**1. Отношение эквивалентности. Теорема о том, что отношение эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся классы.**

Бинарным отношением между элементами множеств А и В называется любое подмножество  множества . Если , то отношение  называется бинарным отношением на .

Бинарное отношение  на множестве А называется

рефлексивным, если для всех  ;

симметричным, если для всех  из того, что , следует ;

транзитивным, если для всех  из того, что  и , следует .

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение  на множестве А называется отношением эквивалентности.

Пример 1. Отношение «=» на любом множестве Х является отношением эквивалентности.

Пример 2. Пусть  ( – множество комплексных чисел). Рассмотрим бинарное отношение , заданное правилом:

.

Отношение  также является отношением эквивалентности.

Два элементы множества А, связанные отношением эквивалентности, называются эквивалентными. Так как отношение эквивалентности по определению рефлексивно, то каждый его элемент эквивалентен к самому себе. Так как отношение эквивалентности по определению транзитивно, то из того, что элементы  эквивалентны и  эквивалентны, следует, что элементы  также эквивалентны.

Пусть  – отношение эквивалентности на множестве А. Множество всех элементов, эквивалентных к элементу , называют классом эквивалентности (элемента ). Класс эквивалентности, порожденный элементом  по отношению , обозначают . Итак, .

Заметим, что классы эквивалентности, порожденные двумя элементами множества А, или совпадают, или не пересекаются. Это утверждает следующая лемма.

Лемма. Пусть  – отношение эквивалентности на множестве А. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

 (I) ,

(II) ,

(III) .

Доказательство. Сначала докажем, что из (I) следует (II). Допустим, что . Чтобы доказать равенство , покажем, что  и . Пусть ; тогда . Так как , а  – симметричное отношение, то . Так как отношение  является транзитивным, то из и  следует , поэтому . Таким образом, . Аналогично можно доказать, что .

Докажем теперь, что из (II) следует (III). Действительно, , так как  вследствие рефлексивности. Таким образом, из  следует .

Наконец, докажем, что из (III) следует (I). Предположим, что

. Тогда существует такой элемент , что  и , т.е.  и . Из симметричности отношения  следует . Так как отношение  транзитивно, то из  и  следует .

Так как из (I) следует (II), из (II) следует (III) и из (III) следует (I), то утверждения (I), (II) и (III) эквивалентны.

Теорема. Отношение эквивалентности на А разбивает множество А на непересекающиеся классы.

Доказательство. В теории множеств теорема формулируется следующим образом: $(∀a\in A):(∃\left[a\right]\in $A/R$): (∀\left[b\right]:a\in \left[b\right]\rightarrow (\left[b\right]=\left[a\right]))$.

(то есть для любого элемента существует некоторый класс эквивалентности, (тогда отношение эквивалентности разбивает множество на подмножества) и элементы этих классов не пересекаются - если элемент принадлежит пересечению подмножеств, то он принадлежит как одному подмножеству, так и другому, по определению пересечения (тогда наши подмножества не пересекаются))

Сформируем класс эквивалентности по отношению R для произвольного элемента:$∀a\in A: \left[a\right]=\left\{b \right| aRb\}$ *.* Для любого элемента его класс эквивалентности по отношению R будет существовать и, более того, не пуст из рефлексивности отношения эквивалентности:

$∀a\in A:aRa\rightarrow a\in \left[a\right]$*.*

Теперь докажем $(∀\left[b\right]:a\in \left[b\right]\rightarrow (\left[b\right]=\left[a\right]))$ :

$(a\in \left[b\right]=\left\{c \right| bRc\}) \rightarrow (bRa)) $ из $bRa\rightarrow aRb$, по лемме сразу следует что $\left[b\right]=\left[a\right]$.

Теорема доказана.

**3. Задано бинарное отношение , где . Определить, выполняются ли для данного отношения свойства симметричности и рефлексивности. Ответ обосновать.**

Решение:

Заданное отношение является симметричным. Действительно, если , то , откуда , т.е. .

Заданное отношение не является рефлексивным. Например, .

*Верно? Ну хоть бы привели другой пример, что-ли!. Что уж совсем-то копию присылать. Даже не просмотрели работу?*