-\frac{h}{2}\right)=-\frac{a^2h^2}{8}\delta_п.$$

Аналогично этому могут быть вычислены секториально-линейные статические моменты и остальных частей сечения; поэтому для всего сечения получим

$$S_{\omega_0 z}=\frac{1}{2}\delta_п\left[\omega_{01}az_{12}+\omega_{02}bz_{12}+\omega_{03}az_{34}+\omega_{04}bz_{34}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\delta_п\left[-\frac{a^2h^2}{4}+\frac{b^2h^2}{4}-\frac{a^2h^2}{4}+\frac{b^2h^2}{4}\right]=-\frac{h^2}{4}\delta_п(a^2-b^2)=$$
$$=-\frac{10^2}{4}\cdot 0{,}5\,(6^2-4^2)=-250\ см^5.$$

Момент инерции сечения относительно оси y равен

$$J_y=2(a+b)\,\delta_п\left(\frac{h}{2}\right)^2+\delta_c\cdot\frac{h^3}{12}=2\cdot(6+4)\cdot 0{,}5\left(\frac{10}{2}\right)^2+0{,}6\cdot\frac{10^3}{12}=300\ см^4.$$

Таким образом, координата y_A точки A (см. рисунок *а*)) равна

$$y_A=\frac{S_{\omega_0 z}}{J_y}=-\frac{250}{300}=-0{,}833\ см.$$

Принимая теперь точку A за главный секториальный полюс, а точку O за главную нулевую секториальную точку, строим эпюру главных секториальных координат ω (см. рисунок *г*)). При этом

$$\omega_C=-y_A\cdot\frac{h}{2}=-4{,}17\ см^2;\qquad \omega_B=\omega_C-\frac{bh}{2}=-24{,}17\ см^2;$$

$$\omega_D=\omega_C+\frac{ah}{2}=+25{,}83\ см^2;\qquad \omega_G=+4{,}17\ см^2;$$

$$\omega_E=+24{,}17\ см^2 \text{ и } \omega_F=-25{,}83\ см^2.$$

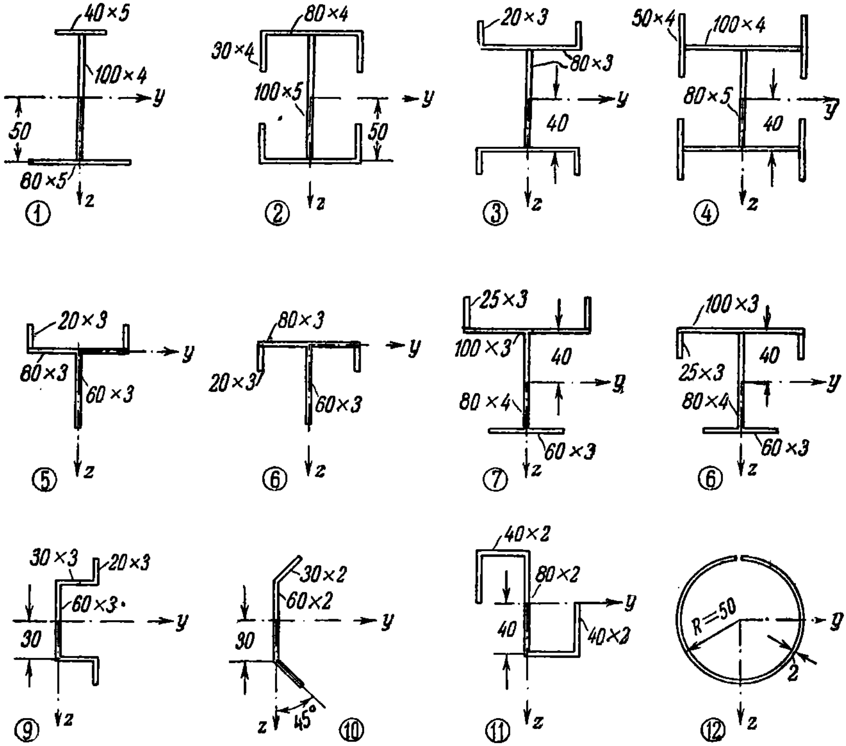
Для вычисления секториального момента инерции $J_\omega=\int\limits_F \omega^2 dF$ снова воспользуемся способом Верещагина. Например, для участка HD верхней полки

$$J_\omega(HD)=\frac{1}{2}\omega_D(a-d)\cdot\frac{2}{3}\omega_D\delta_п=\frac{1}{3}\omega_D^2(a-d)\,\delta_п.$$

Аналогично этому производится вычисление J_ω и для остальных частей сечения. Таким образом,

$$J_\omega=\frac{1}{3}\omega_D^2(a-d)\,\delta_п+\frac{1}{3}\omega_B^2(b+d)\,\delta_п+\frac{1}{6}\omega_C^2h\delta_c+$$
$$+\frac{1}{6}\omega_G^2h\delta_c+\frac{1}{3}\omega_E^2(b+d)\,\delta_п+\frac{1}{3}\omega_F^2(a-d)\,\delta_п=$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\delta_п\left[\omega_D^2(a-d)+\omega_B^2(b+d)\right]+\omega_C^2\cdot\frac{h}{2}\delta_c\right\}=$$
$$=\frac{2}{3}\left[0{,}5\,(25{,}83^2\cdot 5{,}17+24{,}17^2\cdot 4{,}83)+4{,}17^2\cdot\frac{10}{2}\cdot 0{,}6\right]=2125\ см^6.$$

6.114. Для профилей, изображенных на рисунке, определить положение центра изгиба (точки A), построить эпюру главных секториаль-



К задаче 6.114.

ных площадей, определить наибольшую ординату этой эпюры (ω_{max}) и вычислить величину секториального момента инерции.

Ответ: 1) $y_A = 0$; $z_A = +3{,}88$ *см*; $|\omega_{max}| = 17{,}76$ *см*^{2}; $J_\omega = 237$ *см*^{6};

2) $y_A = z_A = 0$; $|\omega_{max}| = 32$ *см*^{2}; $J_\omega = 4156$ *см*^{6};

3) $y_A = z_A = 0$; $|\omega_{max}| = 16$ *см*^{2}; $J_\omega = 768$ *см*^{6};

4) $y_A = z_A = 0$; $|\omega_{max}| = 32{,}5$ *см*^{2}; $J_\omega = 4683$ *см*^{6};

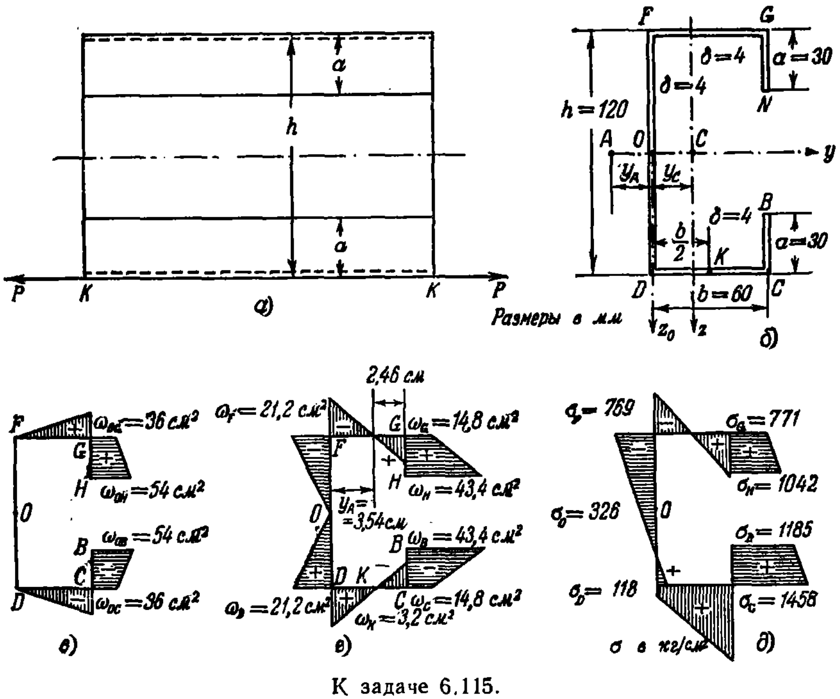
5) $y_A = 0$; $z_A = +0{,}6$ *см*; $|\omega_{max}| = 5{,}6$ *см*^{2}; $J_\omega = 14{,}1$ *см*^{6};

6) $y_A = 0$; $z_A = -0{,}6$ *см*; $|\omega_{max}| = 5{,}6$ *см*^{2}; $J_\omega = 14{,}1$ *см*^{6};

7) $y_A = 0$; $z_A = -2{,}67$ *см*; $|\omega_{max}| = 20$ *см*^{2}; $J_\omega = 304$ *см*^{6};

8) $y_A=0$; $z_A=-4{,}051$ *см*; $|\omega_{max}|=24{,}15$ *см*^{2}; $J_\omega=423{,}5$ *см*^{6};
9) $y_A=1{,}259$ *см*; $z_A=0$; $|\omega_{max}|=5{,}22$ *см*^{2}; $J_\omega=30{,}0$ *см*^{6};
10) $y_A=-0{,}707$ *см*; $z_A=0$; $|\omega_{max}|=2{,}74$ *см*^{2}; $J_\omega=4{,}28$ *см*^{6};
11) $y_A=z_A=0$; $|\omega_{max}|=21{,}3$ *см*^{2}; $J_\omega=547$ *см*^{6};
12) $y_A=0$; $z_A=+10$ *см*; $|\omega_{max}|=78{,}5$ *см*^{2}; $J_\omega=5065$ *см*^{6}.

6.115. Стержень с поперечным сечением, изображенным на рисунке *б*), растягивается двумя силами $P=3$ *т*, приложенным в точках K.



К задаче 6.115.

Определить величину нормальных напряжений в точках B, C, D, O, F, G и H и построить эпюру распределения этих напряжений по поперечному сечению стержня.

Решение. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня. Площадь $F=12$ *см*^{2}. Координата центра тяжести сечения C относительно оси z_0 равна

$$y_C=\frac{S_{z0}}{F}=\frac{b\delta(b+2a)}{F}=2{,}4\ см.$$

Момент инерции сечения $J_y=280{,}8\ см^4$. Момент инерции сечения относительно оси z равен $J_z=74{,}9\ см^4$.

Для нахождения положения центра изгиба построена вспомогательная эпюра секториальных площадей при полюсе и начале отсчетов в точке O (рисунок *в*)). Расстояние y_A центра изгиба от средней линии стенки профиля (рисунок *б*)) вычислено по формуле

$$y_A=\frac{S_{\omega_0 z}}{J_y}=\frac{994}{280{,}8}=-3{,}54\ см.$$

Точка A принята за главный секториальный полюс, точка O — за главную нулевую секториальную точку и (на рисунке *г*)) построена эпюра главных секториальных координат ω.

Секториальный момент инерции J_ω, вычисленный способом Верещагина, равен $J_\omega=3480\ см^6$.

Вычисление нормальных напряжений выполняется по формуле

$$\sigma=\frac{P}{F}+\frac{Py_py}{J_z}+\frac{Pz_pz}{J_y}+\frac{B\omega}{J_\omega}.$$

Величина бимомента B в сечениях, где приложены силы P, равна

$$B=B_{max}=P\omega_K=P\left(\omega_D-\frac{h}{2}\cdot\frac{b}{2}\right)=3000\left(21{,}2-\frac{12}{2}\cdot\frac{6}{2}\right)=9600\ кгсм^2.$$

Так как

$$y_p=\frac{b}{2}-y_C=\frac{6}{2}-2{,}4=0{,}6\ см \text{ и } z_p=\frac{h}{2}=\frac{12}{2}=6\ см,$$

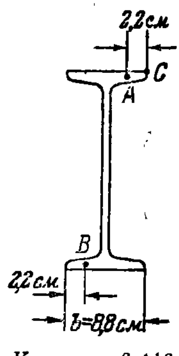
то

$$\sigma=\frac{3000}{12}+\frac{3000\cdot 0{,}6\cdot y}{74{,}9}+\frac{3000\cdot 6\cdot z}{280{,}8}+\frac{9600\cdot\omega}{3480}=250+24y+64{,}1z+2{,}76\omega.$$

Значения нормальных напряжений, вычисленных по последней формуле для точек B, C, D, O, F, G и H, приведены на эпюре распределения нормальных напряжений по поперечному сечению стержня (см. рисунок *д*)). Наибольшее нормальное напряжение возникает в точке C: $\sigma_C=1458\ кг/см^2$.

6.116. Двутавр № 16 (ОСТ 10016—39) растянут двумя силами $P=9\ т$, приложенными в концевых сечениях.

Определить величину наибольшего растягивающего и сжимающего напряжения в поперечном сечении двутавра в предположении, что а) силы P приложены в центрах тяжести концевых сечений и б) в концевых сечениях приложены по две силы $\frac{P}{2}$ в точках A и B, посредине толщины полок (см. рисунок). При решении задачи воспользоваться данными сортамента прокатных профилей.



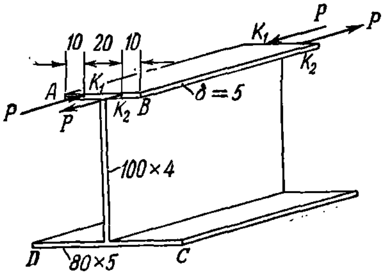
К задаче 6.116.

Для двутавра № 16: $F=26{,}1\ см^2$, $J_\omega=4879\ см^6$, $b=88\ мм$ и $\omega_{max}=32{,}25\ см^2$ (для точки C).

Ответ: а) $\max\sigma_{раст}=345\ кг/см^2=\text{const}$; б) $\max\sigma_{раст}=1304\ кг/см^2$; $\max\sigma_{сж}=-614\ кг/см^2$.

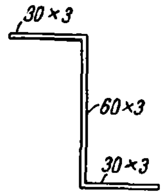
6.117. Стержень с поперечным сечением, изображенный на рисунке, нагружен силами $P=1$ *т*, приложенными в точках K_1 и K_2.

Определить величину нормальных напряжений в точках A, B, C и D и построить эпюру распределения этих напряжений по поперечному сечению стержня.



К задаче 6.117.

Ответ: $\sigma_A = -1497$ *кг/см²*; $\sigma_B = +1497$ *кг/см²*; $\sigma_C = +3$ *кг/см²*; $\sigma_D = -3$ *кг/см²*.



К задаче 6.118.

6.118. Стержень зетового сечения (см. рисунок) растягивается центрально приложенными силами $P=3$ *т*.

Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в поперечном сечении стержня.

Ответ: $+1333$ *кг/см²*, -667 *кг/см²*.

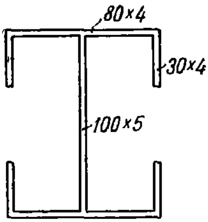
6.119. Определить величину наибольшего касательного напряжения и полный угол закручивания стального стержня, рассмотренного в задаче 6.115. Один конец стержня считать защемленным, второй — свободным от закрепления. Длина стержня 2 *м*. Растягивающее усилие $P=3$ *т* приложено на свободном конце стержня в точке K (см. рисунок к задаче 6.115).

Ответ: 50,6 *кг/см²*; 0,0122 *рад*.

6.120. Стержень корытного профиля № 24*а* (ОСТ 10017—39) длиной 2,5 *м*, оба конца которого защемлены, скручивается моментом 100 *кгм*, приложенным посредине длины стержня.

Определить величину наибольших секториальных нормальных напряжений и наибольших касательных напряжений чистого кручения. Для швеллера № 24*а* $J_k = 13{,}21$ *см⁴*, $J_\omega = 15326$ *см⁶*, $\omega_{\max} = 55{,}21$ *см²*, толщина полки $t_п = 12$ *мм*, изгибно-крутильная характеристика $\alpha = 0{,}01812 \frac{1}{см}$.

Ответ: $\max \sigma_\omega = 807$ *кг/см²*, $\max \tau_k = 189$ *кг/см²*.



К задаче 6.121.

6.121. Защемленный одним концом стальной стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке, скручивается моментом 20 *кгм*, приложенным на свободном конце стержня. Длина стержня 1,6 *м*.

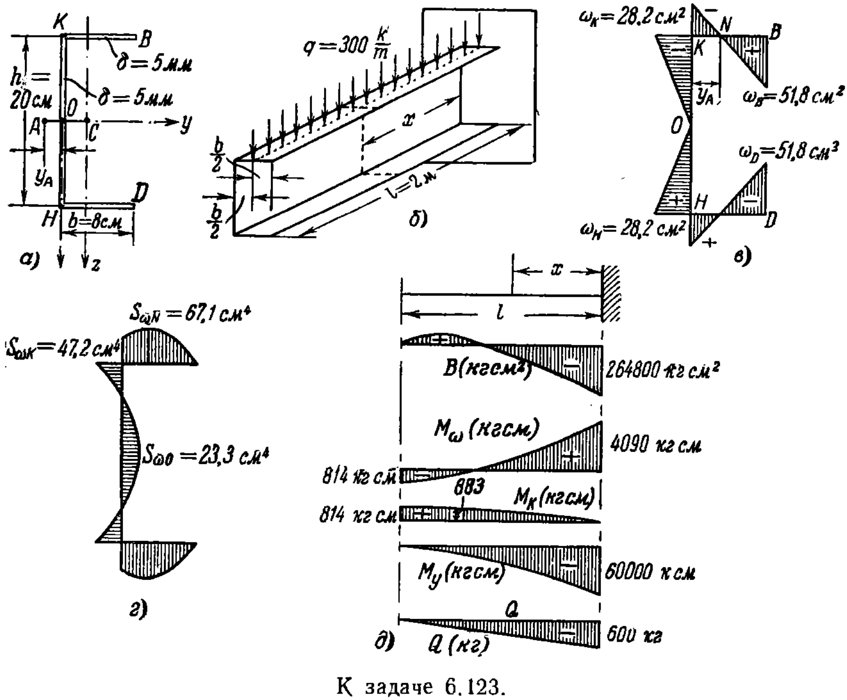
Определить величину наибольших секториальных нормальных и касательных напряжений, наибольших касательных напряжений чистого кручения и угла поворота свободного конца стержня.

Ответ: $\max \sigma_\omega = 1432$ *кг/см²*; $\max \tau_\omega = 56{,}8$ *кг/см²*; $\max \tau_k = 597$ *кг/см²*; $\theta = 0{,}165$ *рад*.

6.122. Двутавровая балка № 20*а* длиной 1,8 *м*, защемленная одним концом, изгибается в плоскости стенки сосредоточенной силой 500 *кг*, приложенной на свободном конце, и скручивается моментом 60 *кгм*, приложенным посредине длины балки. Определить величину наибольших нормальных и касательных напряжений в защемлении и посредине длины балки, а также величину наибольших секториальных касательных напряжений на свободном конце балки. Для двутавра принять по ГОСТу 10016—39: $I_к = 14{,}81\,см^4$, $I_{max} = 2370\,см^4$, $I_\omega = 13120\,см^6$, $\omega_{max} = 46{,}15\,см^2$, $b = 10$ *см*, $t_п = 11{,}4$ *мм*, $t_с = 7$ *мм*.

Ответ: На свободном конце балки $\max \tau_\omega = 5{,}5$ *кг/см²*; в среднем сечении: $\tau_{max} = 342$ *кг/см²* и $\sigma_{max} = 190$ *кг/см²*; в защемлении: $\tau_{max} = 62{,}8$ *кг/см²* и $\sigma_{max} = 1350$ *кг/см²*.

6.123. Стержень корытного профиля (см. рисунок *а*)) длиной $l = 2$ *м*, защемленный одним концом, нагружен равномерно распределенной



К задаче 6.123.

нагрузкой с интенсивностью $q = 300$ *кг/м*, приложенной посредине ширины полки (см. рисунок *б*)). Определить величины наибольших нормальных и касательных напряжений.

Решение. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня: площадь поперечного сечения $F=18$ *см*^{2}; момент инерции $J_y=1133$ *см*^{4}; момент инерции сечения при чистом кручении $J_к=1{,}5$ *см*^{4}. Координата центра изгиба $y_A=-2{,}82$ *см*. Секториальный момент инерции $J_\omega=8030$ *см*^{6}.

Эпюра секториальных статических моментов, подсчитанных как сумма площадей эпюры ω, умноженных на соответствующие толщины полок и стенки, представлена на рисунке *г*). Наибольший секториальный статический момент равен

$$\max S_\omega=S_{\omega N}=\frac{\delta\omega_B\,(b-y_A)}{2}=67{,}1\text{ см}^4.$$

Обычный статический момент относительно оси y части полки справа от точки N равен $S_{yN}=25{,}9$ *см*^{3}, а статический момент половины сечения относительно той же оси $S_{y0}=65$ *см*^{3}.

Упругая изгибно-крутильная характеристика стержня

$$\alpha=\sqrt{\frac{GJ_к}{EJ_\omega}}=\sqrt{\frac{8\cdot 10^5\cdot 1{,}5}{2\cdot 10^6\cdot 8030}}=\sqrt{0{,}00007472}=0{,}008644\ \frac{1}{см}$$

и $\alpha l=0{,}008644\cdot 200=1{,}729$; $\operatorname{sh}\alpha l=2{,}729$; $\operatorname{ch}\alpha l=2{,}907$.

Перейдем теперь к определению силовых факторов.

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$B=\frac{qe}{\alpha^2}\left[\alpha l\operatorname{sh}\alpha x-\frac{1+\alpha l\operatorname{sh}\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}\operatorname{ch}\alpha x+1\right],$$

$$M_\omega=\frac{dB}{dx}=\frac{qe}{\alpha}\left[\alpha l\operatorname{ch}\alpha x-\frac{1+\alpha l\operatorname{sh}\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}\operatorname{sh}\alpha x\right]$$

и

$$M_к=M_0-M_\omega=qe\,(l-x)-M_\omega=$$
$$=\frac{qe}{\alpha}\left[-\alpha l\operatorname{ch}\alpha x+\frac{1+\alpha l\operatorname{sh}\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}\operatorname{sh}\alpha x+\alpha\,(l-x)\right].$$

Графики изменения B, M_ω и $M_к$ представлены на рисунке *д*).

Наибольшего значения B и M_ω достигают в защемленном сечении, где при $x=0$

$$B_{\max}=\frac{qe}{\alpha^2}\left(1-\frac{1+\alpha l\operatorname{sh}\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}\right)=\frac{3\cdot 6{,}82}{0{,}00007472}\left(1-\frac{1+1{,}729\cdot 2{,}729}{2{,}907}\right)=$$
$$=-264\,800\text{ кгсм}^2$$

и

$$M_{\omega\,\max}=qel=3\cdot 6{,}82\cdot 200=4090\text{ кгсм}.$$

Момент чистого кручения достигает наибольшего значения вблизи середины длины; от него мало отличается момент на свободном конце, т. е. при $x=l$

$$M_к=\frac{qe}{\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sh}\alpha l-\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}=\frac{3\cdot 6{,}82}{0{,}008644}=\frac{2{,}729-1{,}729}{2{,}907}=814\text{ кгсм}.$$

В этом же сечении

$$M_\omega=-\frac{qe}{\alpha}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha l-\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}=-M_{к\,\max}=-814\text{ кгсм}.$$

Помимо воздействия перечисленных силовых факторов, стержень испытывает плоский изгиб в вертикальной плоскости; изгибающий момент $M_y=-\dfrac{q\,(l-x)^2}{2}$, а поперечная сила $Q=-q\,(l-x)$. Наибольшего значения

M_y и Q достигают в защемленном сечении стержня, где

$$\max M_y = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{3 \cdot 200^2}{2} = -60\,000 \text{ кгсм}$$

и

$$\max Q = -ql = -3 \cdot 200 = -600 \text{ кг}.$$

Нормальные напряжения в защемленном сечении вычисляем по формуле

$$\sigma = \frac{M_y z}{J_y} + \frac{B_\omega}{J_\omega} = -\frac{60\,000 \cdot z}{1133} - \frac{264\,800\omega}{8030} = 53z - 33\omega.$$

Значения координат z и ω и нормальных напряжений в точках B, D, H и K поперечного сечения приведены в таблице:

Точки	z в *см*	ω в *см*^{2}	σ в *кг/см*^{2}
B	-10	$+51{,}8$	-1180
D	$+10$	$-51{,}8$	$+1180$
H	$+10$	$+28{,}2$	-1460
K	-10	$-28{,}2$	$+1460$

Касательные напряжения в защемленном сечении складываются из напряжений от поперечной силы и от изгибно-крутящего момента M_ω:

$$\tau = \frac{QS_y}{\delta J_y} + \frac{M_\omega S_\omega}{\delta J_\omega}.$$

Наибольшего значения касательные напряжения достигают в точке N, где направления тех и других касательных напряжений совпадают:

$$\tau_{\max} = \tau_N = \frac{600 \cdot 25{,}9}{0{,}5 \cdot 1133} + \frac{4090 \cdot 67{,}1}{0{,}5 \cdot 8030} = 27{,}4 + 68{,}4 = 96 \text{ кг/см}^2;$$

в точке O

$$\tau_0 = \frac{600 \cdot 65}{0{,}5 \cdot 1133} - \frac{4090 \cdot 23{,}3}{0{,}5 \cdot 8030} = 68{,}7 - 23{,}7 = 45 \text{ кг/см}^2.$$

На свободном конце стержня касательные напряжения складываются из напряжений чистого кручения и напряжений от изгибно-крутящего момента:

$$\tau = \frac{M_\text{к}\delta}{J_\text{к}} + \frac{M_\omega S_\omega}{\delta J_\omega}.$$

Наибольшего значения в этом сечении касательные напряжения достигают в точке N, где

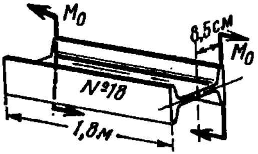
$$\tau_{\max} = \tau_N = \frac{814 \cdot 0{,}5}{1{,}5} + \frac{814 \cdot 67{,}1}{0{,}5 \cdot 8030} = 271 + 14 = 285 \text{ кг/см}^2.$$

6.124. Двутавр № 18 (ОСТ 10016—39), концы которого закреплены от поворота вокруг продольной оси, но могут свободно депланировать, нагружен моментами $M_0 = 200$ *кгм*, действующими в плоскости одной из полок (см. рисунок). Длина двутавра 1,8 *м*.

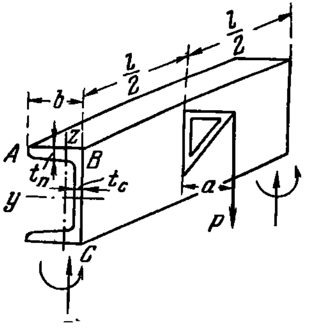
Определить величину наибольших нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня. Для двутавра № 18 $J_k = 11{,}37$ *см*^{4}; $J_\omega = 8219$ *см*^{6}; $\omega_{max} = 38{,}9$ *см*^{2}; ширина полки $b = 94$ *мм*, толщина полки $t_п = 10{,}7$ *мм*.

Ответ: $\sigma_{max} = 1574$ *кг/см*^{2},
$\tau_{max} = 319$ *кг/см*^{2}.

6.125. Швеллер № 10 (ОСТ 10017—39), концы которого закреплены от поворота вокруг продольной



К задаче 6.124.



К задаче 6.125.

оси, но могут свободно депланировать, нагружен посредине пролета $l = 1{,}5$ *м* сосредоточенной силой $P = 200$ *кг*, приложенной как указано на рисунке; $a = 15$ *см*.

Определить величину наибольших нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня. Для швеллера № 10 (см. рисунок) $J_y = J_{max} = 198{,}3$ *см*^{4}; $J_k = 2{,}727$ *см*^{4}; $J_\omega = 354{,}8$ *см*^{6}; $\alpha = 0{,}05411\ \frac{1}{см}$; $t_п = 8{,}5$ *мм*; $t_C = 5{,}3$ *мм*; $\omega_A = 12{,}71$ *см*^{2}; $\omega_B = 7{,}19$ *см*^{2}, расстояние центра изгиба сечения от линии BC $y_A = 1{,}34$ *см*.

Ответ: $\sigma_{max} = 1093$ *кг/см*^{2}; $\sigma_{max} = 493$ *кг/см*^{2}.

ГЛАВА 7

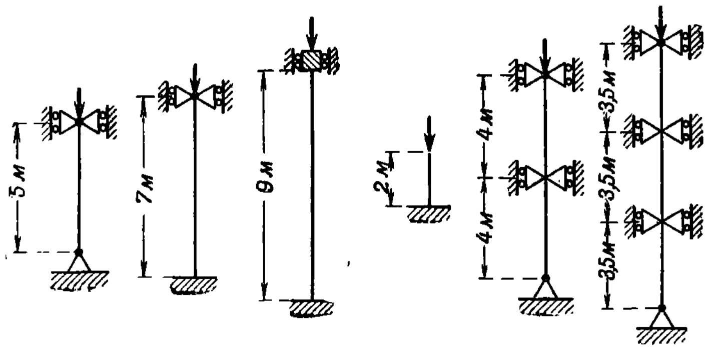
УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

§ 31. Устойчивость сжатых стержней

7.1. В каком направлении при потере устойчивости будут выпучиваться стержни, имеющие поперечные сечения, изображенные на рисунке?

К задаче 7.1.

7.2. Какой из стержней (см. рисунок) выдержит наибольшую и какой — наименьшую продольную сжимающую нагрузку, если поперечные сечения стержней одинаковы?



К задаче 7.2.

7.3. Определить наименьшую гибкость стержня, при которой для вычисления критического усилия еще применима формула Эйлера, если стержень выполнен:

а) из стали с пределом пропорциональности $\sigma_п = 2200$ *кг/см*^{2} и модулем нормальной упругости $E = 1{,}9 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2};

б) из стали с $\sigma_п = 820$ *кг/см²* и $E = 1{,}85 \cdot 10^6$ *кг/см²*;

в) из 3,5% никелевой стали с $\sigma_п = 4900$ *кг/см²* и $E = 2{,}15 \times \times 10^6$ *кг/см²*;

г) из дюралюмина с $\sigma_п = 1770$ *кг/см²* и $E = 0{,}7 \cdot 10^6$ *кг/см²*;

д) из сосны с $\sigma_п = 200$ *кг/см²* и $E = 1{,}1 \cdot 10^5$ *кг/см²*.

Ответ: а) 92,5; б) 149; в) 65,8; г) 62,5; д) 73,7.

7.4. Используя формулу Эйлера, определить величины критической силы и критического напряжения для сжатой стойки двутаврового поперечного сечения № 22. Оба конца стойки шарнирно оперты (шаровой шарнир). Длина стойки 5 *м*. Материал—сталь с пределом пропорциональности $\sigma_п \approx 2000$ *кг/см²*.

Решение. Двутавр № 22 имеет $F = 30{,}6$ *см²*, $J_{min} = 157$ *см⁴* и $i_{min} = 2{,}27$ *см*. Приведенная гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 500}{2{,}27} = 220 > \lambda_{пред} \approx 100;$$

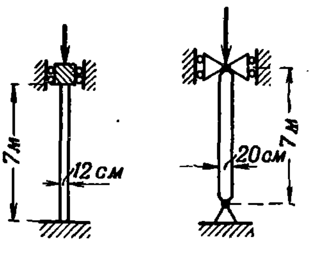
таким образом, формула Эйлера применима. Критическое усилие равно

$$P_k = \frac{EJ_{min}\pi^2}{(\mu l)^2} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 157 \cdot 9{,}87}{(1 \cdot 500)^2} = 12\,400 \text{ кг};$$

критическое напряжение

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{12\,400}{30{,}6} = 405 \text{ кг/см}^2.$$

7.5. Определить величину критического усилия и критического напряжения для стойки прямоугольного поперечного сечения 12×20 *см²* длиной 7 *м* из дерева с модулем упругости $E = 0{,}9 \times 10^5$ *кг/см²*. В плоскости наименьшей жесткости оба конца стойки защемлены, а в перпендикулярной—оба конца стойки шарнирно оперты (см. рисунок).



К задаче 7.5.

Ответ: 14 500 *кг*; 60,4 *кг/см²*.

7.6. Используя формулу Эйлера, подобрать по сортаменту на продольную сжимающую нагрузку $P = 12{,}5$ *т* двутавровое поперечное сечение стойки длиной 2,3 *м*. Один конец стойки защемлен, второй оперт шарнирно. Материал—Ст. 3.

Коэффициент запаса устойчивости $k_у = 2{,}5$.

Решение. Так как

$$P \leqslant \frac{P_к}{k_у} = \frac{EJ_{min}\pi^2}{k_у(\mu l)^2},$$

то

$$J_{min} \geqslant \frac{k_у P (\mu l)^2}{E\pi^2} = \frac{2{,}5 \cdot 12\,500\,(0{,}7 \cdot 230)^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}87} = 41 \text{ см}^4.$$

По сортаменту такой момент инерции поперечного сечения $J_{\min}=J_y$ имеет двутавр № 14. Радиус инерции сечения этого двутавра $i_{\min}=i_y=1{,}55$ *см*. Приведенная гибкость стойки

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{0{,}7\cdot 230}{1{,}55}=103{,}9.$$

При этой гибкости допустимо воспользоваться для расчета формулой Эйлера.

7.7. Пользуясь формулой Эйлера, найти отношение величин критических усилий для работающих в одинаковых условиях стойки круглого поперечного сечения и трубчатой стойки с равновеликой площадью при отношении $d_{\text{нар}}:d_{\text{вн}}=1{,}25$.

Ответ: $P_{\text{к}}:P_{\text{тр}}=0{,}22$.

7.8. Какой из двух стержней, условия закрепления и нагружения которых одинаковы, является более гибким — стержень квадратного, или круглого поперечного сечения с равновеликой площадью?

Ответ: Гибкость второго на 2,3% больше.

7.9. Прямой стальной стержень длиной 1 *м*, шириной 2,5 *см* и толщиной 2,5 *мм* изогнут в виде лука с упругим прогибом посредине, равным 5 *см*. Его концы связаны тетивой. Приняв модуль упругости материала стержня $E=2\cdot 10^6$ *кг/см²*, определить усилие в тетиве и наибольшее напряжение в стержне.

Ответ: $P\approx P_{\text{к}}=6{,}45$ *кг*; $\sigma_{\max}=1250$ *кг/см²* (сжатие при прогибе 5 *см*).

7.10. Двутавр № 24 длиной 5 *м* защемлен обоими концами в стены при температуре 15°. При какой температуре двутавр начнет терять устойчивость, если стены считать: а) абсолютно жесткими; б) податливыми с коэффициентом податливости каждой стены $k=2\cdot 10^{-6}$ *см/кг*.

Ответ: а) 87°; б) 127°.

7.11. Определить размеры поперечного сечения трубчатой стойки с отношением внутреннего диаметра к наружному, равным 0,8, изготовленной из дюралюмина; для принятой марки дюралюмина по опытным данным $\sigma_{\text{к}}=3360-28\lambda$ (*кг/см²*) при $0\leqslant\lambda\leqslant 80$. Длина стойки 1,8 *м*; оба конца ее защемлены. Нагрузка 7 *т*; $k_y=3$.

Ответ: $d_{\text{нар}}=60$ *мм*; $d_{\text{вн}}=48$ *мм*.

7.12. Пользуясь таблицей значений коэффициента снижения допускаемого напряжения, определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки на стойку двутаврового поперечного сечения (двутавр № 27) из Ст. 3 при основном допускаемом напряжении $[\sigma]=1600$ *кг/см²*. Длина стойки 2,5 *м*; оба конца ее шарнирно оперты.

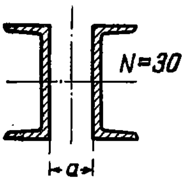
Решение. Двутавр № 27 по сортаменту имеет $F=40{,}2$ *см²* и $i_{\min}=2{,}54$ *см*. Приведенная гибкость стержня

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{1\cdot 250}{2{,}54}=98{,}4.$$

Из таблицы значений φ—коэффициента снижения допускаемого напряжения при продольном изгибе—путем линейной интерполяции находим: $\varphi=0,614$. Допускаемое усилие равно

$$[P]=\varphi\,[\sigma]\,F=0,614\cdot 1600\cdot 40,2=39\,500\ \text{кг}.$$

7.13. Определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки на колонну из двух швеллеров № 30, расставленных так, что центральные моменты инерции сечения относительно обеих главных осей одинаковы (см. рисунок). Материал—Ст. 3; основное допускаемое напряжение $[\sigma]=1600$ *кг/см²*. Длина колонны 6 *м*; один конец ее защемлен, второй свободен от закрепления. Определить наименьшую необходимую величину расстояния *a*.

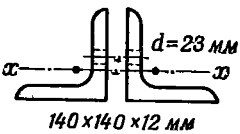


К задаче 7.13.

Ответ: 77,6 *т*; 18,3 *см*.

7.14. Определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки на деревянную стойку квадратного поперечного сечения 15×15 *см²* при основном допускаемом напряжении $[\sigma]=110$ *кг/см²*. Длина стойки 3,5 *м*; оба конца ее шарнирно оперты.

Ответ: 11,7 *т*.



К задаче 7.15.

7.15. Проверить устойчивость и прочность элемента сжатого пояса стропильной фермы из двух равнобоких уголков $140\times 140\times 12$ *мм* (см. рисунок) длиной 2,4 *м*. Оба конца стержня шарнирно оперты, нагрузка 90 *т*. Основное допускаемое напряжение $[\sigma]=1600$ *кг/см²*. Диаметр отверстий под заклепки 23 *мм*.

Решение. Уголки, из которых составлен элемент фермы, имеют каждый $F=32,5$ *см²*, $J_x=602$ *см⁴* и $i_x=4,31$ *см*. Для всего поперечного сечения элемента фермы $F_{\text{брутто}}=2\cdot 32,5=65$ *см²* и $i_{\min}=i_x=4,31$ *см*. Приведенная гибкость элемента

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{1\cdot 240}{4,31}=55,7.$$

Соответствующее значение коэффициента снижения допускаемого напряжения находим из таблицы: $\varphi=0,873$. Допускаемая нагрузка равна

$$[P]=\varphi\,[\sigma]\,F_{\text{брутто}}=0,873\cdot 1600\cdot 65=90\,800\ \text{кг}\approx 90\ \text{т}=P.$$

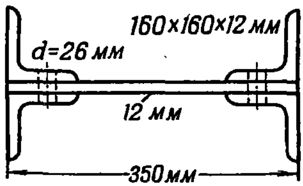
Проверим прочность элемента фермы. Отверстия под заклепки ослабляют сечение на $\Delta F=2\cdot 1,2\cdot 2,3=5,52$ *см²*. Сжимающее напряжение в ослабленном сечении равно

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{F_{\text{нетто}}}=\frac{90\,000}{65-5,52}=1513\ \text{кг/см}^2<[\sigma]=1600\ \text{кг/см}.$$

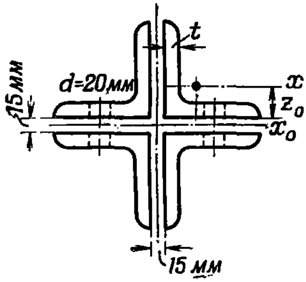
Таким образом, при нагрузке 90 *т* устойчивость и прочность элемента фермы обеспечены.

7.16. Исходя из проверки устойчивости и прочности, определить наибольшую грузоподъемность сжатой стойки с поперечным сечением, изображенным на рисунке. Длина стойки 7 *м*; оба конца ее шарнирно оперты. Диаметр отверстий под заклепки равен 26 *мм*. Материал — Ст. 3; основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600$ *кг/см*².

Ответ: 153 *т*.



К задаче 7.16.



К задаче 7.17.

7.17. Подобрать сечение колонны из равнобоких уголков (см. рисунок) под сжимающую нагрузку 60 *т*. Длина колонны 3,9 *м*; концы ее шарнирно оперты. Материал — Ст. 3; основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600$ *кг/см*².

Решение. Подбор сечения производим путем последовательных приближений. В первом приближении ориентировочно принимаем $\varphi = 0{,}5$. Необходимая площадь поперечного сечения колонны

$$F_{\text{брутто}} = \frac{P}{\varphi\,[\sigma]} = \frac{60\,000}{1600 \cdot 0{,}5} = 75\ \text{см}^2.$$

Из сортамента видно, что эту площадь можно получить, беря четыре уголка $100 \times 100 \times 10$ *мм* с $F = 19{,}20$ *см*², $J_x = 179$ *см*⁴ и $z_0 = 2{,}83$ *см*. При этом для всего поперечного сечения колонны

$$F_{\text{брутто}} = 4 \cdot 19{,}2 = 76{,}8\ \text{см}^2 \ \text{ и } \ J_{x_0} = 4\left[179 + 19{,}2\left(2{,}83 + \frac{1{,}5}{2}\right)^2\right] = 1700\ \text{см}^4.$$

Радиус инерции поперечного сечения

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{F}} = \sqrt{\frac{1700}{76{,}8}} = 4{,}71\ \text{см}.$$

Приведенная гибкость колонны

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{x_0}} = \frac{1 \cdot 390}{4{,}71} = 82{,}8.$$

По таблице находим $\varphi = 0{,}733$. Допускаемое усилие равно

$$[P] = \varphi\,[\sigma]\,F_{\text{брутто}} = 0{,}733 \cdot 1600 \cdot 76{,}8 \approx 90\,000\ \text{кг}.$$

Это усилие в полтора раза превышает заданное усилие.

Запроектированное сечение будет сильно недонапряжено. Примем $\varphi = 0{,}7$. Необходимая площадь сечения

$$F_{\text{брутто}} \geqslant \frac{P}{\varphi\,[\sigma]} = \frac{60\,000}{0{,}7 \cdot 1600} = 53{,}5\ \text{см}^2.$$

Выбираем уголки $90\times90\times8$ *мм* с площадью $F=13{,}9$ *см*^{2}, $J_x=106$ *см*^{4} и $z_0=2{,}51$ *см*. Для всего поперечного сечения колонны теперь имеем

$$F_{\text{брутто}}=4\cdot13{,}9=55{,}6\ \textit{см}^2 \text{ и } J_{x_0}=4\left[106+13{,}9\left(2{,}51+\frac{1{,}5}{2}\right)^2\right]=1015\ \textit{см}^4.$$

Радиус инерции поперечного сечения

$$i_{x_0}=\sqrt{\frac{J_{x_0}}{F}}=\sqrt{\frac{1015}{55{,}6}}=4{,}27\ \textit{см}.$$

Приведенная гибкость колонны

$$\lambda=\frac{390}{4{,}27}=91{,}3.$$

По таблице находим $\varphi=0{,}678$. Допускаемое усилие равно

$$[P]=\varphi\,[\sigma]\,F_{\text{брутто}}=0{,}678\cdot1600\cdot55{,}6=60\,300\ \textit{кг}\approx P=60\,000\ \textit{кг}.$$

Остановимся на уголках $90\times90\times8$ *мм* и проверим прочность колонны. Ослабленная отверстиями под заклепки площадь поперечного сечения колонны равна

$$F_{\text{нетто}}=F_{\text{брутто}}-2dt=55{,}6-4\cdot2\cdot0{,}8=49{,}2\ \textit{см}^2.$$

Сжимающее напряжение в ослабленном сечении

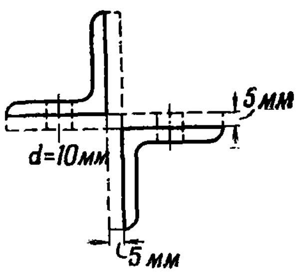
$$\sigma_{\max}=\frac{P}{F_{\text{нетто}}}=\frac{60\,000}{49{,}2}=1220\ \textit{кг/см}^2<[\sigma]=1600\ \textit{кг/см}^2.$$

Прочность материала запроектированной колонны вполне обеспечена.

7.18. Подобрать по сортаменту двутавровое поперечное сечение стержня длиной 4,5 *м* под сжимающую нагрузку 75 *т*. Оба конца стержня защемлены. Материал — Ст. 3. Основное допускаемое напряжение $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}.

Ответ: Двутавр № 36.

7.19. Подобрать под сжимающую нагрузку 20 *т* поперечное сечение раскоса стропильной фермы из двух равнобоких уголков (см. рисунок); длина раскоса 2 *м*; концы его шарнирно оперты. Материал — Ст. 3; основное допускаемое напряжение $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}.



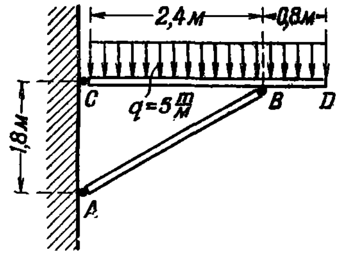
К задаче 7.19.

Указание. При вычислении момента инерции поперечного сечения раскоса считать уголки жестко соединенными между собой. Увеличение гибкости раскоса за счет соединения уголков не вполне жесткой решеткой во внимание не принимать.

Ответ: Уголки $70\times70\times6$ *мм*.

7.20. Определить диаметр подкоса *AB* кронштейна (см. рисунок) из дерева с основным допускаемым напряжением $[\sigma] = 110$ *кг/см²*. Оба конца подкоса считать шарнирно опертыми. Равномерно распределенная по балке *CD* нагрузка $q = 5$ *т/м*.

Ответ: 18 *см*.



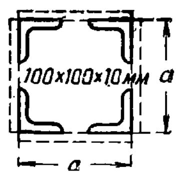
К задаче 7.20.

7.21. Стойка состоит из четырех уголков $100 \times 100 \times 10$ *мм*, скрепленных планками (см. рисунок). Оба конца стойки шарнирно оперты, ее длина 6 *м*, она сжата силой 100 *т*.

Определить размер стороны *a* поперечного сечения стойки. Материал — Ст. 3; $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*.

При вычислении момента инерции поперечного сечения стойки считать уголки жестко соединенными между собой. Увеличение гибкости стойки за счет соединения не вполне жесткой решеткой во внимание не принимать.

Ответ: 21,9 *см*.



К задаче 7.21.

7.22. Определить критическую длину стержня круглого поперечного сечения диаметром 10 *см*, защемленного одним концом и свободного от закрепления на другом конце, при которой он потеряет устойчивость под действием собственного веса, если стержень изготовлен: а) из стали с объемным весом $\gamma = 8$ *г/см³* и модулем упругости $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*; б) из дюралюминия с $\gamma = 2{,}6$ *г/см³* и $E = 0{,}7 \cdot 10^6$ *кг/см²*; в) из дерева с $\gamma = 0{,}6$ *г/см³* и $E = 10^5$ *кг/см²*.

Воспользоваться формулой Ясинского:

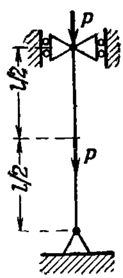
$$(ql)_{\text{кр}} = \frac{EJ_{\min}\pi^2}{(\mu l)^2},$$

где

$$\mu = 1{,}12.$$

Ответ: а) 23,1 *м*; б) 23,7 *м*; в) 20,2 *м*.

7.23. Круглая деревянная стойка диаметром 24 *см* и длиной 6,5 *м* загружена, как указано на рисунке.



К задаче 7.23.

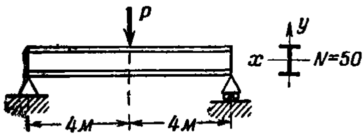
Определить наибольшую допускаемую величину нагрузки *P*. Применить формулу Эйлера; для вычисления коэффициента длины μ, зависящего от условий нагружения стойки, воспользоваться данными таблицы 30 курса «Сопротивление материалов» Н. М. Беляева (изд. 1962 г.). Коэффицнент запаса устойчивости

$$k_y = 3; \quad E = 10^5 \text{ кг/см}^2.$$

Ответ: $P_{\max} = 8365$ *кг*.

§ 32. Сложные случаи расчета на устойчивость

7.24. Проверить прочность и устойчивость плоской формы изгиба балки, лежащей на двух шарнирных опорах и нагруженной посредине пролета $l=8$ *м* сосредоточенной силой $P=6$ *т*. Поперечное сечение балки — двутавр № 50 (см. рисунок). Допускаемое напряжение $[\sigma]=1600$ *кг/см²*. Коэффициент запаса устойчивости $k_y=1{,}7$.



К задаче 7.24.

Решение. При проверке устойчивости плоской формы изгиба балки величина допускаемой нагрузки вычисляется по формуле

$$[P]=\frac{P_к}{k_y}=\frac{\beta}{k_y l^2}\sqrt{C_1C_2},$$

где C_1 и C_2 — соответственно жесткости балки при изгибе и при кручении, а β — коэффициент, зависящий от типа нагрузки, условий закрепления концов балки и величины отношения

$$\alpha=\frac{C_2}{C_1}\cdot\frac{l^2}{h^2},$$

где в свою очередь h — высота поперечного сечения балки.

В данном случае

$$C_1=EJ_{\min}=EJ_y=2\cdot10^6\cdot1040=208\cdot10^7\ кгсм^2,$$

а

$$C_2=GJ_к=G\,\frac{\eta}{3}\,[(h-2t)\,d^3+2bt^3],$$

где b и t — длина и толщина полки двутавра, d — толщина его стенки, а η — коэффициент, зависящий от формы сечения; для двутаврового сечения $\eta=1{,}2$. Таким образом,

$$C_2=8\cdot10^5\cdot1{,}2\cdot\frac{1}{3}\,[(50-2\cdot1{,}52)\,0{,}95^3+2\cdot17\cdot1{,}52^3]=5{,}11\cdot10^7\ кгсм^2.$$

Отношение

$$\alpha=\frac{5{,}11\cdot10^7}{208\cdot10^7}\cdot\left(\frac{800}{50}\right)^2=6{,}29.$$

По таблице 33 курса «Сопротивление материалов» Н. М. Беляева (изд. 1954 г. и более поздние) путем интерполяции находим соответствующую этому значению α величину коэффициента $\beta=\beta_2=20{,}20$. Теперь

$$[P]=\frac{20{,}20}{1{,}7\cdot800^2}\sqrt{208\cdot10^7\cdot5{,}11\cdot10^7}=6015\ кг\approx P=6000\ кг.$$

Проверка прочности балки при $W_x=1570$ *см³* дает

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_x}=\frac{Pl}{4W_x}=\frac{6000\cdot800}{4\cdot1570}=764\ кг/см^2<[\sigma]=1600\ кг/см^2.$$

При назначении величины допускаемой нагрузки в данном случае нужно исходить из проверки балки на устойчивость.

7.25. Исходя из проверки прочности и устойчивости плоской формы изгиба стальной балки, защемленной одним концом, определить ее наибольшую грузоподъемность, если балка имеет прямоугольное поперечное сечение 200×12 *мм*² (высота 200 *мм* параллельна плоскости действия нагрузки) и несет равномерно распределенную по ее длине нагрузку интенсивности q. Длина балки 2 *м*, $[\sigma] = 1400$ *кг/см*², $k_y = 1{,}8$.

Ответ: $q_{max} = 560$ *кг/м*.

7.26. Сварная балка двутаврового сечення из стальных листов 150×20 *мм*² (полки) и 660×15 *мм*² (стенка), защемленная одним концом, нагружена сосредоточенной силой P на свободном конце.

Определить длину балки и величину силы P из условия равной прочности и устойчивости плоской формы изгиба балки, если $[\sigma] = 1600$ *кг/см*² и $k_y = 1{,}7$.

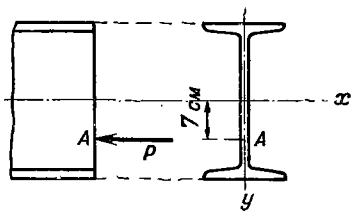
Ответ: 5,07 *м*; 9,5 *т*.

7.27. Двутавр № 20 длиной 2,4 *м*, шарнирно опертый по концам, нагружен продольными сжимающими силами $P = 20$ *т*, приложенными в концевых сечениях с эксцентриситетом $e = 7$ *см* (см. рисунок). Проверить прочность и устойчивость двутавра при

$$[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2,$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$$

и коэффициенте запаса прочности $k = 1{,}6$.



К задаче 7.27.

Решение. А. Проверка устойчивости в плоскости наименьшей жесткости. По сортаменту двутавр № 20 имеет $F = 26{,}8$ *см*² и $i_{min} = i_y = 2{,}07$ *см*. Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 240}{2{,}07} = 115{,}9;$$

коэффициент снижения допускаемого напряжения $\varphi = 0{,}479$. Допускаемое усилие

$$[P] = \varphi\,[\sigma]\,F = 0{,}479 \cdot 1600 \cdot 26{,}8 = 20\,540 \text{ кг} > P = 20\,000 \text{ кг}.$$

Б. Проверка прочности в плоскости наибольшей жесткости. Проверку прочности производим по формуле

$$\sigma_{прив} = \frac{P}{F} + \frac{M_{max}}{W_x}\left(1 + \frac{mk\dfrac{P}{P_к}}{1 - k\dfrac{P}{P_к}}\right) \leqslant [\sigma],$$

где $P_к = \dfrac{EJ_x\pi^2}{l^2}$, k — коэффициент запаса прочности, а m — коэффициент, зависящий от типа поперечной нагрузки; при наличии равномерно распределенной нагрузки $m = 1{,}028$; при сосредоточенной силе посредине пролета $m=0{,}823$; при наличии сосредоточенных моментов на концах балки $m=1{,}234$.

В данном случае $J_x=1840$ *см*⁴, $W_x=184$ *см*², $M_{\max}=Pe=20\,000\cdot 7=$ $=140\,000$ *кгсм*, $m=1{,}234$ и отношение

$$\frac{P}{P_k}=\frac{Pl^2}{EJ_x\pi^2}=\frac{20\,000\cdot 240^2}{2\cdot 10^6\cdot 1840\cdot 9{,}87}=0{,}0317.$$

Поэтому

$$\sigma_{\text{прив}}=\frac{20\,000}{26{,}8}+\frac{140\,000}{184}\left(1+\frac{1{,}234\cdot 1{,}6\cdot 0{,}0317}{1-1{,}6\cdot 0{,}0317}\right)=$$
$$=746+811=1557\ \textit{кг/см}^2<[\sigma]=1600\ \textit{кг/см}^2.$$

7.28. Стальная трубка с наружным диаметром 60 *мм* и толщиной стенки 2 *мм* сжата силой, приложенной с эксцентриситетом 2,5 *мм*. Длина трубки 175 *см*, концы ее закреплены шарнирно. Испытание короткого куска трубки показало, что предел текучести материала равен 6600 *кг/см*². Определить допускаемую величину сжимающей нагрузки при коэффициенте запаса $k=3$.

Ответ: 2,9 *т*.

7.29. Деревянная стойка длиной 2 *м*, один конец которой защемлен, а второй свободен от закрепления, имеет квадратное поперечное сечение 10×10 *см*². Линия действия продольной сжимающей нагрузки проходит через точку, лежащую на диагонали квадрата на половине расстояния между центром и вершиной угла. Определить величину нагрузки, вызывающей наибольшее сжимающее напряжение 300 *кг/см*².

Ответ: 3485 *кг*.

7.30. Уголок $75\times 75\times 9$ длиной 1 *м* сжат силой 10 *т*. Стержень первоначально прямой, концы его шарнирно оперты, эксцентриситет сжимающей силы в плоскости наименьшей жесткости (в направлении к вершине уголка) равен 3 *мм*. Определить величину прогиба уголка, а также величину наибольшего и наименьшего сжимающего напряжения в среднем по длине уголка сечении.

Ответ: 0,87 *мм*; 1211 *кг/см*²; 472 *кг/см*².

7.31. Если вместо того, чтобы быть прямой, как в предыдущей задаче, ось уголка будет иметь первоначальную кривизну в плоскости наименьшей жесткости со стрелой 2 *мм*, то каковы будут стрела прогиба и величина наибольшего сжимающего напряжения? Предположить, что влияние эксцентриситета и первоначальной кривизны складывается.

Ответ: 1,45 *мм* (сверх первоначального прогиба в 2 *мм*); 1498 *кг/см*².

7.32. Двутавровая балка, имеющая пролет 6 *м*, несет на себе равномерно распределенную нагрузку 900 *кг/м* и сжимается продольной силой 60 *т*. В направлении, перпендикулярном к плоскости стенки двутавра, пролет балки разделен связями пополам. При допускаемом напряжении 1600 *кг/см*² подобрать поперечное сечение балки. Коэффициент запаса прочности принять равным 1,6.

Ответ: Двутавр № 36.

7.33. Стальной стержень диаметром 25 *мм* и длиной 2 *м*, шарнирно опертый по концам, нагружен осевыми сжимающими силами 400 *кг* и поперечной силой 4 *кг* посредине его длины. Определить величину прогиба и величину наибольшего напряжения в среднем по длине стержня сечении: а) пренебрегая собственным весом стержня и б) учитывая вес стержня.

Ответ: а) 3 *мм* и 290 $кг/см^2$; б) 6,7 *мм* и 508 $кг/см^2$.

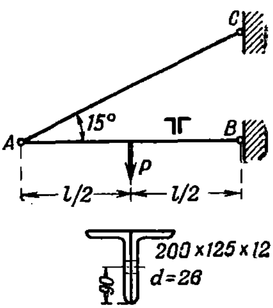
7.34. Балка AB кронштейна длиной 5 *м*, шарнирно закрепленная в сечениях A и B, несет сосредоточенную поперечную нагрузку $P = 3$ *т*, приложенную посредине пролета. Поперечное сечение балки составлено из двух неравнобоких уголков

$$200 \times 125 \times 12 \ мм$$

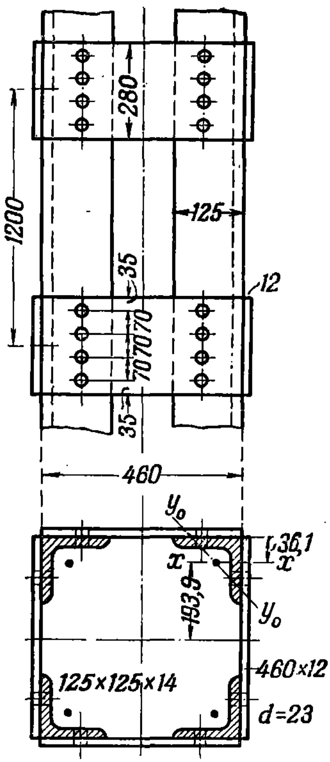
(см. рисунок).

Проверить прочность и устойчивость балки в предположении, что узел A не может перемещаться в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа; $[\sigma] = 1600 \ кг/см^2$; $k = 1,6$.

Ответ: Из условия устойчивости $[P] = 40$ *т*; $\sigma_{прив} = 1572 \ кг/см^2$.



К задаче 7.34.



К задаче 7.35.

7.35. Проверить прочность и устойчивость шарнирно опертого по концам составного стержня с решеткой из планок (см. рисунок), имеющего длину 12 *м* и нагруженного продольными сжимающими силами $P = 170$ *т*. Основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600 \ кг/см^2$.

Решение. А. Проверка устойчивости. Так как площадь поперечного сечения и момент инерции сечения одного уголка $125\times125\times14$ *мм* равны $F=33{,}4$ *см*^{2} и $J_x=482$ *см*^{4}, то для всего сечения $F=4\cdot33{,}4=133{,}6$ *см*^{2}, $J=4\,[482+33{,}4\,(23-3{,}61)^2]=52\,160$ *см*^{4} и радиус инерции

$$i=\sqrt{\frac{J}{F}}=\sqrt{\frac{52\,160}{133{,}6}}=19{,}76\ \text{см}.$$

Коэффициент увеличения длины μ для составного стержня с решеткой из планок определяется по формуле

$$\mu=\sqrt{1+\frac{\pi^2Ja^2}{24J_1l^2}\left(1+\frac{2bJ_1}{aJ_\text{п}}\right)},$$

где J — момент инерции всего поперечного сечения стержня, J_1 — момент инерции одной половины сечения (состоящей в данном случае из двух уголков) относительно ее собственной центральной оси, $J_\text{п}$ — момент инерции поперечного сечения одной планки относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости планки, a — расстояние между осями планок по длине стержня, b — расстояние между центрами тяжести половин сечения стержня.

В данном случае $l=1200$ *см*, $a=120$ *см*, $b=46-2\cdot3{,}61=38{,}78$ *см*, $J_1=2J_x=2\cdot482=964$ *см*^{4} и $J_\text{п}=\frac{1}{12}\cdot1{,}2\cdot28^3=2195$ *см*^{4}.

Таким образом,

$$\mu=\sqrt{1+\frac{9{,}87\cdot52\,160\cdot120^2}{24\cdot964\cdot1200^2}\left(1+\frac{2\cdot38{,}78\cdot964}{120\cdot2195}\right)}=1{,}134.$$

Приведенная гибкость стержня

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1{,}134\cdot1200}{19{,}76}=68{,}9.$$

Коэффициент снижения допускаемого напряжения $\varphi=0{,}816$. Величина допускаемой нагрузки

$$[P]=0{,}816\cdot1600\cdot133{,}6=174\,400\ \text{кг}>P=170\,000\ \text{кг}.$$

Б. Проверка прочности. Учитывая ослабление поперечного сечения стержня, связанное с креплением к уголкам четырех планок, имеем

$$F_\text{нетто}=F_\text{брутто}-8d\delta_\text{уг}=133{,}6-8\cdot2{,}3\cdot1{,}4=107{,}8\ \text{см}^2.$$

Сжимающее напряжение в ослабленном сечении

$$\sigma=\frac{P}{F_\text{нетто}}=\frac{170\,000}{107{,}8}=1577\ \text{кг/см}^2<[\sigma]=1600\ \text{кг/см}^2.$$

Прочность и устойчивость всего стержня в целом обеспечены.

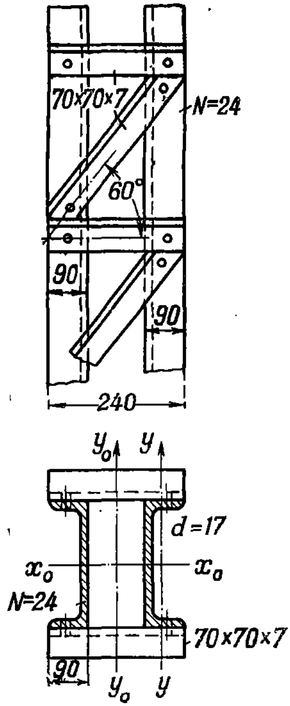
В. Проверка устойчивости одной ветви стержня в пределах длины одной панели. Наименьшие момент инерции и радиус инерции сечения одного уголка соответственно равны $J_{y_0}=200$ *см*^{4} и $i_{y_0}=2{,}45$ *см*. Полагая крепление концов одной ветви стержня у планок шарнирным и считая длину ветви равной расстоянию между осями крайних заклепок крепления, имеем $l_\text{в}=120-3\cdot7=99$ *см* и гибкость ветви

$$\lambda_\text{в}=\frac{\mu l_\text{в}}{i_{y_0}}=\frac{1\cdot99}{2{,}45}=40{,}4<68{,}9.$$

Так как $\lambda_\text{в}<\lambda$, определения величины допускаемой на ветвь нагрузки можно не производить.

7.36. Проверить прочность и устойчивость составного стержня длиной 4 *м* с решеткой из распорок и диагоналей (см. рисунок). Концы стержня шарнирно оперты. Нагрузка

$$P=80\ т,$$
$$[\sigma]=1600\ кг/см^2.$$



К задаче 7.36.

Решение. А. Проверка устойчивости. Площадь и момент инерции поперечного сечения одного швеллера № 24 соответственно равны $F=30,6\ см^2$ и $J_y=208\ см^4$. Для всего сечения

$$F=2\cdot 30,6=61,2\ см^2$$

и

$$J_{y_0}=2\left[208+30,6\left(\frac{24}{2}-9+2,42\right)^2\right]=2215\ см^4<$$
$$<J_{x_0}=2\cdot 2900=5800\ см^4.$$

Минимальный радиус инерции сечения

$$i_{\min}=i_{y_0}=\sqrt{\frac{J_{y_0}}{F}}=\sqrt{\frac{2215}{61,2}}=6,02\ см.$$

Коэффициент длины μ для составного стержня с решеткой из распорок и диагоналей определяется по формуле

$$\mu=\sqrt{1+\frac{\pi^2 J}{2l^2}\left(\frac{1}{F_р \operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{F_д \sin\alpha\cos^2\alpha}\right)},$$

где J — момент инерции всего сечения относительно оси y_0, $F_р$ и $F_д$ — соответственно площади поперечного сечения распорки и диагонали, α — угол между распоркой и диагональю, l — длина стержня. В данном случае $J=J_{y_0}$, $F_р=F_д=9,42\ см^2$, $\alpha=60°$. Поэтому

$$\mu=\sqrt{1+\frac{9,87\cdot 2215}{2\cdot 400^2}\left(\frac{1}{9,42\sqrt{3}}+\frac{1}{9,42\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}=1,019.$$

Приведенная гибкость стержня

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{1,019\cdot 400}{6,02}=67,7.$$

Коэффициент снижения допускаемого напряжения $\varphi=0,821$. Допускаемая нагрузка равна $[P]=\varphi[\sigma]F=0,821\cdot 1600\cdot 61,2=80\,400\ кг\approx P=80\,000\ кг.$

Б. Проверка прочности. Площадь поперечного сечения стержня ослаблена четырьмя отверстиями под заклепки диаметром 1,7 *мм*. Имеем

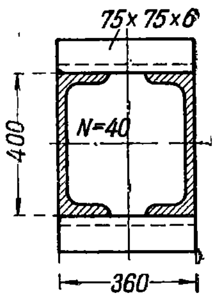
$$F_{нетто}=61,2-4\cdot 1,7\cdot 1,0=54,4\ см^2.$$

Сжимающее напряжение в ослабленном сечении

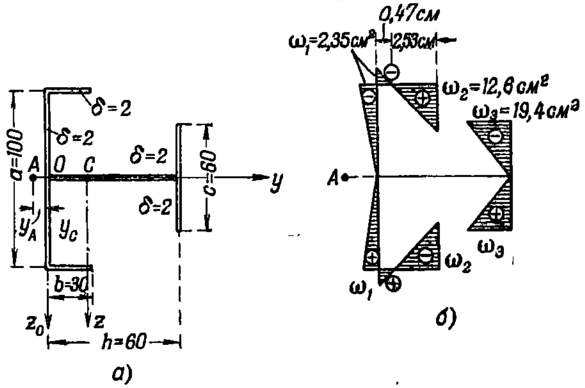
$$\sigma=\frac{P}{F_{нетто}}=\frac{8000}{54,4}=1471\ кг/см^2<[\sigma]=1600\ кг/см^2.$$

7.37. Составной стержень с решеткой из распорок и диагоналей (см. рисунок), шарнирно опертый по концам, имеет длину 13 *м*. Распорки и диагонали из уголков $75 \times 75 \times 6$ *мм* приварены к поясам; угол между распорками и диагоналями $\alpha = 60°$. $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*. Определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки.

Ответ: 141 *т*.



К задаче 7.37.



К задаче 7.38.

7.38. Определить величину критической силы для стального стержня с поперечным сечением, изображенным на рисунке *а*). Длина стержня 3 *м*; концы его шарнирно оперты. Сжимающая сила приложена в центре тяжести сечения.

Решение. Геометрические характеристики сечения:

Площадь сечения $F = 5{,}6$ *см²*.

Расстояние от оси z_0 до центра тяжести сечения C $y_C = 2{,}25$ *см*.

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей $J_y = 50{,}2$ *см⁴* и $J_z = 32{,}9$ *см⁴*.

Момент инерции сечения при чистом кручении $J_к = 0{,}0747$ *см⁴*.

Расстояние от точки O до центра изгиба сечения A (см. рисунок *а*)) $y_A = -0{,}47$ *см*.

Главный секторальный момент инерции сечения (см. рисунок *б*)) $J_\omega = 208{,}5$ *см⁶*.

Расстояние от главной оси инерции z до центра изгиба сечения

$$a_y = y_C + |y_A| = 2{,}25 + 0{,}47 = 2{,}72 \text{ см}.$$

Новая характеристика сечения

$$r^2 = \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 = \frac{50{,}2 + 32{,}9}{5{,}6} + 2{,}72^2 = 22{,}2 \text{ см}^2.$$

Эйлерова критическая сила в плоскости наибольшей жесткости

$$P_y = \frac{EJ_y\pi^2}{l^2} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 50{,}2 \cdot 3{,}14^2}{300^2} = 11\,000 \text{ кг}.$$

Эйлерова критическая сила в плоскости наименьшей жесткости

$$P_z=\frac{EJ_z\pi^2}{l^2}=\frac{2\cdot 10^6\cdot 32{,}9\cdot 3{,}14^2}{300^2}=7210\ кг.$$

Сила, соответствующая крутильному эффекту:

$$P_\omega=\frac{1}{r^2}\left(\frac{EJ_\omega\pi^2}{l^2}+GJ_к\right)=\frac{1}{22{,}2}\left(\frac{2\cdot 10^6\cdot 208{,}5\cdot 3{,}14^2}{300^2}+8\cdot 10^5\cdot 0{,}0747\right)=4750\ кг.$$

Величина критической силы по Власову

$$P_в=\frac{(P_y+P_\omega)^2 r^2-\sqrt{(P_y+P_\omega)^2 r^4-4P_yP_\omega r^2\left(r^2-a_y^2\right)}}{2\left(r^2-a_y^2\right)}=$$

$$=\frac{(11000+4750)22{,}2-\sqrt{(11000+4750)^2\cdot 22{,}2^2-4\cdot 11000\cdot 4750\cdot 22{,}2(22{,}2-2{,}72^2)}}{2\,(22{,}2-2{,}72^2)}=$$

$$=3995\ кг.$$

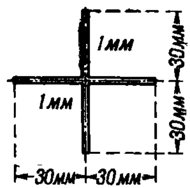
Потеря устойчивости стержня происходит в изгибно-крутильной форме; величина критической силы по Власову в $\frac{7210}{3995}=1{,}8$ раза меньше эйлеровой.

7.39. Определить величину критической силы для швеллера № 8 (ОСТ 10017—39), имеющего длину 1,5 *м*. Концы швеллера шарнирно оперты; сжимающая сила приложена в центре тяжести сечения. Для швеллера № 8 $F=10{,}24$ *см*^{2}, $J_y=16{,}6$ *см*^{4}, $J_x=101{,}3$ *см*^{4}, $J_k=1{,}94$ *см*^{4}, $J_\omega=141{,}8$ *см*^{6}; расстояние между центром изгиба и центром тяжести сечения

$$a_y=2{,}65\ см.$$

Ответ: $P_к=P_в=14\,550\ кг<P_з=55\,500\ кг$ (стержень теряет устойчивость в чисто изгибной форме).

7.40. Определить величину критической силы для стального стержня с поперечным сечением, изображенным на рисунке, в предположении, что стержень имеет длину: а) 1,5 *м* и б) 2 *м*. Концы стержня шарнирно оперты; сжимающая сила приложена в центре тяжести сечения.



К задаче 7.40.

Ответ: а) $P_к=P_\omega=1065\ кг<P_в=1580\ кг$ (стержень теряет устойчивость в чисто-крутильной форме); б) $P_к=P_э=888\ кг<$ $<P_\omega=1065\ кг$ (стержень теряет устойчивость в чисто-изгибной форме).

ГЛАВА 8

РАСЧЕТ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАГРУЗКАМ

§ 33. Растяжение, сжатие и кручение

8.1. Вертикальный стальной защемленный концами стержень с поперечным сечением $F=200$ *см*^{2} и длиной $l=5$ *м* нагружен сверху вниз вдоль своей оси сосредоточенной силой P, приложенной на расстоянии $a=2$ *м* от нижнего конца стержня.

Определить по способу допускаемых нагрузок величину безопасной нагрузки P; предел текучести материала стержня $\sigma_т=2400$ *кг/см*^{2}, коэффициент запаса принять равным 2.

Решение. Разрушающей нагрузкой будет тот груз, при котором потечет материал как в нижией, так и в верхней части стержня.

Пока материал работает в пределах упругости, сила P уравновешивается реакциями опор — верхней B и нижней A, иаправленными вверх. Условие равновесия имеет вид

$$A+B=P.$$

Условие совместности деформацнй выражает, что удлинение верхней части стержия численно равно укорочению нижней части, т. е.

$$\frac{Aa}{EF}=\frac{B(l-a)}{EF}.$$

Решая совместно уравнения равиовесия и деформаций, иаходим

$$A=P\frac{l-a}{l} \quad \text{и} \quad B=P\frac{a}{l}.$$

Так как $l-a>a$, то сильиее будет напряжена нижняя часть, сжимаемая силами A. В тот момент, когда напряжеиия в ией дойдут до предела текучести, реакция иижней опоры будет равна $A_т=\sigma_т F$. На верхнюю часть будет передаваться в этот момент сила

$$B'=P-A_т=P-\sigma_т F.$$

При дальнейшем увеличении силы P реакция $A_т=\sigma_т F$ будет оставаться постоянной, а будет возрастать лишь реакция B. Грузоподъемность стержня будет исчерпана, когда напряжения и в верхней части дойдут до предела текучести, т. е. когда реакция B будет равна $B_т=\sigma_т F$. Таким образом,

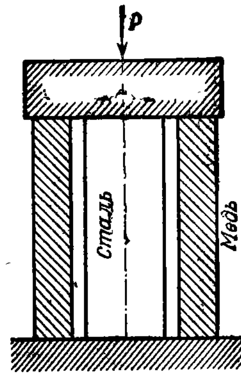
$$P_т=A_т+B_т=\sigma_т F+\sigma_т F=2\sigma_т F.$$

При коэффициенте запаса $k=2$ допускаемая нагрузка равна $P_{max}=$ $=\frac{P_т}{k}=\frac{2\sigma_т F}{k}=2[\sigma]F$, где $[\sigma]=\frac{\sigma_т}{k}$ есть допускаемое напряжение. Таким образом,

$$P_{\max} = 2 \cdot \frac{2400}{2} \cdot 200 = 480\,000 = 480 \ т.$$

8.2. Нагрузка P передается через жесткую плиту на сплошной стальной цилиндр с площадью сечения 15 $см^2$ и полый медный цилиндр с площадью 20 $см^2$ (см. рисунок). Определить величину и распределение нагрузки между стальным и медным цилиндрами в момент, когда материал обоих цилиндров потечет. Предел текучести стали $\sigma_{тс} = 2400$ $кг/см^2$, меди $\sigma_{тм} = 1800$ $кг/см^2$.

Ответ: $P_с = P_м = 36$ *т*.



К задаче 8.2.

8.3. Площадь поперечного сечения бетона в короткой железобетонной колонне равна 645 $см^2$. Колонна снабжена четырьмя продольными, симметрично расположенными стальными стержнями, каждый с площадью поперечного сечения 10 $см^2$. Допускаемые напряжения равны: для бетона 80 $кг/см^2$, для арматуры 1400 $кг/см^2$. Коэффициенты запаса считать одинаковыми. Определить по способу допускаемых нагрузок величину безопасной нагрузки.

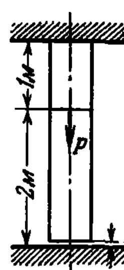
Ответ: 107,6 *т*.

8.4. Стержень с площадью поперечного сечения $F = 100$ $см^2$ защемлен верхним концом и нагружен, как показано на рисунке. Между нижним его концом и неподатливой плоскостью до нагружения имеется зазор $\Delta = 0{,}02$ *мм*. Найти по способу допускаемых нагрузок наибольшее безопасное значение силы P при $[\sigma] = 1000$ $кг/см^2$.

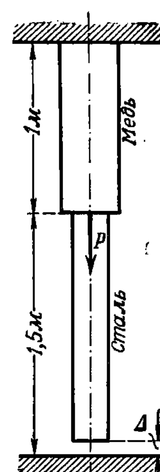
Ответ: 200 *т*.

8.5. Представленный на рисунке стержень закреплен верхним своим концом. Между нижним его концом и неподатливой опорной плоскостью до нагружения стержня имеется зазор $\Delta = 0{,}05$ *мм*. Сечение верхней, медной, части имеет площадь 150 $см^2$, сечение нижней, стальной, части 50 $см^2$. Допускаемые напряжения равны: для меди $[\sigma_м] = 1000$ $кг/см^2$, для стали $[\sigma_с] = 1400$ $кг/см^2$. Коэффициенты запаса считать одинаковыми. Определить по способу допускаемых нагрузок наибольшую безопасную величину силы P.

Ответ: 220 *т*.

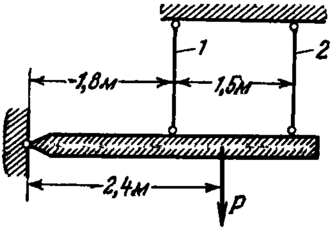


К задаче 8.4.



К задаче 8.5.

8.6. Жесткая балка (см. рисунок) подвешена на двух стержнях. Площадь сечения первого стержня 10 $см^2$, второго стержня 15 $см^2$, пределы текучести материалов стержней соответственно равны $\sigma_{т1} = 2600$ *кг/см²* и $\sigma_{т2} = 1500$ *кг/см²*. Определить по способу

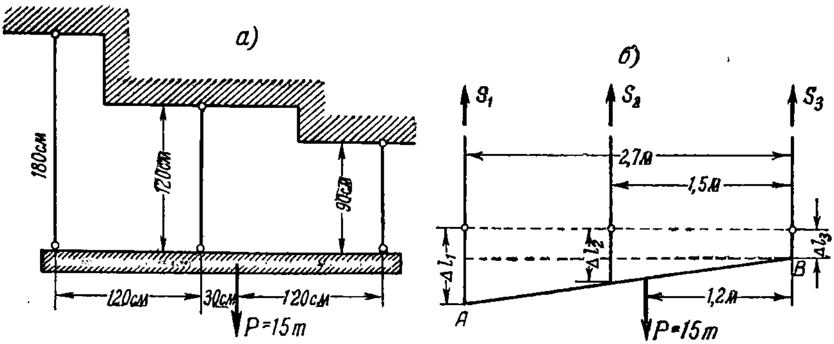


К задаче 8.6.

допускаемых нагрузок величину безопасной нагрузки *P*, если коэффициент запаса равен 2.

Ответ: 25,2 *т*.

8.7. Три стержня, на которых подвешена жесткая балка (см. рисунок *а*)), выполнены из стали с допускаемым напряжением



К задаче 8.7.

$[\sigma] = 1600$ *кг/см²* и имеют одинаковое поперечное сечение. Определить необходимое сечение стержней по способу допускаемых нагрузок.

Решение. Найдем сначала распределение нагрузки между стержнями в упругой стадии их работы. Предположим, что все стержни растянуты. Тогда сумма проекций на вертикаль всех усилий в стержнях и нагрузки дает:

$$S_1 + S_2 + S_2 - P = 0. \tag{а}$$

Сумма моментов тех же сил отиосительио шарнира прнкрепления второго стержня дает нам второе уравнение равновесия:

$$S_1 \cdot 1{,}2 + P \cdot 0{,}3 - S_3 \cdot 1{,}5 = 0. \tag{б}$$

Из рассмотрения деформации системы, изображенной на рисунке *б*), имеем

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{2{,}7} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_3}{1{,}5}.$$

Выразим удлинения через усилия и произведем необходимые сокращения и преобразования. Тогда уравнение деформаций примет следующий вид:

$$S_1 - 1{,}2S_2 + 0{,}4S_3 = 0, \qquad \text{(в)}$$

Совместное решение уравнений (а), (б) и (в) дает следующие значения усилий и напряжений в упругой стадии работы стержней:

$$S_1 = 0{,}253P \quad \text{и} \quad \sigma_1 = 0{,}253\,\frac{P}{F},$$

$$S_2 = 0{,}345P \quad \text{и} \quad \sigma_2 = 0{,}345\,\frac{P}{F},$$

$$S_3 = 0{,}403P \quad \text{и} \quad \sigma_3 = 0{,}403\,\frac{P}{F}.$$

Мы видим, что в упругой стадии работы наиболее напряжен стержень *3*. При возрастании силы P в нем раньше всего напряжения достигнут предела текучести. Предельной нагрузкой для стержня *3* будет величина

$$S_3^{\text{пред}} = \sigma_т F.$$

В этот момент напряжения в стержнях *1* и *2* еще не достигнут предела текучести. При дальнейшем росте силы напряжения и, следовательно, усилие в стержне *3* будут оставаться неизменными, усилия же и напряжения в стержнях *1* и *2* будут увеличиваться, пока напряжения в стержне *2* (наиболее напряженном из оставшихся двух стержней) в свою очередь не дойдут до предела текучести и усилие в нем не станет равно

$$S_2^{\text{пред}} = S_3^{\text{пред}} = \sigma_т F.$$

Это состояние конструкции является предельным, так как дальнейшее увеличение нагрузки P невозможно. Действительно, стержни *2* и *3* будут деформироваться без увеличения усилий, и жесткая балка начнет вращаться вокруг шарнира прикрепления стержня *1*.

Составим уравнение равновесия для момента достижения конструкцией предельного состояния, когда нагрузка достигнет предельного значения $P^{\text{пред}}$. Возьмем сумму моментов относительно шарнира прикрепления первого стержня:

$$\sigma_т F\cdot 1{,}2 + \sigma_т F\cdot 2{,}7 - P^{\text{пред}}\cdot 1{,}5 = 0.$$

Разделим это уравнение на коэффициент запаса k и учтем, что

$$\frac{P^{\text{пред}}}{k} = P \quad \text{и} \quad \frac{\sigma_т}{k} = [\sigma];$$

$$[\sigma]\,F\cdot 1{,}2 + [\sigma]\,F\cdot 2{,}7 - P\cdot 1{,}5 = 0,$$

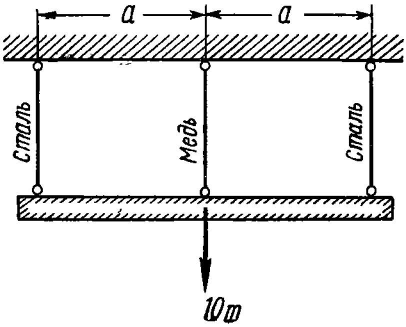
откуда

$$F = \frac{1{,}5P}{[\sigma]\,(1{,}2+2{,}7)} = \frac{1{,}5\cdot 15000}{1600\cdot 3{,}9} = 3{,}61\ см^2.$$

8.8. Определить по способу допускаемых нагрузок необходимые размеры железобетонной колонны квадратного поперечного сечения, армированной четырьмя стальными стержнями, площадь поперечного сечения которых составляет 1% от площади поперечного сечения колонны. Допускаемое напряжение для бетона равно 60 *кг/см²*, для арматуры 1200 *кг/см²*. Колонна несет нагрузку 100 *т*. Каковы должны быть сторона сечения колонны и диаметр стержней? Коэффициенты запаса для бетона и арматуры принять одинаковыми.

Ответ: $a = 37$ *см*; $d = 21$ *мм*.

8.9. Жесткая балка (см. рисунок) подвешена на трех стержнях. Площади сечения стальных стержней одинаковы, площадь сечения

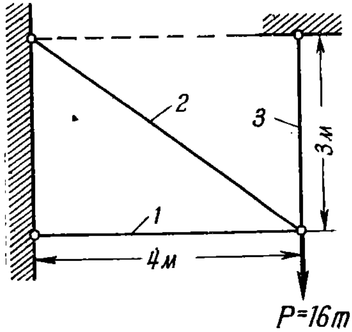


К задаче 8.9.

медного стержня в полтора раза больше площади сечения стального. Принимая предел текучести стали $\sigma_{тс} = 2400$ *кг/см²*, меди $\sigma_{тм} = 1800$ *кг/см²* и коэффициент запаса $k = 1{,}5$ определить по способу допускаемых нагрузок необходимые площади сечений стержней.

Ответ: $F_с = 2$ *см²*; $F_м = 3$ *см²*.

8.10. В изображенной на рисунке конструкции стержень *1* — алюминиевый, $[\sigma_а] = 800$ *кг/см²*, стержень *2* — медный, $[\sigma_м] = 600$ *кг/см²*



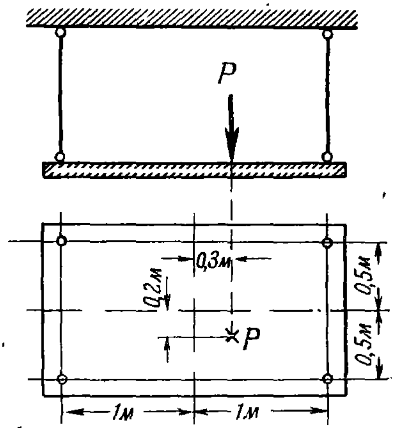
К задаче 8.10.

и стержень *3* — стальной, $[\sigma_с] = 1200$ *кг/см²*. Площади поперечного сечения стержней *1* и *2* одинаковы, сечение же стержня *3* вдвое меньше. Подобрать сечения стержней по способу допускаемых нагрузок.

Ответ: $F_1 = F_2 = 16,66$ *см²*; $F_3 = 8,33$ *см²*.

8.11. Жесткая прямоугольная плита подвешена на четырех одинакового сечения, длины и материала стержнях, расположенных в ее углах, как указано на рисунке. Допускаемое напряжение материала тяг равно $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*, сечение тяг 4 *см²*. Определить по способу допускаемых нагрузок безопасное значение силы P.

Ответ: 18,3 *т*.



К задаче 8.11.

8.12. Стержень сплошного круглого поперечного сечения нагружен крутящим моментом $M_к = 2090$ *кгм*. Определить по способу допускаемых нагрузок необходимый радиус сечения стержня при допускаемом напряжении $[\tau] = 800$ *кг/см²*.

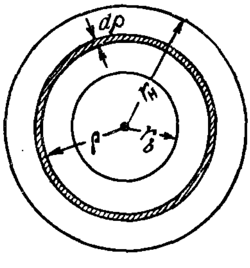
Ответ: 5 *см*.

8.13. Стержень кольцевого поперечного сечения должен иметь толщину стенки, равную 0,1 наружного диаметра. Определить по способу допускаемых нагрузок наружный диаметр этого стержня, если он нагружен крутящим моментом $M_к = 0,9$ *тм*, материал его течет при напряжении $\tau_т = 1400$ *кг/см²* и коэффициент запаса принят равным $k = 2$.

Решение. По способу допускаемых нагрузок предельной, опасной нагрузкой является та, при которой напряжения по всему поперечному сечению достигают предела текучести.

Выделим в пределах сечения (см. рисунок) бесконечно тонкое кольцо толщиной $d\varrho$ с радиусом ϱ. Его площадь равна

$$dF = 2\pi\varrho\, d\varrho.$$



К задаче 8.13.

При достижении напряжениями значения $\tau_т$ момент усилия, созданного ими по площади кольца относительно центра сечения, равен

$$dM_т = 2\pi\varrho\, d\varrho\tau_т\varrho,$$

а по всему сечению:

$$M_т = \int_{r_в}^{r_н} 2\pi\tau_т\varrho^2\, d\varrho = \frac{2}{3}\pi\tau_т\left(r_н^3 - r_в^3\right) = \frac{2}{3}\pi r_н^3\tau_т\left[1 - \left(\frac{r_в}{r_н}\right)^3\right].$$

Обозначим отношение $\frac{r_в}{r_н}=\alpha$ и разделим значение этого момента на коэффициент запаса k:

$$\frac{M_т}{k}=\frac{2}{3}\pi r_н^3\frac{\tau_т}{k}(1-\alpha^3).$$

Величина $\frac{M_т}{k}$ представляет собой наибольшее безопасное значение крутящего момента при запасе прочности, равном k:

$$M_к\leqslant\frac{2}{3}\pi r_н^3\frac{\tau_т}{k}(1-\alpha^3).$$

Отсюда получаем выражение для необходимого размера наружного радиуса сечения:

$$r_н\geqslant\sqrt[3]{\frac{3kM_к}{2\pi\tau_т(1-\alpha^3)}}.$$

В нашем случае $r_н-r_в=\frac{1}{10}d_н=\frac{r_н}{5}$, откуда

$$\alpha=\frac{r_в}{r_н}=0{,}8.$$

Тогда

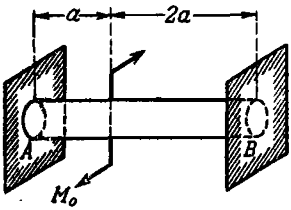
$$r_н\geqslant\sqrt[3]{\frac{3\cdot2\cdot0{,}9\cdot10^5}{2\cdot3{,}14\cdot1400\,(1-0{,}8^3)}}=5\ см$$

и, следовательно, $d_н=2r_н=2\cdot5=10$ *см*.

8.14. Определить по способу допускаемых нагрузок величину запаса прочности стержня кольцевого поперечного сечения с наружным диаметром $d_н=12$ *см* и с внутренним диаметром $d_в=9$ *см* при нагруженни его крутящим моментом $M_к=4$ *тм*, если предел текучести по касательным напряжениям для материала стержня равен $\tau_т=1050$ *кг/см²*.

Ответ: 2,5.

8.15. Определить по способу допускаемых нагрузок диаметр стержня сплошного круглого поперечного сечения, защемленного обоими концами и нагруженного, как указано на рисунке, скручивающим моментом $M_0=3{,}14$ *тм*, при допускаемом напряжении $[\sigma]=1200$ *кг/см²*. Материал стержня пластичный, применить третью теорию прочности.



К задаче 8.15.

Решение. По мере возрастания приложенного момента, до тех пор, пока на одном из участков текучесть не распространится по всему поперечному сечению, левый реактивный момент будет больше правого. В связи с этим сечения левого участка будут первыми полностью охвачены текучестью, после чего левый реактивный момент перестанет возрастать. Правый реактивный момент будет продолжать увеличиваться до тех пор, пока сечения и правого участка также не будут полностью вовлечены в пластическую деформацию. Охват пластической деформацией обоих участков стержня определяет невозможность дальнейшего увеличения нагрузки, создает так называемое предельное состояние конструкции. При этом состоянии, ввиду постоянства сечения стержня, оба реактивных момента равны между собой.

Из условия равновесия очевидно, что каждый из реактивных моментов равен

$$M_A = M_B = \frac{M_0}{2}.$$

Таким образом, расчетный крутящий момент равен

$$M_к = \frac{M_0}{2} = \frac{3,14}{2} 10^5 \text{ кгсм}.$$

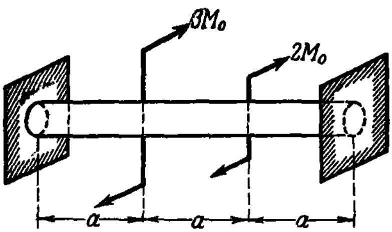
Согласно третьей теории прочности допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 0,5\,[\sigma]$. В нашем случае

$$[\tau] = 0,5 \cdot 1200 = 600 \text{ кг/см}^2.$$

Необходимый диаметр сечения определяем по формуле

$$d = 2\sqrt[3]{\frac{3}{2}\,\frac{M_к}{\pi\,[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{12M_к}{\pi\,[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 3,14 \cdot 10^5}{2 \cdot 3,14 \cdot 600}} = 10 \text{ см}.$$

8.16. Определить по способу допускаемых нагрузок безопасную величину M_0 для стержня сплошного круглого поперечного сечения диаметром $d = 7$ *см*, защемленного обоими концами и нагружен-



К задаче 8.16.

ного, как указано на рисунке, если предел текучести материала стержня равен $\tau_т = 2500$ *кг/см²* и коэффициент запаса принят равным $k = 2$. Применить четвертую теорию прочности.

Указание. Соотношение между пределами текучести по касательным и нормальным напряжениям определяется из тех же соображений, что и соотношение между допускаемыми напряжениями.

Ответ: 0,27 *тм*.

§ 34. Статически определимые балки

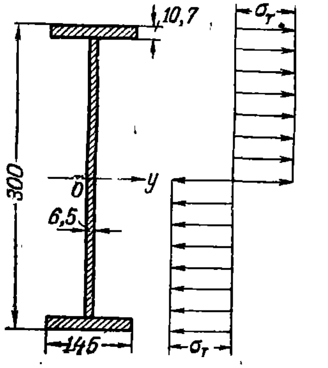
8.17. Определить коэффициент повышения расчетной грузоподъемности двутавровой стальной балки № 30*a* при расчете по допускаемым нагрузкам и найти величину изгибающего момента, который можно допустить в опасном сечении балки, если $[\sigma] = 1400$ *кг/см²*.

Решение. Величина предельного изгибающего момента равна $M_т = 2S\sigma_т$, где S — статический момент полусечения относительно нейтральной оси; $\sigma_т$ — предел текучести материала. Допускаемый изгибающий момент

$$[M] = \frac{M_т}{k_т} = 2S\,\frac{\sigma_т}{k_т} = 2S\,[\sigma].$$

Обозначив $\frac{2S}{W} = n$, можно написать

$$[M] = [\sigma]\cdot W\cdot n.$$



К задаче 8.17.

Схема сечения и предельная эпюра нормальных напряжений показаны на рисунке. Статический момент полусечения по ГОСТ (приложение, табл. 3) $S = 292\ см^3$.

При заданном допускаемом напряжении $[\sigma]$ получаем значение наибольшего допускаемого изгибающего момента

$$[M] = 2S\,[\sigma] = 2\cdot 292\cdot 1400 = 816\,000\ кгсм.$$

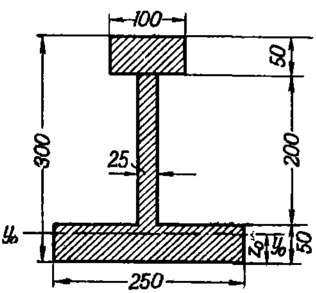
Коэффициент n, называемый коэффициентом повышения расчетной грузоподъемности балки, равен

$$n = \frac{2S}{W} = \frac{2\cdot 292}{518} = 1{,}13.$$

8.18. Определить предельную грузоподъемность ($q_т$) балки двутаврового сечения № 30*а*, свободно лежащей на двух опорах и загруженной равномерно распределенной нагрузкой q, если пролет балки $l = 5$ *м*, а предел текучести стали $\sigma_т = 2400\ кг/см^2$. Боковая устойчивость балки обеспечена.

Ответ: $q_т = 16S\frac{\sigma_т}{l^2} = 4{,}47\ т/м$.

8.19. Определить грузоподъемность стальной балки двутаврового сечения, показанного на рисунке, из расчета по допускаемым нагрузкам, если предел текучести материала $\sigma_т = 2400\ кг/см^2$, а коэффициент запаса принят $k_т = 1{,}6$. Пролет балки $l = 4$ *м*. Сила P приложена посредине пролета.



К задаче 8.19.

Как изменится величина допускаемой нагрузки, если вести расчет по допускаемым напряжениям?

Решение. Так как при пластическом изгибе нейтральная ось делит площадь сечения пополам, то она должна проходить в пределах нижней полки (площадь нижней полки $5\cdot 25 = 125\ см^2$, а остальной части сечения $5\cdot 10 + 2{,}5\cdot 20 = 100\ см^2$).

Обозначив расстояние до нулевой оси Oy_0 через z_0, найдем значение z_0 из условия равенства площадей:

$$25z_0 = 5\cdot 10 + 2{,}5\cdot 20 + (5 - z_0)\,25,$$

откуда $z_0 = 4{,}5$ *см*.

Статические моменты относительно нейтральной оси соответственно будут:

верхней части $S_1 = 50 \cdot 23 + 50 \cdot 10{,}5 + 25 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 1678$ *см*³;
нижней части $S_2 = 25 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}25 = 253$ *см*³.

Так как допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_т}{k_т} = \frac{2400}{1{,}6} = 1500$ *кг/см*², то допускаемая величина изгибающего момента $[M] = (S_1 + S_2)\,[\sigma] = (1678 + 253) \times 1500 = 2\,900\,000$ *кгсм* $= 29$ *тм*.

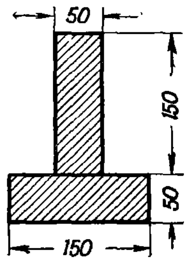
Допускаемая нагрузка равна

$$[P] = \frac{4[M]}{l} = \frac{4 \cdot 29}{4} = 29 \; т.$$

При расчете по допускаемым напряжениям $[P]_0 = 20$ *т*. Таким образом, переход к иному методу расчета с учетом пластических деформаций позволяет повысить грузоподъемность рассматриваемой балки в $\frac{29}{20} = 1{,}45$ раза, т. е. на 45%.

8.20. Балка пролетом $l = 2$ *м* таврового сечения, показанного на рисунке, свободно лежит на двух опорах и нагружена силой P посредине пролета. Исходя из теории расчета по допускаемым нагрузкам, определить грузоподъемность балки при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1600$ *кг/см*².

Ответ: $P = 24$ *т*.



К задаче 8.20.

8.21. Определить предельную грузоподъемность стальной балки круглого трубчатого сечения, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной сплошной равномерно распределенной нагрузкой q: пролет балки 6 *м*, наружный диаметр трубы 25 *см*, внутренний 20 *см*, предел текучести стали 2200 *кг/см*². Найти также допускаемую нагрузку q при коэффициенте запаса $k_т = 1{,}5$.

Ответ: $q_т = 6{,}2$ *т/м*; $[q] = 4{,}1$ *т/м*.

8.22. Сравнить грузоподъемность, подсчитанную по теории допускаемых нагрузок, с грузоподъемностью, определенной по обычному методу расчета, для балки, рассмотренной в предыдущей задаче.

Ответ: $n = \frac{2S}{W} = 1{,}35$.

8.23. Сравнить величину коэффициентов n, выражающих отношение $\frac{2S}{W}$, для сплошного и полого прямоугольного сечений с размерами: а) $b = 12$ *см*, $h = 20$ *см*; б) $b_1 = 12$ *см*, $b_2 = 10$ *см*, $h_1 = 20$ *см* и $h_2 = 12$ *см*. Индексы 1 относятся к наружным, а индексы 2 к внутренним размерам полого сечения.

Ответ: а) $n = 1{,}5$; б) $n = 1{,}28$.

8.24. Решить предыдущую задачу в общем виде, приняв

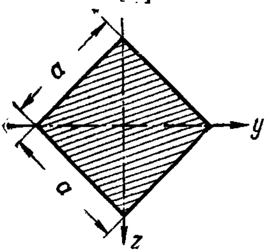
$$\frac{h_1}{h_2} = \alpha \quad и \quad \frac{b_1}{b_2} = \beta.$$

8.25. Найти отношение $\frac{2S}{W}$ для квадратного сечения балки со сторонами a, если плоскость изгиба проходит через диагональ квадрата.

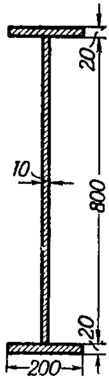
Ответ: $n=2$.

8.26. Пользуясь методом расчета по допускаемым нагрузкам, определить предельную величину двух сосредоточенных сил P, которые можно безопасно приложить в равных расстояниях $a=2$ *м* от опор к сварной балке пролетом $l=8$ *м*. Сечение балки показано на рисунке. Допускаемое напряжение принять $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}. Размеры даны в *мм*.

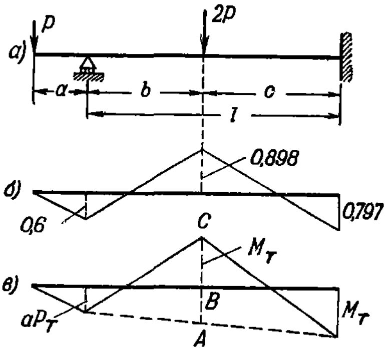
Ответ: $[P]=39$ *т*.



К задаче 8.25.



К задаче 8.26.



К задаче 8.27.

§ 35. Статически неопределимые балки

8.27. Определить грузоподъемность $[P_р]$ показанной на рисунке *а*) балки при расчете по допускаемым нагрузкам и сравнить ее с грузоподъемностью $[P_д]$, сосчитанной по допускаемым напряжениям. Размеры: $a=0{,}6$ *м*; $b=1{,}3$ *м*; $c=2{,}0$ *м*; $[\sigma]=1400$ *кг/см*^{2}; сечение балки — двутавр № 24*а*.

Решение. При расчете в пределах упругости эпюра изгибающих моментов при $P=1$ *т* имеет очертание, показанное на рисунке *б*) (см. задачу 5.112). Следовательно, при увеличении нагрузки пластический шарнир образуется прежде всего под силой $2P$, а затем в защемлении. Эпюра показана на рисунке *в*).

Изгибающий момент под грузом $2P$ может быть выражен так:

$$M_т = AC - AB = \frac{2P_т bc}{l} - \frac{aP_т c}{l} - \frac{M_т b}{l}.$$

Сила P для момента разрушения обозначена с индексом $P_т$. Из написанного уравнения можно ее определить:

$$P_т = \frac{M_т (l+b)}{(2b-a)c}.$$

Имея в виду, что разрушающий момент $M_т$ равен $M_т = 2S\sigma_т$, где S — статический момент полусечения балки относительно нейтральной оси, получим:

$$P_т = \frac{2S\sigma_т (l+b)}{(2b-a)c}.$$

Допускаемая нагрузка может быть получена путем деления разрушающей нагрузки на коэффициент запаса k. Если принять, что $\frac{\sigma_т}{k} = [\sigma]$, будем иметь

$$[P_р] = \frac{2S[\sigma](l+b)}{(2b-a)c}.$$

Для двутавра № 24*а* по таблицам сортамента $S = 178$ *см*³; следовательно,

$$[P_р] = \frac{2 \cdot 178 \cdot 1400 \cdot 460}{200 \cdot 200} = 5740 \text{ кг}.$$

При расчете по допускаемым напряжениям можем написать (см. рисунок *б*):

$$[P_д] \cdot 89{,}8 = W[\sigma],$$

откуда

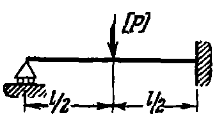
$$[P_д] = \frac{W[\sigma]}{89{,}8} = \frac{317 \cdot 1400}{89{,}8} = 4950 \text{ кг}.$$

Уменьшение против $[P_р]$ на

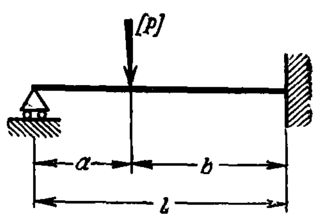
$$\frac{5740 - 4950}{5740} \cdot 100 = 13{,}8\%.$$

8.28. Для балки, показанной на рисунке, определить грузоподъемность расчетом по допускаемым нагрузкам: $l = 2$ *м*; $[\sigma] = 1600$ *кг/см*²; сечение — двутавр № 16.

Ответ: $[P] = 6000$ *кг*.



К задаче 8.28.



К задаче 8.29.

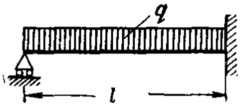
8.29. При каком положении силы $[P]$ величина ее, определенная по допускаемым нагрузкам, будет наименьшей?

Ответ: $a = 0{,}414\, l$.

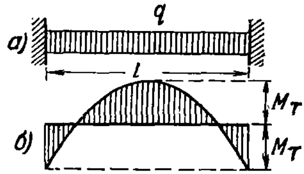
8.30. Пользуясь расчетом по допускаемым нагрузкам, определить $[q]$.

Указание. Для решения задачи надо максимальный момент в пролете и опорный момент приравнять $M_т$.

Ответ: $[q]=\frac{23,26S[\sigma]}{l^2}$.



К задаче 8.30.



К задаче 8.31.

8.31. Для балки, показанной на рисунке *а*), подобрать по сортаменту двутавровое сечение; $[\sigma]=1400$ *кг/см²*; $l=4$ *м*; $q=5$ *т/м*. Устройством концевых закреплений обеспечено равенство нулю горизонтальных составляющих опорных реакций.

Решение В силу симметрии системы эпюра изгибающих моментов в момент возникновения шарниров текучести будет иметь вид, показанный на рисунке *б*). Имеем

$$M_т=\frac{q_т l^2}{8}-M_т,$$

отсюда

$$M_г=\frac{q_г l^2}{16},$$

или, так как

$$M_т=\sigma_т\cdot 2S, \qquad \sigma_т\cdot 2S=\frac{q_г l^2}{16}.$$

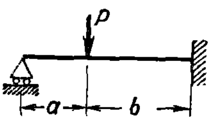
Деля левую и правую части последнего уравнения на коэффициент запаса k, получим

$$[\sigma]\,2S=\frac{ql^2}{16},$$

откуда

$$S=\frac{ql^2}{32\,[\sigma]}=\frac{50\cdot 400^2}{32\cdot 1400}=178\ см^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 24*а*.



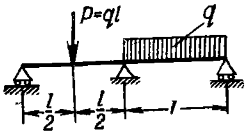
К задаче 8.32.

8.32. Для стальной балки, показанной на рисунке, подобрать по допускаемым нагрузкам прямоугольное сечение при отношении высоты к ширине $\frac{h}{c}=1,5$. $P=1000$ *кг*; $[\sigma]=1500$ *кг/см²*; $a=30$ *см*; $b=70$ *см*.

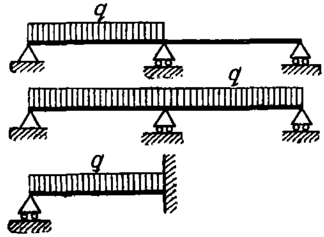
Ответ: $2,68\times 4,02$ *см*.

8.33. Для балки, показанной на рисунке, подобрать по допускаемым нагрузкам круглое сечение.
$q = 500$ *кг/м*; $l = 1$ *м*; $[\sigma] = 1400$ *кг/см*^{2}.

Ответ: $d = 3{,}1$ *см*.



К задаче 8.33.



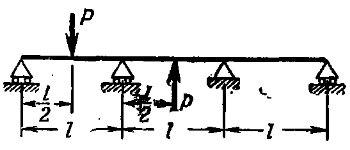
К задаче 8.34.

8.34. Три балки из одинакового материала и одинакового сечения нагружены, как показано на рисунке. Какая из балок раньше всех разрушится при одновременном увеличении нагрузки q?

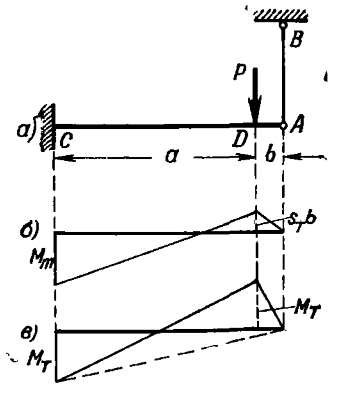
8.35. Для балки, показанной на рисунке, пользуясь способом расчета по допускаемым нагрузкам, определить коэффициент запаса, предполагая, что сечение балки — двутавр № 22; $l = 4$ *м*; $P = 3$ *т*; $\sigma_т = 2600$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 2,27.

8.36. Балка из двутавра № 30 защемлена левым концом. Правый конец поддерживается стержнем, шарнирно укрепленным в точках A



К задаче 8.35.



К задаче 8.36.

и B (см. рисунок). Определить величину разрушающей нагрузки $P_т$, если $a = 8$ *м*; $b = 1$ *м*; предел текучести одинаков для балки AC и для стержня AB и равен 2400 *кг/см*^{2}. Площадь сечения стержня AB равна $F = 2{,}5$ *см*^{2}.

Решение. Разрушение может произойти по той или иной схеме в зависимости от соотношения размеров сечений стержня AB и балки AC. Если в момент разрушения потечет стержень AB и возникнет пластический шарнир в защемлении, эпюра моментов будет иметь вид по рисунку *б*). При большом сечении стержня AB он может не потечь, и разрушение будет достигнуто из-за возникновения пластических шарниров в сечениях C и D. Соответствующая эпюра показана на рисунке *в*). Для решения задачи надо рассматривать оба эти случая.

Для случая *б*) имеем

$$M_{\text{т}}=P_{\text{т}}a-N_{\text{т}}l,$$

где $N_{\text{т}}$—усилие в стержне AB при наступлении текучести. Полагая

$$M_{\text{т}}=2S\sigma_{\text{т}};\quad N_{\text{т}}=F\sigma_{\text{т}},$$

получим

$$P_{\text{т}}=\frac{2S\sigma_{\text{т}}}{a}+\frac{F\sigma_{\text{т}}l}{a}.$$

Из сортамента имеем

$$S=268\ см^3.$$

Следовательно,

$$P_{\text{т}}=\frac{2\cdot 268\cdot 2400}{800}+\frac{2{,}5\cdot 2400\cdot 900}{800}=8370\ кг=8{,}37\ т.$$

Для случая *в*) получим

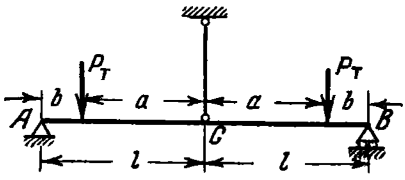
$$M_{\text{т}}=\frac{P_{\text{т}}ab}{l}-M_{\text{т}}\frac{b}{l}.$$

Отсюда

$$P_{\text{т}}=\frac{M_{\text{т}}\left(1+\frac{b}{l}\right)l}{ab}=\frac{2\cdot 268\cdot 2400\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot 900}{800\cdot 100}=15\,950\ кг=15{,}95\ т.$$

Разрушающей нагрузкой будет, очевидно, меньшая из двух полученных, т. е. 8,37 *т*.

8.37. Балка AB поддерживается по концам жесткими опорами, а в середине — шарнирно укрепленным стержнем. Определить разрушающую нагрузку ($P_{\text{т}}$), если предел текучести материала стержня



К задаче 8.37.

$\sigma_{\text{т}}^{\text{с}}=2400\ кг/см^2$, а балки $\sigma_{\text{т}}^{\text{б}}=2800\ кг/см^2$; $l=6\ м$; $b=2\ м$; сечение балки — двутавр № 20; площадь сечения стержня $F=3\ см^2$.

Ответ: 5810 *кг*.

ГЛАВА 9

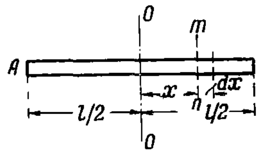
ДИНАМИЧЕСКИЕ И ДЛИТЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ

§ 36. Учет сил инерции

9.1. Определить диаметр каната длиной 60 *м*, поднимающего равноускоренно груз весом 5 *т*. В первые три секунды груз поднимается на высоту 9 *м*. Вес материала каната $\gamma = 7$ *г/см*^{3}, допускаемое напряжение $[\sigma] = 600$ *кг/см*^{2}. Расчет произвести без учета и с учетом собственного веса каната.

Ответ: 3,58 *см*; 3,74 *см*.

9.2. Чугунный стержень AB длиной $l = 1{,}8$ *м*, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси OO (см. рисунок). Определить для этого стержня предельное число оборотов в минуту, если объемный вес чугуна $\gamma = 7{,}4$ *г/см*^{3}, а допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 400$ *кг/см*^{2}. Определить удлинение стержня при 1000 об/мин, если $E = 1{,}6 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.



К задаче 9.2.

Решение. Выделим на расстоянии x от оси вращения элемент стержня длиной dx. Сила инерции $dP_д$, действующая на выделенный элемент, равна произведению его массы на радиальное ускорение, т. е.

$$dP_д = \frac{\gamma \cdot F\,dx}{g}\,\omega^2 x,$$

где F — площадь поперечного сечения стержня, g — ускорение силы тяжести, а ω — угловая скорость вращения стержня.

Растягивающее напряжение в сечении mn стержня равно

$$\sigma = \frac{P_д}{F} = \frac{1}{F}\int_x^{\frac{l}{2}} dP_д = \int_x^{\frac{l}{2}} \frac{\gamma\omega^2 x\,dx}{g} = \frac{\gamma\omega^2}{2g}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right).$$

Наибольшее растягивающее напряжение в стержне будет, очевидно, у оси вращения, т. е. при $x=0$; поэтому условие прочности напишется так:

$$\sigma_{max}=\frac{\gamma\omega^2 l^2}{8g}\leqslant[\sigma].$$

Отсюда предельная величина угловой скорости вращения стержня $[\omega]$ равна

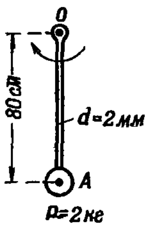
$$[\omega]=\sqrt{\frac{8g[\sigma]}{\gamma l^2}},$$

а предельное число оборотов стержня в минуту

$$[n]=\frac{30[\omega]}{\pi}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{8g[\sigma]}{\gamma l^2}}=\frac{30}{3,14}\sqrt{\frac{8\cdot 981\cdot 400}{0,0074\cdot 180^2}}=1090 \text{ об/мин}.$$

Удлинение стержня длиной dx равно

$$d\Delta l=\frac{\sigma\, dx}{E}=\frac{\gamma\omega^2}{2gE}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)dx,$$



К задаче 9.3.

а удлинение всего стержня

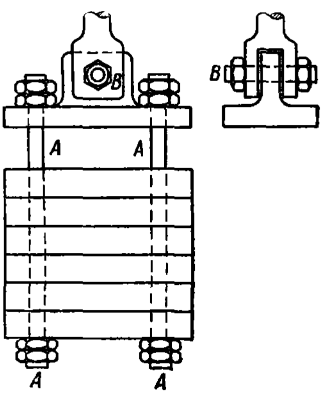
$$\Delta l=2\int_0^{\frac{l}{2}} d\,\Delta l=2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\gamma\omega^2}{2gE}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)dx=\frac{\gamma\omega^2 l^3}{12gE}=\frac{\gamma\pi^2 n^2 l^3}{12\cdot 30^2 gE}=$$

$$=\frac{0,0074\cdot 3,14^2\cdot 1000^2\cdot 180^3}{12\cdot 30^2\cdot 981\cdot 1,6\cdot 10^6}=0,0251 \text{ см}=0,251 \text{ мм}.$$

9.3. Стальная проволока OA, равномерно вращающаяся вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа в точке O, несет на конце A груз 2 *кг* (см. рисунок).

При каком числе оборотов в минуту произойдет разрушение проволоки, если предел прочности стали равен 8000 *кг/см*²?

Ответ: 375 об/мин.



К задаче 9.4.

9.4. Противовес подъемника (см. рисунок) весит 4200 *кг*. При торможении поднимающегося подъемника опускающийся противовес испытывает ускорение, равное 1,5 *м/сек*². Определить диаметр болтов A и B противовеса, если для материала болтов $[\sigma]=320$ *кг/см*² и $[\tau]=200$ *кг/см*². Число болтов A — два, B — один.

Ответ: 31 *мм*; 39,3 *мм*.

9.5. Сколько оборотов в минуту может сделать вокруг своей оси стальной тонкостенный цилиндр диаметром 30 *см*, если напряжение в нем не должно превышать 800 *кг/см*²?

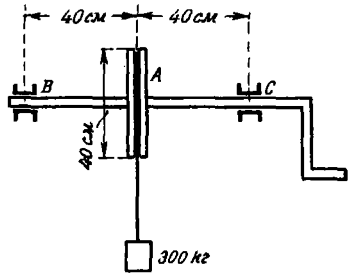
Ответ: 6320 об/мин.

9.6. Наибольшая безопасная окружная скорость для чугунных маховиков принимается равной 25 *м/сек*. Пренебрегая влиянием спиц и считая удельный вес чугуна равным 7,4, определить наибольшее растягивающее напряжение в ободе маховика при указанной окружной скорости.

Ответ: 47,1 *кг/см*^{2}.

9.7. Груз 300 *кг* поднимается с постоянным ускорением 0,5 *м/сек*^{2} на тросе диаметром 1 *см*, навернутом на шкив диаметром 40 *см* (см. рисунок). Найти наибольшие расчетные напряжения в тросе и в вале BC (по 3-й теории прочности), имеющем диаметр 5 *см*. Массой троса, шкива и вала пренебречь.

Ответ: σ_p (троса) $= 401$ *кг/см*^{2},
σ_p (вала) $= 727$ *кг/см*^{2}.



К задаче 9.7.

9.8. Груз $P = 4т$ поднимается равноускоренно при помощи каната, намотанного на барабан диаметром $D = 120$ *см*; барабан насажен на вал, приводимый во вращение двигателем. Вес барабана $Q = 400$ *кг*, радиус инерции его $i = 60$ *см*. Ускорение движения груза $a = 5$ *м/сек*^{2}. Определить площадь поперечного сечения каната и диаметр вала, на который насажен барабан, если допускаемое напряжение для каната $[\sigma] = 800$ *кг/см*^{2}, а для вала $[\tau] = 500$ *кг/см*^{2}.

Решение. Канат будет подвергаться действию статической силы веса груза P, сложенной с силой инерции поднимаемого груза $P_д$:

$$P + P_д = P + \frac{Pa}{g} = P\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 4000\left(1 + \frac{5}{9,81}\right) = 6039 \text{ кг}.$$

Необходимая площадь поперечного сечения каната равна

$$F \geqslant \frac{P + P_д}{[\sigma]} = \frac{6039}{800} = 7,55 \text{ см}^2.$$

Для определения диаметра вала нужно найти крутящий момент $M_к$. Он будет складываться из двух частей. Первая ($M'_к$) вызывается усилием в канате и равна

$$M'_к = (P + P_д)\frac{D}{2} = 6039 \cdot \frac{120}{2} = 362\,300 \text{ кгсм}.$$

Вторая ($M''_к$) вызывается влиянием инерции барабана; она равна

$$M''_к = J_0\varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение, а J_0 — момент инерции массы барабана. Угловое ускорение равно тангенциальному ускорению точек окружности барабана $W_t = a$, деленному на радиус барабана, т. е.

$$\varepsilon = \frac{2a}{D} = \frac{2 \cdot 500}{120} = \frac{25}{3}\,\frac{1}{сек^2}.$$

Момент инерции массы барабана равен

$$J_0 = \frac{Qi^2}{g} = \frac{400 \cdot 60^2}{981} = 1468 \ \textit{кгсмсек}^2.$$

Таким образом,

$$M_к'' = 1468 \cdot \frac{25}{3} = 12\,200 \ \textit{кгсм},$$

а полная величина крутящего момента

$$M_к = M_к' + M_к'' = 362\,300 + 12\,200 = 374\,500 \ \textit{кгсм}.$$

Необходимый диаметр вала равен

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16M_к}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 374\,500}{3{,}14 \cdot 500}} = 15{,}6 \ \textit{см}.$$

9.9. Скорость вращения чугунного маховика за 0,1 *сек* равномерно изменяется с 300 до 290 об/мин. Обод маховика весит 1,2 *т*; радиус инерции его равен 50 *см*. Определить величину крутящего момента, вызванного этим изменением скорости, в вале, на котором насажен маховик.

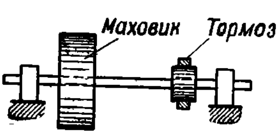
Ответ: 320 *кгм*.

9.10. Кожаный ремень шириной 15 *см* и толщиной 6 *мм* перекинут через шкив диаметром 1 *м* и передает 28 *л. с.* Шкив вращается с постоянной скоростью и делает 450 об/мин. Вес 1 *см*^{3} ремня равен 1 *г*. Определить напряжение в ремне без учета и с учетом возникающих в нем сил инерции, если отношение усилий в набегающей и сбегающей ветвях ремня равно 2,5.

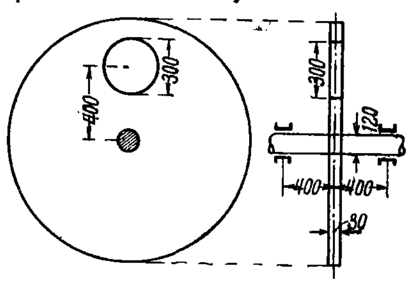
Ответ: 16,5 *кг/см*^{2}; 22,1 *кг/см*^{2}.

9.11. На вал диаметром 100 *мм* (см. рисунок) насажен маховик с моментом инерции 5000 *кгсмсек*^{2}; скорость вращения вала равна 300 об/мин. Внезапно начинает действовать тормоз, останавливающий маховик через 20 оборотов; вал с маховиком отключается от машины до пуска в ход тормоза. Определить величину наибольшего касательного напряжения в вале. Трением в подшипниках пренебречь.

Ответ: 100 *кг/см*^{2}.



К задаче 9.11.

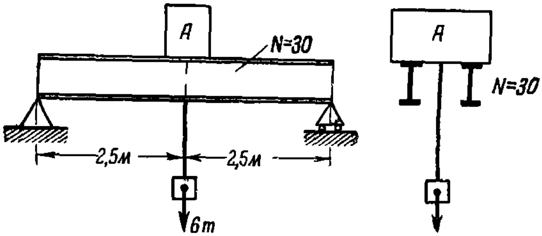


К задаче 9.12.

9.12. Сплошной стальной диск толщиной 30 *мм*, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 40 \frac{1}{сек}$, насажен на вал диаметром 120 *мм*; расстояние между подшипниками вала равно 80 *см*.

В диске на расстоянии 40 *см* от оси вала сделано круглое отверстие диаметром 30 *см* (см. рисунок). Найти увеличение наибольшего нормального напряжения в вале, вызванное наличием этого отверстия.

Ответ: 127 *кг/см*^{2}.

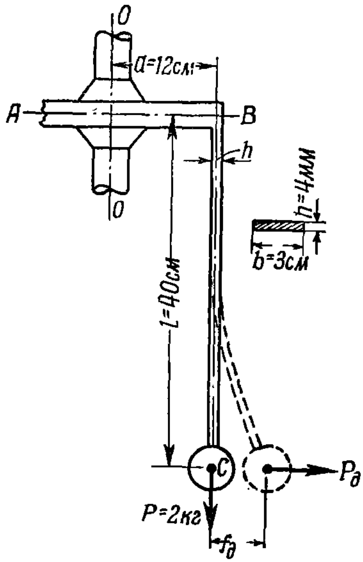


К задаче 9.13.

9.13. Подъемный механизм *A* весом 2 *т*, поднимающий с помощью каната груз 6 *т*, установлен на двух двутавровых балках № 30 (см. рисунок). Определить натяжение каната и величину наибольшего нормального напряжения в балках с учетом их собственного веса и веса подъемного механизма, если груз поднимается равноускоренно и в первую секунду проходит 2,5 *м*.

Ответ: 9,06 *т*; 1488 *кг/см*^{2}.

9.14. Регулятор вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси *OO* (см. рисунок).



К задаче 9.14.

Найти предельное число оборотов регулятора и соответствующий этому числу оборотов прогиб свободного конца стального стержня *BC*, если $[\sigma]=1800$ *кг/см*^{2}. Стержень *AB* считать абсолютно жестким; силами инерции, развивающимися в стержне *BC*, пренебречь.

Решение. При вращении стержень *BC* изгибается в плоскости чертежа центробежной силой инерции $P_д$, величина которой зависит от угловой скорости вращения регулятора ω и расстояния груза *P* от оси вращения $r=a+f_д$, где $f_д=\frac{P_д l^3}{3EJ}$ — прогиб свободного конца стержня *BC*. Таким образом,

$$P_д=\frac{P}{g}\omega^2 r=\frac{P}{g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2(a+f_д)=\frac{\pi^2 n^2}{900g}P\left(a+\frac{P_д l^3}{3EJ}\right),$$

откуда

$$P_д=\frac{Pa}{\frac{900g}{\pi^2n^2}-\frac{Pl^3}{3EJ}}. \tag{а}$$

Так как наибольшее нормальное напряжение в стержне BC не должно превышать величины допускаемого напряжения, то

$$\max\sigma=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{P_дl}{W}\leqslant[\sigma],$$

и предельное значение силы $P_д$ равно

$$P_д=\frac{[\sigma]W}{l}. \tag{б}$$

Сравнивая выражения (а) и (б), получаем

$$\frac{Pa}{\frac{900g}{\pi^2n^2}-\frac{Pl^3}{3EJ}}=\frac{[\sigma]W}{l},$$

откуда

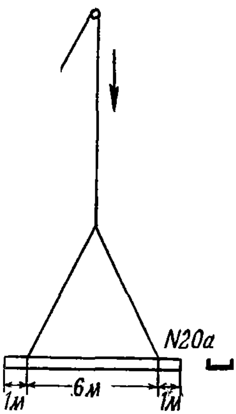
$$n=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{Pl\left(\frac{a}{W[\sigma]}+\frac{l^2}{3EJ}\right)}}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{gbh^2}{6Pl\left(\frac{a}{[\sigma]}+\frac{2l^2}{3Eh}\right)}}=$$

$$=\frac{30}{3,14}\sqrt{\frac{981\cdot3\cdot0,4^2}{6\cdot2\cdot40\left(\frac{12}{1800}+\frac{2\cdot40^2}{3\cdot2\cdot10^6\cdot0,4}\right)}}=106\ об/мин.$$

Прогиб свободного конца стержня BC равен

$$f_д=\frac{P_дl^3}{3EJ}=\frac{[\sigma]Wl^2}{3EJ}=\frac{2[\sigma]l^2}{3Eh}=$$

$$=\frac{2\cdot1800\cdot40^2}{3\cdot2\cdot10^6\cdot0,4}=2,4\ см.$$



К задаче 9.15.

9.15. Швеллер № 20 длиной 8 *м* опускается на канате с постоянной скоростью 1,8 *м/сек* (см. рисунок). Определить наибольший прогиб швеллера и наибольшее нормальное напряжение в нем от изгиба, если скорость опускания в течение 0,2 *сек* равномерно уменьшится в три раза.

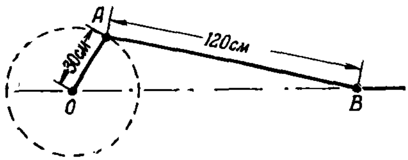
Ответ: 1,92 *см*; 579 *кг/см*^{2}.

9.16. Стальной паровозный спарник с прямоугольным поперечным сечением высотой 120 *мм* и шириной 40 *мм* имеет длину 2,4 *м*. Радиус кривошипа 30 *см*. Сжимающее усилие в спарнике при скорости вращения колеса 200 об/мин равно 8,4 *т*. Определить наибольшее нормальное напряжение в спарнике.

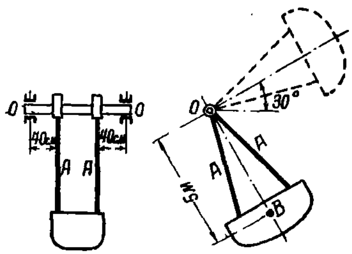
Ответ: 580 *кг/см*^{2}.

9.17. Подобрать круглое и квадратное поперечное сечение стального шатуна AB (см. рисунок) при допускаемом напряжении $[\sigma] = 800$ *кг/см*². Кривошип OA делает 400 об/мин. При расчете принять, что центробежные силы инерции перпендикулярны к оси шатуна и по длине его меняются по линейному закону.

Ответ: 38,6≈39 *мм*; 29 *мм*.



К задаче 9.17.



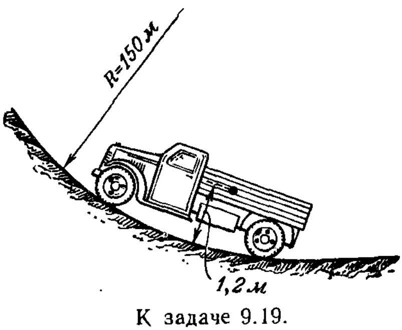
К задаче 9.18.

9.18. Люлька качелей (см. рисунок), весящая вместе с людьми 300 *кг*, при помощи стержней A подвешена к стальной оси OO.

Определить необходимый диаметр вала при допускаемом напряжении 600 *кг/см*², исходя из расчета вала на изгиб силами инерции. Считать, что масса люльки сосредоточена в точке B на расстоянии 5 *м* от оси вращения. Наибольший угол подъема люльки над горизонтом равен 30°.

Ответ: 74 *мм*.

9.19. Грузовой автомобиль движется со скоростью 45 *км/час* по кривой, представляющей в вертикальной плоскости дугу окружности радиуса $R = 150$ *м* (см. рисунок). Массу кузова, автомобиля и груза в нем можно считать сосредоточенной в точке на расстоянии 1,2 *м* от поверхности дороги. Во время стоянки автомобиля на два задних колеса его передается нагрузка, равная 1,5 *т*.



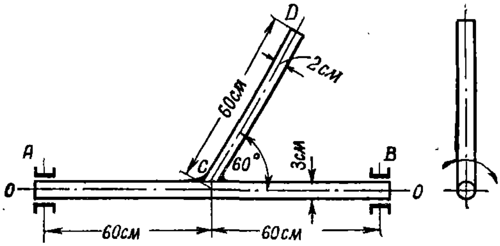
К задаче 9.19.

Определить наибольшее нормальное напряжение в листовых рессорах задних колес на стоянке и при движении автомобиля по кривой, рассчитывая их как балки равного сопротивления изгибу на двух опорах с грузом посредине. Пролет каждой рессоры 80 *см*, ширина листа 6 *см*, толщина 9 *мм*, число листов 12.

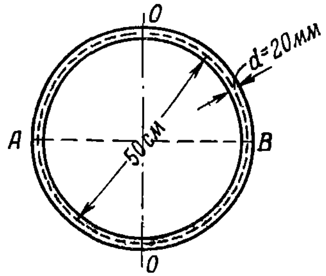
Ответ: 1543 *кг/см*²; 1708 *кг/см*².

9.20. К круглому стальному стержню AB диаметром 3 *см* и длиной 120 *см* посредине пролета жестко прикреплен круглый стальной стержень CD диаметром 2 *см* и длиной 60 *см* (см. рисунок). Стержень AB вместе со стержнем CD вращается в подшипниках A и B вокруг оси OO с постоянной угловой скоростью $\omega = 30\ \frac{1}{сек}$. Определить наибольшие нормальные напряжения в стержнях AB и CD.

Ответ: 529 *кг/см²*; 902 *кг/см²*.



К задаче 9.20.



К задаче 9.21.

9.21. Круглое стальное кольцо со средним диаметром 50 *см* и диаметром поперечного сечения 20 *мм* вращается вокруг диаметральной оси OO, делая 600 об/мин (см. рисунок). Определить наибольшее нормальное напряжение в кольце.

Ответ: 510 *кг/см²*.

9.22. Сплошной стальной диск постоянной толщины и диаметром 80 *см* равномерно вращается, делая 3000 об/мин. Определить наибольшее нормальное напряжение.

Ответ: 517 *кг/см²*.

§ 37. Колебания, резонанс [1])

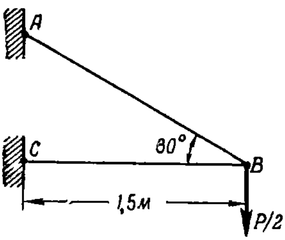
9.23. Определить период t_0 и частоту ω_0 собственных продольных колебаний стальной круглой стойки диаметром 5 *см* и длиной 80 *см*, нагруженной продольной сжимающей силой 10 *т*. Задачу решить без учета и с учетом массы стойки.

Ответ: $t_0 = 0{,}02863$ *сек*;

$\omega_0 = 219{,}4\ \frac{1}{сек}$;

$t_0 = 0{,}02864$ *сек*;

$\omega_0 = 219{,}3\ \frac{1}{сек}$.



К задаче 9.24.

9.24. На двух кронштейнах ABC, каждый из которых выполнен из двух

[1]) При отсутствии специальных указаний в условиях задач этого параграфа последние решаются без учета массы рассчитываемых элементов конструкции.

деревянных брусьев AB и BC квадратного поперечного сечения 10×10 *см²*, шарнирно соединенных между собой и со стеной (см. рисунок), укреплен электродвигатель весом $P=1000$ *кг*. Определить период и частоту собственных вертикальных колебаний; $E=10^5$ *кг/см²*.

Ответ: $t_0=0{,}048$ *сек*; $\omega^0=131\ \frac{1}{сек}$.

9.25. Электродвигатель, укрепленный на кронштейнах (см. предыдущую задачу), делает 1300 об/мин. Вследствие неполной уравновешенности частей двигателя, вращающихся в плоскости, перпендикулярной к оси стержня BC, возникает центробежная сила инерции, равная 160 *кг*.

Рассматривая лишь вертикальные вынужденные колебания системы, вычислить коэффициент нарастания колебаний, динамический коэффициент и величину наибольшего нормального напряжения в брусьях кронштейна. Силами сопротивления пренебречь.

Решение. Из решения предыдущей задачи известна частота собственных колебаний системы $\omega_0=131\ \frac{1}{сек}$. Частота изменения возмущающей силы равна

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{3{,}14\cdot 1300}{30}=136{,}2\ \frac{1}{сек}.$$

Коэффициент нарастания колебаний равен

$$\beta=\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2-1}=\frac{1}{\left(\frac{136{,}2}{131}\right)^2-1}=12{,}35.$$

Динамический коэффициент вычисляется по формуле

$$k_д=1+\frac{\delta_H}{\delta_Q}\beta,$$

где δ_Q — статическая деформация кронштейна от половины веса двигателя, а δ_H — статическая деформация кронштейна от половины наибольшей величины возмущающей силы. Очевидно, что

$$\frac{\delta_H}{\delta_Q}=\frac{H}{Q}=\frac{80}{500}=0{,}16.$$

Таким образом,

$$k_д=1+0{,}16\cdot 12{,}35=2{,}98.$$

Наибольшее нормальное напряжение возникает в брусе AB; оно равно:

$$\sigma_{max}=\frac{P_{AB}}{F}k_д=\frac{P}{F}k_д\ \frac{1000\cdot 2{,}98}{10\cdot 10}=29{,}8\ \frac{кг}{см^2}.$$

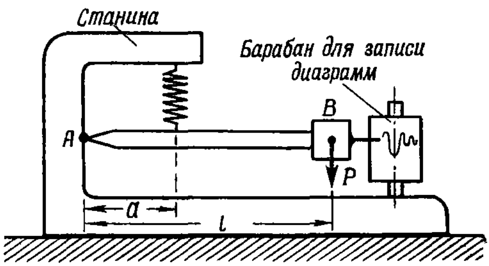
9.26. Стальная цилиндрическая винтовая пружина, имеющая 20 витков при среднем диаметре витка 12 *см* и диаметре проволоки 1 *см*, нагружена силой 20 *кг*. Пружина весит 4,8 *кг*. Модуль сдвига материала пружины $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2}. Определить период собственных продольных колебаний груза на пружине без учета и с учетом массы пружины.

Ответ: 0,53 *сек*; 0,55 *сек*.

9.27. К винтовой пружине при помощи крюка подвешены два одинаковых груза. Оба груза вместе растягивают пружину на 2,5 *см*. Один из грузов внезапно снят. Определить период возникших продольных колебаний и наибольшее значение скорости и ускорения колеблющегося груза.

Ответ: 0,224 *сек*; 35 *см/сек*; 981 *см/сек*^{2}.

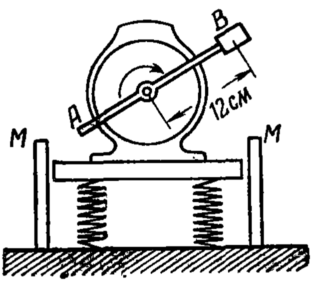
9.28. Для вибрографа, схематически изображенного на рисунке, определить величину груза P, необходимую для того, чтобы период



К задаче 9.28.

колебаний этого груза на пружине с жесткостью 2 *кг/см* равнялся 0,8 *сек*. Отношение плеч рычага $\frac{a}{l} = 0{,}4$. При расчете весом рычага AB и его деформацией пренебречь.

Ответ: 12,7 *кг*.



К задаче 9.29.

9.29. С целью демонстрации явления резонанса электромотор весом 8 *кг* установлен на четырех цилиндрических винтовых пружинах, имеющих каждая девять витков со средним диаметром витка 5 *см* и диаметром проволоки 6 *мм*; $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2} (см. рисунок). На оси электромотора укреплен стержень AB, несущий на конце B груз весом $Q = 150$ *г*, расположенный на расстоянии 12 *см* от оси электромотора. Горизонтальные смещения рамы электромотора устранены с помощью направляющих M.

Определить, при каком числе оборотов электромотора наступит явление резонанса. Какова при этом будет амплитуда колебаний и чему будет равно наибольшее касательное напряжение в пружинах? При расчете учесть силы сопротивления, считая их пропорциональными скорости колебательного движения. Коэффициент затухания колебаний n принять равным $7\,\frac{1}{сек}$.

Решение. Статическая деформация каждой пружины от четвертой части веса электромотора равна

$$\lambda_{ст}=\frac{4\cdot\frac{P}{4}R^3n}{Gr^4}=\frac{4\cdot 2\cdot 2{,}5^3\cdot 9}{8\cdot 10^5\cdot 0{,}3^4}=0{,}174\ см.$$

Частота собственных колебаний электромотора на пружинах

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}=\sqrt{\frac{981}{0{,}174}}=75{,}2\,\frac{1}{сек}.$$

Центробежная сила инерции возникает благодаря вращению груза $Q=150$ *г*. Явление резонанса наступит, когда частота изменения возмущающей силы ω будет равна частоте собственных колебаний ω_0. Поэтому критическое число оборотов

$$n_к=\frac{30\omega}{\pi}=\frac{30\omega_0}{\pi}=\frac{30\cdot 75{,}2}{3{,}14}=718\ об/мин.$$

Наибольшая величина возмущающей силы H, равная центробежной силе инерции $Q_д$, равна

$$H=Q_д=\frac{Q}{g}\omega^2r=\frac{Q}{g}\omega_0^2r=\frac{0{,}15}{981}75{,}2^2\cdot 12=10{,}37\ кг.$$

Коэффициент нарастания колебаний в данном случае $(\omega=\omega_0)$ определяется по формуле

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}=\frac{\omega_0}{2n}=\frac{75{,}2}{2\cdot 7}=5{,}37.$$

Динамический коэффициент равен

$$k_д=1+\frac{\delta_H}{\delta_P}\beta=1+\frac{H}{P}\beta=1+\frac{10{,}37}{8}5{,}37=7{,}96.$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A=\delta_H\beta=\frac{H}{P}\beta\delta_P=\frac{H}{P}\beta\lambda_{ст}=\frac{10{,}37}{8}5{,}37\cdot 0{,}174=1{,}21\ см.$$

Наибольшее касательное напряжение в пружинах равно

$$\max\tau_д=\max\tau_{ст}k_д=\frac{2\frac{P}{4}R}{\pi r^3}\left(1+\frac{r}{2R}\right)k_д=$$

$$=\frac{2\cdot 2\cdot 2{,}5}{3{,}14\cdot 0{,}3^3}\left(1+\frac{0{,}3}{5}\right)\cdot 7{,}96=995\ кг/см^2.$$

9.30. Найти период собственных колебаний кручения стального вала диаметром 12 *см* и длиной 150 *см*, один конец которого защемлен, а на втором насажен шкив с моментом инерции $J_0 = 8000$ *кгсмсек*².

Ответ: 0,171 *сек*.

9.31. Маховик, весящий 2,5 *т* и имеющий радиус инерции 110 *см*, насажен на конец стального вала диаметром 110 *мм* и длиной 2 *м*. Второй конец вала защемлен.

Определить период собственных колебаний кручения. При какой скорости вращения маховика колебания кручения могут оказаться опасными, если второй конец вала будет соединен с кривошипом, испытывающим два импульса при каждом обороте?

Ответ: 0,46 *сек*; 65,2 об/мин.

9.32. Двутавровая балка № 27 длиной 6 *м*, шарнирно опертая по концам, несет посредине пролета груз 3 *т*.

Определить частоту собственных колебаний системы без учета и с учетом массы балки.

Ответ: $27 \frac{1}{сек}$; $26{,}5 \frac{1}{сек}$.

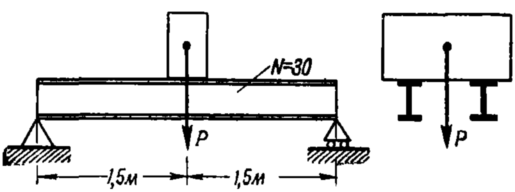
9.33. Определенный опытным путем период собственных колебаний груза весом 20 *кг*, укрепленного на конце деревянной балки длиной 1 *м*, оказался равным 0,2 *сек*. Балка имеет прямоугольное поперечное сечение высотой 6 *см* и шириной 4 *см* (высота балки параллельна плоскости действия нагрузки).

Определить величину модуля нормальной упругости материала балки. Весом балки пренебречь.

Ответ: $0{,}93 \cdot 10^5$ *кг/см*².

9.34. Двигатель весом 1,2 *т* укреплен посредине пролета $l = 3$ *м* двух двутавровых балок № 30, каждая из которых шарнирно оперта по концам (см. рисунок).

Определить коэффициент нарастания колебаний, динамический коэффициент и величину наибольшего нормального напряжения



К задаче 9.34.

в балках, если двигатель делает 1800 об/мин, а центробежная сила инерции, возникающая вследствие неполной уравновешенности вращающихся частей двигателя, равна $H = 200$ *кг*. Учесть собственный вес балок. Силами сопротивления пренебречь.

Решение. Частота собственных колебаний груза определяется по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{48EJg}{\left(\frac{1}{2}P + \frac{17}{35}Q\right)l^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{48\cdot 2\cdot 10^6\cdot 7080}{\left(\frac{1}{2}\cdot 1200 + \frac{17}{35}\cdot 0,365\cdot 300\right)300^3}} = 194,5\,\frac{1}{сек}.$$

Частота изменения возмущающей силы равна

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14\cdot 1800}{30} = 188,5\,\frac{1}{сек}.$$

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{188,5}{194,5}\right)^2} = 16,59.$$

Динамический коэффициент

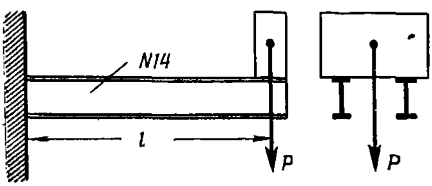
$$k_{\text{д}} = 1 + \frac{f_{\text{н}}}{f_{\text{р}}}\beta = 1 + \frac{H}{P}\beta = 1 + \frac{200}{1200}\,16,59 = 3,77.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балках равно

$$\max\sigma_{\text{д}} = \max\sigma_{\text{ст}}\cdot k_{\text{д}} = \frac{Pl}{2\cdot 4\cdot W}k_{\text{д}} = \frac{1200\cdot 300}{2\cdot 4\cdot 472}\cdot 3,77 = 359\ кг/см^2.$$

9.35. Электромотор весом 200 *кг*, укрепленный на конце двух консольных двутавровых балок № 14 (см. рисунок), делает 600 об/мин. При работе двигателя возникает центробежная сила инерции, равная 40 *кг*.

Определить наибольшее нормальное напряжение в балках при длине их, равной 2 *м*. Определить длину балок, при которой имеет место явление резонанса, и соответствующее наибольшее нормальное напряжение в балках. При расчетах учесть силы сопротивления,



К задаче 9.35.

пропорциональные скорости колебательного движения; коэффициент затухания колебаний принять равным $n = 2\,\frac{1}{сек}$. Массой балки пренебречь; $E = 2\cdot 10^6$ *кг/см²*.

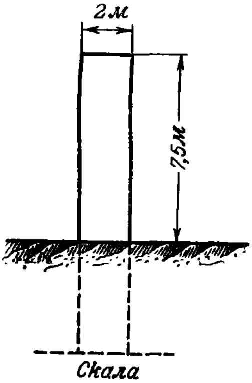
Ответ: 810 *кг/см²*; 204,3 *см*; 1036 *кг/см²*.

9.36. На балке, шарнирно опертой по концам, посредине пролета $l = 3$ *м* укреплен двигатель весом 135 *кг*, делающий 1200 об/мин.

Подобрать двутавровое сечение балки так, чтобы частота ее собственных колебаний была приблизительно на 20% больше частоты изменения возмущающей силы. Полагая, что наибольшая величина возмущающей силы равна 100 *кг*, найти наибольшее нормальное напряжение в балке. Массой балки и силами сопротивления пренебречь.

Ответ: Двутавр № 16; $\sigma_{max} = 322$ *кг/см*^{2}.

9.37. Каменный столб квадратного поперечного сечения 2×2 *м* опирается на скалу, залегающую на неизвестной глубине от поверхности земли (см. рисунок). Модуль упругости материала столба неизвестен. Объемный вес кладки столба предположительно равен 2 *т/м*^{3}. Опытным путем удалось определить прогиб верхнего конца столба при действии горизонтальной силы $P = 10$ *т*; он оказался равным 7 *мм*. Кроме того, удалось определить период собственных поперечных колебаний столба при отсутствии силы P; последний оказался равным 0,25 *сек*.



К задаче 9.37.

Считая столб заделанным в скалу и полагая, что насыпной грунт никакого влияния на работу столба не оказывает, определить глубину залегания скалы и модуль упругости кладки.

Ответ: 4,27 *м*; 58 200 *кг/см*^{2}.

§ 38. Напряжения и деформации при ударе[1])

9.38. Стальной стержень диаметром 25 *мм* и длиной 1,5 *м* растянут внезапно приложенной постоянной силой 2,5 *т*. Определить наибольшие напряжение и деформацию.

Ответ: 1020 *кг/см*^{2}; 0,765 *мм*.

9.39. Вертикальный стержень, статистически сжатый силой P, укорачивается на 2 *мм*. Определить наибольшее укорочение стержня, если этот же груз сожмет его, падая с высоты 1 *мм*.

Ответ: 4,83 *мм*.

9.40. Круглый стальной стержень длиной 5 *м* подвешен за верхний конец и снабжен у нижнего конца кольцевым выступом. Груз весом 800 *кг* падает вдоль стержня с высоты 16 *мм* и останавливается выступом.

---

[1]) При отсутствии специальных указаний в условиях задач этой главы последние решаются без учета массы рассчитываемых элементов конструкций; при этом в случае удара, вызванного падением груза, вычисление динамического коэффициента производится по точным формулам [см. курс «Сопротивление материалов» Н. М. Беляева, изд. 13-е, 1962 г., формулы (36.10), (36.11) и (36.12) § 226].

Определить необходимый диаметр стержня при допускаемом напряжении 1600 *кг/см*². Использовать точную и следующую приближенную формулу для вычисления напряжения при ударе:

$$\sigma_д = \sigma_{ст} \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_{ст}}}.$$

Ответ: 2,53 *см*; 2,26 *см*.

9.41. Груз 1,5 *т* падает вдоль вертикального стального стержня, подвешенного за верхний конец и снабженного на нижнем конце кольцевым выступом; длина стержня 4 *м*, диаметр его 4 *см*. Для смягчения удара на выступ помещена винтовая пружина, которая сжимается на 0,625 *мм* от статической нагрузки, равной 100 *кг*.

Определить высоту, отсчитывая ее от верха недеформированной пружины, с которой должен упасть груз, чтобы вызвать в стержне напряжение 1200 *кг/см*². Определить высоту падения груза при отсутствии пружины.

Ответ: 38,9 *см*; 0,97 *см*.

9.42. Груз $P=5$ *т* прикреплен к стальному тросу, другой конец которого намотан на барабан лебедки. Груз опускается с постоянной скоростью $v=1,6$ *м/сек*. При внезапном торможении лебедки груз мгновенно останавливается. В момент остановки длина троса между грузом и лебедкой равна $l=240$ *м*. Площадь поперечного сечения троса $F=10$ *см*². Определить наибольшее напряжение в тросе без учета и с учетом его веса.

Решение. Пренебрегая весом троса, для вычисления наибольшего напряжения в нем при внезапном торможении лебедки используем формулу

$$\sigma_д = \sigma_{ст} k_д = \frac{P}{F}\left[1+\sqrt{\frac{v^2EF}{gPl}}\right].$$

Подставляя числовые данные, получаем:

$$\sigma_д = \frac{5000}{10}\left[1+\sqrt{\frac{160^2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 10}{981\cdot 5000\cdot 24\,000}}\right] = 1543 \text{ кг/см}^2.$$

При учете собственного веса троса динамический коэффициент должен быть вычислен по формуле

$$k'_д = 1+\sqrt{\frac{v^2EF}{gPl\,(1+\beta)}},$$

где β — отношение приведенной массы троса $\frac{Q_т}{3g}=\frac{\gamma Fl}{3g}$ к массе ударяющего тела $\frac{P}{g}$, т. е.

$$\beta = \frac{\gamma Fl}{3g}\,\frac{g}{P} = \frac{\gamma Fl}{3P} = \frac{0,0078\cdot 10\cdot 24\,000}{3\cdot 5000} = 0,125.$$

Наибольшее напряжение в тросе складывается из статического напряжения, вызванного собственным весом троса $\sigma'_{ст}=\frac{\gamma Fl}{F}=\gamma l$ и динамического напряжения, вызванного торможением лебедки, $\sigma_д=\sigma_{ст}k'_д$. Таким образом,

$$\sigma_д=\sigma_{ст}+\sigma_{ст}k'_д=\gamma l+\frac{P}{F}\left[1+\sqrt{\frac{v^2EF}{gPl\,(1+\beta)}}\right]=$$

$$=0{,}0078\cdot 2400+\frac{5000}{10}\left[1+\sqrt{\frac{160^2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 10}{981\cdot 5000\cdot 24\,000\,(1+0{,}125)}}\right]=$$

$$=187+1483=1670\ кг/см^2.$$

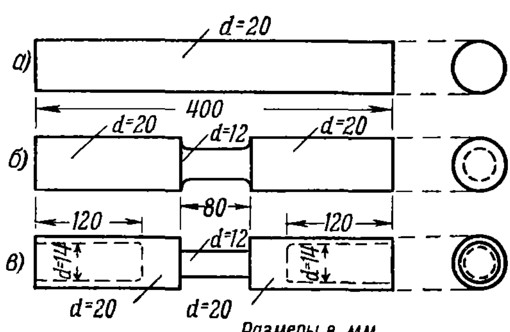
9.43. Трос лебедки, имеющий поперечное сечение 6 *см*^{2}, поддерживает груз 800 *кг*, который опускается с постоянной скоростью 36 *м/мин*. Между грузом и тросом помещена цилиндрическая винтовая пружина, имеющая 12 витков при среднем диаметре витка 12 *см* и диаметре стержня пружины 2,4 *см*. Когда длина развернутого троса достигает 9 *м*, внезапно происходит резкое торможение лебедки.

Определить наибольшее напряжение в тросе, а также наибольшее касательное напряжение в пружине и ее деформацию в момент торможения (см. решение предыдущей задачи). Весом троса и пружины пренебречь. Для материала пружины $G=8\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}; для троса $E=2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 247 *кг/см*^{2}; 3602 *кг/см*^{2}; 9,26 *см*.

9.44. Сравнить величину наибольшего растягивающего напряжения в каждом из трех стальных стержней (см. рисунок), подвергающихся продольному удару грузом 250 *кг*, обладающим в момент удара кинетической энергией 20 *кгсм*.

Ответ: $\sigma_а=881$ *кг/см*^{2}; $\sigma_а:\sigma_б:\sigma_в=1:2{,}43:2{,}08$.



К задаче 9.44.

9.45. Работающая на сжатие цилиндрическая винтовая пружина изготовлена из стальной проволоки диаметром 6 *мм*. Средний диаметр витка пружины 12 *см*, число витков 18.

Определить величину статической нагрузки, которая сожмет пружину на 2,5 *см*. Предполагая, что тот же груз упадет на ненагруженную пружину с высоты 10 *см*, определить осадку пружины и наибольшее касательное напряжение в ней.

Ответ: 1,04 *кг*; 10 *см*; 604 *кг/см*^{2}.

9.46. Определить необходимое число витков стальной цилиндрической винтовой пружины, имеющей средний диаметр витка 15 *см* и диаметр стержня 3 *см*, при котором она может безопасно для ее прочности остановить тело, весящее 200 *кг* и двигающееся горизонтально со скоростью 2 *м/сек*. Допускаемое касательное напряжение $[\tau]=2100$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 10,8.

9.47. Сплошной диск диаметром 1 *м* и толщиной 10 *мм*, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega=5\frac{1}{сек}$, насажен на стальной вал диаметром 6 *см*.

Определить величину наибольшего касательного напряжения в поперечном сечении вала, если произойдет мгновенная остановка вращения вала в сечении, находящемся от диска на расстоянии 2 *м*.

Решение. Пренебрегая массой вала, наибольшее касательное напряжение в нем можем вычислить по формуле

$$\tau_{\max}=\omega\sqrt{\frac{2J_0G}{Fl}}=\frac{\omega}{d}\sqrt{\frac{8J_0G}{\pi l}},$$

где $J_0=\frac{\pi D^4 t\gamma}{32g}$ — момент инерции массы диска (D — диаметр, t — толщина диска). Подставляя числовые данные, находим:

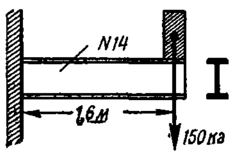
$$\tau_{\max}=\frac{\omega D^2}{2d}\sqrt{\frac{Gt\gamma}{gl}}=\frac{5\cdot 10^4}{2\cdot 6}\sqrt{\frac{8\cdot 10^5\cdot 1\cdot 0,0078}{981\cdot 200}}=745 \text{ кг/см}^2.$$

9.48. На стальной вал диаметром 120 *мм* насажены два маховика с одинаковыми моментами инерции 3000 *кгсмсек*^{2}. Расстояние между маховиками равно 4 *м*. Один маховик постоянно заклинен на вале, а другой, свободно вращающийся со скоростью 40 об/мин, посредством особого приспособления можно мгновенно сцепить с валом и таким образом привести в движение всю систему.

Определить наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении вала в момент сцепления с ним второго маховика.

Ответ: 965 *кг/см*^{2}.

9.49. К свободному концу двутавровой консольной балки длиной 1,6 *м* внезапно без начальной скорости приложен груз весом 150 *кг* (см. рисунок). Определить прогиб балки под грузом и наибольшее нормальное напряжение в защемлении.



К задаче 9.49.

Ответ: 0,358 *см*; 587 *кг/см*^{2}.

9.50. Груз 4,5 *т*, приложенный посредине пролета балки, шарнирно опертой по концам, вызывает прогиб балки на 2 *см*. С какой наибольшей скоростью может упасть на эту балку груз 500 *кг*, не вызывая прогиба больше 2 *см*?

Решение. Статический прогиб балки от груза 500 *кг*, очевидно, будет равен

$$f_{\text{ст}} = 2\frac{500}{4500} = 0{,}222 \text{ см}.$$

Так как $f_{\text{д}} = K_{\text{д}} f_{\text{ст}} = 2$ *см*, то $K_{\text{д}} = \frac{f_{\text{д}}}{f_{\text{ст}}} = \frac{2}{0{,}222} = 9$; вместе с тем

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g f_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{981 \cdot 0{,}222}} = 9.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{[(9-1)^2 - 1]\, 981 \cdot 0{,}222} = 117 \text{ см/сек}.$$

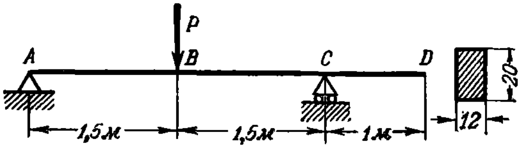
9.51. Модель стальной балки на шарнирных опорах, изготовленная из той же стали в 1/5 натуральной величины, была испытана на удар сосредоточенной нагрузкой, в 5 раз меньшей, чем динамическая нагрузка в действительной балке. Высота падения этой нагрузки также была уменьшена в 5 раз по сравнению с действительной. Определенный опытным путем (из сравнения статической и динамической деформации модели балки) динамический коэффициент оказался равным 6. Определить величину динамического коэффициента в действительной балке.

Ответ: 12.

9.52. Груз 45 *кг* падает с высоты 10 *см* на балку, которая от этого удара прогибается на 2,5 *см*. Какая статическая нагрузка, приложенная в том же сечении балки, вызовет тот же прогиб?

Ответ: 450 *кг*.

9.53. Деревянная балка с прямоугольным сечением 12×20 *см* (см. рисунок) подверглась изгибающему удару силой $P = 100$ *кг*



К задаче 9.53.

в сечении B. Наибольший прогиб балки в сечении D при ударе оказался равным 6 *мм*.

Определить высоту падения груза и наибольшее нормальное напряжение в балке; $E = 10^5$ *кг/см²*.

Ответ: 1,96 *см*; 80 *кг/см²*.

9.54. В результате удара по концу консольной балки длиной 180 *см* наибольшее нормальное напряжение в балке оказалось в 3,5 раза большим, чем при статическом действии той же силы. Насколько снизится величина прогиба свободного конца балки, если место удара перенести на 20 *см* ближе к защемлению?

Ответ: На 6,8%.

9.55. Сравнить наибольшие нормальные напряжения и наибольшие прогибы в стальной балке прямоугольного поперечного сечения 2×3 *см* (высота параллельна направлению нагрузки) и в стальной рессоре, составленной из листов шириной 50 *мм* и толщиной 6 *мм* и имеющей в опасном сечении тот же момент сопротивления изгибу, что и балка. Балка и рессора пролетом 1 *м* шарнирно оперты по концам и подвергаются удару посредине вследствие падения груза весом 15 *кг* с высоты 1 *см*.

Ответ: балка: 1082 *кг/см*^{2} и 0,3 *см*;
рессора: 493 *кг/см*^{2} и 1,03 *см*.

9.56. Двутавровая балка № 40, пролетом 6 *м*, свободно лежит на двух опорах; стенка двутавра вертикальна; груз 400 *кг* падает с высоты 5 *см* посредине ее пролета.

Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб балки. Задачу решить без учета и с учетом массы балки.

Ответ: 984 *кг/см*^{2} и 0,739 *см*; 867 *кг/см*^{2} и 0,669 *см*.

9.57. Определить, во сколько раз увеличится наибольшее напряжение в консольной двутавровой балке № 60 при установке стенки двутавра вместо вертикального в горизонтальное положение; балка имеет длину 4 *м* и на свободном конце нагружена вертикальной сосредоточенной силой 200 *кг*.

Сравнить результаты подсчетов при действии статической нагрузки и при падении ее на балку с высоты 5 *см*. При расчетах учесть вес балки.

Ответ: При статическом действии нагрузки наибольшие напряжения увеличиваются в $\frac{902}{65} = 13{,}9$ раза, при ударе—в $\frac{2021}{557} = 3{,}63$ раза.

9.58. Определить диаметр деревянной балки круглого поперечного сечения, шарнирно опертой по концам и имеющей длину 3 *м*. На балку посредине ее пролета падает груз 160 *кг*, обладающий в начальный момент удара скоростью 50 *см/сек*. Допускаемое напряжение равно 80 *кг/см*^{2}; наибольший допускаемый прогиб равен $\frac{l}{400}$; $E = 8 \cdot 10^4$ *кг/см*^{2}. Задачу решить, используя для вычисления динамического коэффициента точную и следующую приближенную формулу:

$$K_д = \sqrt{\frac{2H}{f_{ст}}}.$$

Решение. Используя приближенную формулу для вычисления динамического коэффициента, можем написать

$$\max\sigma_д=\max\sigma_{ст}K_д=\frac{Pl}{4W}\sqrt{\frac{2H}{f_{ст}}}=\frac{Pl}{4W}\sqrt{\frac{48EJv^2}{gPl^3}}=\frac{1}{d}\sqrt{\frac{48PEv^2}{g\pi l}}\leqslant[\sigma]$$

и

$$\max f_д=\max f_{ст}K_д=\frac{Pl^3}{48EJ}\sqrt{\frac{48EJv^2}{gPl^3}}=\frac{1}{d^2}\sqrt{\frac{4Pl^3v^2}{3gE\pi}}\leqslant[f],$$

откуда

$$d\geqslant\frac{1}{[\sigma]}\sqrt{\frac{48PEv^2}{g\pi l}}=\frac{1}{80}\sqrt{\frac{48\cdot160\cdot8\cdot10^4\cdot50^2}{981\cdot3{,}14\cdot300}}=25{,}8\ см$$

и

$$d\geqslant\sqrt{\frac{1}{[f]}\sqrt{\frac{4Pl^3v^2}{3gE\pi}}}=\sqrt{\frac{400}{300}\sqrt{\frac{4\cdot160\cdot300^3\cdot50^2}{3\cdot981\cdot8\cdot10^4\cdot3{,}14}}}=18\ см.$$

Следует взять $d=25{,}8\approx26$ *см*.

Используя точную формулу для вычисления динамического коэффициента, имеем:

$$\max\sigma_д=\max\sigma_{ст}K_д=\frac{Pl}{4W}\left[1+\sqrt{1+\frac{48EJv^2}{gPl^3}}\right]=$$
$$=\frac{122\,230}{d^3}\left[1+\sqrt{1+0{,}0001112d^4}\right]\leqslant[\sigma]=80\ кг/см^2;$$

для определения d получаем уравнение

$$d^3-259{,}6d-3056=0,$$

откуда $d=20{,}3$ *см* (приближенная формула дает значительно преувеличенный диаметр балки). При этом

$$J=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{3{,}14\cdot20{,}3^4}{64}=8270\ см^4$$

и

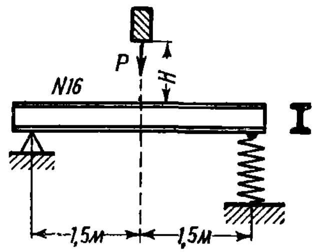
$$\max f_д=\frac{Pl^3}{48EJ}\left[1+\sqrt{1+\frac{48EJv^2}{gPl^3}}\right]=$$
$$=\frac{160\cdot300^3}{48\cdot8\cdot10^4\cdot8270}\left[1+\sqrt{1+0{,}0001112\cdot20{,}3^4}\right]=$$
$$=0{,}74\ см<[f]=\frac{l}{400}=\frac{300}{400}=0{,}75\ см.$$

9.59. Двутавровая балка № 18 опирается на две шарнирные опоры, имея пролет 2 *м*.

Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб балки при падении на нее посредине пролета груза весом 600 *кг* со скоростью в момент удара 59 *см/сек*. Задачу решить в предположении, что: а) опоры балки абсолютно жесткие и б) между опорами и балкой проложены резиновые прокладки шириной 10 *см*, длиной 15 *см* и толщиной 15 *мм*; $E_{рез} = 80$ *кг/см*^{2}.

Ответ: а) 1924 *кг/см*^{2}, 0,355 *см*; б) 1441 *кг/см*^{2}, 0,266 *см*.

9.60. Один конец двутавровой балки № 16 длиной 3 *м* опирается на жесткую шарнирную опору, второй — на стальную цилиндрическую винтовую пружину, имеющую 10 витков при среднем диаметре витка 10 *см* и диаметре проволоки 20 *мм* (см. рисунок).

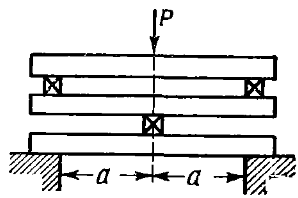


К задаче 9.60.

С какой высоты H может упасть на балку груз $P = 200$ *кг*, не вызывая в балке и пружине напряжений, превышающих допускаемые напряжения, если $[\sigma] = 1600$ *кг/см*^{2} (для материала балки) и $[\tau] = 2000$ *кг/см*^{2} (для материала пружины)?

Ответ: 4 *см*.

9.61. Три одинаковые стальные балки расположены, как указано на рисунке. Каждая балка имеет квадратное поперечное сечение 6×6 *см* и длину 120 *см*. Определить: а) каков должен быть вес тела, падающего с высоты 1 *см* и вызывающего в балках наибольшее нормальное напряжение 800 *кг/см*^{2}, и б) какое наибольшее нормальное напряжение вызвал бы этот груз, если бы он падал на одиночную нижнюю балку. Прокладки между балками считать недеформирующимися.



К задаче 9.61.

Ответ: а) 155,7 *кг*; б) 1275 *кг/см*^{2}.

9.62. На свободный конец стальной консольной балки длиной 1,5 *м* с высоты 6 *см* падает груз весом 10 *кг*. Балка имеет круглое поперечное сечение диаметром 6 *см* на одной половине своей длины и диаметром 4 *см* — на другой половине.

Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб балки при ударе в предположении, что свободным являются: а) тонкий конец балки; б) толстый конец балки.

Ответ: а) 1258 *кг/см*^{2}; 1,41 *см*; б) 1564 *кг/см*^{2}; 2,64 *см*.

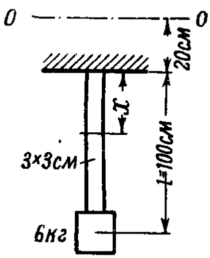
9.63. Стальной стержень диаметром 5 *мм* и длиной 1 *м* остается во время падения с высоты 10 *см* в горизонтальном положении и ударяется одновременно обоими концами о жесткие опоры.

Определить наибольшее нормальное напряжение в материале стержня, исходя из равенства кинетической энергии в момент удара и потенциальной энергии деформации стержня при ударе.

Ответ: 1530 *кг/см*^{2}.

9.64. Две цилиндрические винтовые пружины, концентрично вставленные одна в другую и работающие совместно, подвергаются продольному удару груза 5 *кг*, падающего с высоты 10 *см*. Определить осадку пружин и наибольшие касательные напряжения в них, если характеристики пружин: А) средний диаметр витка 6 *см*, диаметр проволоки 4 *мм*, число витков 12; В) средний диаметр витка 8 *см*, диаметр проволоки 8 *мм*, число витков 6. Для обеих пружин $G=8\cdot10^5$ *кг/см*^{2}.

Ответ: 3,01 *см*; $\tau_A=734$ *кг/см*^{2}; $\tau_B=$ $=1679$ *кг/см*^{2}.



К задаче 9.65.

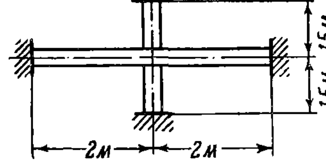
9.65. Стальной брусок длиной 1 *м*, квадратного поперечного сечения 3×3 *см*, защемленный одним концом и несущий на другом конце груз весом 6 *кг*, вращается вместе с заделкой вокруг горизонтальной оси *OO* со скоростью 10 об/мин (см. рисунок).

Определить наибольшее нормальное напряжение в брусе и наибольший прогиб его при внезапной остановке вращения заделки. Весом бруса пренебречь.

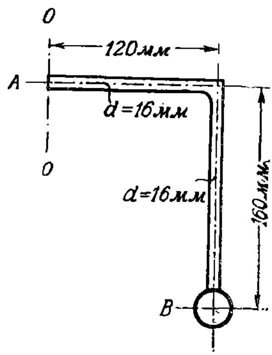
Ответ: 1390 *кг/см*^{2}; 1,54 *см*.

9.66. Груз весом 600 *кг* падает с высоты 2 *см* на две накрестлежащие соприкасающиеся двутавровые балки № 20 с шарнирно опертыми концами (см. рисунок). Определить наибольшие нормальные напряжения в балках при ударе.

Ответ: В нижней 1537 *кг/см*^{2}, в верхней 865 *кг/см*^{2}.



К задаче 9.66.



К задаче 9.67.

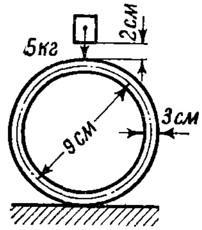
9.67. Стальной ломаный стержень, заделанный в сечении *A* и несущий на конце *B* груз весом 3 *кг*, вращается с постоянной скоростью 40 об/мин вокруг оси *OO* (см. рисунок).

Определить наибольшее расчетное напряжение в стержне при внезапной остановке вращения. Использовать третью теорию прочности.

Ответ: 1461 *кг/см*^{2}.

9.68. Определить наибольшее нормальное напряжение в стальном кольце прямоугольного поперечного сечения высотой 3 *см* и шириной 4 *см* при ударе по нему в диаметральном направлении грузом 5 *кг*, падающим с высоты 2 *см* (см. рисунок). При решении задачи учитывать лишь потенциальную энергию изгиба.

Ответ: 1458 *кг/см*^{2}.



К задаче 9.68.

§ 39. Переменные напряжения

9.69. Вращающийся круглый ступенчатый вал изгибается постоянным моментом M. Вал изготовлен из углеродистой стали с пределом прочности $\sigma_в = 45$ *кг/мм*^{2} и пределом выносливости при изгибе $\sigma^и_{-1} = 22$ *кг/мм*^{2} (симметричный цикл). Диаметры вала $D = 100$ *мм* и $d = 80$ *мм*; галтель имеет радиус $r = 10$ *мм* (см. рисунок).

Определить наибольшую допускаемую величину момента M. Коэффициент запаса прочности по отношению к пределу выносливости детали принять равным $k = 2$.

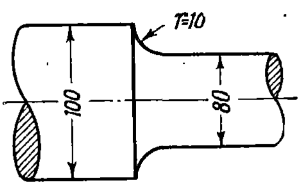
Решение. Величина предела выносливости детали может быть определена по формуле

$$\sigma^{ид}_{-1} = \frac{\sigma^и_{-1}}{\alpha_{кд}\alpha_м},$$

где $\sigma^и_{-1}$ — предел выносливости, определенный лабораторным путем на малых образцах, $\alpha_{кд}$ — действительный коэффициент концентрации напряжений для малого образца и $\alpha_м$ — масштабный коэффициент. При этом величина $\alpha_{кд}$ в свою очередь может быть определена по формуле

$$\alpha_{кд} = 1 + q(\alpha_{кт} - 1),$$

где $\alpha_{кт}$ — теоретический коэффициент концентрации напряжений, а q — коэффициент чувствительности материала к местным напряжениям, зависящий в основном от величины $\alpha_{кт}$ и предела прочности материала.



К задаче 9.69.

Величина $\alpha_{кт}$ может быть определена по таблице 37 курса Н. М. Беляева «Сопротивление материалов», изд. 1954 г. При $\frac{r}{\alpha} = \frac{10}{80} = 0{,}125$ имеем $\alpha_{кт} = 1{,}5$. При этом значении $\alpha_{кт}$ для стали с $\sigma_в = 45$ *кг/мм*^{2} по графику фиг. 626 (см. тот же курс) путем линейной интерполяции находим величину коэффициента чувствительности $q = 0{,}36$. Таким образом,

$$\alpha_{кд} = 1 + 0{,}36\,(1{,}5 - 1) = 1{,}18.$$

Величину коэффициента $\alpha_м$ для детали из углеродистой стали при умеренной концентрации напряжений определяем по кривой 2 фиг. 629 (см. там же); при $d = 80$ *мм* имеем $\alpha_м = 1{,}56$. Предел выносливости детали (вала) при симметричном цикле изменения напряжений равен

$$\sigma^{ид}_{-1} = \frac{2200}{1{,}18 \cdot 1{,}56} = 1195 \text{ кг/см}^2.$$

Допускаемое напряжение равно

$$\left[\sigma_{-1}^{\text{ид}}\right]=\frac{\sigma_{-1}^{\text{ид}}}{k}=\frac{1195}{2}=597\ \textit{кг/см}^2.$$

Наибольшую допускаемую величину изгибающего вал момента M определяем из условия прочности:

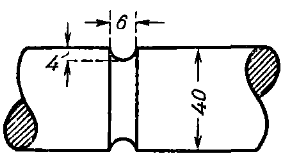
$$\max\sigma=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{32M_{\max}}{\pi d^3}\leqslant\left[\sigma_{-1}^{\text{ид}}\right],$$

откуда

$$M_{\max}=\frac{\left[\sigma_{-1}^{\text{ид}}\right]\pi d^3}{32}=\frac{597\cdot 3{,}14\cdot 8^3}{32}=30\,000\ \textit{кгсм}=300\ \textit{кгм}.$$

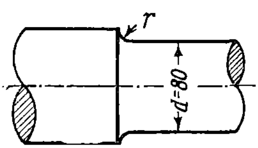
9.70. Решить предыдущую задачу в предположении, что радиус галтели равен 20 *мм*. Величину масштабного коэффициента определить по кривой *1* фиг. 629 (см. предыдущую задачу), так как действительный коэффициент концентрации напряжений весьма мало отличается от единицы. *Ответ*: 393 *кгм*.

9.71. Определить наибольшую допускаемую величину продольной силы $P_{\max}$ на круглый стержень диаметром 40 *мм*, имеющий полукруглую кольцевую выточку глубиной 4 *мм* (см. рисунок) и радиусом 3 *мм*. Нагрузка на стержень меняется от $-P_{\max}$ (сжатие) до $+P_{\max}$ (растяжение). Стержень изготовлен из легированной стали с пределом прочности $\sigma_в=100$ *кг/мм²* и пределом выносливости при растяжении — сжатии $\sigma_{-1}^0=32$ *кг/мм²* (симметричный цикл). Коэффициент запаса прочности по отношению к пределу выносливости детали принять равным 1,8. Использовать данные таблицы 37 и графики фиг. 626 и 629 (см. задачу 9.69). *Ответ*: 4970 *кг*.



К задаче 9.71.

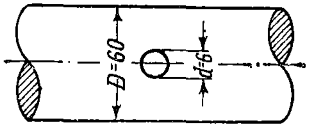
9.72. Определить величину радиуса галтели r для круглого ступенчатого вала диаметром 80 *мм* (см. рисунок), скручиваемого моментом, меняющимся от $-M_{\max}=0{,}55$ *тм* до $+M_{\max}=0{,}55$ *тм*. Вал изготовлен из легированной стали с пределом прочности $\sigma_в=100$ *кг/мм²* и пределом выносливости при кручении $\tau_{-1}^{к}=25$ *кг/мм²* (симметричный цикл). Коэффициент запаса прочности по отношению к пределу выносливости детали принять равным двум. Использовать данные таблицы 37 и графики фиг. 626 и 629 (см. задачу 9.69). *Ответ*: 8 *мм*.



К задаче 9.72.

9.73. Круглый стержень диаметром 60 *мм*, ослабленный круглым поперечным отверстием диаметром 6 *мм* (см. рисунок), подвергается действию сжимающей нагрузки, меняющейся от нуля до наибольшего значения $P_{\max}$. Стержень изготовлен из углеродистой стали с пределом прочности $\sigma_в = 60$ *кг/мм*^{2}; предел текучести и предел выносливости при растяжении — сжатии соответственно равны: $\sigma_т^0 = 28$ *кг/мм*^{2} и $\sigma_{-1}^0 = 20$ *кг/мм*^{2} (симметричный цикл).

Определить наибольшую допускаемую величину $P_{\max}$ при коэффициенте запаса прочности, равном 1,7.



К задаче 9.73.

Решение. По таблице 37 (см. задачу 9.69) при отношении диаметра отверстия к диаметру стержня, равном $\frac{d}{D} = \frac{6}{60} = 0{,}1$, теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_{кт} = 2$. По графику фиг. 626 определяем величину коэффициента чувствительности; при $\sigma_в = 60$ *кг/мм*^{2} и $\alpha_{кт} = 2$ имеем $q = 0{,}57$. Действительный коэффициент концентрации напряжений для малого образца вычисляем по формуле

$$\alpha_{кд} = 1 + q(\alpha_{кт} - 1) = 1 + 0{,}57(2 - 1) = 1{,}57.$$

Величину масштабного коэффициента определяем по кривой *2* фиг. 629 курса; при $D = 60$ *мм* $\alpha_м = 1{,}46$.

Допускаемое напряжение для детали при симметричном цикле изменения напряжений равно

$$\left[\sigma_{-1}^{од}\right] = \frac{\sigma_{-1}^{од}}{k} = \frac{\sigma_{-1}^0}{\alpha_{кд}\alpha_м k} = \frac{2000}{1{,}57 \cdot 1{,}46 \cdot 1{,}7} = 513 \ кг/см^2.$$

Допускаемое напряжение при постоянной нагрузке равно

$$\left[\sigma_{+1}^{од}\right] = \frac{\sigma_т^0}{k} = \frac{2800}{1{,}7} = 1647 \ кг/см^2.$$

Величину допускаемого напряжения при асимметричном цикле изменения напряжений определяем по приближенной формуле, вытекающей из рассмотрения спрямленной диаграммы допускаемых напряжений в координатах $\sigma_{\max} - \sigma_m$ или $\sigma_a - \sigma_m$:

$$\left[\sigma_r^{од}\right] = \frac{2\left[\sigma_{-1}^{од}\right]\left[\sigma_{+1}^{од}\right]}{(1+r)\left[\sigma_{-1}^{од}\right] + (1-r)\left[\sigma_{+1}^{од}\right]}.$$

Так как в данном случае характеристика цикла $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = 0$, то

$$\left[\sigma_r^{од}\right] = \left[\sigma_0^{од}\right] = \frac{2 \cdot 513 \cdot 1647}{(1+0)\,513 + (1-0)\,1647} = 782 \ кг/см^2.$$

Наибольшая допускаемая величина нагрузки равна

$$P_{\max} = \left[\sigma_0^{од}\right] F = \left[\sigma_0^{од}\right] \cdot \left(\frac{\pi D^2}{4} - dD\right) = 782\left(\frac{3{,}14 \cdot 6^2}{4} - 0{,}6 \cdot 6\right) = 19\,300 \ кг.$$

9.74. Решить предыдущую задачу в предположении, что стержень изготовлен из легированной стали с $\sigma_в = 90$ *кг/мм*^{2}, $\sigma_т^0 = 75$ *кг/мм*^{2} и $\sigma_{-1}^0 = 29$ *кг/мм*^{2}.

Ответ: 22 750 *кг* (увеличение на 18%).

9.75. Круглый стержень диаметром 85 *мм* изготовлен из углеродистой стали, для которой $\sigma_в = 65$ *кг/мм²*, $\sigma_т^и = 40$ *кг/мм²* и $\sigma_{-1}^и = 28$ *кг/мм²*.

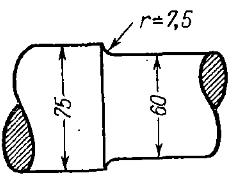
Определить величину предела выносливости детали при изгибе: а) для симметричного цикла; б) для цикла с характеристикой $r = +0,2$; в) для цикла со средним напряжением $\sigma_m = +8$ *кг/мм²* и г) для цикла с наименьшим напряжением $\sigma_{min} = -12$ *кг/мм²*.

При решении задачи использовать соотношение, вытекающее из рассмотрения спрямленной диаграммы предельных напряжений в координатах $\sigma_a - \sigma_m$:

$$\sigma_a = \sigma_{-1}^и \left[1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_т^и}\right].$$

Ответ: а) 20,3 *кг/мм²*; б) 28,8 *кг/мм²*; в) 32,4 *кг/мм²*; г) 23,0 *кг/мм²*.

9.76. Ступенчатый вал с диаметром $D = 75$ *мм* и $d = 60$ *мм* (см. рисунок), изготовленный из углеродистой стали, для которой $\sigma_в = 75$ *кг/мм²*, $\sigma_т^и = 45$ *кг/мм²* и $\sigma_{-1}^и = 35$ *кг/мм²*, изгибается моментом, изменяющимся от $+0,5M_{max}$ до $+M_{max}$.



К задаче 9.76.

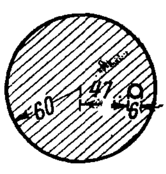
Определить наибольшую допускаемую величину M_{max} при коэффициенте запаса прочности $k = 1,6$. Руководствоваться решением задачи 9.73.

Ответ: 440 *кгм*.

9.77. Клапанная винтовая пружина из стали, для которой $\tau_т^к = 80$ *кг/мм²*, $\tau_{-1}^к = 50$ *кг/мм²* и $G = 8 \cdot 10^3$ *кг/мм²*, имеет 10 витков при среднем диаметре витка 40 *мм* и диаметре проволоки 4 *мм*. Усилие предварительной затяжки пружины равно 12 *кг*. Рабочая осадка пружины меняется от нуля до 15 *мм*. Коэффициент концентрации напряжений для винтовой пружины при $\frac{D}{d} = \frac{40}{4} = 10$ можно принять равным 1,15.

Определить величину предельного и наибольшего действительного касательного напряжения в пружине.

Ответ: 70,2 *кг/мм²*; 30 *кг/мм²*.



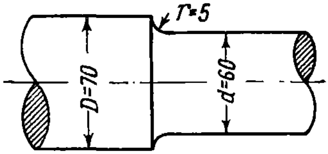
К задаче 9.78.

9.78. Круглый вал диаметром 120 *мм*, ослабленный круглым продольным отверстием диаметром 6 *мм* (см. рисунок), изготовлен из углеродистой стали, для которой $\sigma_в = 75$ *кг/мм²*, $\tau_т^к = 22$ *кг/мм²* и $\tau_{-1}^к = 20$ *кг/мм²*. Вал скручивается моментом, изменяющимся от $+0,4M_{max}$ до $+M_{max}$.

Определить наибольшую допускаемую величину M_{max} при коэффициенте запаса прочности $k = 1,8$. Величину теоретического коэффициента концентрации напряжений у краев отверстия считать равной двум. При вычислении полярного момента инерции вала отверстие во внимание не принимать.

Ответ: 2830 *кгм*.

9.79. Круглый вал диаметром 60 *мм*, имеющий в месте перехода к диаметру 70 *мм* галтель радиусом 5 *мм* (см. рисунок), изготовлен из углеродистой стали, для которой $\sigma_в = 80$ *кг/мм²*, $\sigma_т^и = 55$ *кг/мм²*, $\sigma_{-1}^и = 35$ *кг/мм²*, $\tau_т^к = 28$ *кг/мм²* и $\tau_{-1}^к = 20$ *кг/мм²*.



К задаче 9.79.

Вал изгибается моментом, меняющимся от $-M_{иmax}$ до $+M_{иmax} = 60$ *кгм*, и скручивается моментом, меняющимся от нуля до $M_{кmax} = 180$ *кгм*; при этом наибольших и наименьших своих значений изгибающий и крутящий моменты достигают одновременно. Коэффициент динамичности нагрузки для переменной составляющей цикла нормальных и касательных напряжений равен 2; коэффициент запаса прочности 1,8.

Проверить прочность вала.

Решение. Условие прочности вала, подвергающегося одновременно изгибу и кручению, может быть написано так:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_и}{\left[\sigma_{r_и}^{ид}\right]}\right)^2 + \left(\frac{\tau_к}{\left[\tau_{r_к}^{кд}\right]}\right)^2} \leqslant 1.$$

Здесь $\left[\sigma_{r_и}^{ид}\right]$ и $\left[\tau_{r_к}^{кд}\right]$ — допускаемые напряжения при изгибе и кручении, определяемые для детали в зависимости от степени асимметрии цикла нормальных и касательных напряжений.

Определим $\left[\sigma_{r_и}^{ид}\right]$ и $\left[\tau_{r_к}^{кд}\right]$.

Характеристика цикла при изгибе $r_и = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{min}}{M_{max}} = \frac{-M_{max}}{M_{max}} = -1.$ Величину допускаемого напряжения при изгибе (симметричный цикл) определим по формуле

$$\left[\sigma_{r_и}^{ид}\right] = \left[\sigma_{-1}^{ид}\right] = \frac{\sigma_{-1}^и}{k \cdot K_д \cdot \alpha_{кд} \cdot \alpha_м}.$$

Величину теоретического коэффициента концентрации напряжений при изгибе вала с галтелью находим по таблице 37 (см. задачи 9.69 и 9.73). Для отношения $\frac{r}{d} = \frac{5}{60} = 0{,}0833$, применяя линейную интерполяцию между значениями $\alpha_{кт} = 1{,}75$ при $\frac{r}{d} = 0{,}0625$ и $\alpha_{кт} = 1{,}50$ при $\frac{r}{d} = 0{,}125$, имеем $\alpha_{кт} = 1{,}67$. Величину коэффициента чувствительности определяем по графику фиг. 626 курса; при $\alpha_{кт} = 1{,}67$ и $\sigma_в = 80$ *кг/мм²* имеем $q = 0{,}67$. Таким образом,

$$\alpha_{кд} = 1 + q\,(\alpha_{кт} - 1) = 1 + 0{,}67\,(1{,}67 - 1) = 1{,}45.$$

Величину масштабного коэффициента определяем по кривой 2 фиг. 629 курса; при $d=60$ *мм* имеем $\alpha_м=1,46$. Так как $k=1,8$ и $K_д=2$, то

$$\left[\sigma_{r_и}^{ид}\right]=\frac{3500}{1,8\cdot 2\cdot 1,45\cdot 1,46}=459 \ кг/см^2.$$

Характеристика цикла при кручении $r_к=\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}=\frac{M_{к\min}}{M_{к\max}}=0$. Величину допускаемого напряжения для симметричного цикла при кручении определяем по формуле

$$\left[\tau_{-1}^{кд}\right]=\frac{\tau_{-1}^{к}}{k\cdot K_д\cdot \alpha_{кд}\cdot \alpha_м}.$$

Величину теоретического коэффициента концентрации напряжений при кручении вала с галтелью находим по таблице 37 курса. Интерполируя между значениями при $\alpha_{кт}=1,2$ при $\frac{r}{d}=0,1$, $\alpha_{кт}=1,8$ при $\frac{r}{d}=0,02$, для отношения $\frac{r}{d}=0,0833$ находим $\alpha_{кт}\approx 1,3$. Величина коэффициента чувствительности при $\alpha_{кт}=1,3$ и $\sigma_в=80$ *кг/мм²* равна $q=0,55$. Поэтому

$$\alpha_{кд}=1+0,55\,(1,3-1)=1,17.$$

Величина масштабного коэффициента та же, что и при изгибе; $\alpha_м=1,46$. Таким образом, допускаемое напряжение для симметричного цикла при кручении равно

$$\left[\tau_{-1}^{кд}\right]=\frac{2000}{1,8\cdot 2\cdot 1,17\cdot 1,46}=325 \ кг/см^2.$$

Допускаемое напряжение для постоянного цикла при кручении равно

$$\left[\tau_{+1}^{кд}\right]=\frac{\tau_{+1}^{кд}}{k}=\frac{\tau_т^к}{k}=\frac{2800}{1,8}=1555 \ кг/см^2.$$

Величину допускаемого напряжения при кручении детали для цикла с характеристикой $r=0$ определяем по формуле

$$\left[\tau_{r_к}^{кд}\right]=\left[\tau_0^{кд}\right]=\frac{2\left[\tau_{-1}^{кд}\right]\left[\tau_{+1}^{кд}\right]}{(1+r)\left[\tau_{-1}^{кд}\right]+(1-r)\left[\tau_{+1}^{кд}\right]}=$$

$$=\frac{2\cdot 1555\cdot 325}{(1+0)\,325+(1-0)\,1555}=536 \ кг/см^2.$$

Наибольшие действительные значения напряжений $\sigma_и$ и $\tau_к$ при изгибе и кручении вала равны:

$$\sigma_и=\frac{M_и}{W_и}=\frac{32M_и}{\pi d^3}=\frac{32\cdot 6000}{3,14\cdot 6^3}=283 \ кг/см^2$$

и

$$\tau_к=\frac{M_к}{W_р}=\frac{16M_к}{\pi d^3}=\frac{16\cdot 18\,000}{3,14\cdot 6^3}=424 \ кг/см^2.$$

Подставив в условие прочности значения $\sigma_и$ и $\tau_к$, а также найденные ранее значения $\left[\sigma_{r_{\text{и}}}^{\text{ид}}\right]$ и $\left[\tau_{r_{\text{к}}}^{\text{кд}}\right]$, имеем

$$\sqrt{\left(\frac{283}{459}\right)^2+\left(\frac{424}{536}\right)^2}=1{,}003\approx 1.$$

Прочность вала обеспечена.

9.80. Вал диаметром 120 *мм*, изготовленный из легированной стали, для которой $\sigma_{\text{в}}=95$ *кг/мм²*, $\sigma_{-1}^{\text{и}}=42$ *кг/мм²*, $\tau_{\text{т}}^{\text{к}}=40$ *кг/мм²* и $\tau_{-1}^{\text{к}}=24$ *кг/мм²*, имеет в месте перехода к диаметру 100 *мм* галтель радиуса 10 *мм*. Вал скручивается моментом, меняющимся от 600 *кгм* до 1800 *кгм*, и изгибается моментом, меняющимся от $-M_{\max}$ до $+M_{\max}$. Принимая коэффициент запаса прочности равным 1,7, определить наибольшую допускаемую величину изгибающего момента.

Ответ: 603 *кгм*.

9.81. Мотылевая шейка коленчатого вала диаметром 75 *мм* имеет небольшое отверстие для смазки. Материал шейки — углеродистая сталь, для которой $\sigma_{\text{в}}=65$ *кг/мм²*, $\sigma_{\text{т}}^{\text{и}}=42$ *кг/мм²*, $\sigma_{-1}^{\text{и}}=28$ *кг/мм²*, $\tau_{\text{т}}^{\text{к}}=22$ *кг/мм²* и $\tau_{-1}^{\text{к}}=16$ *кг/мм²*.

Шейка изгибается моментом, изменяющимся от $-0{,}8\,M_{\text{и}\max}$ до $+M_{\text{и}\max}$, и скручивается моментом, изменяющимся от $-0{,}1\,M_{\text{к}\max}$ до $+M_{\text{к}\max}=2M_{\text{и}\max}$. Действительный коэффициент концентрации напряжений за счет наличия отверстия для смазки принять равным при изгибе 2,6, а при кручении 2,3. Коэффициент динамичности переменной части нагрузки при изгибе и при кручении равен двум; коэффициент запаса прочности $k=1{,}8$.

Определить наибольшую допускаемую величину $M_{\text{и}\max}$ и $M_{\text{к}\max}$.

Ответ: $M_{\text{и}\max}=93{,}4$ *кгм*; $M_{\text{и}\max}=186{,}9$ *кгм*.

§ 40. Ползучесть

9.82. Болты фланцевого соединения цилиндра турбины имеют диаметр $d=20$ *мм* и длину $l=80$ *мм*. Начальное упругое натяжение каждого болта равно $P_0=4$ *т*. Соединение работает при температуре $T=450°$.

Учитывая ползучесть материала болтов и фланцев, определить натяжение болтов через 5000 часов после пуска турбины. Стадию неустановившейся ползучести во внимание не принимать.

Для материала болтов при температуре 450° модуль нормальной упругости $E_{\text{т}}=1{,}6\cdot 10^6$ *кг/см²*; скорость равномерной (установившейся) относительной деформации ползучести может быть вычислена по формуле

$$\frac{d\varepsilon_{\text{бп}}}{dt}=k_1\sigma_{\text{б}}^n,$$

причем при $T=450^\circ$

$$k_1=2\cdot 10^{-22}\left(\frac{см^2}{кг}\right)^n\frac{1}{час} \text{ и } n=5{,}5.$$

Для фланцев коэффициент жесткости при упругой деформации $m=2\cdot 10^6$ *кг/см*; скорость равномерной абсолютной деформации ползучести может быть вычислена по формуле $\frac{d\Delta l_{фп}}{dt}=k_2P_t^n$, где P_t — натяжение болта в момент времени t, $k_2=2\cdot 10^{-27}\ \frac{см^{2n}}{кг^n час}$ и $n=5{,}5$ (при $T=450^\circ$).

Решение. Суммарная деформация болта и фланцев, равная до начала ползучести

$$\Delta l_0=\Delta l_{бу}+\Delta l_{фу}=\frac{P_0 l}{E_т F}+\frac{P_0}{m},$$

с течением времени не меняется и остается равной Δl_0.

При ползучести суммарная деформация болта и фланцев складывается из упругой деформации болта ($\Delta l_{бу}$) и фланцев ($\Delta l_{фу}$) и деформации ползучести болта ($\Delta l_{бп}$) и фланцев ($\Delta l_{фп}$):

$$\Delta l_{бу}+\Delta l_{фу}+\Delta l_{бп}+\Delta l_{фп}=\frac{P_t l}{E_т F}+\frac{P_t}{m}+\Delta l_{бп}+\Delta l_{фп}=\Delta l_0.$$

Дифференцируя это уравнение по t, имеем

$$\left(\frac{l}{E_т F}+\frac{1}{m}\right)\frac{dP_t}{dt}+\frac{d}{dt}\Delta l_{бп}+\frac{d}{dt}\Delta l_{фп}=0.$$

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести и заменяя $\frac{d}{dt}\Delta l_{бп}=$ $=l\frac{d\varepsilon_{бп}}{dt}$ на $lk_1\sigma^n=k_1\left(\frac{P_t}{F}\right)^n l$ и $\frac{d}{dt}\Delta l_{фп}$ на $k_2P_t^n$, получаем такое дифференциальное уравнение для определения P_t:

$$\left(\frac{1}{E_т F}+\frac{1}{m}\right)\frac{dP_t}{dt}+\left(k_1\frac{1}{F^n}+k_2\right)P_t^n=0,$$

или

$$\frac{dP_t}{P_t^n}=-\frac{k_1\frac{l}{F^n}+k_2}{\frac{l}{E_т F}+\frac{1}{m}}dt=-A\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{1}{(n-1)P_t^{n-1}}=At+C,$$

где C — постоянная интегрирования. Так как при $t=0$ $P_t=P_0$, то

$$C=\frac{1}{(n-1)P_0^{n-1}} \text{ и } P_t=\frac{P_0}{\left[1+(n-1)At\cdot P_0^{n-1}\right]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Подставляя данные задачи, имеем

$$A=\frac{k_1\frac{l}{F^n}+k_2}{\frac{l}{E_{\text{т}}F}+\frac{1}{m}}=\frac{2\cdot 10^{-22}\cdot\frac{8}{3{,}14^{5{,}5}}+2\cdot 10^{-27}}{\frac{8}{1{,}6\cdot 10^6\cdot 3{,}14}+\frac{1}{2\cdot 10^6}}=3{,}911\cdot 10^{-21}\,\frac{1}{\text{кг}^{n-1}}\cdot\frac{1}{\text{час}}$$

и

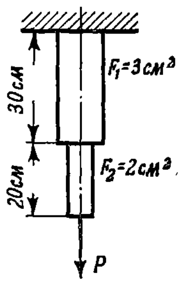
$$P_t=\frac{4000}{(1+4{,}5\cdot 3{,}911\cdot 10^{-21}\cdot 4000^{4{,}5}\cdot 5000)^{\frac{1}{4{,}5}}}=3285\ \text{кг}.$$

9.83. Стальной ступенчатый стержень (см. рисунок) растянут силой P. Определить наибольшую допускаемую величину этой силы при температуре 650°, исходя из того, чтобы наибольшая величина равномерной скорости перемещения нижнего конца стержня не превышала 10^{-5} *см/час*. Для материала стержня скорость равномерной относительной деформации ползучести может быть вычислена по формуле

$$v=\frac{d\varepsilon_{\text{п}}}{dt}=k\sigma^n;$$

при температуре 650° $k=2{,}5\cdot 10^{-15}\left(\frac{\text{см}^2}{\text{кг}}\right)^n\frac{1}{\text{час}}$ и $n=3$.

Ответ: 1035 *кг*.



К задаче 9.83.

9.84. Стальной стержень, имеющий площадь поперечного сечения 2 см^2, растягивается силой 1,8 *т*.

Полагая, что деформация стержня в течение периода неустановившейся ползучести составляет примерно 60% величины ее упругой деформации, определить наибольший срок службы стержня при температуре 500°, если при этой температуре модуль нормальной упругости материала стержня $E_{\text{т}}=1{,}6\cdot 10^6$ кг/см^2, а скорость установившейся ползучести $v_{\text{п}}=\frac{d\varepsilon_{\text{п}}}{dt}=a\,\text{sh}\,\frac{\sigma}{b}$, где $a=2\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\text{час}}$ и $b=240$ кг/см^2. Допускаемая величина относительной деформации равна 1%.

Ответ: 2140 часов.

9.85. Стальной стержень, имеющий длину 60 *см* и площадь поперечного сечения 4 см^2, растянут силой 2 *т* при температуре 600°. Определить предельный срок пребывания стержня под нагрузкой, если абсолютное удлинение его не должно быть больше 2 *мм*, а наибольшее нормальное напряжение не должно превышать половины предела длительной прочности. Для скорости установившейся ползучести можно принять: $v_{\text{п}}=\frac{d\varepsilon}{dt}=k\sigma^n$, где $k=10{,}6\cdot 10^{-25}\left(\frac{\text{см}^2}{\text{кг}}\right)^n\frac{1}{\text{час}}$ и $n=7$; величину предела длительной прочности можно вычислить по формуле $\sigma_{вt} = \frac{28}{t^{0,12}}$ ($кг/мм^2$); при температуре 600° $E = 1,5 \times \times 10^6$ $кг/см^2$. Относительную деформацию в стадии неустановившейся ползучести считать приблизительно равной деформации при нагружении стержня.

Ответ: 5325 часов.

9.86. Круглый стальной вал скручивается моментом $M_к = 300$ *кгм*. Определить наибольшее касательное напряжение τ_{max} в поперечном сечении вала и его угол закручивания на единицу длины φ при комнатной температуре и при температуре $T = 540°$ через 2000 часов после нагружения. Сравнить результаты вычисления τ_{max} и φ для сплошного вала диаметром $d_0 = 56$ *мм* и для полого вала с наружным диаметром $d_2 = 61$ *мм* и внутренним диаметром $d_1 = 42$ *мм*. Стадию неустановившейся ползучести во внимание не принимать; скоростью упругой деформации по сравнению со скоростью деформации ползучести пренебречь.

Материал вала — углеродистая сталь, для которой при комнатной температуре $G = 8 \cdot 10^5$ $кг/см^2$, а при температуре 540° $G_т = 6 \cdot 10^5$ $кг/см^2$. Скорость установившейся ползучести $v_п = k\tau^n$, причем при $T = 540°$ $k = 3 \cdot 10^{-20} \left(\frac{см^2}{кг}\right)^n \frac{1}{час}$ и $n = 5$.

Решение. При комнатной температуре наибольшее касательное напряжение в сплошном вале равно

$$\tau_{1max} = \frac{M_к}{W_{p1}} = \frac{16M_к}{\pi d_0^3} = \frac{16 \cdot 30\,000}{3,14 \cdot 5,6^3} = 870 \text{ } кг/см^2,$$

а в полом вале

$$\tau_{2max} = \frac{M_к}{W_{p2}} = \frac{16M_к d_2}{\pi (d_2^4 - d_1^4)} = \frac{16 \cdot 30\,000 \cdot 6,1}{3,14\,(6,1^4 - 4,2^4)} = 868 \text{ } кг/см^2 \approx \tau_{1max}.$$

Угол закручивания на единицу длины в сплошном вале равен

$$\varphi_1 = \frac{M_к}{GJ_{p1}} = \frac{32M_к}{G\pi d_0^4} = \frac{32 \cdot 30\,000}{8 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 5,6^4} = 0,000388 \frac{1}{см},$$

а в полом вале

$$\varphi_2 = \frac{M_к}{GJ_{p2}} = \frac{32M_к}{G\pi (d_2^4 - d_1^4)} = \frac{32 \cdot 30\,000}{8 \cdot 10^5 \cdot 3,14\,(6,1^4 - 4,2^4)} = 0,000356 \frac{1}{см} < \varphi_1.$$

При ползучести наибольшее касательное напряжение и угол закручивания на единицу длины вычисляются по формулам:

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{J_{pп}} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad и \quad \varphi = \frac{M_к}{G_т J_p} + k \left(\frac{M_к}{J_{pп}}\right)^n t.$$

Для сплошного вала

$$J_{pп} = 2\pi \int_0^{\frac{d_0}{2}} \varrho^{\frac{2n+1}{n}} d\varrho = \frac{2\pi n}{3n+1} \left(\frac{d_0}{2}\right)^{\frac{3n+1}{n}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 5}{16} 2,8^{3,2} = 52,96 \text{ } см^{3,2},$$

а для полого вала

$$J_{\rho n}=2\pi\int\limits_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}}\varrho^{\frac{2n+1}{n}}d\varrho=\frac{2\pi n}{3n+1}\left[\left(\frac{d_2}{2}\right)^{\frac{3n+1}{n}}-\left(\frac{d_1}{2}\right)^{\frac{3n+1}{n}}\right]=$$

$$=\frac{2\cdot 3,14\cdot 5}{16}(3,05^{3,2}-2,1^{3,2})=48,54\ см^{3,2}.$$

Поэтому при ползучести наибольшее касательное напряжение в сплошном вале равно

$$\tau_{1\max}=\frac{30\,000\cdot 2,8^{1/5}}{52,96}=696\ кг/см^2,$$

а в полом вале

$$\tau_{2\max}=\frac{30\,000\cdot 3,05^{1/5}}{48,54}=773\ кг/см^2>\tau_{1\max}.$$

Угол закручивания на единицу длины в сплошном вале равен

$$\varphi_1=\frac{30\,000\cdot 32}{6\cdot 10^5\cdot 3,14\cdot 5,6^4}+3\cdot 10^{-20}\left(\frac{30\,000}{52,96}\right)^5\cdot 2000=$$

$$=0,00052+0,00350=0,00402\ \frac{1}{см},$$

а в полом вале

$$\varphi_2=\frac{30\,000\cdot 32}{6\cdot 10^5\cdot 3,14\,(6,1^4-4,2^4)}+3\cdot 10^{-20}\left(\frac{30\,000}{48,54}\right)^5\cdot 2000=$$

$$=0,00047+0,00541=0,00588\ \frac{1}{см}>\varphi_1.$$

Таким образом, при комнатной температуре наибольшие касательные напряжения в сплошном и полом вале почти равны между собой, угол же закручивания полого вала примерно на 10% меньше, чем угол закручивания сплошного вала; поэтому полый вал выгоднее сплошного. При ползучести наибольшие касательные напряжения в обоих валах уменьшаются; при этом в сплошном вале они уменьшаются значительнее, чем в полом. Угол закручивания вала при ползучести сильно увеличивается; при этом угол закручивания полого вала примерно в 1,5 раза больше, чем угол закручивания сплошного вала. Поэтому при ползучести сплошной вал выгоднее полого.

9.87. Круглый стальной вал скручивается моментом $M=600$ *кгм*; пренебрегая стадией неустановившейся ползучести, определить необходимый диаметр вала так, чтобы при температуре 500° наибольшая скорость установившейся ползучести не превышала $10^{-7}\ \frac{1}{час}$. Материал вала — сталь, для которой при температуре 500° $v_п=k\tau^n$, причем $k=5,6\cdot 10^{-20}\left(\frac{см^2}{кг}\right)^n\frac{1}{час}$ и $n=4,8$.

Ответ: $d=44,5\approx 45$ *мм*.

9.88. Цилиндрическая винтовая пружина со средним диаметром витка 36 *мм* и диаметром проволоки 4 *мм* сжата силой 3,5 *кг*. Пружина работает при температуре 500°.

Определить число витков пружины, необходимое для того, чтобы при укорачивании пружины скорость абсолютной деформации не превышала 10^{-6} *см/час*. Для материала пружины скорость равномерной относительной деформации ползучести $v_п = k\tau^n$, причем при $T = 500°$ $k = 4 \cdot 10^{-20}\left(\frac{см^2}{кг}\right)^n \frac{1}{час}$ и $n = 4$. Стадию неустановившейся ползучести во внимание не принимать.

Ответ: $8,95 \approx 9$ витков.

9.89. Консольная балка длиной 60 *см*, круглого поперечного сечения диаметром 40 *мм*, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q, работает при температуре $T = 600°$. Материал балки — углеродистая сталь с модулем нормальной упругости $E_т = 1,5 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2} при $T = 600°$. Скорость установившейся ползучести $v_п = k\sigma^n$; при $T = 600°$ $k = 0,25 \cdot 10^{-12}\left(\frac{см^2}{кг}\right)^n \frac{1}{час}$ и $n = 3$.

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести, определить наибольшую допускаемую величину нагрузки q так, чтобы прогиб балки через 5000 часов после нагружения не превышал 5 *мм*, а наибольшее нормальное напряжение не превышало допускаемого напряжения по пределу длительной прочности $\sigma_{вt}$. Для $t = 5000$ часов $\sigma_{вt} = 200$ *кг/см*^{2}; коэффициент запаса принять равным $k_t = 1,8$.

n	m
1	0,785
1,5	0,918
2	1,009
2,5	1,070
3	1,104
4	1,144
5	1,168
6	1,189
8	1,230
10	1,270

Решение. Условие прочности по нормальным напряжениям в данном случае может быть записано так:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{J_{zn}} r^{\frac{1}{n}} \leqslant [\sigma_{вt}] = \frac{\sigma_{вt}}{k_t}.$$

Здесь r — радиус поперечного сечения балки, z — нейтральная ось сечения, а

$$J_{zn} = \int_F y^{\frac{n+1}{n}} dF = 2\int_0^r y^{\frac{n+1}{n}} \cdot 2\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = mr^{\frac{3n+1}{n}};$$

значения коэффициента m, соответствующие различным значениям показателя степени n, приведены в таблице.

Подставляя данные задачи, получаем

$$J_{zn} = 1,104 \cdot 2^{10/3} = 11,13\ см^{10/3}$$

и

$$\sigma_{max} = \frac{ql^2}{2J_{zn}} r^{\frac{1}{n}} = \frac{q \cdot 60^2 \cdot 2^{1/3}}{2 \cdot 11,13} = 203,8\, q \leqslant \frac{\sigma_{вt}}{k_t} = \frac{200}{1,8} = 111,1\ кг/см^2,$$

откуда

$$q \leqslant \frac{111,1}{203,8} = 0,545 \text{ кг/см}.$$

Прогиб свободного конца балки при упругой деформации равен

$$f_у = \frac{ql^4}{8E_тJ_z} = \frac{q \cdot 60^4 \cdot 4}{8 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 2^4} = 0,086\,q;$$

для вычисления прогиба того же конца балки при ползучести имеем формулу (см. Н. М. Беляев, Сопротивление материалов, 1954, глава XXXIX, фиг. 671):

$$f_п = \frac{kq^n l^{2n+2} t}{2^n(2n+2)J_{zп}^n} = \frac{0,25 \cdot 10^{-12} \cdot q^3 \cdot 60^8 \cdot 5000}{2^3(2 \cdot 3 + 2) \cdot 11,13^3} = 23,8\,q^3.$$

По условию задачи полный прогиб балки не должен превышать 5 *мм*, т. е.

$$f_у + f_п = 0,086q + 23,8q^3 \leqslant [f] = 0,5 \text{ см}.$$

Решая это уравнение относительно q, находим

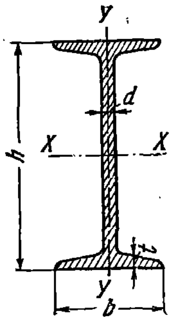
$$q \leqslant 0,272 \text{ кг/см}.$$

Нагрузка на балку не должна превышать 0,272 *кг/см*.

9.90. Консольная балка длиной 30 *см*, нагруженная на свободном конце сосредоточенной силой 500 *кг*, работает при температуре 540°. Материал балки — углеродистая сталь с модулем упругости $E_т = 1,6 \cdot 10^6$ *кг/см²*. Скорость установившейся ползучести $v_п = k\sigma^n$; при $T = 540°$ $k = 1,4 \cdot 10^{-16} \left(\frac{см^2}{кг}\right)^n \frac{1}{час}$ и $n = 3,9$.

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести, определить наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении балки и наибольший прогиб ее через 4000 часов после нагружения. Исследовать два варианта поперечного сечения балки с одинаковыми моментами сопротивления при изгибе: прямоугольное с высотой 80 *мм* и шириной 29 *мм* (высота параллельна плоскости действия нагрузки) и круглое диаметром 68 *мм*. При расчете балки круглого сечения воспользоваться указаниями задачи 9.89.

Ответ: В балке прямоугольного сечения $\sigma_{max} = 365$ *кг/см²* и $f_{max} = 0,232$ *см*, в балке круглого сечения $\sigma_{max} = 335$ *кг/см²* и $f_{max} = 0,203$ *см*. Круглое сечение при ползучести выгоднее прямоугольного.



ПРИЛОЖЕНИЯ

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ В СООТВЕТСТВИИ С ГОСТ 8239—56*, 8240—56*, 8509—57, 8510—57, ДЕЙСТВУЮЩИМ НА 1 ИЮЛЯ 1963 г.

Таблица 1. **Двутавры**

№ профилей	Вес 1 *пог. м*, *кг*	Размеры *мм*				Площадь сечения, *см*²	Справочные величины для осей						
							$x-x$				$y-y$		
		h	b	d	t		I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y
							*см*⁴	*см*³	*см*	*см*³	*см*⁴	*см*³	*см*
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27

№ профилей	Вес 1 пог. м, кг	Размеры, мм				Площадь сечения, $см^2$	Справочные величины для осей						
							$x-x$				$y-y$		
		h	b	d	t		I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y
							$см^4$	$см^3$	$см$	$см^3$	$см^4$	$см^3$	$см$
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	71,4	18 930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	83,0	27 450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	97,8	39 290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	114	55 150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	132	75 450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	153	101 400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	176	134 600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	202	152 700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70б	184	700	210	17,5	28,2	234	175 370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

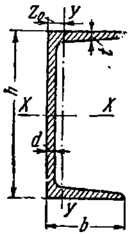
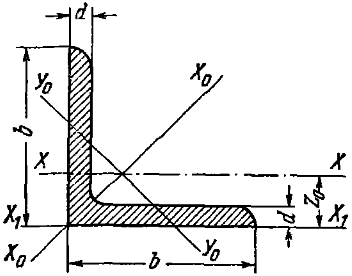


Таблица 2. Швеллеры

№ профилей	Вес 1 пог. м	Размеры				Площадь сечения	Спраиочные иеличины для осей							z_0
							$x-x$				$y-y$			
		h	b	d	t		I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
	кг	мм				см²	см⁴	см³	см	см³	см⁴	см³	см	см
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14а	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16а	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



Т а б л и ц а 3. **Уголки равнобокие**

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 *пог. м*	Справочные величины для осей							
					$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	z_0
	b	d			I_x	i_x	I_{x_0} *макс*	i_{x_0} *макс*	I_{y_0} *мин*	i_{y_0} *мин*	I_{x_1}	
	мм		$см^2$	*кг*	$см^4$	*см*	$см^4$	*см*	$см^4$	*см*	$см^4$	*см*
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04

Продолжение табл. 3

№ профилей	Размеры: b	Размеры: d	Площадь профиля	Вес 1 *пог. м*	Справочные величины для осей: $x-x$: I_x	$x-x$: i_x	x_0-x_0: I_{x_0} *макс*	x_0-x_0: i_{x_0} *макс*	y_0-y_0: I_{y_0} *мин*	y_0-y_0: i_{y_0} *мин*	x_1-x_1: I_{x_1}	Z_0
	мм		$см^2$	*кг*	$см^4$	*см*	$см^4$	*см*	$см^4$	*см*	$см^4$	*см*
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей							
					$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	z_0
	b	d			I_x	i_x	I_{x_0} макс	i_{x_0} макс	I_{y_0} мин	i_{y_0} мин	I_{x_1}	
	мм		см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06

Продолжение табл. 3

№ профилей	Размеры b	Размеры d	Площадь профиля	Вес 1 пог. м	$x-x$: I_x	$x-x$: i_x	x_0-x_0: I_{x_0} макс	x_0-x_0: i_{x_0} макс	y_0-y_0: I_{y_0} мин	y_0-y_0: i_{y_0} мин	x_1-x_1: I_{x_1}	Z_0
	мм	мм	см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70

Продолжение табл. 3

№ профилей	Размеры b	Размеры d	Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей: x−x, I_x	x−x, i_x	x_0-x_0, I_{x_0} макс	x_0-x_0, i_{x_0} макс	y_0-y_0, I_{y_0} мин	y_0-y_0, i_{y_0} мин	x_1-x_1, I_{x_1}	Z_0
	мм	мм	см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	2 128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	2 324	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4 470	8,60	1159	4,38	4 941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5 045	8,58	1306	4,36	5 661	6,02
25	250	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10 401	6,91
		22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11 464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11 125	9,64	2887	4,91	13 064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12 244	9,59	3190	4,89	14 674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12 965	9,56	3389	4,89	15 753	7,31

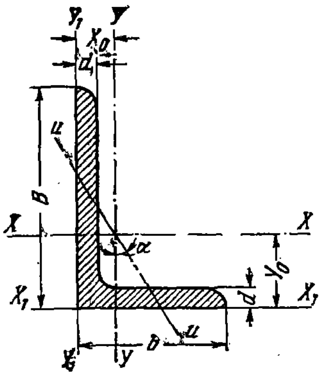


Таблица 4. **Уголки неравнобокие**

№ профилей	Размеры B	Размеры b	Размеры d	Площадь профиля	Вес 1 пог. м	x−x I_x	x−x i_x	y−y I_y	y−y i_y	x_1-x_1 I_{x_1}	x_1-x_1 Расстояние от центра тяжести y_0	y_1-y_1 I_{y_1} мин	y_1-y_1 Расстояние от центра тяжести x_0	u−u I_u мин	u−u i_u мин	Угол наклона оси tg α
	мм			$см^2$	кг	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4	2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379

Продолжение табл. 4

№ профилей	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей										
						$x-x$		$y-y$		x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$		
	B	b	d			I_x	i_x	I_y	i_y	I_{x_1}	Расстояние от центра тяжести y_0	I_{y_1} мин	Расстояние от центра тяжести x_0	I_u мин	i_u мин	Угол наклона оси tg α
	мм			$см^2$	кг	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	$см^4$	см	
5/3,2	50	32	3	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
			4	3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
			4	3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5	4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386

Продолжение табл. 4

№ профилей	Размеры, мм: B	b	d	Площадь профиля, см²	Вес 1 пог. м, кг	$x-x$: I_x, см⁴	$x-x$: i_x, см	$y-y$: I_y, см⁴	$y-y$: i_y, см	x_1-x_1: I_{x_1}, см⁴	x_1-x_1: Расстояние от центра тяжести y_0, см	y_1-y_1: I_{y_1}, см⁴	y_1-y_1: Расстояние от центра тяжести x_0, см	$u-u$: $I_{u\,min}$, см⁴	$u-u$: $i_{u\,min}$, см	Угол наклона оси $\operatorname{tg}\alpha$
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,6	28,8	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409

Продолжение табл. 4

№ профилей	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей										
						x–x		y–y		x_1-x_1		y_1-y_1		u–u		
	B	b	d			I_x	i_x	I_y	i_y	I_{x_1}	Расстояние от центра тяжести y_0	I_{y_1} мин	Расстояние от центра тяжести x_0	I_u мин	i_u мин	Угол наклона оси tg α
	мм			см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	
16/10	160	100	9	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12	30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10 410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

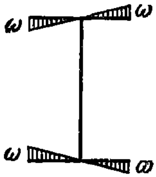


Таблица 5. Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров (ОСТ 10016—39)

№ профиля	Секториальный момент инерции J_ω в $см^6$	Секториальная площадь для крайней точки профиля ω_{max} в $см^2$	Секториальный момент сопротивления W_ω в $см^4$	Момент инерции при чистом кручении J_k в $см^4$	Упругая изгибно-крутильная характеристика $\alpha=\sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\omega}}$ в $см^{-1}$
10	644,3	15,25	42,26	2,873	0,04122
12	1 353	20,10	67,33	4,243	0,03457
14	2 560	25,54	100,23	5,911	0,02966
16	4 879	32,25	151,30	8,406	0,02562
18	8 219	38,90	211,28	11,37	0,02295
20a	13 121	46,15	284,31	14,81	0,02074
20b	13 857	47,05	294,50	17,85	0,02215
22a	22 773	55,91	407,33	20,32	0,01844
22b	23 930	56,90	420,55	24,08	0,01958
24a	33 799	64,48	524,15	25,57	0,01698
24b	35 426	65,57	540,25	30,12	0,01800
27a	52 987	76,68	690,99	31,93	0,01515
27b	55 414	77,92	711,21	37,60	0,01608
30a	76 704	88,38	867,93	38,83	0,01389
30b	80 114	89,75	892,60	45,78	0,01475
30c	83 612	91,13	917,50	55,23	0,01587
33a	107 160	100,69	1064,3	46,19	0,01281
33b	111 780	102,21	1093,6	54,49	0,01363
33c	116 520	103,73	1123,3	65,74	0,01466
36a	154 820	115,19	1344,0	56,85	0,01183
36b	161 210	116,85	1379,6	66,72	0,01256
36c	167 760	118,51	1415,6	79,99	0,01348
40a	228 900	134,13	1706,6	68,75	0,01070
40b	237 950	136,00	1749,6	80,68	0,01137
40c	247 210	137,85	1793,3	96,55	0,01220
45a	376 630	159,75	2357,6	95,31	0,009819
45b	390 770	161,86	2414,4	111,3	0,01041
45c	405 220	163,96	2471,5	131,8	0,01113
50a	611 990	187,10	3270,9	131,2	0,009038
50b	633 900	189,44	3346,2	150,3	0,009504
50c	656 270	191,79	3421,8	174,9	0,01007
55a	906 350	216,79	4180,8	159,9	0,008198
55b	937 220	219,36	4272,5	182,7	0,008617
55c	968 720	221,94	4364,8	211,5	0,009119
60a	1 349 900	251,22	5373,4	195,5	0,007427
60b	1 393 200	254,04	5484,2	221,9	0,007790
60c	1 437 300	256,86	5595,7	255,3	0,008226

Примечание. При вычислении α приняты $G=800\,000$ $кг/см^2$; $E=2\,100\,000$ $кг/см^2$.

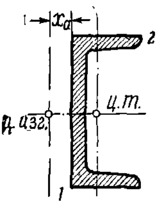
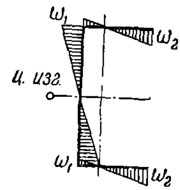


Таблица 6. Секториальные геометрические характеристики прокатных швеллеров (ОСТ 10017—39)



№ профиля	Координата центра изгиба x_a в *см*	Секториальный момент инерции J_ω в *см*^{6}	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кручении J_k в *см*^{4}	Упругая изгибно-крутильная характеристика $\alpha=\sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\omega}}$ в *см*$^{-1}$
			ω_1 в *см*^{2}	ω_2 в *см*^{2}	W_{ω_1} в *см*^{4}	W_{ω_2} в *см*^{4}		
5	1,08	24,91	2,70	4,26	9,22	5,85	1,350	0,1437
6,5	1,15	64,88	3,86	6,36	16,80	10,21	1,497	0,09375
8	1,22	141,8	5,15	8,75	27,57	16,20	1,940	0,07219
10	1,34	354,8	7,19	12,71	49,35	27,92	2,727	0,05411
12	1,48	768,3	9,54	17,31	80,51	44,39	3,634	0,04245
14*a*	1,58	1 512	12,03	22,63	125,74	66,85	4,815	0,03483
14*b*	1,39	1 711	11,46	23,85	149,32	71,75	6,248	0,03730
16*a*	1,68	2 760	14,74	28,63	187,23	96,40	6,306	0,02950
16*b*	1,48	3 099	14,03	30,09	220,87	103,00	8,227	0,03180
18*a*	1,83	4 745	17,68	35,32	268,41	134,34	8,128	0,02555
18*b*	1,57	5 292	16,83	37,02	314,50	142,95	10,50	0,02749
20*a*	1,94	7 698	21,27	42,46	361,95	181,28	9,84	0,02207
20*b*	1,73	8 560	20,24	44,45	422,87	192,57	12,50	0,02359
22*a*	2,07	11 593	24,84	49,60	466,69	233,73	11,66	0,01958
22*b*	1,86	12 863	23,63	51,88	544,42	247,95	14,60	0,02079
a	2,10	15 326	27,48	55,21	557,74	277,59	13,21	0,01812
24*b*	1,88	17 007	26,10	57,75	651,56	294,50	16,47	0,01921
c	1,67	18 640	24,91	60,09	748,35	310,21	21,31	0,02087
a	2,14	24 337	31,85	66,46	764,11	366,19	16,25	0,01595
27*b*	1,91	26 883	30,23	69,39	889,34	387,42	20,34	0,01698
c	1,70	29 355	28,82	72,10	1018,6	407,14	26,34	0,01848
a	2,26	35 645	37,21	76,54	984,87	478,78	20,39	0,01456
30*b*	2,03	40 436	35,23	79,98	1147,8	505,61	25,01	0,01535
c	1,80	44 104	33,59	83,06	1313,0	530,97	31,75	0,01656
a	2,25	52 630	41,39	88,54	1271,7	594,43	24,29	0,01326
33*b*	2,02	57 844	39,27	92,27	1473,2	626,93	29,92	0,01404
c	1,80	62 890	37,44	95,69	1679,8	657,23	38,04	0,01518
a	2,47	92 189	49,50	104,55	1862,2	881,77	38,91	0,01268
36*b*	2,24	100 430	47,30	108,51	2123,4	925,54	46,56	0,01329
c	2,02	108 420	45,36	112,18	2390,2	966,48	57,18	0,01417
a	2,43	148 100	55,78	121,67	2655,1	1217,2	59,74	0,01240
40*b*	2,21	160 100	53,51	125,86	2991,7	1272,1	70,78	0,01298
c	2,00	171 870	51,51	129,80	3336,4	1324,0	85,72	0,01378

Примечание. При вычислении α прияты $G=800\,000$ *кг/см*^{2}; $E=2\,100\,000$ *кг/см*^{2}.

Таблица 7. **Коэффициенты φ**

Гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Значения φ для				
	стали марок 4, 3, 2, ОС	стали марки 5	стали СПБ	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Николай Михайлович Беляев.
Сборник задач по сопротивлению материалов.

М., 1968 г., 352 стр. с илл.
Редактор *И. К. Снитко.*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*
Корректор *Е. А. Белицкая.*

Печать с матриц. Подписано к печати 11/X 1968 г.
Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 22.
Условн. печ. л. 22. Уч.-изд. л. 22,91.
Тираж 100 000 экз. Цена 74 коп. Заказ 3208.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28.