**Нахождение погрешностей косвенных измерений**

**Методические указания**

***Косвенное измерение*** это определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

Пример – Определение плотности *D* тела цилиндрической формы по результатам прямых измерений массой *m*, высотой *h*и диаметром цилиндра *d*, связанных с плотностью уравнением

*D*= m/0,25•pi•*d*2•*h*(1)

П р и м е ч а н и е. Во многих случаях вместо термина «*косвенное измерение*» применяют термин «*косвенный метод измерений*»*.*

Для вычисления погрешностей косвенных измерений по известным погрешностям прямых измерений существуют следующие методики.

**Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида** *Y*= *a*+*b*-*c***(сумма, разность).**

*Исходные данные*: *a=90*, *b=60*, *c=45*, Δ*a=1*, Δ*b=3*, Δ*c=0,5*.

Вывод формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в рассматриваемом случае можно выполнить следующим образом.

1. Найдём дифференциал правой и левой частей:

*dY*= *d*(*a* +*b*-*c*) = *da*+ *db*-*dc*. (2)

2Произведём широко используемую в теории погрешностей замену  
дифференциалов абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы): *dY*≈ Δ*Y*, *da*≈ Δ*a*, *db*≈ Δ*b*,*dc*≈ Δ*c*.Тогда

Δ*Y*= Δ*a*+ Δ*b*-Δ*c*. (3)

3 Учитывая, что знаки погрешностей Δa, Δb, Δc обычно бывают заранее неизвестны, для получения гарантированной (предельной) оценки абсолютной погрешности косвенного измерения в последней формуле все знаки «–» заменим на знаки «+»:

ΔYпр = Δa+ Δb+ Δc. (4)

4Найдём предельную оценку относительной погрешности косвенного измерения, учитывая, что относительная погрешность есть отношение абсолютной погрешности к результату измерений:

ΔY =Δa+Δb+Δc (5)

δYпр = ΔY/Y = (Δa+Δb+Δc)/ (a+b-c) (6)

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому часто применяют среднеквадратические оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов.

5Найдём среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения:

 (7)

 (8)

Получение формул для вычисления погрешностей косвенныхизмерений в случае зависимости вида Y = a·b/с (произведение, деление).

Исходные данные: a, b, c, Δa, Δb, Δc. Вывод формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в рассматриваемом случае можно выполнить следующим образом.

1Прологарифмируем левую и правую части заданной зависимости:

lnY = ln(ab/с) = lna + lnb–lnc (9)

2Найдём дифференциал правой и левой частей:

dlnY = dln(ab/с) =dlna + dlnb-dlnc (10)

3 Учитывая, что дифференциал от логарифма переменной величинынаходится по формулеd(lnx) = dln (x /dx )dx = dx/x, получаем:

dY/Y = da/a + db/b+dc/c (11)

4Произведём широко используемую в теории погрешностей заменудифференциалов малыми абсолютными погрешностями (при условии, чтоабсолютные погрешности достаточно малы):

dY ≈ΔY, da≈Δa, db ≈Δb, dc ≈Δc, тогда

ΔY/Y =Δa/a + Δb/b – Δc/c (12)

5 Учитывая, что знаки погрешностейΔa, Δ b, Δc заранее неизвестны, для получения гарантированной (предельной) оценки относительнойпогрешности косвенного измерения в последней формуле все знаки «-»заменяем на знаки «+»:

ΔYпр/Y =Δa/a + Δb/b + Δc/c (13)

6 Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле:

δYпр = ΔYпр·Y (14)

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому часто применяют среднеквадратические оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов.

7Найдём среднеквадратические оценки относительной и абсолютной погрешностей косвенного измерения:

 (15)

 (16)

Пример решения задачи

Условие задачи:

По известной расчётной зависимости косвенного метода измерения и по известным результатам и погрешностям прямых измеренийрассчитать предельные и среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения.

Расчетная зависимость:

Y = 2·(a+b)·c2/(d-e) (17)

Исходные данные:

a=50; Δa=1; b=90; Δb=3; c=60; Δc=2; d=70; Δd=2; e=40; Δe=1;

Решение:

1 Подставив в выражение 17 соответствующие исходные данные получим:

Y = 2·(50+90)·602/(70-40) = 33600

2Введём обозначение ab =a+b, de =d-e, тогда:

Y = 2·ab·c2/de (18)

3Прологарифмируем левую и правую части заданной зависимости 18:

lnY = ln2+ln ab+2 ln c - ln de. (19)

4Найдём дифференциал правой и левой частей выражения 19:

dlnY = dln2+dlnab+2d lnc-dlnde (20)

С учётом того, что dln2 = 0, получим:

dlnY = dln ab+2dlnc-dlnde .

5 Учитывая, что дифференциал от логарифма переменной величины находится по формуле d(lnx) = dln (x /dx )dx = dx/x, получаем:

dY/Y = dab/ab+ 2dc/c - dde/de (21)

6 Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов малыми абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы), т.е.:

dY ≈ ΔY, dab ≈ Δab, dc ≈ Δc, dde ≈ Δde, тогда

ΔY/Y =Δab/ab + 2Δc/c – Δde/de (22)

7 Учитывая, что знаки погрешностей Δab, Δc, Δde заранее неизвестны, для получения гарантированной (предельной) оценки относительной погрешности косвенного измерения Y в последней формуле все знаки «-» заменяем на знаки «+».

По формуле 13 получим предельную оценку относительной погрешности косвенного измерения:

ΔYпр/Y = Δab/ab + 2Δc/c + Δde/de (23)

Здесь *ab = a + b*, тогда Δ*ab*= Δ*a*+ Δ*b*, de = d–e, окончательно получим:

ΔYпр/Y = (Δa + Δb)/(a +b) + 2Δc/c + (Δd + Δe) /(d-e) (24)

Подставляя значения в выражение 24и учитывая, что a+b = 140, а d – e = 30, получим:

ΔYпр/Y =(1+3) /140+ 2\*2/60 + (2 +1)/30 = 0.1952

8 Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле 14:

δYпр = (ΔYпр/Y)·Y

Подставляя значения и с учетом того, что Y = 33600, получим:

δYпр = 0.1952·33600 = 6558.7

В % погрешность составит 19.52

9Найдём среднеквадратические оценки относительной и абсолютной погрешностей косвенного измерения Y с учётом того, чтовместо квадрата abнужно подставлять:

Δa2 + Δb2,

Аналогично вместо квадрата de

Δd2+Δe2

По формуле 15 получим:

δYск = (ΔY/Yск)·Y = 0.0910·33600 = 3057

В % погрешность составит 9.1

Задание:

По известной расчётной зависимости косвенного метода измерения и по известным результатам и погрешностям прямых измерений, в соответствии с полученным вариантом, рассчитать предельные и среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения. Исходные данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№* | *Расчётная зависимость* | *Погрешности и результаты прямых измерений* | | | | |
| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* |
| 8 | *Y*= 5·(*a – b*)/[*c·d*4*e*2] | *Δa=1,*  *a=90* | *Δb=3,*  *b=60* | *Δc=0,5,*  *c=45* | *Δd=2,*  *d=70* | *Δe=1,*  *e=30* |