Задание на контрольную работу

ЗАДАЧА 1

Дан плоский двухслойный конденсатор (рис. 1.1), состоящий из двух одинаковых электропроводных пластин, каждая из которых имеет площадь *S*. Между пластинами находятся два слоя диэлектрика с толщинами d_1 и d_2 и с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Пластины конденсатора подключены к постоянному напряжению *U*. Используя данные табл. 1.1, требуется:

1) получить (вывести, доказать, обосновать) каждое из приведенных ниже соотношений (1.1)–(1.6);

2) рассчитать и построить графики распределения напряженности электрического поля *E*, электрического смещения (индукции) *D* и потенциала φ в зависимости от координаты *x* (расчеты выполнить для точек $x = 0$, $d_1/2$, d_1, $d_1 + d_2/2$, $d_1 + d_2$), при этом на осях указать размерности соответствующих величин;

Таблица 1.1

Последняя, предпоследняя или третья от конца цифра шифра студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
S, см^2	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
Значение *S* выбирается по последней цифре шифра										
d_1, мм	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
d_2, мм	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
U, кВ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Значения d_1, d_2 и *U* выбираются по предпоследней цифре шифра										
$\varepsilon_1/\varepsilon_0$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\varepsilon_2/\varepsilon_0$	11	10	9	8	7	б	5	4	3	2
Значения $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ и $\varepsilon_2/\varepsilon_0$ выбираются по третьей от конца цифре шифра										

3) рассчитать емкость конденсатора *C*.

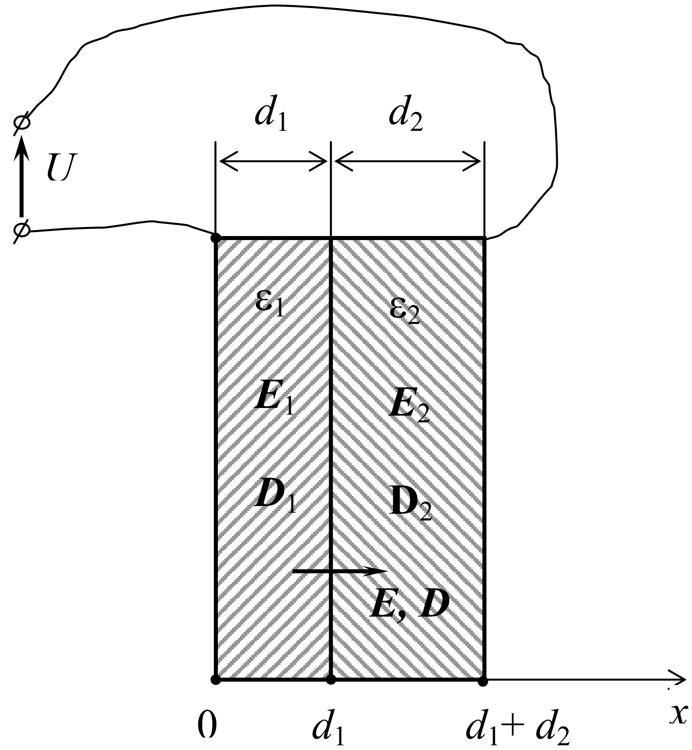


Рис. 1.1

Указания

Для решения этой задачи сначала необходимо проработать материал, изложенный в [1], с. 7...9, 17, 27, 27, 28, пример 198, или [2], с. 211...212.

При решении этой задачи учитываем, что согласно уравнению Лапласа вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля в пределах каждого слоя диэлектрика является постоянным и имеет лишь одну составляющую E_x по оси x, т. е.

$$E_x = E = \begin{cases} E_1 = \text{const}, & 0 \le x < d_1 \\ E_2 = \text{const}, & d_1 \le x \le d_1 + d_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для определения E_1 и E_2 можно составить систему из двух уравнений.

Первое уравнение соответствует граничному условию для вектора $\boldsymbol{D}$ на границе раздела двух диэлектрических слоев. Поскольку согласно (1.1)

$$D_x = D = \begin{cases} D_1 = \text{const}, & 0 \le x < d_1 \\ D_2 = \text{const}, & d_1 \le x \le d_1 + d_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

то указанное граничное условие имеет вид

$$\varepsilon_1 E_1 = D_1 = D_2 = \varepsilon_2 E_2 \quad , \tag{1.3}$$

где ε_1 и ε_2 определяются из табл. 1.1 с учетом значения электрической постоянной $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Второе уравнение связывает приложенное к конденсатору напряжение (рис. 1.1) и напряженность (1.1):

$$U = \int_0^{d_1+d_2} E dx . \tag{1.4}$$

Подставив (1.1) в (1.4), после интегрирования получим уравнение, которое совместно с (1.3) позволяет определить напряженности E_1 и E_2, а следовательно, с учетом (1.1)–(1.3) построить зависимости E и D от x.

С помощью (1.1) определяется потенциал φ как функция от x:

$$\varphi = \varphi(x) = \int_0^x E dx \ . \tag{1.5}$$

Емкость C двухслойного конденсатора может быть найдена как результат последовательного соединения емкостей C_1 и C_2 каждого из слоев, где

$$C_{1,2} = S\varepsilon_{1,2} / d_{1,2} \ . \tag{1.6}$$

ЗАДАЧА 2

Провод заземления подсоединен к металлической полусфере, погруженной в землю (рис. 2.1). Заданы: удельная электропроводность земли γ, радиус полусферы r_0 и значение тока I короткого замыкания в проводе заземления (табл. 2.1). Требуется:

1) получить (вывести, доказать, обосновать) каждое из приведенных ниже соотношений (2.1)–(2.7);

2) рассчитать и построить графики изменения от координаты r напряжения $U(r)$ на поверхности земли и шагового напряжения $U_h(r)$; на осях указать размерности соответствующих величин; расчеты выполнить для точек $r = r_0$, $r_0 + h/2$, $r_0 + h$, $r_0 + h$, $r_0 + 2h$, $r_0 + 3h$, $r_0 + 5h$, $r_0 + 7h$, $r_0 + 10h$,

считая, что расстояние шага равно h = 80 см.

Таблица 2.1

Последняя, предпоследняя или третья от конца цифра шифра студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\gamma 10^{-2}$, 1/Ом·м	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
Значение γ выбирается по последней цифре шифра										
r_0, см	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Значение r_0 выбирается по предпоследней цифре шифра										
I, кА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значение I выбирается по третьей от конца цифре шифра										

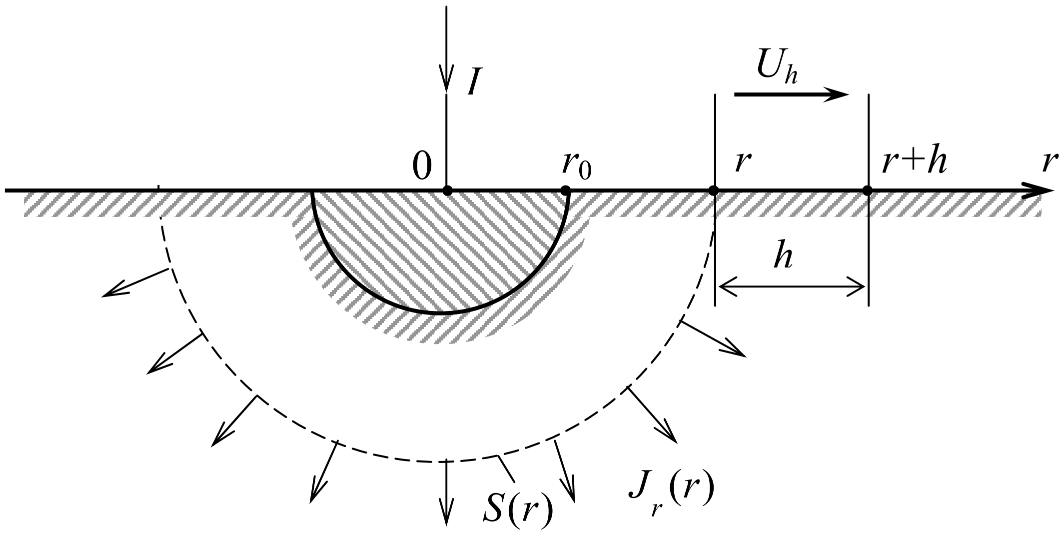


Рис. 2.1

Указания

Для решения этой задачи сначала необходимо проработать материал, изложенный в [1], с. 75...78, 85, 86, пример 200, или [2], с. 276…279.

Если второй электрод, к которому течет ток I от полусферы, находится достаточно далеко от нее, то вектор плотности тока $\boldsymbol{J}$ в земле будет иметь лишь одну радиальную составляющую (рис. 2.1):

$$J_r = J_r(r) = \frac{I}{S(r)}, \qquad S(r) = 2\pi r^2, \qquad (2.1)$$

где $S(r)$ – площадь поверхности полусферы радиусом $r \geq r_0$.

Соответственно этому вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ будет также иметь одну радиальную составляющую E_r, которую можно определить из закона Ома в дифференциальной форме:

$$E_r = E_r(r) = \frac{J_r(r)}{\gamma} \ . \qquad (2.2)$$

Теперь путем интегрирования уравнения

$$E_r(r) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{d\varphi(r)}{dr} \ , \qquad (2.3)$$

например, при условии, что

$$\varphi\Big|_{r=\infty} = \varphi(\infty) = 0 \ , \qquad (2.4)$$

можно определить скалярный потенциал $\varphi = \varphi(r)$:

$$\varphi(r)\Big|_r^\infty = \varphi(\infty) - \varphi(r) = -\varphi(r) = -\int_r^\infty E_r(r)dr \qquad (2.5)$$

или, следовательно,

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r(r)dr \ . \qquad (2.6)$$

Согласно рис. 2.1 напряжение $U(r)$ на поверхности земли и шаговое напряжение $U_h(r)$ как функции координаты r равны

$$U(r) = \varphi(r) - \varphi(\infty) = \varphi(r) \ , \quad U_h(r) = \varphi(r) - \varphi(r+h) \ , \qquad (2.7)$$

где $\varphi(r)$ определяется выражением (2.6).

Следовательно, величина $U_0 = U(r_0)$ есть напряжение на заземлителе.

ЗАДАЧА 3

По медному трубчатому проводнику (рис. 3.1) некоторого электрического аппарата протекает постоянный ток *I*. Внутренний и внешний радиусы r_1 и r_2 проводника, а также величина *I* известны (табл. 3.1).

Требуется:

1) получить (вывести, доказать, обосновать) каждое из приведенных ниже соотношений (3.1)–(3.6);

2) рассчитать и построить графики изменений от радиальной координаты *r* модулей векторов напряженности магнитного поля *H,* магнитной индукции *B* и объемной удельной электродинамической силы *f*; расчеты выполнить для точек $r = 0$, $r_1/2$, r_1 , $r_1 + 0{,}25\ (r_2 – r_1)$, $r_1 + 0{,}5(r_2 – r_1)$, $r_1 + 0{,}75\ (r_2 – r_1)$, r_2 , $1{,}5r_2$, $2r_2$, $3r_2$; на осях указать размерности соответствующих величин.

Таблица 3.1

Последняя, предпоследняя или третья от конца цифра шифра	1 2	3	4 5	6 7 8 9	0
r_1, см	6 7	8	9 10	11 12 13 14	15
Значение r_1 выбирается по последней цифре шифра					
r_2, см	20 21	22	23 24	25 26 27 28	29
Значение r_0 выбирается по предпоследней цифре шифра					
I, кА	1 2	3	4 5	6 7 8 9	10
Значение *I* выбирается по третьей от конца цифре шифра					

Указания

Для решения этой задачи сначала необходимо проработать материал, изложенный в [1], с. 120 или [3], с. 100.

В силу осевой симметрии линии *l* векторов напряженности ***H*** и индукции ***B*** магнитного поля в плоскости поперечного сечения проводника (рис. 3.1) являются концентрическими окружностями с центром на его оси. Поэтому в цилиндрических координатах *r*, α, *z* векторы ***H*** и ***B*** будут иметь только одну составляющую H_α и B_α по координате вращения α:

$$H_\alpha = H \quad , \quad B_\alpha = B = \mu H \quad , \quad \mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad \text{Гн/м} \ , \qquad (3.1)$$

где μ – магнитная проницаемость, которая является практически постоянной величиной, поскольку проводник медный и находится в воздухе.

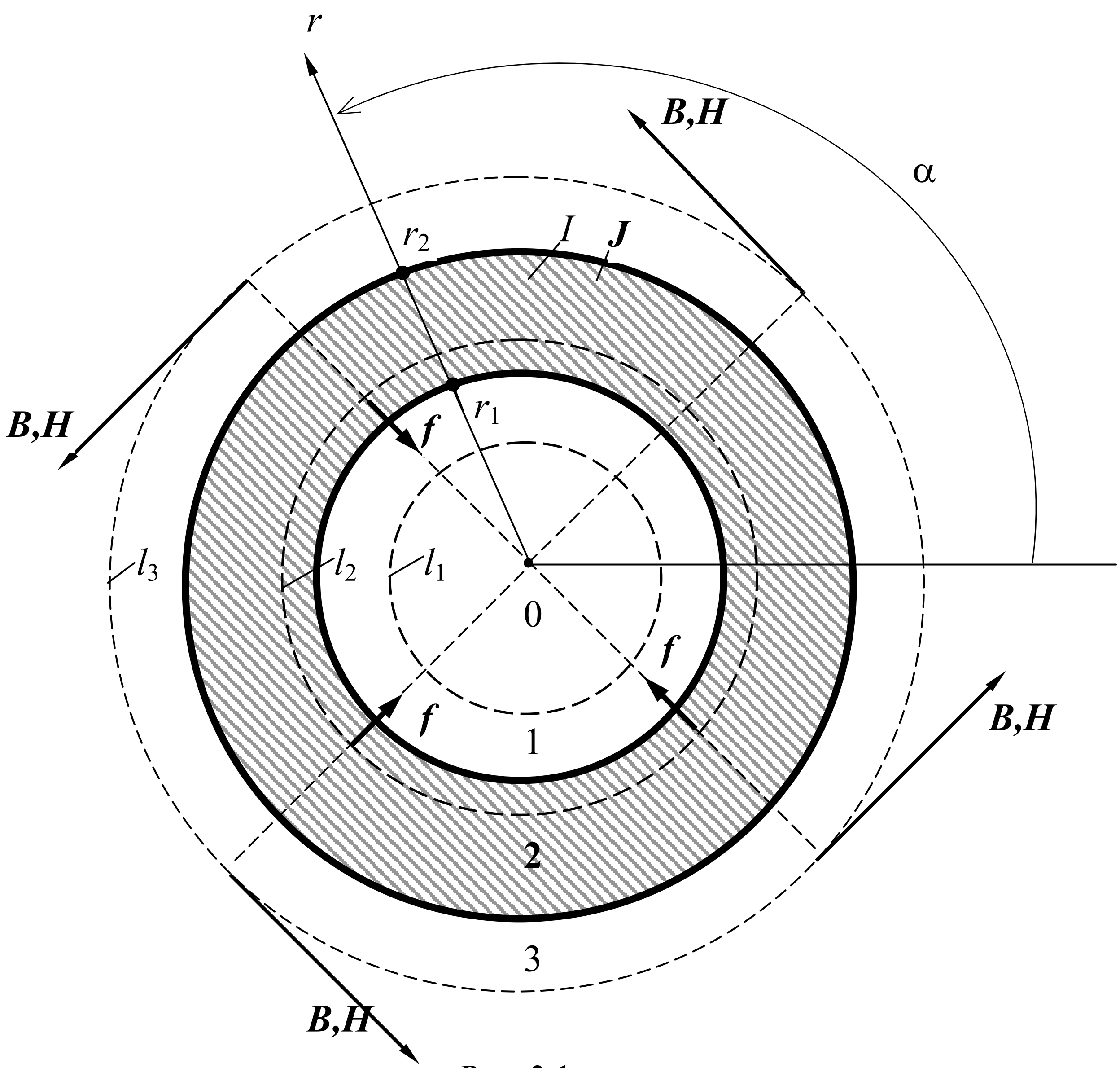


Рис. 3.1

Вектор плотности тока ***J*** в проводнике имеет лишь одну составляющую J_z по оси z перпендикулярно к плоскости рис. 3.1, т. е.

$$J_z = J = \frac{I}{S} \quad , \quad S = \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad , \tag{3.2}$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

Следовательно, согласно (3.1) , (3.2) и рис. 3.1 удельная по объему электродинамическая сила $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ будет иметь только одну составляющую f_r по оси r :

$$f_r = f = f(r) = JB. \tag{3.3}$$

В силу осевой симметрии магнитного поля величина H на линии l постоянна. Поэтому с учетом (3.1) закон полного тока для этой линии может быть записан в виде

$$\oint_l \boldsymbol{Hdl} = \oint_l Hdl = H\oint_l dl = Hl = I_l \quad , \qquad (3.4)$$

где $l = 2\pi r$, а I_l – ток, охватываемый контуром, l.

Следовательно,

$$H = H(r) = \frac{I_l}{2\pi r} \quad . \qquad (3.5)$$

При определении I_l следует учесть, что пространство с проводником (рис. 3.1) имеет три характерных области: 1, 2 и 3, где 1 – полость проводника ($0 \le r < r_1$, где $l=l_1$), область 2 – тело проводника ($r_1 \le r \le r_2$, где $l=l_2$) и 3 – пространство вне проводника ($r > r_2$, где $l = l_3$). Значения I_l в областях 1 и 3 постоянны (не зависят от r) и очевидны из рис. 3.1. Значения же I_l в области 2 зависят от r, поскольку

$$I_l = JS_l(r) \quad , \quad r_1 \le r \le r_2 \quad , \qquad (3.6)$$

где $S_l(r) = \pi(r^2 - r_1^2)$ – площадь сечения проводника, охватываемая контуром $l = l_2$.

ЗАДАЧА 5

Между проводниками с токами в зависимости от их направления возникают силы притягивания или отталкивания, обусловленные магнитным полем. Ферромагнитные тела (т. е. различные конструктивные элементы устройств, выполненные из стали) влияют на распределение и интенсивность магнитного поля, а следовательно, и на указанные силы. Это влияние зачастую необходимо учитывать, например, при конструировании электрических аппаратов, электрических машин, линий электропередач и др.

Пусть имеется система из двух прямолинейных параллельных токоведущих проводов 1 и 2 с постоянным током I противоположного направления, находящихся в воздухе с магнитной проницаемостью $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м и расположенных параллельно плоской поверхности ферромагнитного тела (рис. 5.1,*а*) с магнитной проницаемостью $\mu >> \mu_0$. Диаметры проводов малы по сравнению со всеми другими геометрическими размерами системы. Используя рис. 5.1,*а* и данные табл. 5.1, требуется:

1) получить (вывести, доказать, обосновать) каждое из приведенных ниже соотношений (5.1)–(5.5);

2) рассчитать и построить на рис. 5.1,*а* векторы индукций $\boldsymbol{B}_{01}$ и $\boldsymbol{B}_{02}$ на оси проводов 1 и 2, а также векторы действующих на них удельных сил $\boldsymbol{F}_{01}$ и $\boldsymbol{F}_{02}$ без учета влияния ферромагнитного тела (удельных, т. е. относящихся к участкам, проводов длиной 1м);

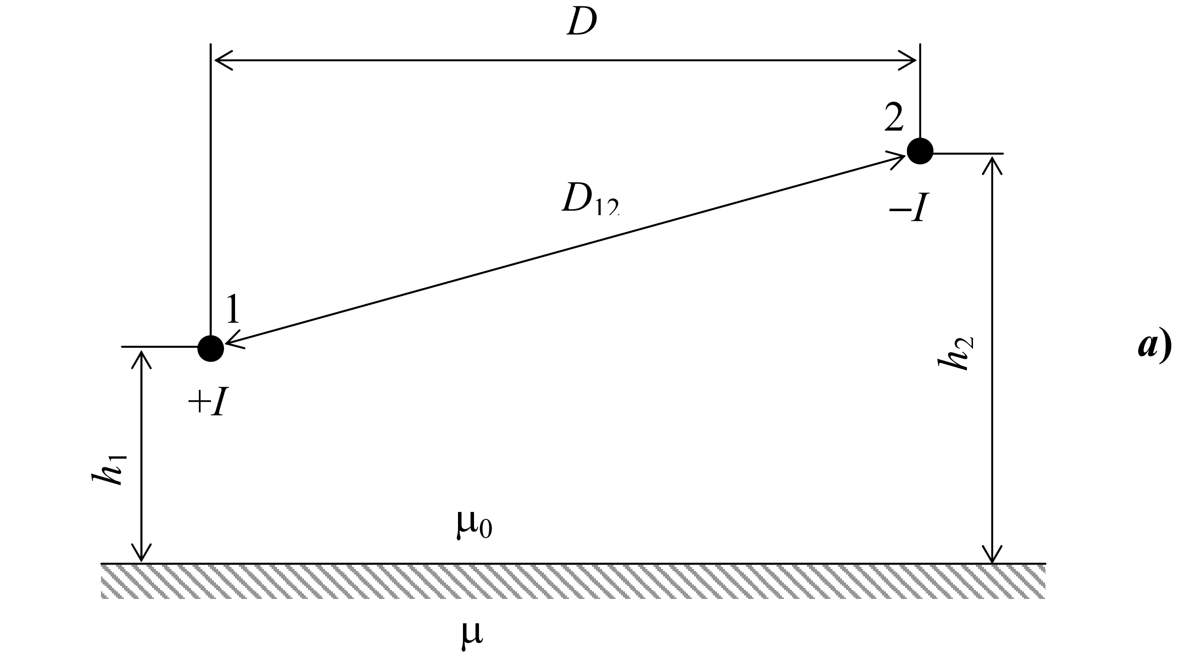
3) рассчитать и построить на рис. 5.1,*б* векторы индукций $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ на осях проводов 1 и 2, а также векторы действующих на них удельных сил $\boldsymbol{F}_{01}$ и $\boldsymbol{F}_{02}$ с учетом влияния ферромагнитного тела;

4) рассчитать относительные погрешности δ_1 и δ_2 приближенных значений сил F_{01} и F_{02}.

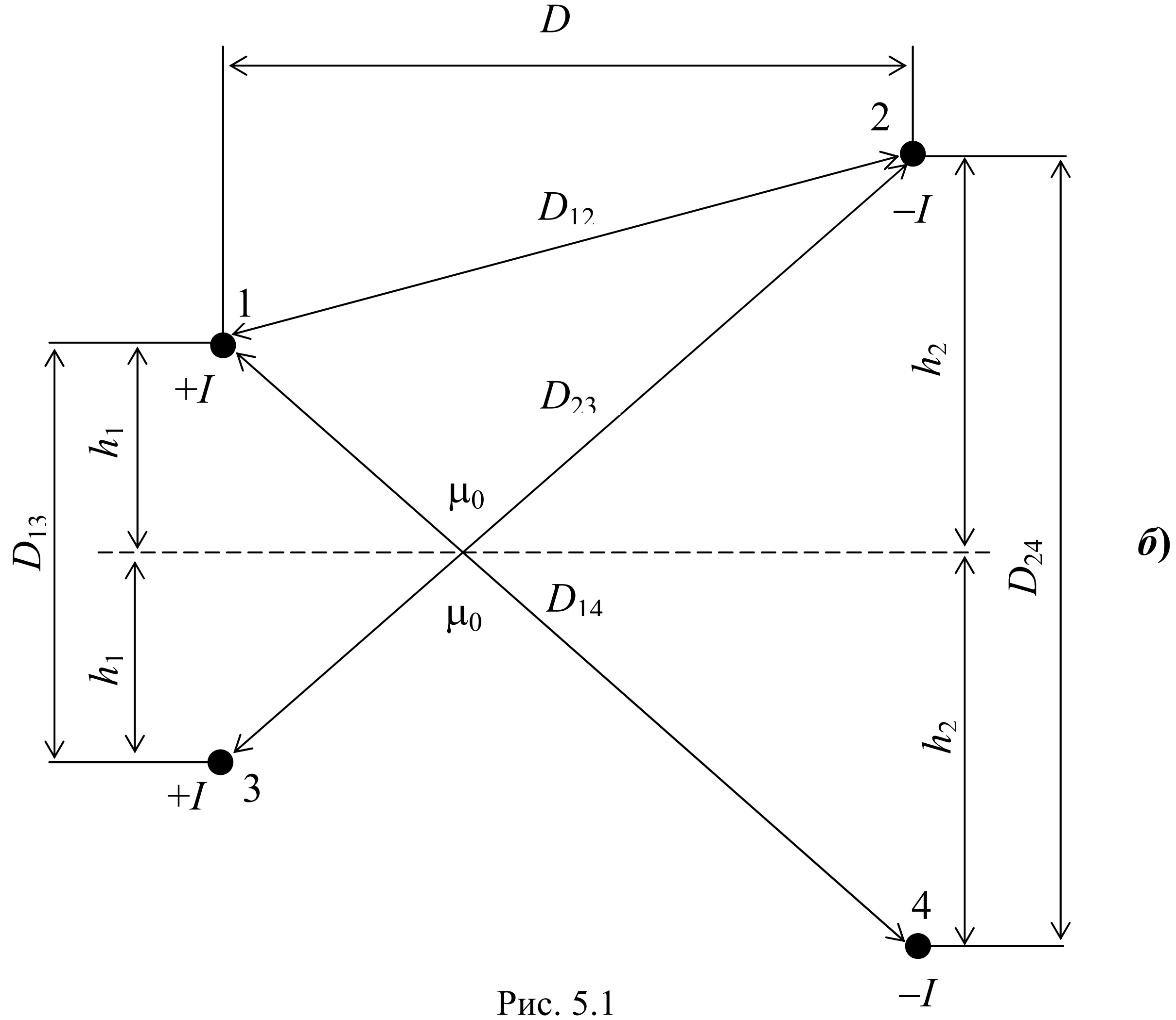
5) выполнить пп. 2)–4) при одинаковых направлениях тока I в проводниках.

Таблица 5.1

Последняя, предпоследняя или третья от конца цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
I, А	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
Значение I выбирается по последней цифре шифра										
D, см	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
Значение D выбирается по предпоследней цифре шифра										
h_1, см	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
h_2, см	7	9	11	13	15	5	7	9	11	13
Значения h_1 и h_2 выбираются по третьей от конца цифре шифра										



D
2
D12
−I
1
h2
a)
+I
h1
μ0
μ



D
2
D12
−I
1
+I
h2
D23
h1
μ0
D13
б)
D14
D24
μ0
h1
h2
+I
3
4
−I

Рис. 5.1

Указания

Для решения этой задачи сначала необходимо проработать материал, изложенный в [1], с. 122 или в [2], с. 270…272.

В силу малости диаметров проводов их можно при расчетах заменить токовыми нитями, совмещенными с осевыми линиями проводов. Тогда без учета ферромагнитного тела ($h_1 = h_2 = \infty$) в соответствии с законом полного тока и рис. 5.1,*а* искомые величины индукций определяются выражениями

$$B_{01} = B_{02} = B_0 = \mu_0 H_0 \quad , \quad H_0 = \frac{I}{2\pi D_{12}} \quad . \tag{5.1}$$

При этом направления векторов $\boldsymbol{B}_{01}$ и $\boldsymbol{B}_{02}$, могут быть найдены с помощью правила буравчика (правоходного винта). Величины искомых сил равны

$$F_{01} = F_{02} = F_0 = B_0 Il \quad , \quad l = 1 \text{ м} \quad . \tag{5.2}$$

Направления же этих сил, т. е. векторов $\boldsymbol{F}_{01}$ и $\boldsymbol{F}_{02}$ можно определить по правилу левой руки (вектор индукции перпендикулярно входит в ладонь, четыре вытянутых пальца направлены по току, тогда отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы).

Так как $\mu >> \mu_0$, то в соответствии с методом зеркальных отображений при описании магнитного поля в воздухе ферромагнитное тело может быть заменено соответствующей дополнительной парой токовых нитей 3 и 4 (рис. 5.1,*б*). Тогда согласно методу наложения (суперпозиции)

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{13} + \boldsymbol{B}_{14} \quad , \quad \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{B}_{23} + \boldsymbol{B}_{24} \quad , \tag{5.3}$$

где величина $B_{12} = B_{21} = B_0$, а по аналогии с (5.1) и с учетом рис. 5.1,*б*

$$B_k = \mu_0 H_k \quad , \quad H_k = \frac{I}{2\pi D_k} \quad , \quad k = 13,\ 14,\ 23,\ 24 \quad , \tag{5.4}$$

причем направления соответствующих векторов могут быть найдены с помощью правила буравчика.

Теперь векторы $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ можно определить путем графического сложения векторов индукций в соответствии с векторными уравнениями (5.3). Затем по аналогии с (5.2) находим и величины сил:

$$F_n = B_n Il \quad , \quad n = 1,\ 2 \quad . \tag{5.5}$$

Направления же этих сил как векторов можно также найти по правилу левой руки.

Искомые погрешности определяются выражениями

$$\delta_n = (1 - F_{0n} / F_n) \cdot 100\ \% \quad , \quad n = 1,\ 2 \quad .$$