

Министерство транспорта Российской Федерации (Минтранс России)  
Федеральное агентство воздушного транспорта (Росавиация)  
ФГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный  
университет гражданской авиации»

## Математика

Методические указания  
для подготовки к экзамену и  
задания для контрольных работ  
для студентов ЗФ  
2-го семестра обучения

Санкт-Петербург

2010

Одобрено и рекомендовано к изданию  
Учебно–методическим советом Университета

МАТЕМАТИКА: Методические указания для подготовки к экзамену и задания для контрольных работ / Университет ГА». С.-Петербург, 2010.

Методические указания издаются в соответствии с программой курса математики.

Предназначены для студентов 2-го семестра обучения заочного факультета.

Составители: Л. И. Загорская, доцент,  
О. И. Нездерова, доцент.

Рецензент: В. И. Арбузов, д-р физ.-мат. наук, проф.

## **Общие методические указания**

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение теоретического материала по учебникам, решение задач, выполнение контрольных работ. В помощь студентам университет организует чтение лекций и проведение практических занятий. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача экзамена в соответствии с учебным планом.

**Вопросы для подготовки к экзамену по курсу математики, изучаемые по программе во втором семестре.**

### **1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной**

1. Определение производной функции, ее геометрический смысл.
2. Правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).
3. Производная сложной функции.
4. Производная обратной функции.
5. Таблица производных.
6. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
7. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
8. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей  $\left(\frac{0}{0}\right)$  и  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

9. Производные и дифференциалы высших порядков.

10. Исследование функций с помощью производных по вопросам:

- возрастание и убывание,
- экстремумы,
- выпуклость кривой,
- точки перегиба.

По каждому вопросу необходимо знать определение, необходимое условие и достаточные условия.

11. Асимптоты кривой (вертикальные и наклонные).

## **2. Неопределенный интеграл**

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл, его свойства.

2. Таблица неопределенных интегралов.

3. Методы интегрирования:

- непосредственное интегрирование (на основании свойств и таблицы интегралов),
- интегрирование по частям,
- метод замены переменной.

4. Интегрирование рациональных алгебраических дробей методом разложения правильной рациональной дроби на простейшие.

5. Интегрирование тригонометрических функций.

6. Интегрирование иррациональных функций.

### **3. Определенный интеграл**

1. Определение определенного интеграла, его геометрический смысл.
2. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.
3. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона–Лейбница.
4. Формула интегрирования по частям.
5. Замена переменной в определенном интеграле.
6. Приближенное вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона (парабол).
7. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, объема тела вращения, длины дуги кривой.
8. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода.

### **4. Дифференциальное исчисление функции нескольких независимых переменных**

1. Предел и непрерывность функции двух переменных.
2. Частное и полное приращения функции.
3. Частные производные первого и высших порядков.
4. Полный дифференциал функции двух переменных.
5. Экстремумы функции двух переменных.
6. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

***Во втором семестре необходимо выполнить контрольные работы № 3 и № 4 (номера задач, входящих в контрольные работы, указаны в таблице на стр.19) и сдать экзамен по указанным выше вопросам.***

На экзамен студент должен явиться с зачтенными контрольными работами № 3 и № 4.

## **Литература**

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. - М.: Наука, 1985. Т. 1.
2. Шипачев В.С. Основы высшей математики. - М.: Высшая школа, 2001.
3. Письменный Д.П. Конспект лекций по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2005. Ч 1.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980.

В задачах 1-10 даны функции  $y = f(x)$ . Найти производные данных функций  $\frac{dy}{dx}$ .

<p><b>1.</b></p> <p>а) <math>y = 6 \sin 5x + (x^3 - 4x)^2</math>,</p> <p>б) <math>y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{arctg} x</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{3x + 6}{\sqrt{3 - 4x - 5x^2}}</math>,</p> <p>г) <math>y = x^{\ln x}</math>.</p>	<p><b>2.</b></p> <p>а) <math>y = 5 \cos^3 x + 4 \arcsin 8x</math>,</p> <p>б) <math>y = 2^x \cdot \ln \operatorname{tg}(2x + 5)</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{\sin 2x}{4x^5 - 3x + 2}</math>,</p> <p>г) <math>y = x^{\cos x}</math>.</p>
<p><b>3.</b></p> <p>а) <math>y = 2 \operatorname{tg}^3(x^2 + 1) + \sqrt{\sin x}</math>,</p> <p>б) <math>y = 5^{4x} \cdot \cos \sqrt{x}</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{1 - \arcsin 3x}{1 - 2x - 5x^6}</math>,</p> <p>г) <math>y = x^{\operatorname{arctg} x}</math>.</p>	<p><b>4.</b></p> <p>а) <math>y = \arcsin^2 4x - (x^3 + 3x)^4</math>,</p> <p>б) <math>y = \operatorname{tg}(\sqrt{x} + 5) \cdot e^{3x}</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{x^6 - 2x^3 + 3}{8 + \ln 4x}</math>,</p> <p>г) <math>y = (\cos x)^x</math>.</p>
<p><b>5.</b></p> <p>а) <math>y = \frac{2}{x^3} - 4\sqrt{e^{2x} + x}</math>,</p> <p>б) <math>y = \cos^3 x \cdot \operatorname{arctg} 3x</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{5\sqrt{x} + 2x^4 + 1}{\sin 2x}</math>,</p> <p>г) <math>y = x^{\operatorname{tg} x}</math>.</p>	<p><b>6.</b></p> <p>а) <math>y = 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{arctg} 4x</math>,</p> <p>б) <math>y = 6^{3x} \cdot \cos 8x</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{4x - 2x^2 + x^3}{\sin 4x}</math>,</p> <p>г) <math>y = (\sin x)^{\ln x}</math>.</p>

<p style="text-align: center;"><b>7.</b></p> <p>а) <math>y = (1 + 2x)^3 - 5\sqrt{\sin x}</math>,</p> <p>б) <math>y = e^{5x} \cdot \operatorname{tg}^3 x</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{x^2 + 5x + 6}{\operatorname{arctg} 3x}</math>,</p> <p>г) <math>y = x^{\arcsin x}</math>.</p>	<p style="text-align: center;"><b>8.</b></p> <p>а) <math>y = 5\sqrt{4x + 3} + 5\sin^2 x</math>,</p> <p>б) <math>y = e^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 5x</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{x^3 + 8x - 1}{\sqrt[3]{x}}</math>,</p> <p>г) <math>y = (\sin x)^{5x}</math>.</p>
<p style="text-align: center;"><b>9.</b></p> <p>а) <math>y = 5\operatorname{tg}^3 x - \sqrt{x^4 - 3x + 8}</math>,</p> <p>б) <math>y = 7^{\sin x} \cdot \arcsin 4x</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{\sqrt[4]{2x - 1}}{x^5 + 3x^2 + 2}</math>,</p> <p>г) <math>y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}</math>.</p>	<p style="text-align: center;"><b>10.</b></p> <p>а) <math>y = 2\sin \sqrt{x} + \arcsin^2 x</math>,</p> <p>б) <math>y = \operatorname{arctg} 5x \cdot \ln \operatorname{tg} x</math>,</p> <p>в) <math>y = \frac{4x^6 - x^{-6}}{\sqrt{5x + 3}}</math>,</p> <p>г) <math>y = (\cos x)^{4x+1}</math>.</p>

В задачах 11-20 найти производные первого порядка для функции, а) заданной параметрически  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$  и б) неявно  $F(x, y) = 0$ .

<p><b>11. а)</b> <math>\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>\operatorname{tg} \frac{y}{x} - 5x = 0</math>.</p>	<p><b>12. а)</b> <math>\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>x - y + \operatorname{arctg} y = 0</math>.</p>
--	---



<p><b>13. a)</b> <math>\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>y \sin x - \cos(x + y) = 0.</math></p>	<p><b>14. a)</b> <math>\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}(xy) = 0.</math></p>
<p><b>15. a)</b> <math>\begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>(e^x - 1) \cdot (e^y + 1) - 1 = 0.</math></p>	<p><b>16. a)</b> <math>\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>x - y^2 + \arcsin y = 0.</math></p>
<p><b>17. a)</b> <math>\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>x^3 + y^3 - \sin(xy) = 0.</math></p>	<p><b>18. a)</b> <math>\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^3. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>\ln x + \cos \frac{x}{y} = 0.</math></p>
<p><b>19. a)</b> <math>\begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}</math></p> <p>б) <math>x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0.</math></p>	<p><b>20. a)</b> <math>\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 0.5(t^2 + 1). \end{cases}</math></p> <p>б) <math>xe^y + \arcsin(x + y) = 0.</math></p>

В задачах 21-30 задана функция  $y = f(x)$ . Исследовать методами дифференциального исчисления заданную функцию и, используя результаты исследования, построить ее график.

<b>21.</b> $y = \frac{4x}{4 + x^2}.$	<b>22.</b> $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$
<b>23.</b> $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$	<b>24.</b> $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}.$
<b>25.</b> $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}.$	<b>26.</b> $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$
<b>27.</b> $y = \frac{x^2}{x - 1}.$	<b>28.</b> $y = \frac{4x^3 + 5}{x}.$
<b>29.</b> $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$	<b>30.</b> $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$

В задачах 31 - 40 задана функция  $z = f(x, y)$ . Доказать тождество, вычислив предварительно частные производные, входящие в тождество.

31. Дана функция  $z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ . Доказать, что  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x + y)}{x - y}$ .

32. Дана функция  $z = \sin(x + 3y)$ . Доказать, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

33. Дана функция  $z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$ .

Доказать, что  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$ .

34. Дана функция  $z = \cos y + (y - x) \cdot \sin y$ .

Доказать, что  $(x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$ .

35. Дана функция  $z = x^2 y + y^2 x$ .

Доказать, что  $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y^3 + 2z$ .

36. Дана функция  $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$ . Доказать, что  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$ .

37. Дана функция  $z = \frac{y}{x}$ . Доказать, что  $y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$ .

38. Дана функция  $z = y \cdot \ln x + x \cdot \ln y$ .

Доказать, что  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$ .

39. Дана функция  $z = \sin x + \sin y + \sin(2x - y)$ .

Доказать, что  $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x - \cos y + 3 \cos(2x - y)$ .

40. Дана функция  $z = \frac{x^2}{y^3}$ . Доказать, что  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^3}$ .

В задачах 41-50 найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой области  $D$ . Сделать чертеж области  $D$ .

41.  $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$ ,  $D: \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$ .

42.  $z = x^2 + 2y^2 + 1$ ,  $D: \{x \geq 0, y \geq 1, x + y \leq 3\}$ .

43.  $z = 3 - 2x^2 - y^2 - xy$ ,  $D: \{x \geq 2, y \geq 0, x + y - 4 \leq 0\}$ .

44.  $z = x^2 + 3y^2 - x - y$ ,  $D: \{x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 3\}$ .

45.  $z = x^2 + 2y^2 - 2xy$ ,  $D: \{x \leq 0, y \geq 1, y - x \leq 4\}$ .

46.  $z = 5x^2 + y^2 - 3xy + 4$ ,  $D: \{x \leq 0, y \geq 0, x - y + 1 \geq 0\}$ .

47.  $z = 10 + 2xy - x^2$ ,  $D: \{x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 2\}$ .

48.  $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$ ,  $D: \{x \geq 1, y \leq 0, x - y \leq 3\}$ .

49.  $z = x^2 + xy - 2$ ,  $D: \{x \geq 0, y \leq 0, x - y - 5 \leq 0\}$ .

50.  $z = x^2 + xy$ ,  $D: \{x \leq 0, y \leq 0, x + y + 1 \geq 0\}$ .

В задачах 51-60 вычислить неопределенные интегралы.

В пункте а) результат проверить дифференцированием.

<p style="text-align: center;"><b>51.</b></p> <p>а) <math>\int \frac{x dx}{x^2 + 16}</math>,</p> <p>б) <math>\int (3x + 1) \cdot \sin x dx</math>,</p> <p>в) <math>\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}</math>,</p> <p>г) <math>\int \frac{dx}{(x-1)^2 \cdot (x+5)}</math>.</p>	<p style="text-align: center;"><b>52.</b></p> <p>а) <math>\int e^{2x^2+4} x dx</math>,</p> <p>б) <math>\int (4x-1) \cdot \cos x dx</math>,</p> <p>в) <math>\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x+1}}</math></p> <p>г) <math>\int \frac{x^2 dx}{(x-3) \cdot (x+3) \cdot (x-4)}</math>.</p>
<p style="text-align: center;"><b>53.</b></p> <p>а) <math>\int \frac{x^2 dx}{4-x^3}</math>,</p> <p>б) <math>\int (x+2) \cdot \sin 5x dx</math>,</p> <p>в) <math>\int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}</math>,</p> <p>г) <math>\int \frac{(x^2+2) dx}{x \cdot (x-2) \cdot (x-4)}</math>.</p>	<p style="text-align: center;"><b>54.</b></p> <p>а) <math>\int \sin^5 x \cdot \cos x dx</math>,</p> <p>б) <math>\int (2x+5) \cdot e^x dx</math>,</p> <p>в) <math>\int x \cdot \sqrt{5+x} dx</math>,</p> <p>г) <math>\int \frac{(2x+1) dx}{(x+3)^2 \cdot (x-1)}</math>.</p>
<p style="text-align: center;"><b>55.</b></p> <p>а) <math>\int \cos^3 x \cdot \sin x dx</math>,</p> <p>б) <math>\int (x-1) \cdot \cos 4x dx</math></p> <p>в) <math>\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx</math>,</p> <p>г) <math>\int \frac{dx}{x \cdot (x-3) \cdot (x+2)}</math>.</p>	<p style="text-align: center;"><b>56.</b></p> <p>а) <math>\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx</math>,</p> <p>б) <math>\int (3x-2) \cdot \sin x dx</math>,</p> <p>в) <math>\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx</math>,</p> <p>г) <math>\int \frac{x dx}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2)}</math>.</p>

<p style="text-align: center;"><b>57.</b></p> <p>а) <math>\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx,</math></p> <p>б) <math>\int (x+3) \cdot e^{2x} dx,</math></p> <p>в) <math>\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)},</math></p> <p>г) <math>\int \frac{(x+1)dx}{x \cdot (x-4) \cdot (x+4)}.</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>58.</b></p> <p>а) <math>\int 4^{x^2} x dx,</math></p> <p>б) <math>\int (x+7) \cdot \cos 3x dx,</math></p> <p>в) <math>\int \frac{x+1}{x \cdot \sqrt{x-2}} dx,</math></p> <p>г) <math>\int \frac{(x+1)dx}{x^2 \cdot (x-5)}.</math></p>
<p style="text-align: center;"><b>59.</b></p> <p>а) <math>\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx,</math></p> <p>б) <math>\int (4x+9) \cdot \sin x dx,</math></p> <p>в) <math>\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,</math></p> <p>г) <math>\int \frac{dx}{(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4)}.</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>60.</b></p> <p>а) <math>\int \frac{e^x dx}{e^x + 5},</math></p> <p>б) <math>\int (3x-4) \cdot e^x dx,</math></p> <p>в) <math>\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}},</math></p> <p>г) <math>\int \frac{x dx}{(x+1) \cdot (x-1)^2}.</math></p>

В задачах 61-70 вычислить определенные интегралы по формуле Ньютона-Лейбница.

<p><b>61.</b> <math>\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \sin^4 x dx.</math></p>	<p><b>62.</b> <math>\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx.</math></p>
---	--

<b>63.</b> $\int_0^1 e^{e^x} \cdot e^x dx$	<b>64.</b> $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}.$
<b>65.</b> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot \sin x dx.$	<b>66.</b> $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx.$
<b>67.</b> $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$	<b>68.</b> $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \sin^3 x dx.$
<b>69.</b> $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2}.$	<b>70.</b> $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}.$

В номерах 71-80 решить задачи на геометрические приложения определенного интеграла. Сделать чертеж.

**71.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 3x^2 + 1$  и прямой  $y = 3x + 7$ .

**72.** Вычислить объем тела образованного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x}$ .

**73.** Вычислить длину дуги полукубической параболы  $y = \sqrt{(x-2)^3}$  от точки  $A(2,0)$  до точки  $B(6,8)$ .

74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  и прямой  $x = 1$ .
75. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2^x$ ,  $x = -1$ , и  $y = 2$ .
76. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 + 1$  и  $y = -x^2 + 3$ .
77. Вычислить объем тела образованного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной параболой  $y = 4x - x^2$  и прямой  $y = 2x$ .
78. Вычислить объем тела образованного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $y = 1$  и  $x = 0$ .
79. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 2x^2 + 3$  и прямой  $6x + y - 11 = 0$ .
80. Вычислить объем тела образованного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 25x$ ,  $y = 5$  и  $x = 3$ .



В задачах 81-90 вычислить приближенное значение определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  по формуле трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

<b>81.</b> $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 11} dx.$	<b>82.</b> $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3 + 36} dx.$
<b>83.</b> $\int_2^{12} \sqrt{x^3 + 9} dx.$	<b>84.</b> $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 8} dx.$
<b>85.</b> $\int_0^{10} \sqrt{x^3 + 5} dx.$	<b>86.</b> $\int_2^{12} \sqrt{x^3 + 4} dx.$
<b>87.</b> $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx.$	<b>88.</b> $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3 + 32} dx.$
<b>89.</b> $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3 + 2} dx.$	<b>90.</b> $\int_1^{11} \sqrt{x^3 + 3} dx.$

В задачах 91-100 вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

<b>91.</b> $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$	<b>92.</b> $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 1}.$
<b>93.</b> $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$	<b>94.</b> $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}.$
<b>95.</b> $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}.$	<b>96.</b> $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}.$
<b>97.</b> $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$	<b>98.</b> $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx.$
<b>99.</b> $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$	<b>100.</b> $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}.$

## Контрольные задания

Ниже приведена таблица номеров задач, входящих в контрольные работы. Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного шифра (номера зачетной книжки или студенческого билета).

<b>Вариант</b>	<b>Номера задач контрольных заданий</b>	
	<b>Контрольная работа № 3</b>	<b>Контрольная работа № 4</b>
<b>1</b>	<b>1, 11, 21, 31, 41</b>	<b>51, 61, 71, 81, 91</b>
<b>2</b>	<b>2, 12, 22, 32, 42</b>	<b>52, 62, 72, 82, 92</b>
<b>3</b>	<b>3, 13, 23, 33, 43</b>	<b>53, 63, 73, 83, 93</b>
<b>4</b>	<b>4, 14, 24, 34, 44</b>	<b>54, 64, 74, 84, 94</b>
<b>5</b>	<b>5, 15, 25, 35, 45</b>	<b>55, 65, 75, 85, 95</b>
<b>6</b>	<b>6, 16, 26, 36, 46</b>	<b>56, 66, 76, 86, 96</b>
<b>7</b>	<b>7, 17, 27, 37, 47</b>	<b>57, 67, 77, 87, 97</b>
<b>8</b>	<b>8, 18, 28, 38, 48</b>	<b>58, 68, 78, 88, 98</b>
<b>9</b>	<b>9, 19, 29, 39, 49</b>	<b>59, 69, 79, 89, 99</b>
<b>0</b>	<b>10, 20, 30, 40, 50</b>	<b>60, 70, 80, 90, 100</b>

## **Правила выполнения и оформления контрольных работ**

1. Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку. Необходимо оставить поля для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия и инициалы студента, его учебный шифр, название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в контрольных заданиях, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Задачи и их решения следует располагать в порядке возрастания номеров, указанных в контрольных заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи необходимо полностью записать ее условие.
6. Решения задач должны быть изложены подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения.
7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все ошибки, недочеты, замечания и выполнить рекомендации рецензента.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных выше правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются.

***Формулы дифференцирования основных функций.***

1.  $C' = 0$ , где  $C = \text{const}$

10.  $(\sin x)' = \cos x$

2.  $(x^m)' = mx^{m-1}$

11.  $(\cos x)' = -\sin x$

3.  $x' = 1$

12.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

4.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

13.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5.  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

14.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6.  $(a^x)' = a^x \ln a$

15.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7.  $(e^x)' = e^x$

16.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

8.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

17.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

9.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

***Основные правила дифференцирования.***

1.  $(Cu)' = Cu'$ , где  $C = \text{const}$ .

2.  $(u + v)' = u' + v'$ .

3.  $(uv)' = u'v + uv'$ .

4.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

5. Если  $y = f(u)$ ,  $u = u(x)$ , т. е.  $y = f(u(x))$ , то  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ .

***Таблица основных интегралов.***

$$1. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

при  $m \neq -1$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$2. \int dx = x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \lambda} \right| + C$$

***Основные правила интегрирования.***

$$1. \int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx, \text{ где } C = \operatorname{const}.$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$3. \text{ Если } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C.$$

$$4. \text{ Формула интегрирования по частям: } \int u dv = uv - \int v du.$$

## ***Основные правила вычисления определенных интегралов.***

1. Формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

2. Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

## ***Приближенное вычисление определенных интегралов.***

1. Формулы прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

ИЛИ

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n).$$

2. Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

3. Формула Симпсона (парабол):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} (y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + \\ + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})) \end{aligned}$$