РАЗДЕЛ 2. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

* 1. Исходные данные 1
  2. Требования 14

РАЗДЕЛ 3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ 18

* 1. Исходные данные для исследования 18
  2. Задание на контрольную работу 19
  3. Модели объекта в виде обыкновенных дифференциальных уравнений 21
  4. Модели объекта в форме пространства состояний 25
  5. Определение устойчивости объекта по корням характеристического уравнения 31
  6. Получение передаточных функций объекта 33
  7. Определение устойчивости объекта при помощи критериев устойчивости 34
     1. [Алгебраический критерий устойчивости Гурвица 35](#_TOC_250020)
     2. [Частотный критерий устойчивости Михайлова 37](#_TOC_250019)
  8. Определение временных и частотных характеристик исследуемого объекта 41
     1. [Переходные характеристики 41](#_TOC_250018)
     2. [Амплитудно-фазовые частотные характеристики 43](#_TOC_250017)
     3. [Логарифмические частотные характеристики……………………………………………………45](#_TOC_250016)

**Раздел 2. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ**

* 1. **ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**

Общее наименование темы контрольной работы: «Анализ и синтез частотного и позиционного электроприводов постоянного тока».

В качестве исходных данных заданными являются параметры двигателя постоянного тока (ДПТ), а также метод синтеза и требуемые показатели качества синтезируемых на основе ДПТ частотного и позиционного электроприводов постоянного тока.

Варианты параметров ДПТ, требуемых показателей качества синтезируемых приводов и метода синтеза приведены в *Табл. 2.1*.

*Табл. 2.1. Варианты параметров ДПТ и требуемых показателей качества приводов.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | *I ян* | *н* | *M сн* | *J* | *Lя* | *Rя* | *Kе* | *Kм* | *tпп* | σ | max | *X*max | *x* | *M* |  | Способ синтеза |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8 | 6,1 | 314,1 | 1,4 | 0,042 | 0,46 | 2,50 | 0,010 | 10,5 | 0,55 | 10 | 0,02 | 0,5 | 4,3 | 1,81 | 64 | Сол. |

В таблице использованы следующие обозначения и сокращения:

1. *I ян* , А – ток якоря ДПТ номинальный.
2. *н* , рад/с – номинальная частота вращения вала якоря ДПТ.
3. *M сн* , Н·м – номинальный момент сопротивления на валу якоря ДПТ.
4. *J* , кг·м2 – момент инерции вала якоря ДПТ.
5. *Lя* , мГн – индуктивность обмотки якоря ДПТ.
6. *Rя* , Ом – сопротивление обмотки якоря ДПТ.
7. *Kе* , В·с/рад – электрическая постоянная ДПТ.
8. *K м* , Н·м/А – магнитная постоянная ДПТ.
9. *tпп* , с – требуемое время переходного процесса для синтезируемых электроприводов.
10. σ, % – требуемое перерегулирование для синтезируемых электроприводов.
11. max – максимальная установившаяся ошибка регулирования

для синтезируемых электроприводов.

*X* max

– амплитуда задающего гармонического воздействия

электроприводов.

1. *x* , рад/с – частота задающего гармонического воздействия

электроприводов.

1. *M* – требуемый показатель колебательности синтезируемых электроприводов.
2.  , ° – требуемый запас устойчивости по фазе для синтези-

руемых электроприводов.

1. «Сол.» – способ В. В. Солодовникова.
2. «С-С» – способ Е. А. Санковского – Г. Г. Сигалова.
3. «Бес.» – способ В. Н. Бесекерского.

При подборе данных, приведенных в таблице, для получения моделей двигателей, близких по характеристикам к реально существующим ДПТ выдерживались следующие условия:

*Lя*

*T* 

*эл*

*R*

*я*

[0,01; 0,1] ; *T*  *J* [0,1; 1];

*ян*

*м*

*K I*

*эм*

*K*  *Kе**н*

[0,5; 1,5] ; *K* 

*M сн*

[0,05; 0,5].



*R*

*I*

*я ян*

*н*

*ян м*

*I*

*K*

* 1. **ТРЕБОВАНИЯ**

При выполнении контрольных работ требуется:

1. Получить математическую модель (ММ) ДПТ, где входным воздействием является напряжение питания ДПТ ( *u* ), возму- щающим воздействием является момент нагрузки ДПТ ( *M н* ), а выходной переменной является частота вращения вала рото- ра (якоря) ДПТ (*ω*).
2. Получить ММ ДПТ, где входным воздействием является на- пряжение питания ДПТ ( *u* ), возмущающим воздействием яв- ляется момент нагрузки ДПТ ( *M н* ), а выходной переменной является угол поворота вала ротора (якоря) ДПТ (*φ*).
3. На основе найденных моделей получить общую математиче- скую модель ДПТ в стандартной форме пространства состоя- ний:

(2.1)

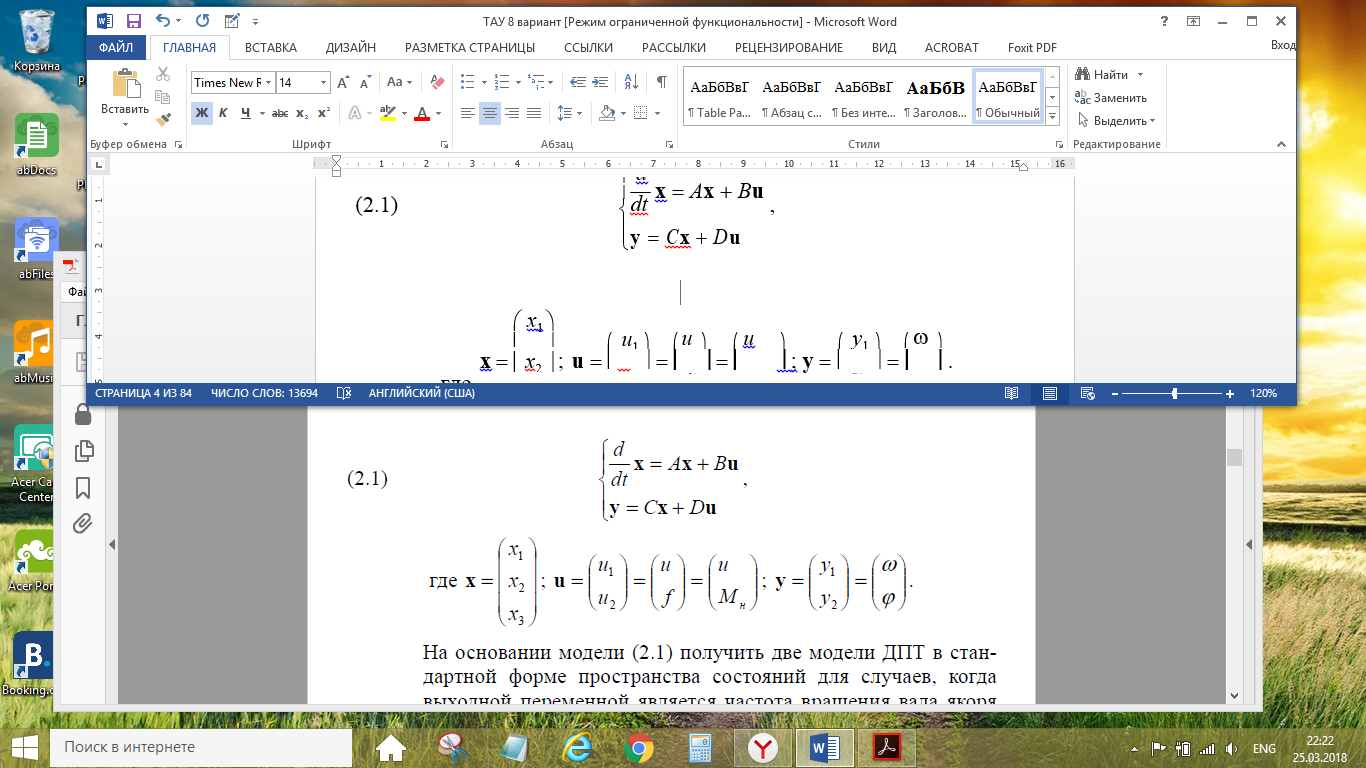
 *d*

*dt*



**x**  *A***x**  *B***u** ,

**y**  *C***x**  *D***u**



На основании модели (2.1) получить две модели ДПТ в стан- дартной форме пространства состояний для случаев, когда выходной переменной является частота вращения вала якоря **y** *= у1 = ω* и когда выходной переменной является угол пово- рота вала якоря **y** *= у2 = φ*.

1. По найденным двум последним моделям в форме пространст- ва состояний определить устойчивость ДПТ. Для этого для каждой из двух моделей получить характеристическое урав-

нение объекта det(*E*  *A*)  0 и найти корни уравнения в сре-

де MATLAB.

1. На основе модели (2.1) получить четыре передаточных функ-

ции (ПФ) ДПТ

1. По каждой полученной передаточной функции ДПТ опреде- лить устойчивость ДПТ при помощи критериев устойчивости Гурвица и Михайлова.
2. Для каждой полученной передаточной функции определить в среде моделирования MATLAB переходную характеристику (ПХ, step()), амплитудно-фазовую частотную характери- стику (АФЧХ, nyquist()), логарифмическую амплитудно- фазовую частотную характеристику (ЛАФЧХ, bode()).
3. По моделям, полученным в пунктах 1 и 2, создать две струк-

турные схемы (СС) ДПТ. По правилам структурных преобра- зований привести полученные СС к виду, приведенному на *Рис. 2.1*. Для каждой СС в среде Simulink построить ПХ ДПТ по управляющему воздействию и по возмущающему воздей- ствию (всего будет четыре ПХ). Найденные ПХ должны сов- падать по виду с ПХ, полученными в пункте 6.

*u*(*t*)

 (*t*)

*f* (*t*)

*y*(*t*)  *y*1 *или y*2

*W*2

*yос* (*t*)

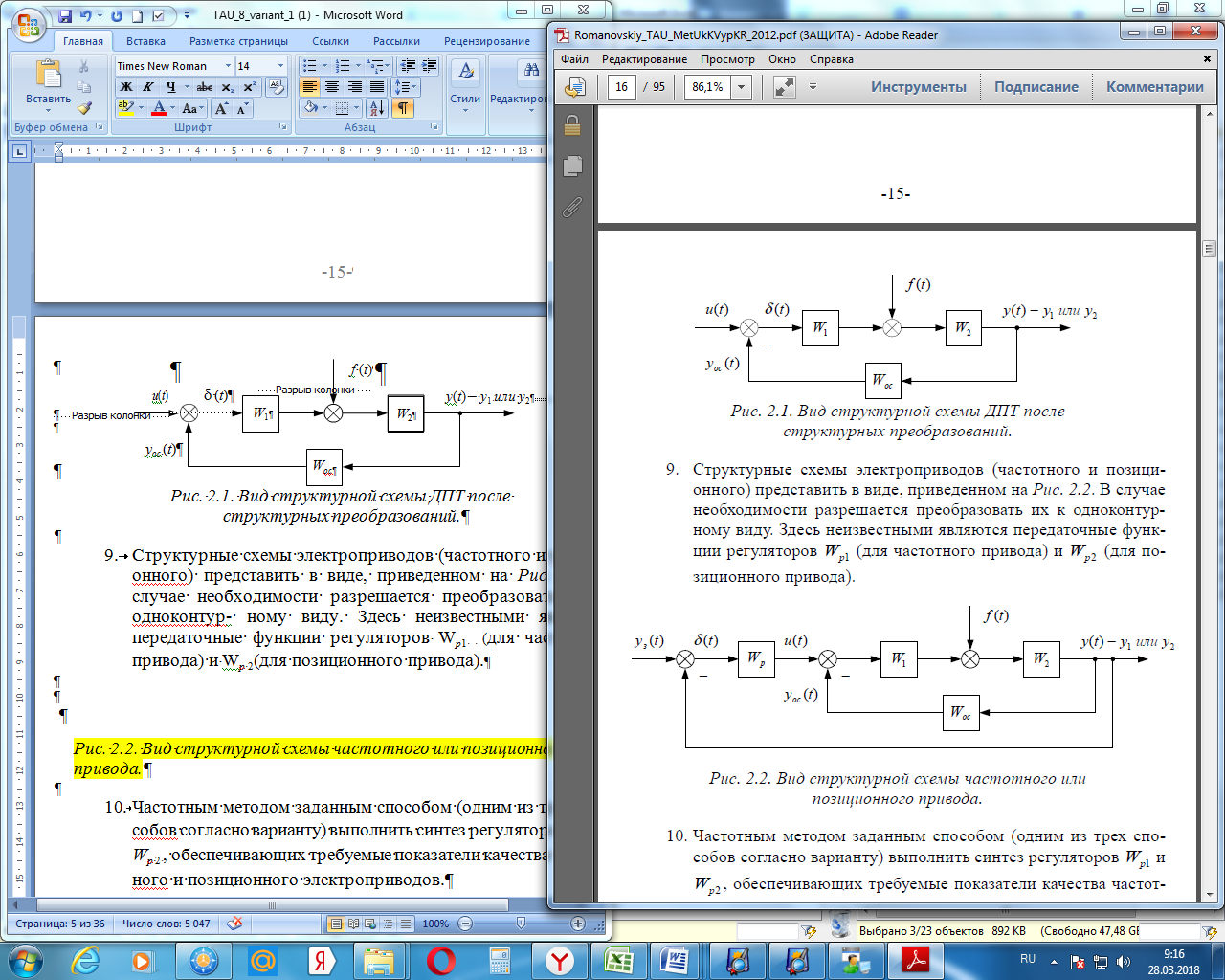
*Wос*

*W*1

*Рис. 2.1. Вид структурной схемы ДПТ после структурных преобразований.*



1. Структурные схемы электроприводов (частотного и позици- онного) представить в виде, приведенном на *Рис. 2.2*. В случае необходимости разрешается преобразовать их к одноконтурному виду. Здесь неизвестными являются передаточные функции регуляторов W*р*1 (для частотного привода) и W*р* 2(для позиционного привода).



*Рис. 2.2. Вид структурной схемы частотного или позиционного привода.*

1. Частотным методом заданным способом (одним из трех спо- собов согласно варианту) выполнить синтез регуляторов *Wр*1 и *Wр* 2 , обеспечивающих требуемые показатели качества частот- ного и позиционного электроприводов.
2. Для каждого из синтезированных приводов определить ПФ по

задающему и ПФ по возмущающему воздействиям (всего по- лучится четыре ПФ).

1. Для каждой полученной передаточной функции определить в среде моделирования MATLAB переходную характеристику (ПХ, step()), амплитудно-фазовую частотную характери- стику (АФЧХ, nyquist()), логарифмическую амплитудно- фазовую частотную характеристику (ЛАФЧХ, bode()).
2. Каждую СС привода собрать в среде Simulink и построить ПХ электропривода по задающему воздействию и по возмущаю- щему воздействию (всего будет четыре ПХ). Найденные ПХ должны совпадать по виду с ПХ, полученными в пункте 11.
3. Оценить соответствие полученных результатов с требуемыми в задании показателями качества.

Дополнительно к указанным требованиям могут быть предъявле- ны требования синтеза позиционного и/или частотного электроприво- дов постоянного тока (приводов на основе ДПТ) другими, более раз- витыми в смысле математического аппарата методами синтеза, обес- печивающими модальное, робастное, оптимальное, адаптивное управ- ление объектом.

Среди таких методов особо следует отметить:

1. Метод синтеза модального управления электроприводом по вектору состояния объекта управления, позволяющий обеспе- чить управление объектом в соответствии с заданным распо- ложением полюсов его характеристического полинома.
2. Метод аналитического конструирования регуляторов, позво- ляющий обеспечить оптимальное управление объектом в смысле квадратичного критерия качества процесса управле- ния объектом или системой.

Требования к синтезу частотного и позиционного электроприво- дов постоянного тока этими методами выдаются преподавателем от- дельно и, как правило, индивидуально.

Также дополнительно к указанным требованиям преподавателем могут быть предъявлены требования синтеза дискретного (цифрового) позиционного и/или частотного электроприводов постоянного тока упомянутыми выше методами при заданном периоде дискретизации процесса управления.

**Раздел 3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

Приведенный ниже пример не следует рассматривать, как пример оформления отчета по контрольной работе. Данный пример раскрывает лишь последовательность этапов и действия, которые должен выполнять студент в процессе выполнения задания по контрольной работе.

* 1. **ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ**

В *Табл. 3.1* приведены параметры двигателя постоянного тока и требуемые показатели качества частотного и позиционного электро- приводов постоянного тока.

*Табл. 3.1. Параметры ДПТ и требуемые показатели качества синтезируемых приводов.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *iяк* | *ω н* | *Мсн* | *]* | *Lя* | *Rя* | *Ке* | *КМ* | *tпп* | *σ* | *δ mах* | *Х mах* | *ωх* | *М* | *∆φ* |
| *A* | рад/с | H·м | кг·м2 | мГн | Ом | *B · c/рад* | *H · м/А* | с | % | – | – | рад/с | – | град |
| 3,3 | 314,1 | 0,9 | 0,025 | 0,27 | 3,5 | 0,021 | 11,7 | 0,15 | 15 | 0,12 | 1 | 5,7 | 1,9 | 15 |

Синтез приводов следует производить частотным методом. При этом синтез частотного привода следует выполнить по методике Е. А. Санковского – Г. Г. Сигалова, а синтез позиционного привода следует выполнить по методике В. В. Солодовникова.

В *Табл. 3.1* использованы следующие условные обозначения:

*iяк* – номинальный ток якоря ДПТ;

*ωн* – номинальная частота вращения вала якоря;

*Мсн* – номинальный момент сопротивления (нагрузки) на валу якоря ДПТ;

*]* – момент инерции вала якоря ДПТ; *Lя* – индуктивность обмотки якоря ДПТ; *Rя* – сопротивление обмотки якоря ДПТ;

*Ке* – электрическая постоянная ДПТ;

*КМ* – магнитная постоянная ДПТ;

*tпп* – требуемое время переходного процесса для синтезируе- мых электроприводов;

*σ* – требуемое перерегулирование для синтезируемых элек- троприводов;

*δmах* – максимальная установившееся ошибка регулирования для синтезируемых электроприводов;

*Хmах* – амплитуда задающего гармонического воздействия при- водов;

*ωх* – частота задающего гармонического воздействия приво- дов;

*М* – требуемый показатель колебательности синтезируемых электроприводов;

*∆φ* – требуемый запас устойчивости по фазе для синтезируе- мых приводов.

* 1. **ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ**

1. Получить математическую модель ДПТ:
   1. у которого входным воздействием является напряжение питания ДПТ, возмущающим воздействием является мо- мент нагрузки ДПТ, а выходной переменной служит часто- та вращения вала якоря ДПТ;
   2. у которого входные и возмущающие воздействия такие же, а выходной переменной является угол поворота вала якоря ДПТ.
2. На основе полученных математических моделей составить общую модель и две частные модели объекта в стандартной форме пространства состояний.
3. Определить устойчивость объекта управления по найденным частным моделям объекта управления в форме пространства состояний.
4. На основании общей модели объекта управления в стандарт- ной форме пространства состояний получить четыре переда- точные функции ДПТ, со следующими входами и выходами (см. *Табл. 3.2*).

*Табл. 3.2. Входные и выходные сигналы передаточных функций ДПТ.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Вход | Выход |
| 1 | Напряжение | Частота |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | Момент сопротивления | Частота |
| 3 | Напряжение | Угол поворота |
| 4 | Момент сопротивления | Угол поворота |

1. По каждой полученной передаточной функции ДПТ опреде- лить устойчивость ДПТ при помощи критериев устойчивости Гурвица и Михайлова.
2. Для каждой передаточной функции определить в компьютер- ной среде MATLAB:
   1. переходную характеристику;
   2. амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ,

частотный годограф Найквиста);

* 1. логарифмическую амплитудно-фазовую частотную харак- теристику (ЛАФЧХ).

1. По математическим моделям ДПТ построить две структурные схемы. По правилам структурных преобразований привести эти схемы к стандартному одноконтурному виду. Для каждой схемы в среде Simulink построить переходные характеристи- ки ДПТ по задающему и по возмущающему воздействиям.
2. Провести синтез частотного и позиционного электроприводов. Для этого частотным методом, используя соответствующий способ (методику), выполнить синтез последовательных регу- ляторов, обеспечивающих требуемые показатели качества частотного и позиционного приводов.
3. Для каждого из синтезированных приводов определить пере- даточные функции по задающему и возмущающему воздейст- виям.
4. Для каждой передаточной функции определить в компьютер- ной среде MATLAB:
   1. переходную характеристику;
   2. амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ,

частотный годограф Найквиста);

* 1. логарифмическую амплитудно-фазовую частотную харак- теристику (ЛАФЧХ).

1. Каждую структурную схему привода собрать в компьютерной среде MATLAB (Simulink) и построить переходные характе- ристики по задающему и возмущающему воздействиям.
2. Оценить соответствие полученных результатов с требуемыми показателями качества.
3. Синтезировать системы оптимального управления ДПТ (оп-

тимальный частотный привод и оптимальный позиционный

привод) методом аналитического конструирования регулято- ров. Построить переходные характеристики этих приводов по задающему воздействию.

* 1. **МОДЕЛИ ОБЪЕКТА В ВИДЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Для получения математических моделей, описывающих поведе- ние элементов и систем автоматического регулирования, используют три основных способа:

* аналитический;
* экспериментальный;
* комбинированный.

В контрольной работе применяется аналитический метод получения математической модели двигателя постоянного тока. Аналитический способ применяется для построения моделей объектов и систем хорошо изученной природы. В этом случае имеется вся необходимая информация о работе соответствующего объекта или системы.

В результате идеализации физических объектов или систем, как правило, появляются модели в виде систем дифференциальных урав- нений с сосредоточенными параметрами. Типичными представителя- ми технических систем, допускающих такое представление, являются различные электромеханические системы.

Подобные модели систем в наглядной форме отражают физиче- скую природу явлений, протекающих в системе, а также внутреннее устройство системы. Однако методы теории управления обычно абст- рагируются от конкретной природы системы и физической природы процессов, протекающих в ней.

Для получения математической модели некоторого динамическо- го объекта или системы обычно придерживаются определенной ниже последовательности действий.

1. Разбивают всю систему на типовые звенья, имеющие одну входную и одну выходную величины. В случае электродвига- теля постоянного тока можно выделить следующие два звена:
   1. якорная цепь;
   2. механическая часть, с которой связана нагрузка.
2. Определяют входные и возмущающие воздействия, а также выходные величины (см. *Табл. 3.3*).

*Табл. 3.3. Входные и возмущающие воздействия, а также выходные величины ДПТ.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Входное  воздействие | Возмущающее  Воздействие | Выходные  Величины |
| 1 | Напряжение  питания | Момент  сопротивления | Частота вращения  Якоря |
| 2 | Напряжение  питания | Момент  сопротивления | Угол поворота якоря |

1. Принимают некоторые допущения. В случае с ДПТ обычно принимают следующие основные допущения:
   1. пренебрегают реакцией якоря электродвигателя;
   2. магнитный поток возбуждения считают постоянным:

*ФВ = const.*

1. Записывают уравнения, описывающие исследуемую систему, используя аналоги законов Ома и Кирхгофа в формулировках соответствующего энергетического домена.

В контрольной работе на основании этих законов можно записать два уравнения. Первым из этих уравнений будет уравнение равновесия якорной цепи:

(3.1)

где *Е = Ке \*W* – противо-ЭДС вращения.

После подстановки в уравнение (3.1) значения противо-ЭДС вра- щения получится следующее уравнение:

Вторым из этих уравнений будет уравнение моментов на валу электродвигателя (уравнение движения). Оно имеет вид:

где *Мд = КМ · iя* – момент движущих сил, приложенных к ротору;

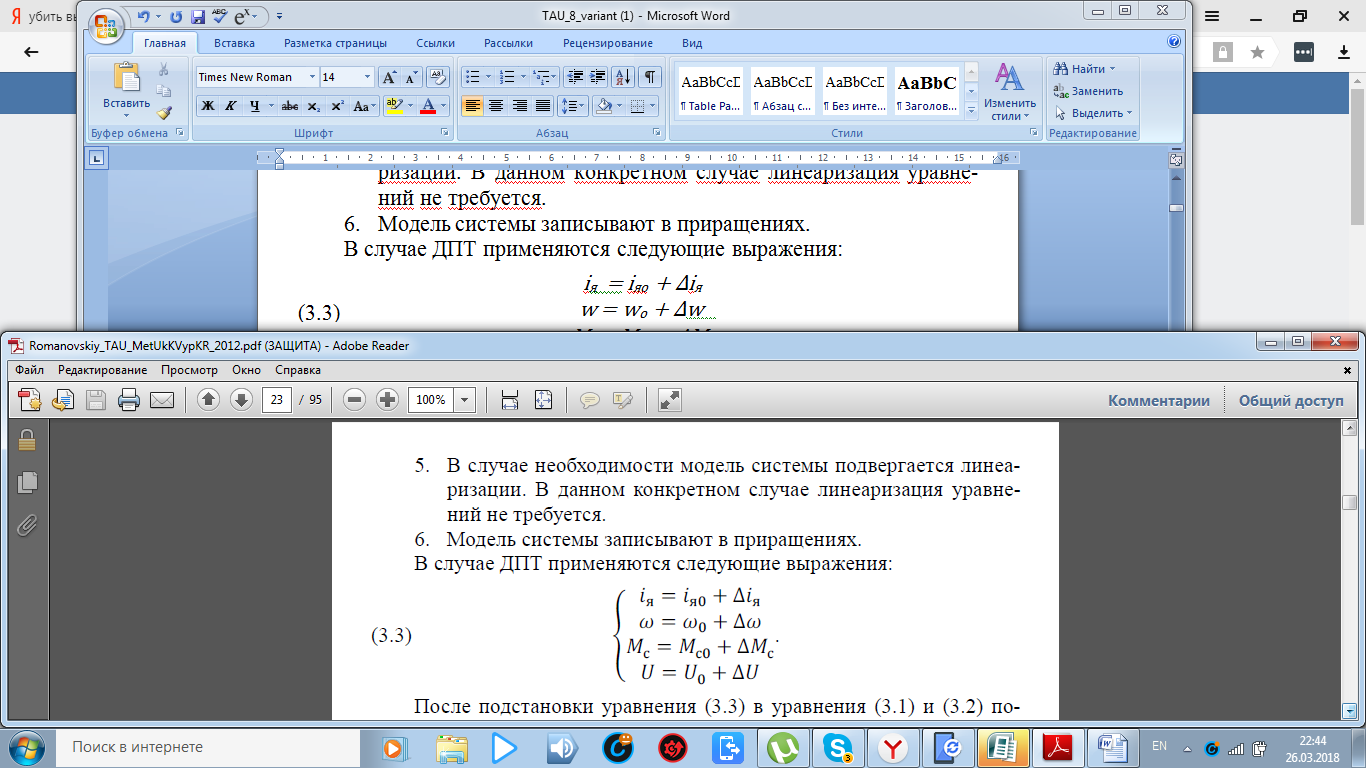
*Мс -* момент сил сопротивления.

После исключения промежуточной переменной *Мд* в уравнении движения электродвигателя получится следующее уравнение:

(3.2)  *= КМ · iя - Мс*.

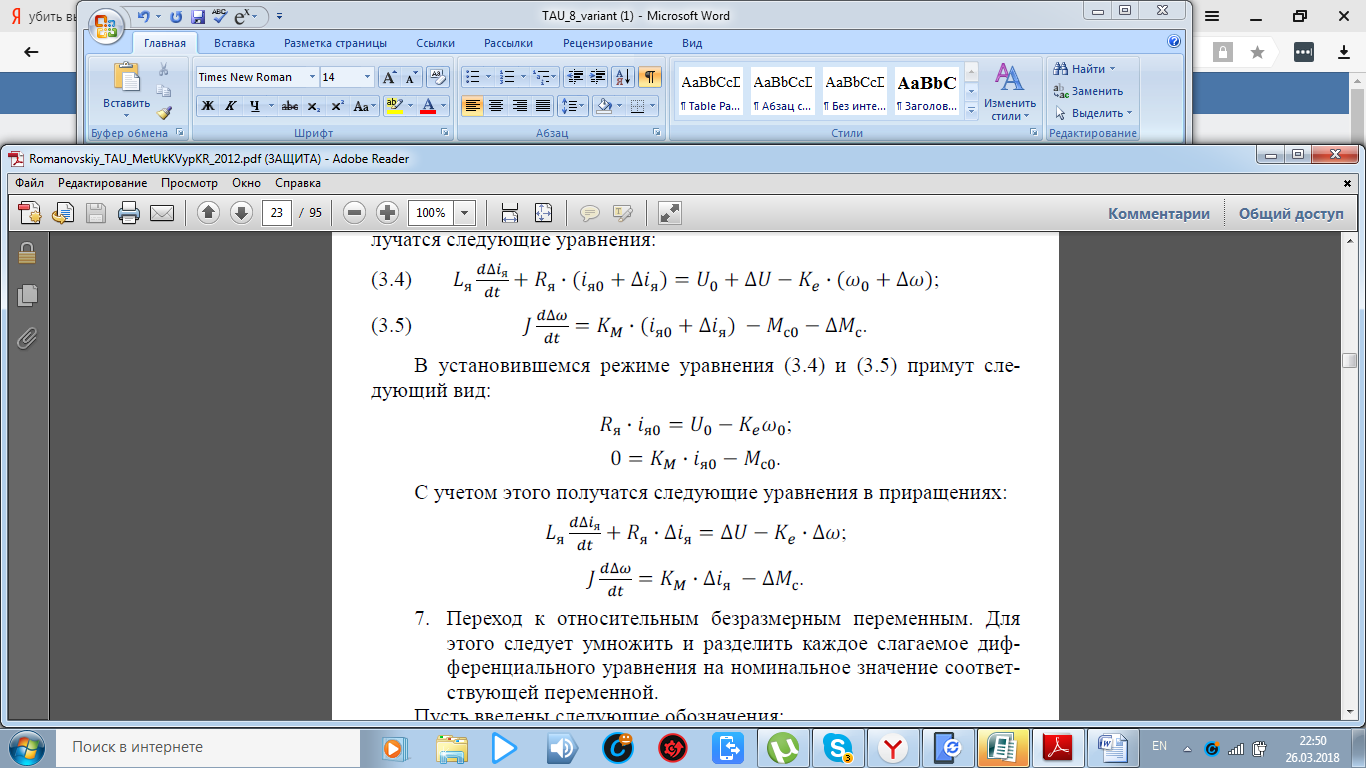
1. В случае необходимости модель системы подвергается линеа- ризации. В данном конкретном случае линеаризация уравне- ний не требуется.
2. Модель системы записывают в приращениях.

В случае ДПТ применяются следующие выражения:

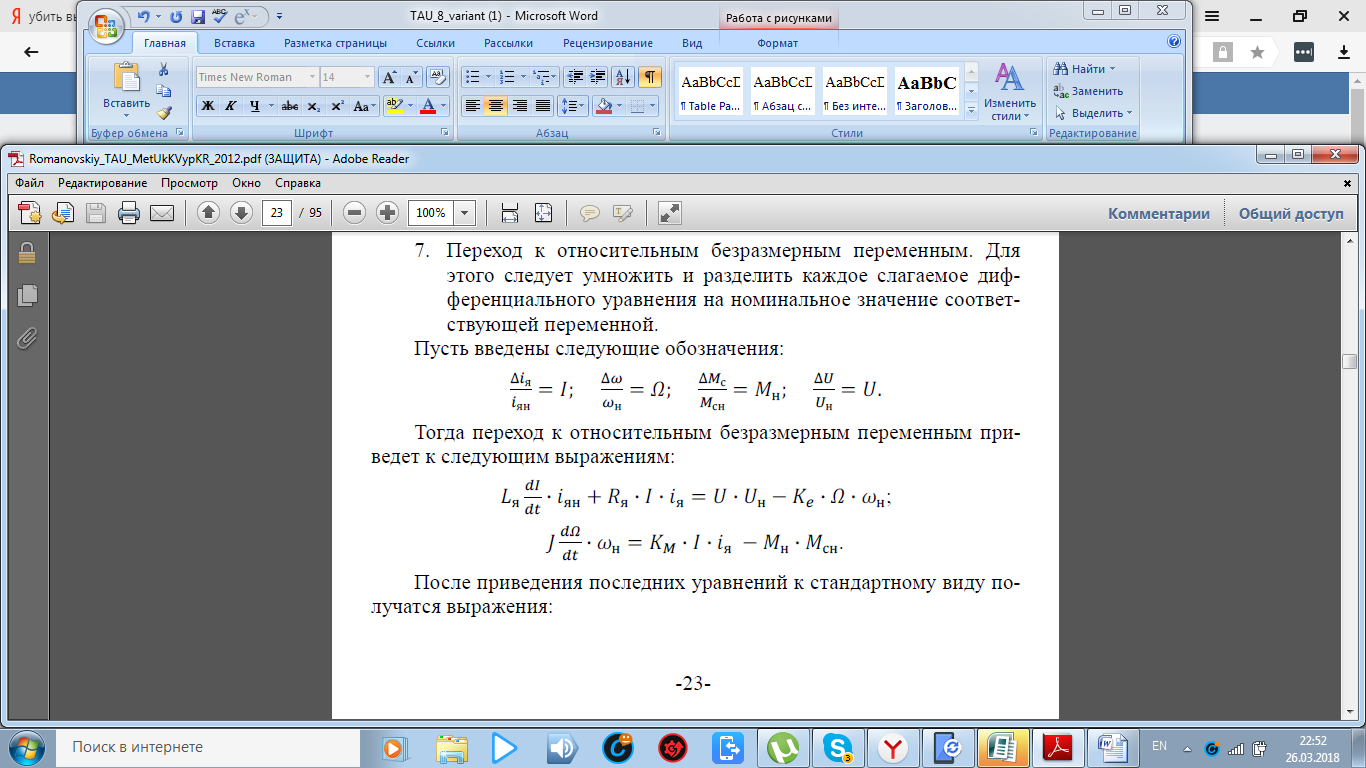


(3.3)

После подстановки уравнения (3.3) в уравнения (3.1) и (3.2) получатся следующие уравнения:

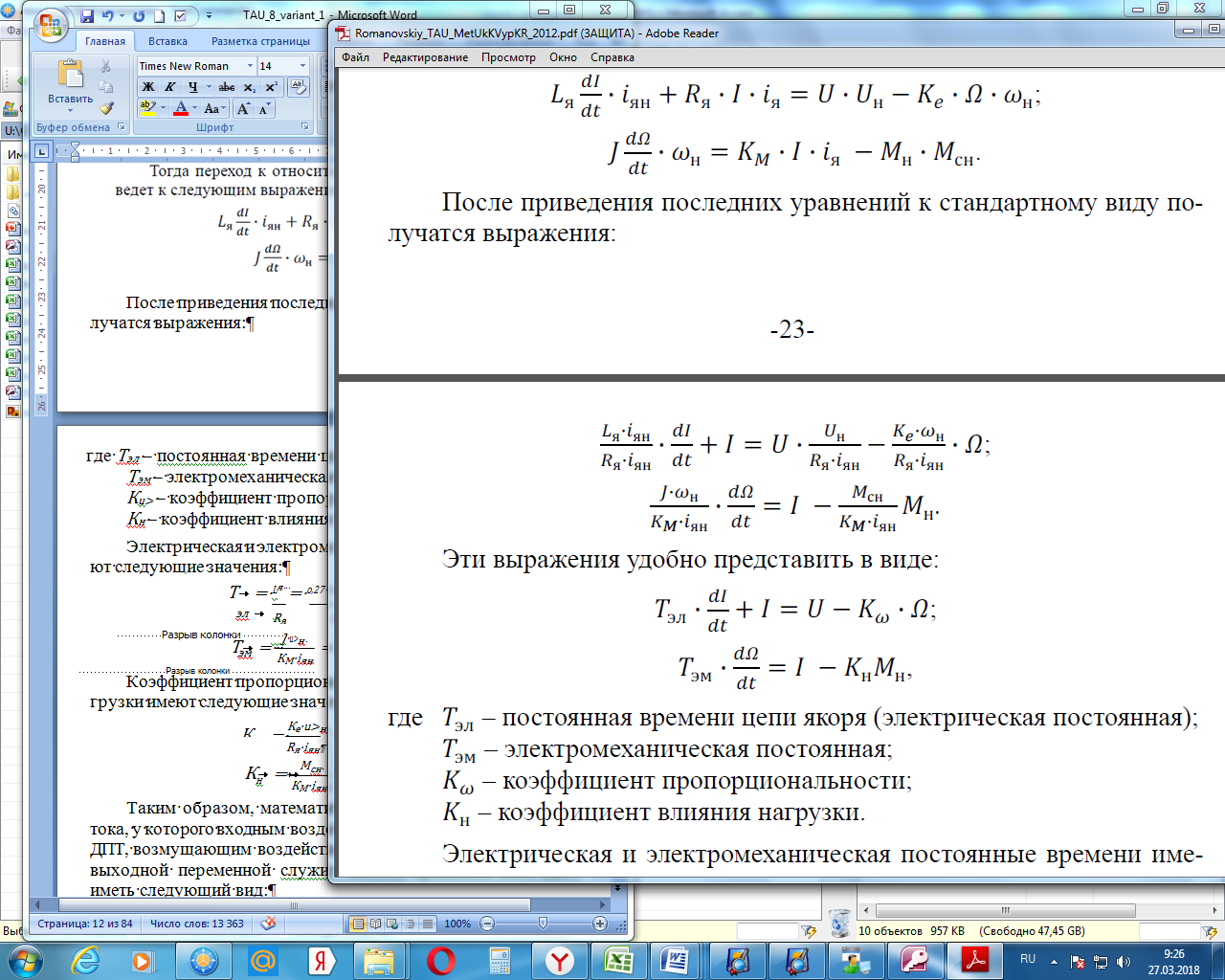


1. Переход к относительным безразмерным переменным. Для этого следует умножить и разделить каждое слагаемое диф- ференциального уравнения на номинальное значение соответ- ствующей переменной.

Пусть введены следующие обозначения:

*dt*

После приведения последних уравнений к стандартному виду по- лучатся выражения:

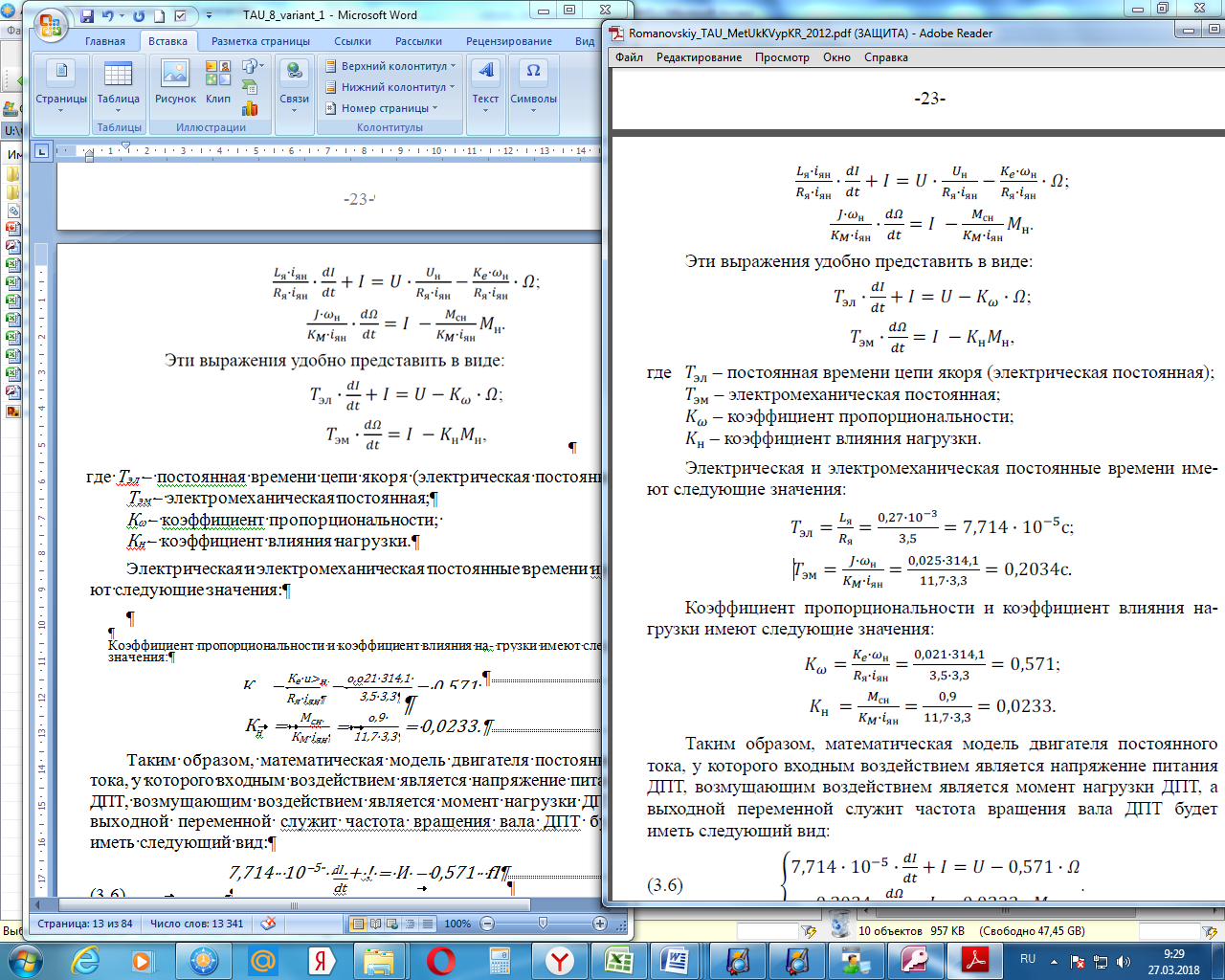


где *Тэл* – постоянная времени цепи якоря (электрическая постоянная);

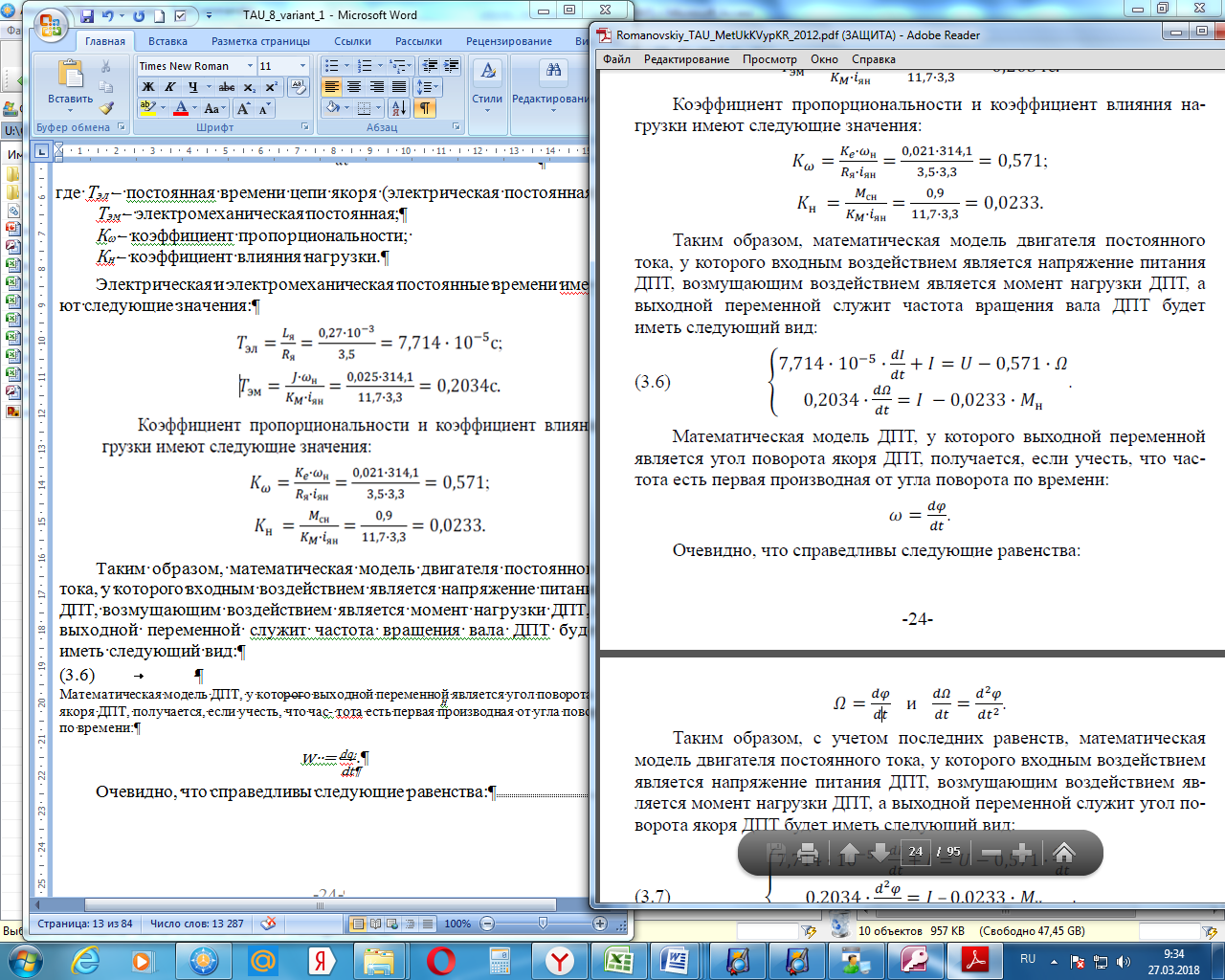
*Тэм* – электромеханическая постоянная;

*Кω* – коэффициент пропорциональности; *Кн* – коэффициент влияния нагрузки.

Электрическая и электромеханическая постоянные времени име- ют следующие значения:



Таким образом, математическая модель двигателя постоянного тока, у которого входным воздействием является напряжение питания ДПТ, возмущающим воздействием является момент нагрузки ДПТ, а выходной переменной служит частота вращения вала ДПТ будет иметь следующий вид:

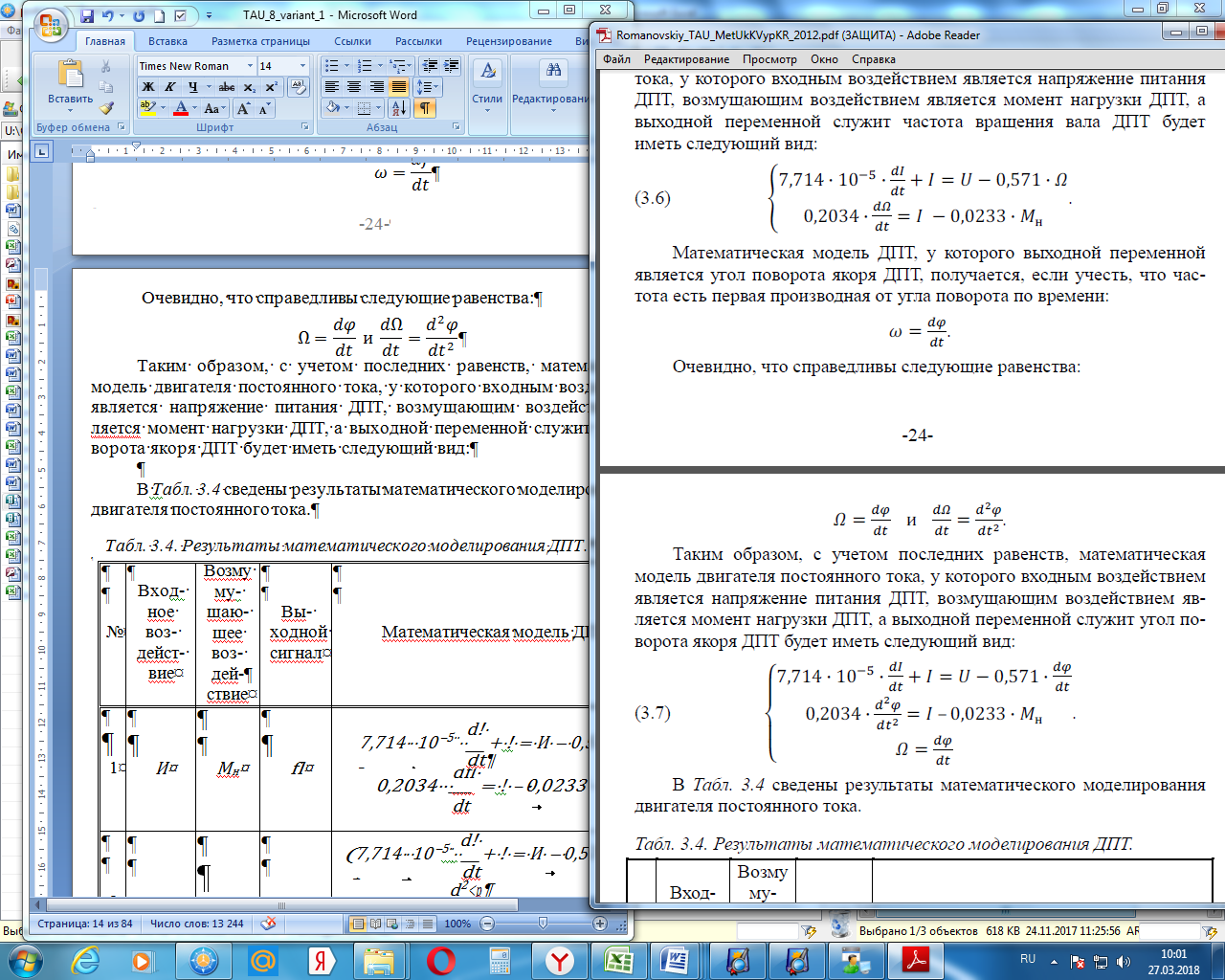
(3.6)  **

Математическая модель ДПТ, у которого выходной переменной является угол поворота якоря ДПТ, получается, если учесть, что частота есть первая производная от угла поворота по времени:

*н*

Очевидно, что справедливы следующие равенства:

Таким образом, с учетом последних равенств, математическая модель двигателя постоянного тока, у которого входным воздействием является напряжение питания ДПТ, возмущающим воздействием яв- ляется момент нагрузки ДПТ, а выходной переменной служит угол по- ворота якоря ДПТ будет иметь следующий вид:



В *Табл. 3.4* сведены результаты математического моделирования двигателя постоянного тока.

*Табл. 3.4. Результаты математического моделирования ДПТ.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Вход- ное воз- дейст- вие | Возму му- щаю- щее воз- дей-  ствие | Вы- ходной сигнал | Математическая модель ДПТ |
| 1 | *U* | *Мн* | *Ω* |  |
| 2 | *U* | *Мн* | *ϕ* |  |

* 1. **МОДЕЛИ ОБЪЕКТА В ФОРМЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ**

Форма пространства состояний – это матричная форма записи

системы дифференциальных уравнений объекта или системы управ- ления, адаптированная для управления путем выделения из нормаль- ной формы Коши алгебраических уравнений, связывающих внутрен- ние координаты объекта или системы с выходными координатами.

Она особенно широко применяется для описания систем управ- ления большого порядка, как правило, с несколькими входами и выхо- дами и с перекрестными связями.

В любой системе управления можно выделить некоторую сово- купность переменных, которые характеризуют ее динамику. Эти пере- менные зависят от времени и могут изменяться при изменении внеш- них воздействий на САУ. Они вместе характеризуют состояние систе- мы в некоторый момент времени, поэтому называются переменными состояния системы.

Число этих переменных фиксировано, является необходимым и достаточным для описания систем управления и определяет порядок системы.

Таким образом, состояние системы в любой фиксированный мо- мент времени можно характеризовать положением вектора состояния САУ в ее пространстве состояний.

Пусть введены обозначения:

**x**(*t*)  (*x*1 (*t*), *x*2

*n* – порядок САУ.

(*t*), .., *xn*

(*t*))*T*

– вектор переменных состояния САУ,

**u**(*t*)  (*u*1

(*t*), *u*2

(*t*), .., *um*

(*t*))*T*

– вектор входных воздействий САУ.

**y**(*t*)  ( *y*1 (*t*), *y*2

(*t*), .., *yq*

(*t*))*T*

– вектор выходных переменных САУ.

Тогда модель непрерывной САУ в пространстве состояний в са- мом общем виде может быть представлена системой из двух матрич- ных уравнений:

(3.8)

где **f** (…)

**x**(*t*)  **f** (*t*, **x**(*t*0 ), **u**(*t*)) ,



 **y**(*t*)  **g**(*t*, **x**(*t*), **u**(*t*))

и **g**(…) – некоторые вектор-функции.

Первое уравнение в системе (3.8) называется матричным уравне- нием состояния системы управления. Из него видно, что вектор со- стояния системы всегда однозначно определяется в любой момент времени через вектор входных переменных системы управления и че- рез начальные значения переменных состояния.

Второе уравнение системы (3.8) называется матричным выход- ным уравнением системы управления. Из него видно, что вектор вы- ходных переменных системы всегда однозначно определяется в любой момент времени через вектор входных переменных системы управле-

ния и через вектор переменных состояния системы.

Если система автоматического управления является линейной и стационарной динамической системой, то ее модель в пространстве состояний представляется в виде:

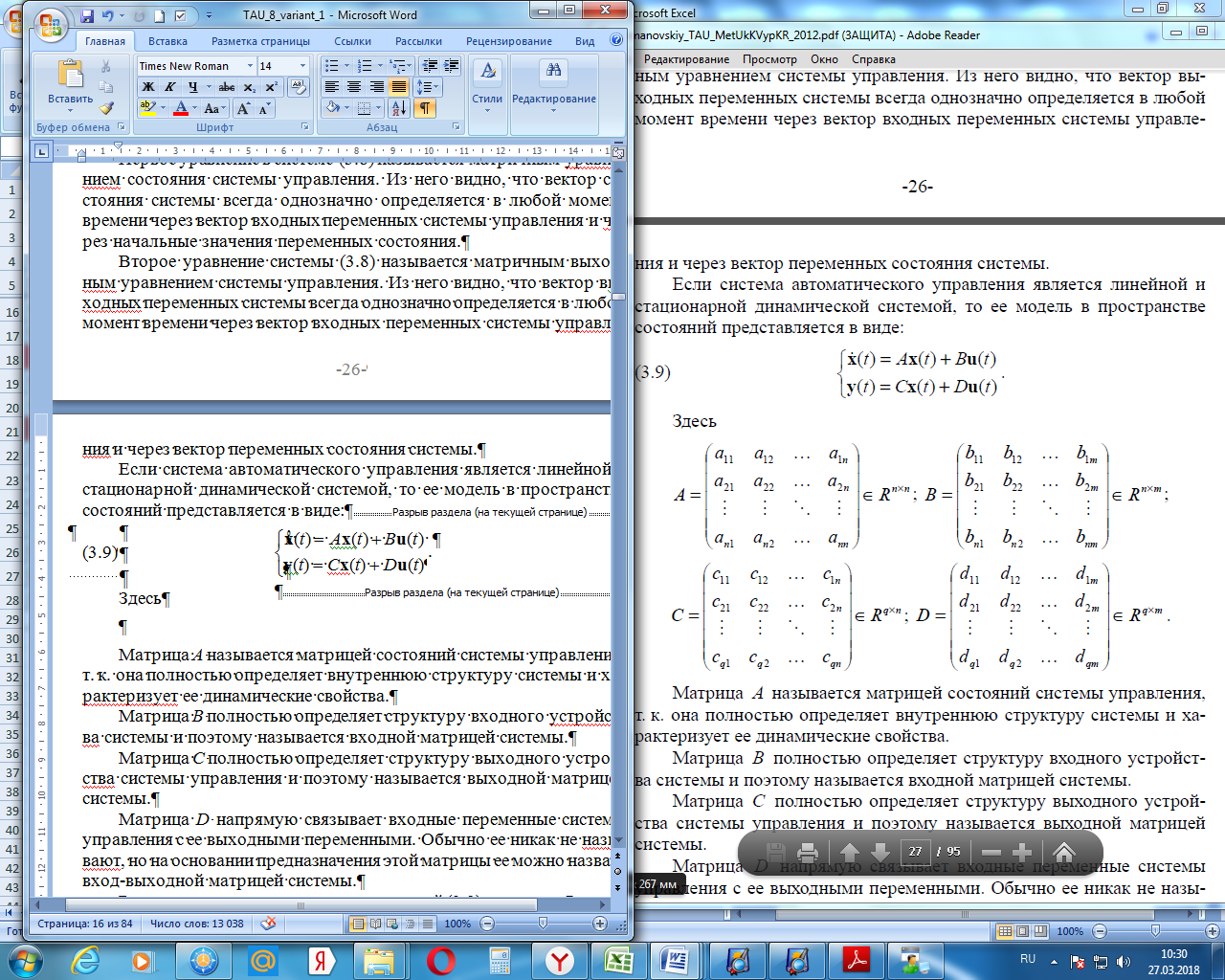
(3.9)

Здесь

**x** (*t*)  *A***x**(*t*)  *B***u**(*t*) .



**y**(*t*)  *C***x**(*t*)  *D***u**(*t*)



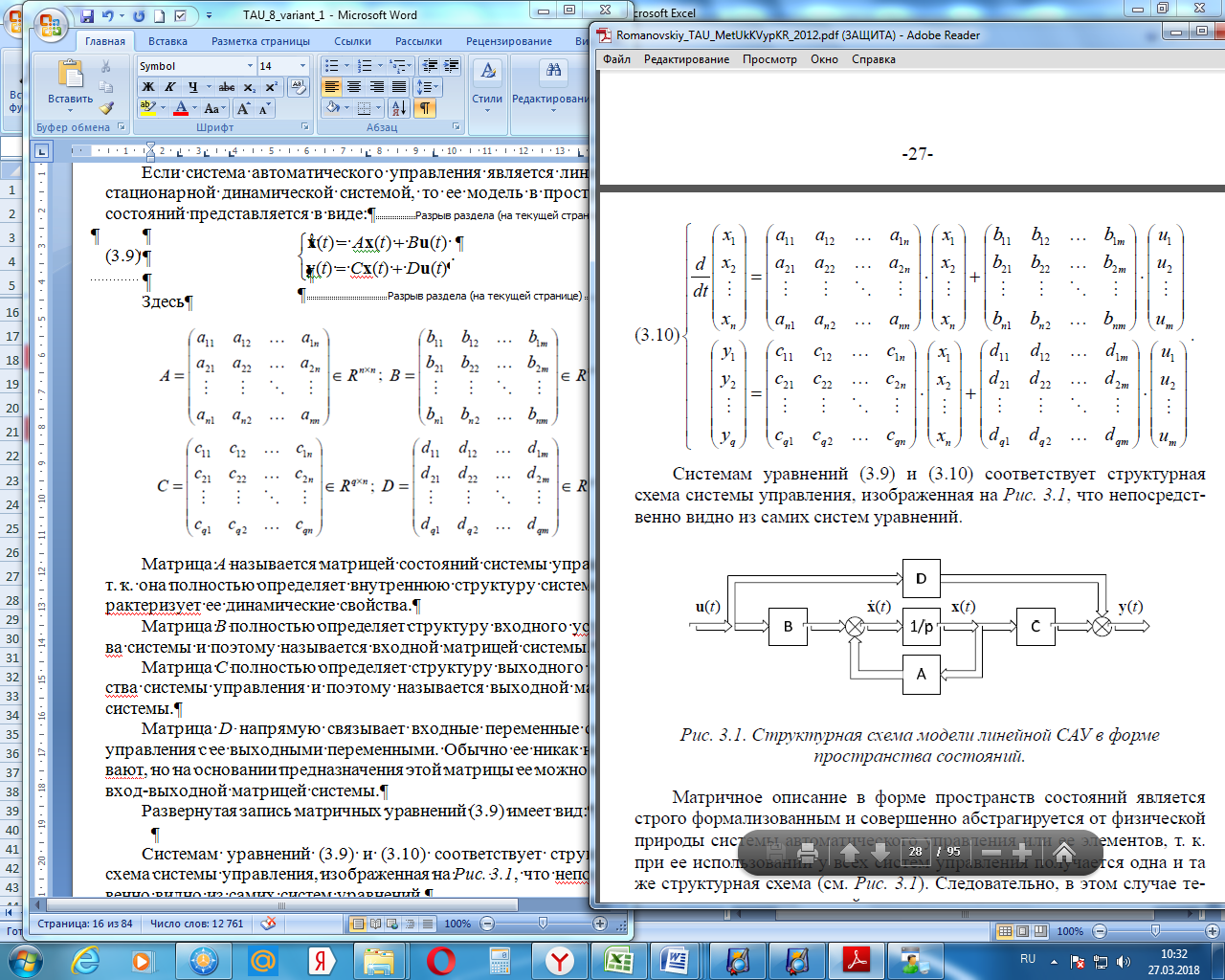
Матрица *A* называется матрицей состояний системы управления, т. к. она полностью определяет внутреннюю структуру системы и ха- рактеризует ее динамические свойства.

Матрица *B* полностью определяет структуру входного устройст- ва системы и поэтому называется входной матрицей системы.

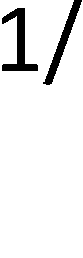
Матрица *C* полностью определяет структуру выходного устрой- ства системы управления и поэтому называется выходной матрицей системы.

Матрица *D* напрямую связывает входные переменные системы управления с ее выходными переменными. Обычно ее никак не назы- вают, но на основании предназначения этой матрицы ее можно назвать вход-выходной матрицей системы.

Развернутая запись матричных уравнений (3.9) имеет вид:



Системам уравнений (3.9) и (3.10) соответствует структурная схема системы управления, изображенная на *Рис. 3.1*, что непосредст- венно видно из самих систем уравнений.



**u**(*t*)

**x**& (*t*)

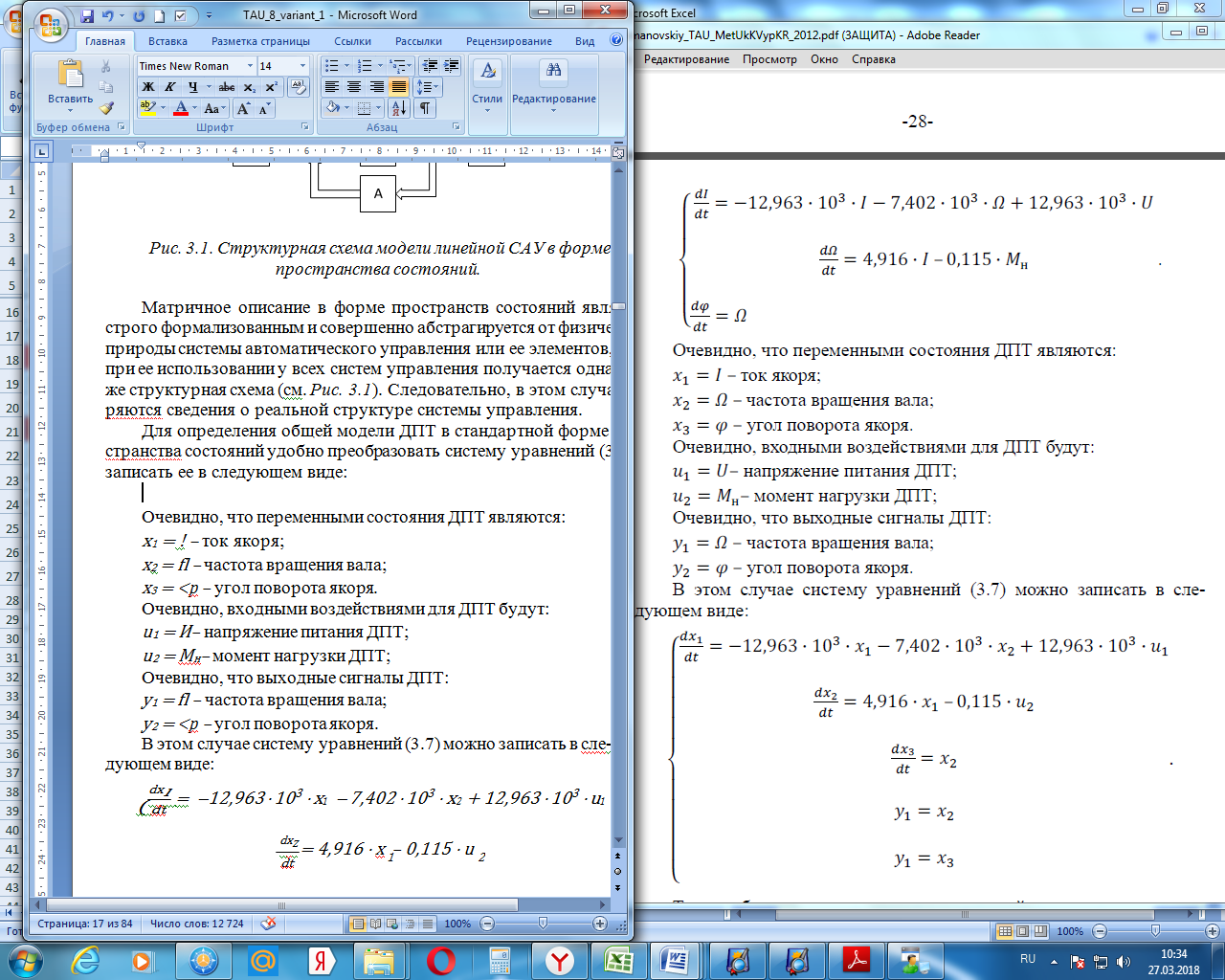
**x**(*t*)

**y**(*t*)

*Рис. 3.1. Структурная схема модели линейной САУ в форме пространства состояний.*

Матричное описание в форме пространств состояний является строго формализованным и совершенно абстрагируется от физической природы системы автоматического управления или ее элементов, т. к. при ее использовании у всех систем управления получается одна и та же структурная схема (см. *Рис. 3.1*). Следовательно, в этом случае те- ряются сведения о реальной структуре системы управления.

Для определения общей модели ДПТ в стандартной форме про- странства состояний удобно преобразовать систему уравнений (3.7) и записать ее в следующем виде:



Очевидно, что переменными состояния ДПТ являются:

*х1 = I –* ток якоря;

*х2 = Ω –* частота вращения вала;

*х3 = ϕ –* угол поворота якоря.

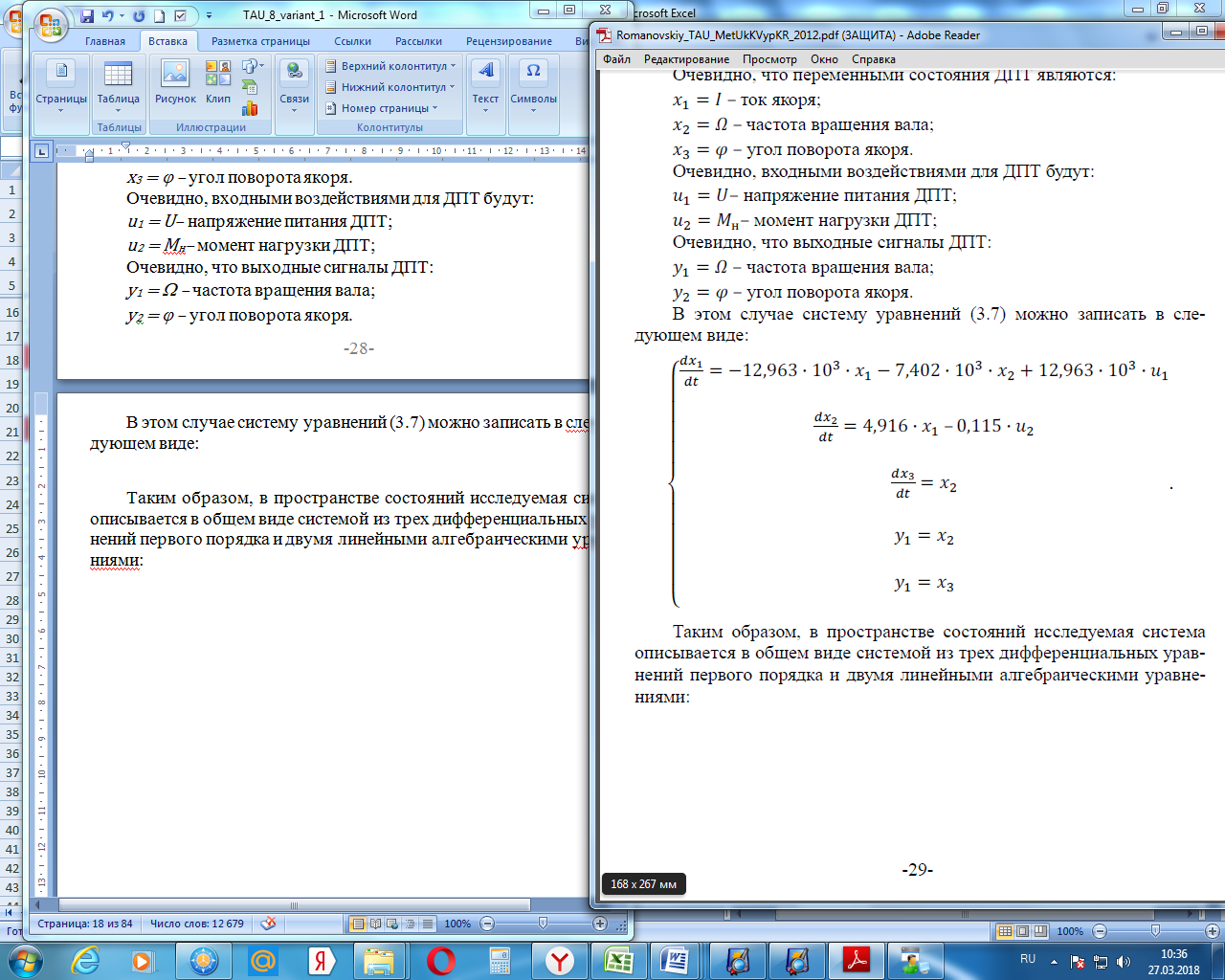
Очевидно, входными воздействиями для ДПТ будут:

*u1 = U–* напряжение питания ДПТ;

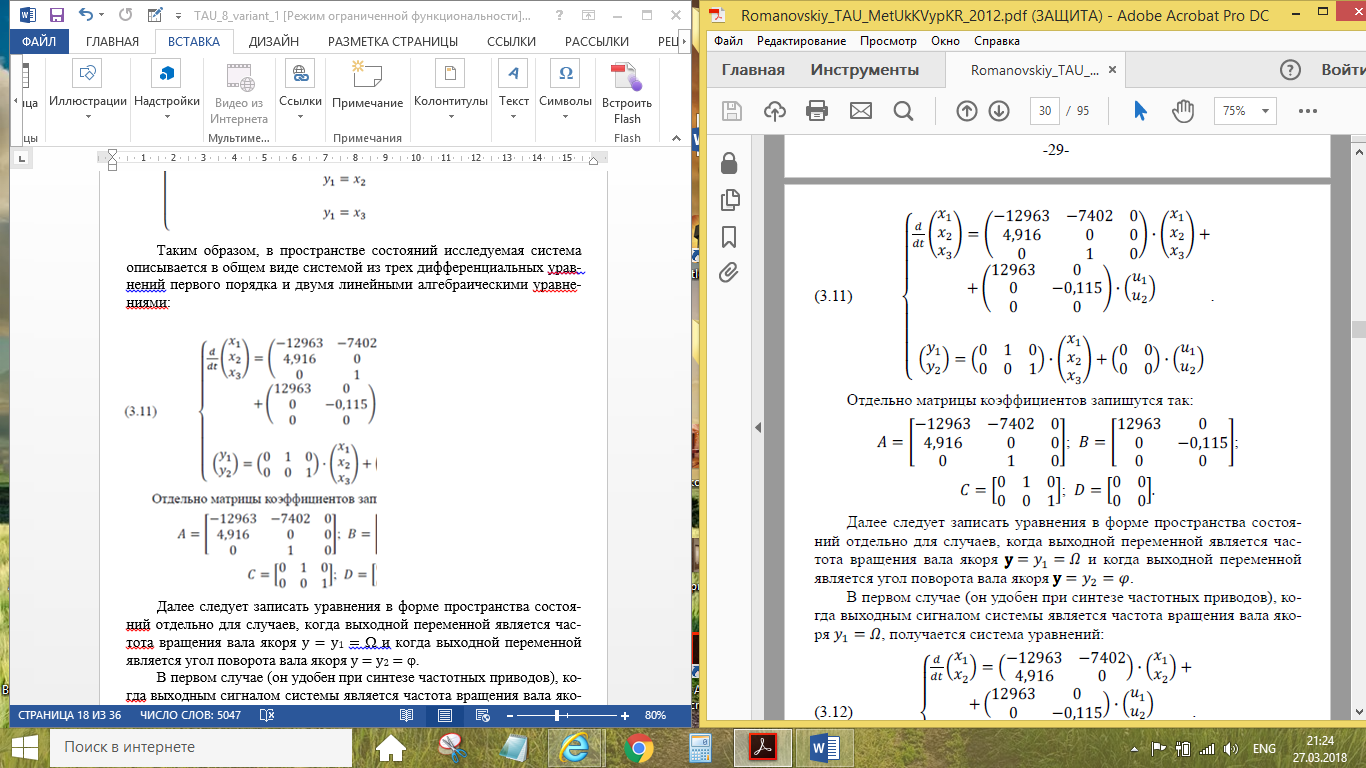
*u2 = Мн–* момент нагрузки ДПТ; Очевидно, что выходные сигналы ДПТ: *у1 = Ω –* частота вращения вала;

*у2 = ϕ –* угол поворота якоря.

В этом случае систему уравнений (3.7) можно записать в сле- дующем виде:

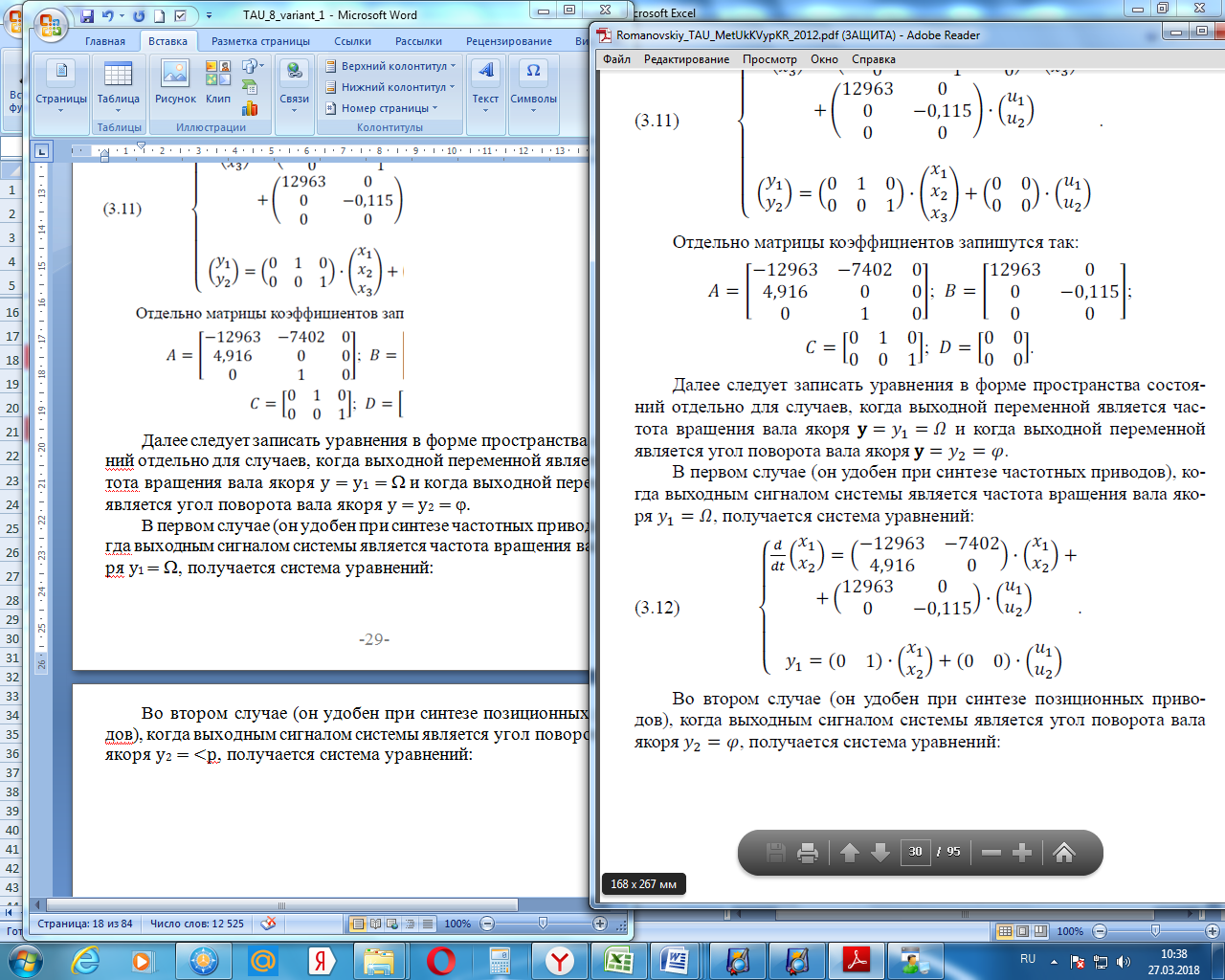


Таким образом, в пространстве состояний исследуемая система описывается в общем виде системой из трех дифференциальных урав- нений первого порядка и двумя линейными алгебраическими уравне- ниями:

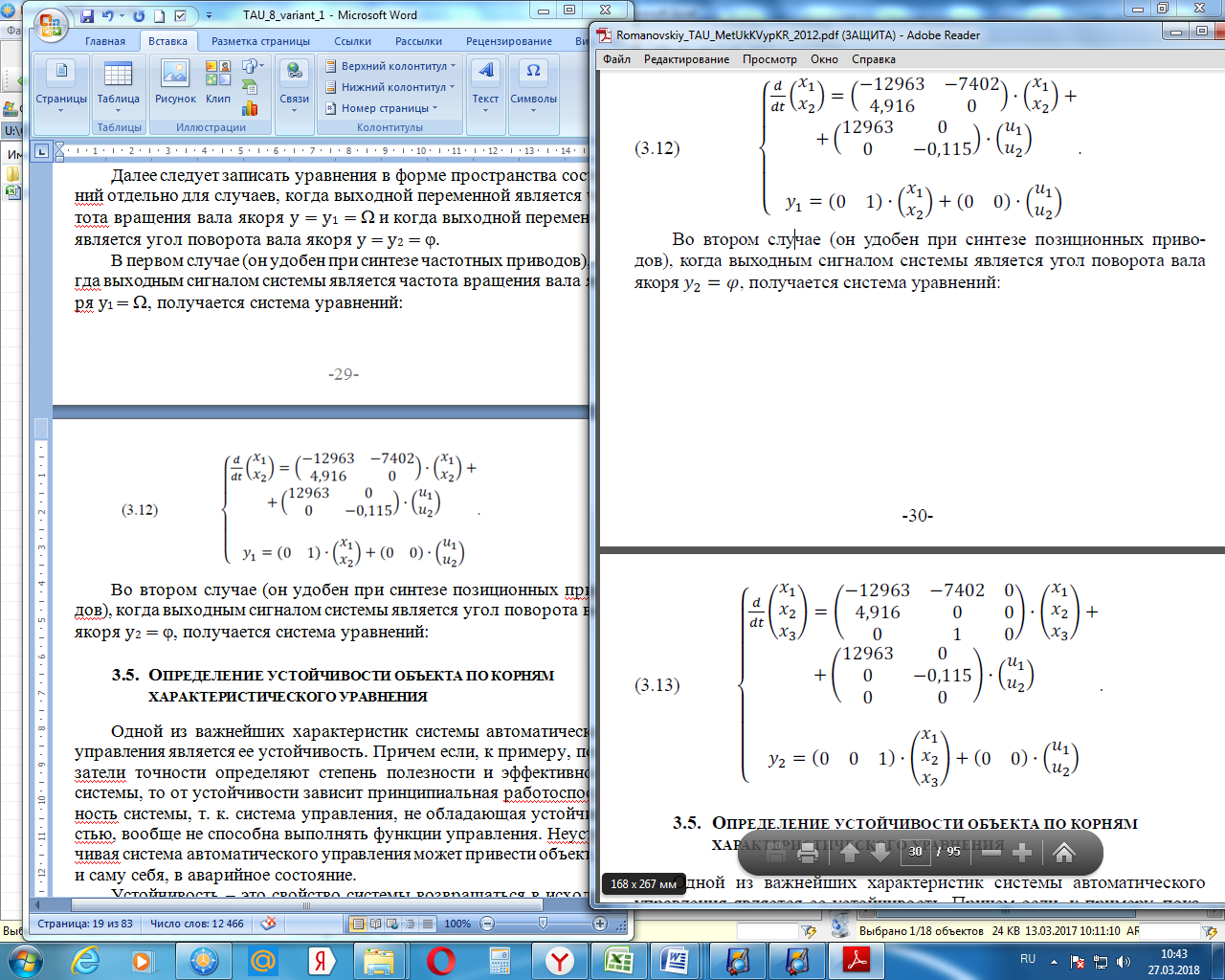


Далее следует записать уравнения в форме пространства состоя- ний отдельно для случаев, когда выходной переменной является час- тота вращения вала якоря y = у1 = Ω и когда выходной переменной является угол поворота вала якоря y = у2 = ϕ.

В первом случае (он удобен при синтезе частотных приводов), ко- гда выходным сигналом системы является частота вращения вала яко- ря у1 = Ω, получается система уравнений:



Во втором случае (он удобен при синтезе позиционных приво- дов), когда выходным сигналом системы является угол поворота вала якоря у2 = ϕ, получается система уравнений:



* 1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОБЪЕКТА ПО КОРНЯМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Одной из важнейших характеристик системы автоматического управления является ее устойчивость. Причем если, к примеру, пока- затели точности определяют степень полезности и эффективности системы, то от устойчивости зависит принципиальная работоспособ- ность системы, т. к. система управления, не обладающая устойчиво- стью, вообще не способна выполнять функции управления. Неустой- чивая система автоматического управления может привести объект, да и саму себя, в аварийное состояние.

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходное состояние равновесия после прекращения воздействия, выведшего ее из этого состояния. Неустойчивая система не возвращается в исходное состояние, а непрерывно удаляется от него.

Общая формулировка устойчивости системы: для устойчивости линейной системы управления необходимо и достаточно, чтобы дей- ствительные части всех корней характеристического уравнения систе- мы были отрицательными. Если хотя бы один корень характеристиче- ского уравнения имеет положительную действительную часть, то сис- тема будет неустойчивой.

Устойчивость системы зависит только от корней характеристиче- ского уравнения и не зависит от характера внешних воздействий, ока- зываемых на систему. Устойчивость – это внутреннее свойство систе- мы, присущее ей вне зависимости от внешних условий.

Используя геометрическое представление корней на комплексной плоскости в виде векторов или точек, можно дать вторую формули- ровку общего условия устойчивости: для устойчивости линейной сис- темы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения находились в левой полуплоскости. Если хотя бы один ко- рень характеристического уравнения находится в правой полуплоскости, система будет неустойчивой.

Для определения устойчивости исследуемого объекта или систе- мы управления удобно воспользоваться средой компьютерного моде- лирования MATLAB. Если известна матрица состояний объекта (сис- темы) А, то тогда характеристическое уравнение объекта (системы) может быть представлено в виде:

det(*E*  *A*)  0 .

Решая это уравнение в среде MATLAB можно найти корни харак- теристического уравнения системы управления и тем самым оценить устойчивость системы. Однако, как известно, корни характеристиче- ского уравнения системы управления совпадают с собственными чис- лами ее матрицы состояний А.

Вычисление собственных значений и собственных векторов мат- рицы в среде MATLAB осуществляет функция eig(). Обычное об- ращение к ней с передачей в нее матрицы А позволяет получить век- тор собственных значений матрицы А, т. е. набор корней характери- стического уравнения системы.

При вычислении в среде MATLAB собственных значений матри- цы состояний модели (3.12) получается следующий результат:

» A = [-12963, -7402; 4.916, 0];

» eig(A) ans =

1.0e+004 \*

-1.2960

-0.0003

Так как все корни характеристического полинома располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, то исследуе- мый объект, описываемый моделью (3.12), является устойчивым.

При вычислении в среде MATLAB собственных значений матри- цы состояний модели (3.13) получается следующий результат:

» A = [-12963, -7402, 0; 4.916, 0, 0; 0, 1, 0];

» eig(A) ans =

1.0e+004 \*

0

-0.0003

-1.2960

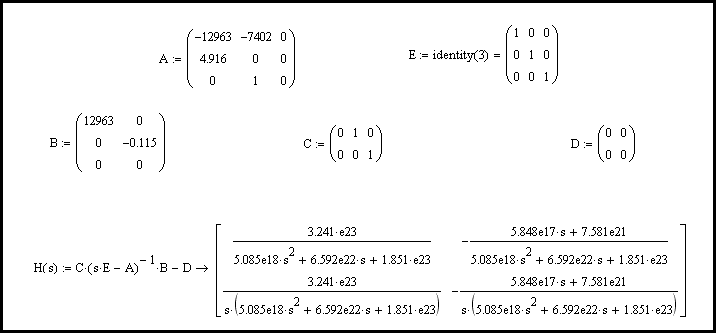
Так как первый корень характеристического полинома находится в центре координат, а остальные корни располагаются в левой полу- плоскости комплексной плоскости корней, исследуемый объект, опи- сываемый моделью (3.13), лежит на границе апериодической устойчи- вости.

* 1. **ПОЛУЧЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОБЪЕКТА**

Имея математическую модель в виде системы уравнений (3.11), можно получить передаточную функцию исследуемой системы с по- мощью следующей формулы:

(3.14) W(p) = с · (p · Е - А)-1 · B + D.

Применяя формулу (3.14) вычислить соответствующие переда- точные функции исследуемой системы удобно, например, в среде ком- пьютерного моделирования MathCad (см. *Рис. 3.2*).



*Рис. 3.2. Получение передаточных функций в среде MathCad.*

Указывая вход и выход системы регулирования, можно записать передаточные функции отдельно (см. *Табл. 3.5*).

*Табл. 3.5. Передаточные функции ДПТ.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Вход | Выход | Передаточная функция |
| *1* | *Напря- жение* | *Час- тота* | W = 3*.241*  Uω *5,085 · 10-5р2 + 6,592р + 1,851* |
| *2* | *Момент сопро- тивле- ния* | *Час- тота* | *-5,848 · 10-бр - 7,581 · 10-2 Wмнω = 5,085 · 10-5р2 + 6,592р + 1,851* |
| *3* | *Напря- жение* | *Угол пово- рота* | *W = 3,241*  *uφ; р · (5,085 · 10-5р2 + 6,592р + 1,851)* |
| *4* | *Момент сопро- тивле- ния* | *Угол пово- рота* | *-5,848 · 10- 6р - 7,581 · 10-2 Wмнϕ; = р · (5,085 · 10-5р2 + 6,592р + 1,851)* |

* 1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОБЪЕКТА ПРИ ПОМОЩИ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ**

Устойчивость систем управления можно определять без отыска- ния корней характеристического уравнения. Для этого применяют раз- личные критерии устойчивости.

Критерий устойчивости – это математическая формулировка не- которых условий относительно коэффициентов характеристического уравнения системы, при удовлетворении которых система управления будет являться устойчивой.

Критерии устойчивости по содержанию эквивалентны сформули- рованному ранее условию устойчивости.

Критерии устойчивости бывают алгебраические и частотные. Алгебраические критерии устанавливают необходимые и доста-

точные условия отрицательности корней в форме ограничений, накла- дываемых на определенные комбинации коэффициентов характери- стического уравнения. В работе требуется для определения устойчи- вости применить алгебраический критерий Гурвица.

Частотные критерии определяют связь между устойчивостью системы и формой частотных характеристик системы. В работе требу-

ется для определения устойчивости применить частотный критерий Михайлова.

Критерий Гурвица удобен для исследования устойчивости систем до пятого порядка включительно. Дополнительно он позволяет полу- чать аналитическое выражение (выражения) для границ области воз- можных значений какого-либо параметра (параметров) системы, в ко- торой эта система остается устойчивой.

Критерий устойчивости Михайлова помимо определения самой устойчивости позволяет достаточно легко устанавливать, в каких пре- делах может изменяться тот или иной параметр системы управления без потери самой устойчивости.

# Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Критерий Гурвица был сформулирован и доказан в 1895 г. не- мецким математиком А. Гурвицем (A. Hurwitz). Он разработал свой критерий, решая чисто математическую задачу – задачу исследования устойчивости решений линейного дифференциального уравнения.

Применительно к задачам теории управления критерий Гурвица можно сформулировать следующим образом: линейная динамическая система управления, описываемая характеристическим уравнением

(3.15) аОpn + а1pn-1 + … + аn-1p + аn = 0,

устойчива, если положительны все n + 1 коэффициентов аi и все n

определителей Гурвица ∆i следующего вида:

а1 аЗ а5 … 0

аО а2 а4 … 0

∆i= 0

… 0

а1 аЗ … 0 *; i = 1, n.*

… … … … *.*

… *… … ai*

Если хотя бы один из определителей Гурвица отрицателен, то система управления является неустойчивой.

Матрицу, по которой вычисляют определители Гурвица, состав- ляют следующим образом:

1. На главной диагонали записывают все коэффициенты харак- теристического уравнения от *a1* до *an* (в порядке возрастания индекса).
2. В каждом столбце выше диагональных коэффициентов запи- сывают коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а ниже – с последовательно убывающими индек- сами.
3. На место коэффициентов с индексами больше п или меньше нуля проставляют нули.

Пусть выполняется условие ∆n= 0, причем все остальные опре- делители Гурвица положительны. Тогда, очевидно, система находится на границе устойчивости. Так как

∆n= аn · ∆n-1*,*

то условие *∆n= 0* распадается на одно из двух условий:

*аn = 0 либо ∆n-1= 0.*

Условию *аn = 0* соответствует один нулевой корень характери- стического уравнения, то есть наблюдается апериодическая граница устойчивости, а условию *∆n-1= 0* – пара мнимых корней, то есть на- блюдается колебательная граница устойчивости.

Далее проводится определение устойчивости ДПТ по каждой из полученных четырех передаточных функций ДПТ (см. *Табл. 3.5*) при помощи критерия Гурвица.

По первой передаточной функции ДПТ (вход – напряжение, вы- ход - частота) и по второй передаточной функции ДПТ (вход – момент сопротивления, выход - частота) характеристическое уравнение иссле- дуемого объекта управления имеет вид:

*5,085 · 10-5р2 + 6,592р + 1,851 = 0.*

На основании уравнения (3.15) коэффициенты *аi* примут вид:

*ао = 5,085 · 10-5; а1 = 6,592; а2 = 1,851.*

Для устойчивости системы (объекта) второго порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты ее характеристического поли- нома были положительными. Так как критерий Гурвица для исследуе- мого объекта управления выполняется, то можно сделать вывод, что рассматриваемый объект управления устойчив.

По третьей передаточной функции ДПТ (вход – напряжение, вы- ход – угол поворота) и по четвертой передаточной функции ДПТ (вход – момент сопротивления, выход – угол поворота) характеристи- ческое уравнение исследуемого объекта управления имеет вид:

*5,085 · 10-5рЗ + 6,592р2 + 1,851р = 0.*

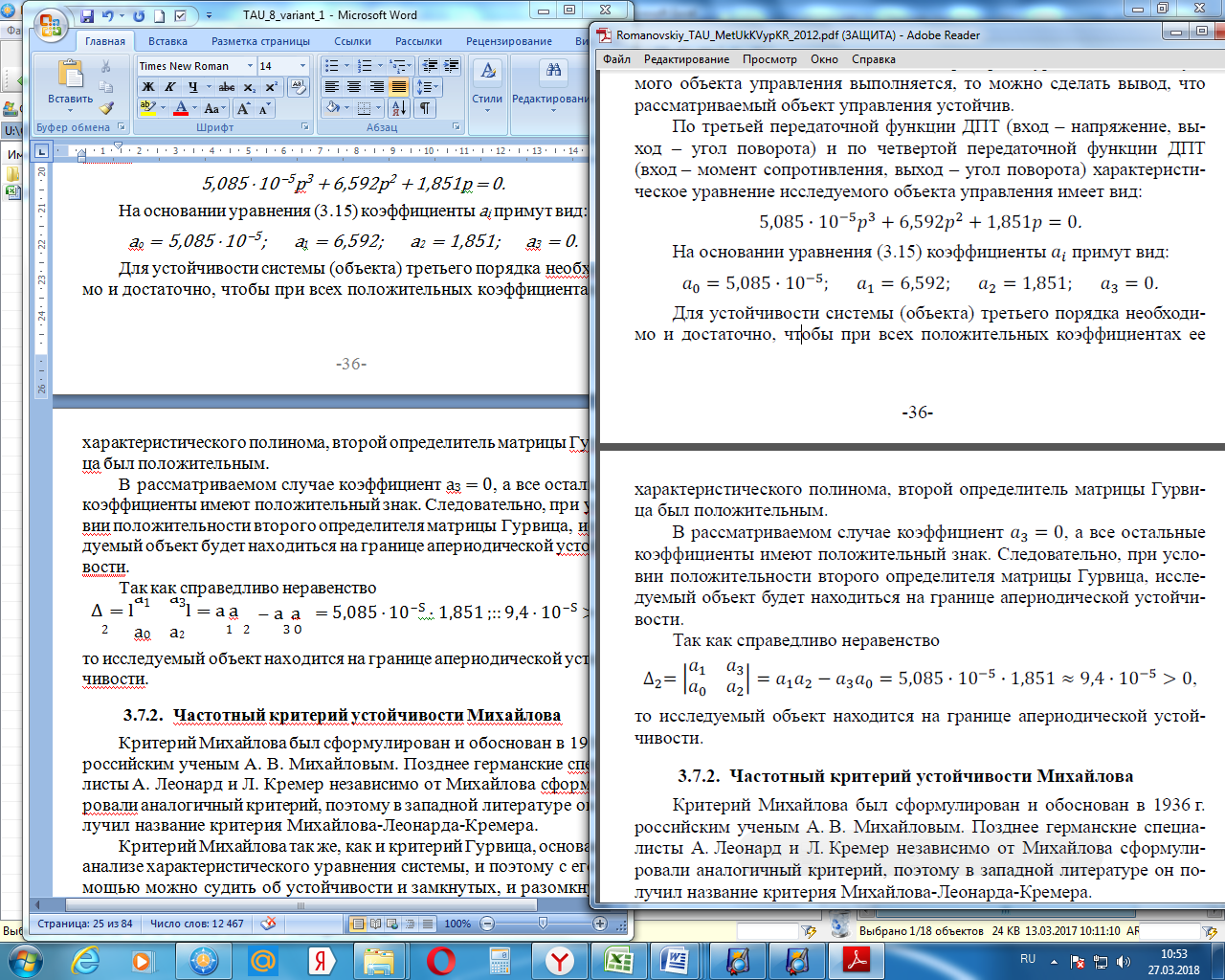
На основании уравнения (3.15) коэффициенты *аi* примут вид:

*ао = 5,085 · 10-5; а1 = 6,592; а2 = 1,851; аЗ = 0.*

Для устойчивости системы (объекта) третьего порядка необходи- мо и достаточно, чтобы при всех положительных коэффициентах ее

характеристического полинома, второй определитель матрицы Гурви- ца был положительным.

В рассматриваемом случае коэффициент аЗ = 0, а все остальные коэффициенты имеют положительный знак. Следовательно, при усло- вии положительности второго определителя матрицы Гурвица, иссле- дуемый объект будет находиться на границе апериодической устойчи- вости.

Так как справедливо неравенство

то исследуемый объект находится на границе апериодической устой- чивости.

# Частотный критерий устойчивости Михайлова

Критерий Михайлова был сформулирован и обоснован в 1936 г. российским ученым А. В. Михайловым. Позднее германские специа- листы А. Леонард и Л. Кремер независимо от Михайлова сформули- ровали аналогичный критерий, поэтому в западной литературе он по- лучил название критерия Михайлова-Леонарда-Кремера.

Критерий Михайлова так же, как и критерий Гурвица, основан на анализе характеристического уравнения системы, и поэтому с его по- мощью можно судить об устойчивости и замкнутых, и разомкнутых систем.

Пусть левая часть характеристического уравнения (характеристи-

ческий полином) системы управления имеет вид:

*F(р) = аорn + а1рn-1 + · + аn-1р + аn*.

Пусть будет выполнена замена переменных *p = jω.* Тогда полу- чится функция комплексного переменного:

*F(jω) = aо(jω)n + a1(jω)n-1 + · + an-1jω + an*.

Ее можно так же, как амплитудно-фазовую частотную характери- стику, представить в виде суммы действительной и мнимой частей:

*F(jω) = P(ω) + jQ(ω).*

Действительная часть *P(ω)* содержит только четные степени пе- ременного *ω*:

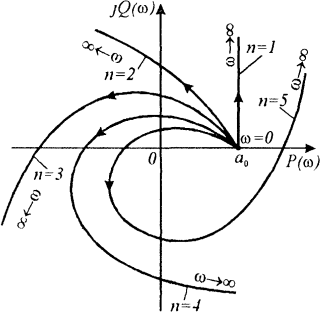
*P(ω) = аоωn + а2ωn-2 + · + аn*,

а мнимая часть *Q(ω)* – только нечетные:

*Q(ω) = а1ωn-1 + аЗωn-З + · + аn-1ω*.

Каждому фиксированному значению переменного *ω* соответст- вует комплексное число, которое можно изобразить в виде вектора на комплексной плоскости. Если теперь изменять параметр *ω* от 0 до ∞, то конец вектора F(j*ω*) опишет некоторую кривую, которая называет- ся характеристической кривой, или годографом Михайлова. По виду этой кривой можно судить об устойчивости системы.

Формулировка критерия Михайлова: линейная динамическая сис- тема, описываемая уравнением n-го порядка, будет устойчивой, если при изменении *ω* от 0 до ∞ характеристический вектор системы F(j*ω*) повернется против часовой стрелки на угол nπ/2 , нигде не обращаясь при этом в нуль (см. *Рис. 3.3*).



*Рис. 3.3. Годографы Михайлова устойчивых систем.*

Далее проводится определение устойчивости ДПТ по каждой из полученных четырех передаточных функций ДПТ (см. *Табл. 3.5*) при помощи критерия Михайлова.

По первой передаточной функции ДПТ (вход – напряжение, вы- ход – частота) и по второй передаточной функции ДПТ (вход – момент сопротивления, выход – частота) характеристический полином иссле- дуемого объекта управления имеет вид:

F(*p)* = 5,085 · 10-5 p2 + 6,592 p + 1,851*.*

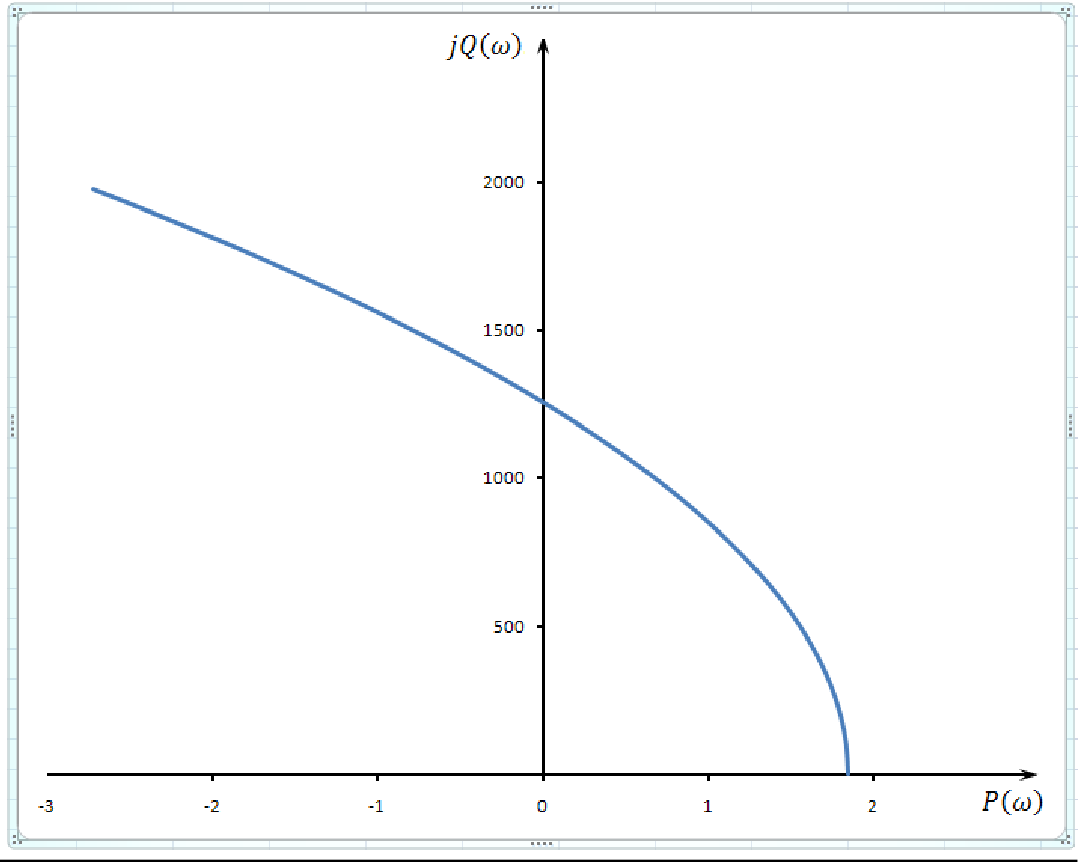
После замены переменных p = jω получится функция комплекс- ного переменного:

F(j*ω)* = 5,085 · 10-5 j*ω*2 + 6,592 j*ω* + 1,851*.*

После разложения в сумму действительной и мнимой частей по- лучится выражение:

F(j*ω*) = P(*ω*) + jQ(*ω*) = [1,851 - 5,085 · 10-5*ω*2] + j[6,592*ω*].

По найденным действительной и мнимой частям функции ком- плексного переменного строится годограф Михайлова. Результат его построения в среде MathCad приведен на *Рис. 3.4*.



*Рис. 3.4. Годограф Михайлова для первой и второй передаточных функций.*

Из годографа следует, что рассматриваемый объект управления устойчив.

По третьей передаточной функции ДПТ (вход – напряжение, вы- ход – угол поворота) и по четвертой передаточной функции ДПТ (вход – момент сопротивления, выход – угол поворота) характеристи- ческий полином исследуемого объекта управления имеет вид:

F(p) = 5,085 · 10-5pЗ + 6,592p2 + 1,851p*.*

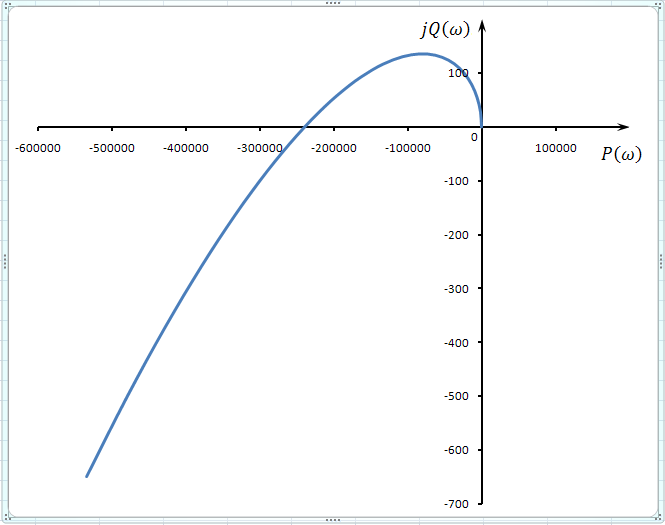
После замены переменных p = j*ω* получится функция комплекс- ного переменного:

*F(jω) = 5*,085 · 10-5(j*ω*)З + 6,592(j*ω*)2 + 1,851j*ω*J*.*

После разложения в сумму действительной и мнимой частей по- лучится выражение:

*F(jω) = P(ω) + jQ(ω) = [-6*,592*ω*2] + j[1,851*ω* - 5,085 · 10-5*ω*З]*.*

По найденным действительной и мнимой частям функции ком- плексного переменного строится годограф Михайлова. Результат его построения в среде MathCad приведен на *Рис. 3.5*.



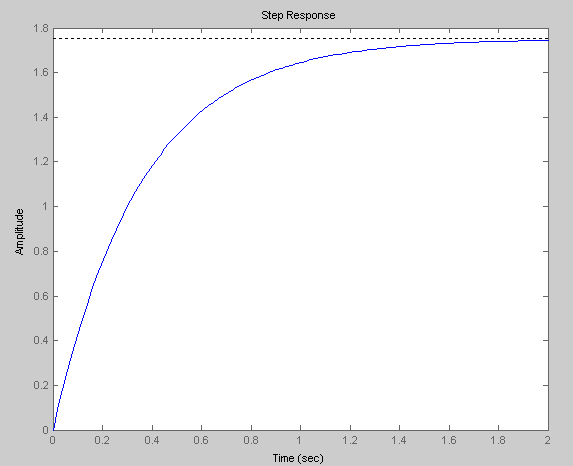
*Рис. 3.5. Годограф Михайлова для третьей и четвертой передаточных функций.*

Из рисунка видно, что годограф Михайлова начинается в начале координат. Это означает, что в характеристическом уравнении иссле- дуемого объекта имеется, по крайней мере, один нулевой корень. Сле- довательно, рассматриваемый объект управления находится на грани- це апериодической устойчивости.

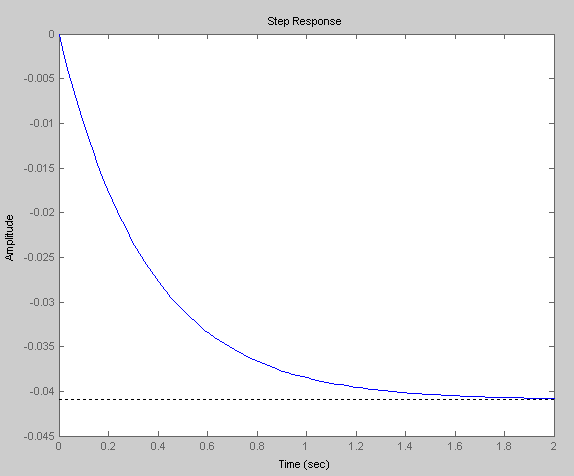
* 1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИССЛЕДУЕМОГО ОБЪЕКТА**

Ниже приводятся результаты построения в среде компьютерного моделирования MATLAB временных и частотных характеристик ис- следуемого объекта управления по каждой из четырех полученных ра- нее передаточных функций (см. *Табл. 3.5*). Результаты построения при- водятся в виде графиков на *Рис. 3.6* – *Рис. 3.17*.

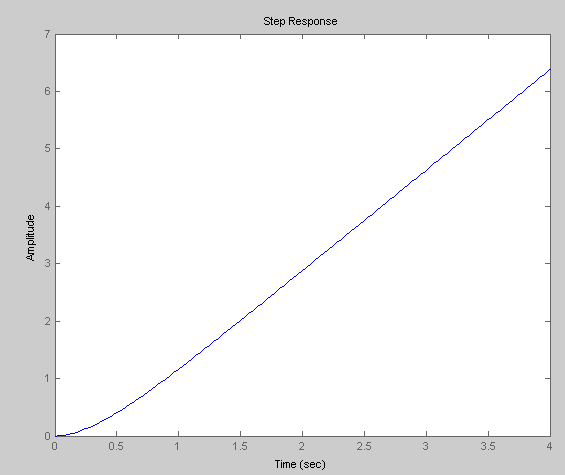
# Переходные характеристики



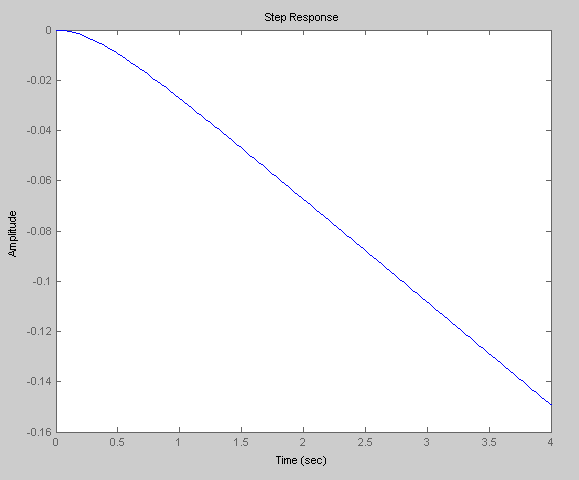
*Рис. 3.6. ПХ для* WU*ω* (p)*.*



*Рис. 3.7. ПХ для* Wмн*ω* (p)*.*

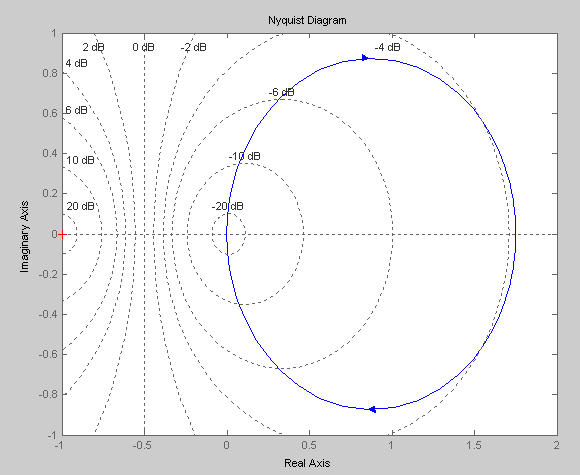


*Рис. 3.8. ПХ для* WUϕ(p)*.*

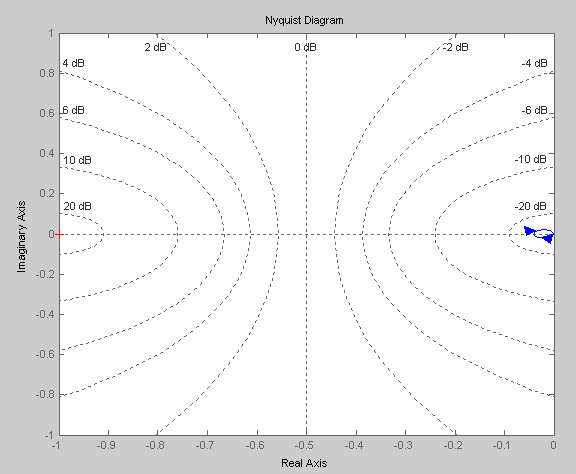


*Рис. 3.9. ПХ для* Wмнϕ(p)*.*

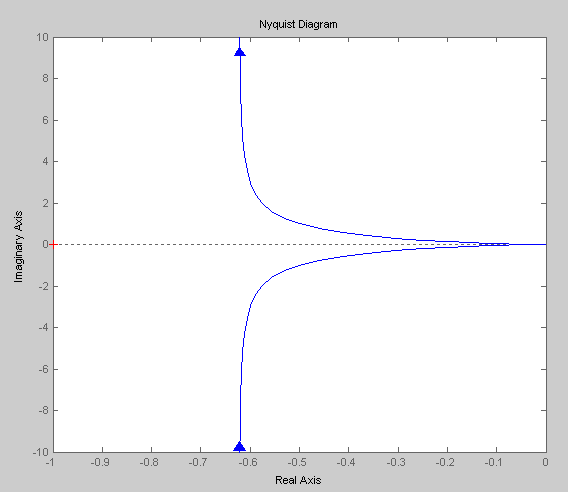
# Амплитудно-фазовые частотные характеристики



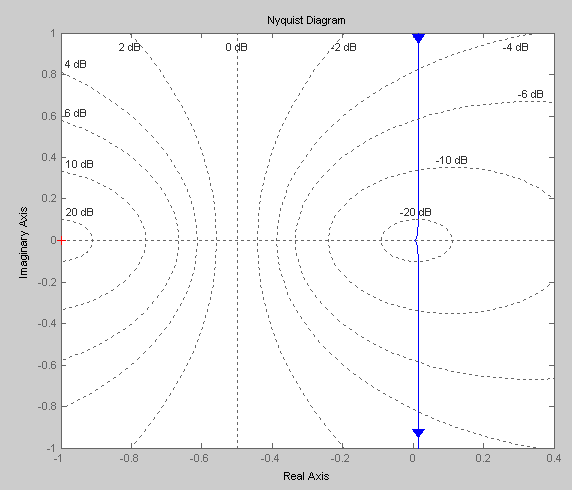
*Рис. 3.10. АФЧХ для* WU*ω* (p)*.*



*Рис. 3.11. АФЧХ для* Wмн*ω* (p)*.*

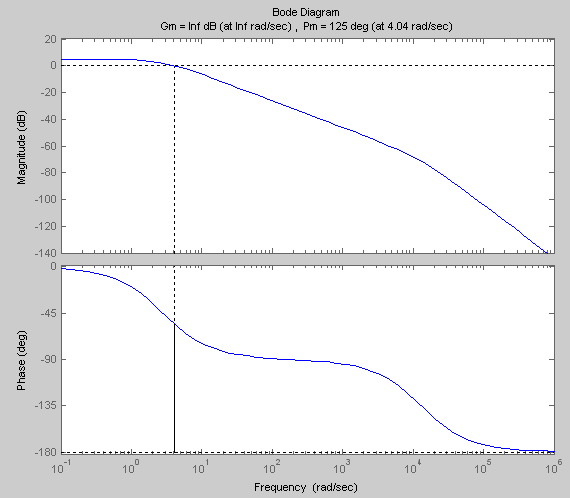


*Рис. 3.12. АФЧХ для* WUϕω(p)*.*

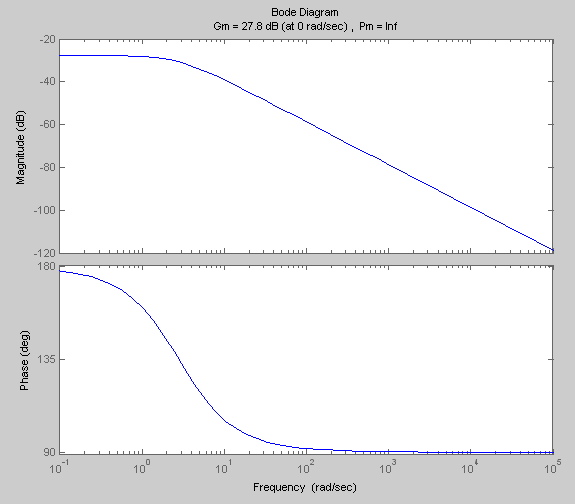


*Рис. 3.13. АФЧХ для* Wмнϕ(p)*.*

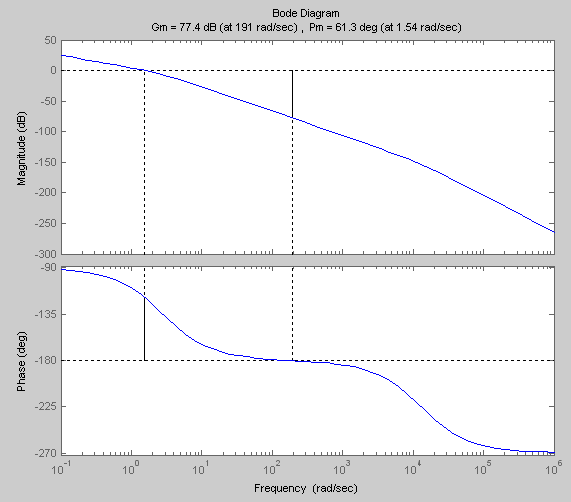
# Логарифмические частотные характеристики



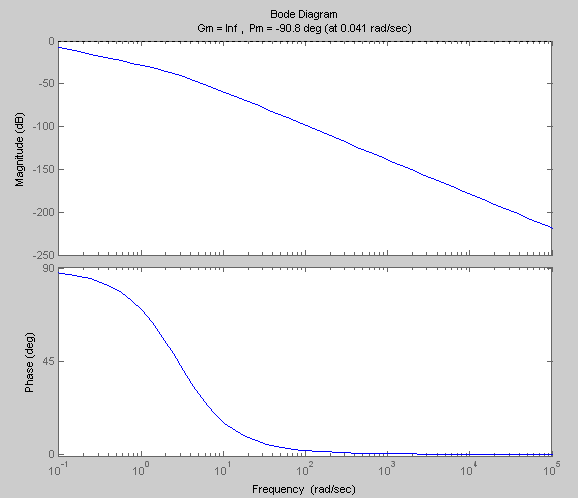
*Рис. 3.14. ЛАФЧХ для* WU*ω* (p)*.*



*Рис. 3.15. ЛАФЧХ для* Wмн*ω*(p)*.*



*Рис. 3.16. ЛАФЧХ для* WUϕ(p)*.*



*Рис. 3.17. ЛАФЧХ для* Wмнϕ(p)*.*