*Способ 4.* 1) Определение средних значений параметров (с учетом замены переменной $X$):

$$X^*_{ср} = \frac{\sum X^*_i}{n}; \qquad Y_{ср} = \frac{\sum Y_i}{n};$$

$$X^*_{ср} = \frac{140}{7} = 20; \quad Y_{ср} = \frac{34{,}8}{7} = 4{,}97.$$

2) Определение среднего квадратичного отклонения параметров:

$$S_{X^*} = \sqrt{\frac{\sum\left(X^*_i - X^*_{ср}\right)^2}{n-1}}; \qquad S_Y = \sqrt{\frac{\sum\left(Y_i - Y_{ср}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{Q}{n-1}};$$

$$S_{X^*} = \sqrt{\frac{(1-20)^2 + (4-20)^2 + (9-20)^2 + (16-20)^2 + (25-20)^2 + (36-20)^2}{7-1}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{(36-20)^2 + (49-20)^2}{7-1}} = 17{,}682;$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{17{,}4343}{7-1}} = 1{,}705.$$

3) Определение выборочного коэффициента корреляции:

$$r = \frac{\sum\left[\left(X^*_i - X^*_{ср}\right)\left(Y_i - Y_{ср}\right)\right]}{(n-1)S_{X^*}S_Y};$$

$$r = \frac{(1-20)(3{,}1-4{,}97) + (4-20)(3{,}4-4{,}97) + (9-20)(3{,}9-4{,}97) + (1{,}6-20)(4{,}6-4{,}97)}{(7-1)17{,}682\cdot 1{,}705} +$$

$$+ \frac{(25-20)(5{,}5-4{,}97) + (36-20)(6{,}7-4{,}97) + (49-20)\cdot(7{,}6-4{,}97)}{(7-1)17{,}682\cdot 1{,}705} = 1{,}00;$$

Так как $r = 1{,}00$, то между величинами $X^*$ и $Y$ существует строгая функциональная зависимость, причем с увеличением одной переменной другая также увеличивается и наоборот.

*Вывод:* результаты эксперимента надёжно описываются уравнением $Y = 3{,}05 + 0{,}10X^2$.

Рассмотрим пример решения задачи, в которой присутствуют параллельные определения в опытах и результаты эксперимента описываются более сложным уравнением $Y = b_0 \cdot 10^{b_1/X}$.



**Пример**

Исходные данные для аппроксимации результатов эксперимента:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 2,2 | 7,9 | 15,8 | 20,1 | 26,1 | 29,4 |
| $Y_2$ | 2,1 | 8,2 | 15,3 | 21,2 | 24,8 | 26,9 |

Так как в опытах проводились параллельные определения, то находим средние значения выходного параметра в каждом опыте:

$$Y_{ср_i} = \frac{\sum Y_i}{m};$$

$$Y_{ср_1} = \frac{2{,}2 + 2{,}1}{2} = 2{,}15; \quad Y_{ср_4} = \frac{20{,}1 + 21{,}2}{2} = 20{,}65;$$

$$Y_{ср_2} = \frac{7{,}9 + 8{,}2}{2} = 8{,}05; \quad Y_{ср_5} = \frac{26{,}1 + 24{,}8}{2} = 25{,}45;$$

$$Y_{ср_3} = \frac{15{,}8 + 15{,}3}{2} = 15{,}55; \quad Y_{ср_6} = \frac{29{,}4 + 26{,}9}{2} = 28{,}15.$$

Полученные данные для построения графика представим в виде

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_{ср}$ | 2,15 | 8,05 | 15,55 | 20,65 | 25,45 | 28,15 |

**I часть.** Построение графика по опытным данным (рис. 1.3).

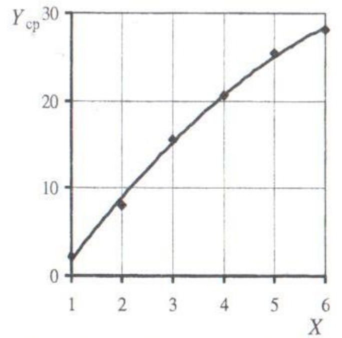


Рис. 1.3. Зависимость $Y_{ср} = f(X)$

Уравнение связи имеет вид $Y = b_0 \cdot 10^{b_1/X}$ (по условию задачи).

**II часть.** Определение коэффициентов уравнения $Y = b_0 \cdot 10^{b_1/X}$.

Так как уравнение нелинейное, проведем его линеаризацию:

$$\lg Y = \lg\left(b_0 \cdot 10^{b_1/X}\right) = \lg b_0 + \lg 10^{b_1/X} = \lg b_0 + \frac{b_1}{X}\lg 10 = \lg b_0 + b_1\frac{1}{X}.$$

Произведем замену переменных: $\lg Y = Y^*$ и $\frac{1}{X} = X^*$.

В результате получаем данные для определения коэффициентов уравнения:

| $X^*$ | 1,000 | 0,500 | 0,333 | 0,250 | 0,200 | 0,167 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y^*$ | 0,332 | 0,906 | 1,192 | 1,315 | 1,406 | 1,449 |

Линеаризованное уравнение имеет вид $\lg Y = \lg b_0 + b_1\frac{1}{X}$ или $Y^* = \lg b_0 + b_1 X^*$.

*Метод избранных точек.* Выберем 1-ю и 4-ю опытные точки и соответствующие пары значений $X^*$ и $Y^*$ подставим в уравнение $Y^* = \lg b_0 + b_1 X^*$:

$$\begin{cases} 0{,}332 = \lg b_0 + 1{,}000 b_1, \\ 1{,}315 = \lg b_0 + 0{,}250 b_1; \end{cases} \quad 0{,}983 = -0{,}750 b_1; \quad \begin{cases} b_1 = -1{,}311 \approx -1{,}3, \\ \lg b_0 = 0{,}332 + 1{,}311 = 1{,}643; \\ b_0 = 10^{1{,}643} \approx 44{,}0. \end{cases}$$

Получаем уравнение $Y = 44{,}0 \cdot 10^{-1{,}3/X}$.

*Графический метод.* Строим график зависимости $Y^* = f\left(X^*\right)$ (рис. 1.4).

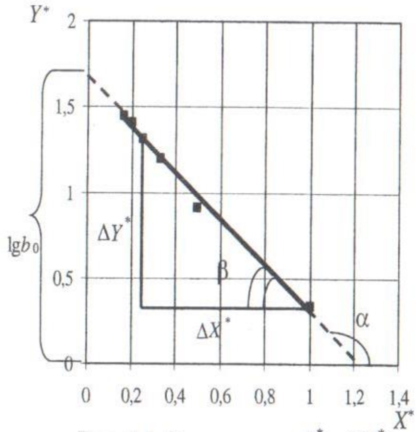


Рис. 1.4. Зависимость $Y^* = f(X^*)$

По графику определяем $\lg b_0 = 1{,}65$; $b_0 = 10^{1{,}65} = 44{,}7$;

$$b_1 = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(180 - \beta) = -\mathrm{tg}\beta = -\frac{\Delta Y^*}{\Delta X^*} = -\frac{1{,}315 - 0{,}332}{1{,}000 - 0{,}250} = -1{,}3.$$



Получаем уравнение $Y = 44{,}7 \cdot 10^{-1{,}3/X}$.

*Метод средних.* Подставляем поочередно в линеаризованное уравнение все шесть пар значений $X^*$ и $Y^*$, полученную систему делим на 2 части, в каждой части уравнения почленно складываем:

$$\begin{cases} 0{,}332 = \lg b_0 + 1{,}000 b_1, \\ 0{,}906 = \lg b_0 + 0{,}500 b_1, \\ 1{,}192 = \lg b_0 + 0{,}333 b_1, \\ \hline 1{,}315 = \lg b_0 + 0{,}250 b_1, \\ 1{,}406 = \lg b_0 + 0{,}200 b_1, \\ 1{,}449 = \lg b_0 + 0{,}167 b_1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2{,}430 = 3\lg b_0 + 1{,}833 b_1, \\ 4{,}170 = 3\lg b_0 + 0{,}617 b_1; \end{cases}$$

$$-1{,}740 = 1{,}216\, b_1;$$

$$\begin{cases} b_1 = -1{,}4309 \approx -1{,}43, \\ \lg b_0 = \dfrac{2{,}430 - 1{,}833(-1{,}4309)}{3} = 1{,}684, \\ b_0 = 10^{1{,}684} = 48{,}31. \end{cases}$$

Получаем уравнение $Y = 48{,}31 \cdot 10^{-1{,}43/X}$.

*Метод наименьших квадратов.* Составим расчетную систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum Y^* = n\lg b_0 + b_1 \sum X_i^*, \\ \sum\left(Y_i^* X_i^*\right) = \lg b_0 \sum X_i^* + b_1 \sum \left(X_i^*\right)^2. \end{cases}$$

Найдем каждую сумму:

$$\sum Y^* = 0{,}332 + 0{,}906 + 1{,}192 + 1{,}315 + 1{,}406 + 1{,}449 = 6{,}600;$$

$$\sum X_i^* = 1{,}000 + 0{,}500 + 0{,}333 + 0{,}250 + 0{,}200 + 0{,}167 = 2{,}450;$$

$$\sum\left(Y_i^* X_i^*\right) = 0{,}332 \cdot 1{,}000 + 0{,}906 \cdot 0{,}500 + 1{,}192 \cdot 0{,}333 + 1{,}315 \cdot 0{,}250 + $$
$$+ 1{,}406 \cdot 0{,}200 + 1{,}449 \cdot 0{,}167 = 2{,}033869 \approx 2{,}034;$$

$$\sum\left(X_i^*\right)^2 = 1{,}000^2 + 0{,}500^2 + 0{,}333^2 + 0{,}250^2 + 0{,}200^2 + 0{,}167^2 =$$
$$= 1{,}491278 \approx 1{,}491.$$

Полученные значения подставляем в расчетную систему и складываем уравнения, домножив каждое на указанное число:

$$\begin{cases} 6{,}600 = 6\lg b_0 + 2{,}450 b_1, \\ 2{,}034 = 2{,}450\lg b_0 + 1{,}491 b_1; \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 2{,}45 \\ \times(-6) \end{vmatrix}$$

$$3{,}966 = -2{,}9435 b_1;$$

$$\begin{cases} b_1 = -1{,}3474 \approx -1{,}35, \\ \lg b_0 = \dfrac{6{,}6 - 2{,}45(-1{,}3474)}{6} = 1{,}650, \\ b_0 = 10^{1{,}650} = 44{,}67. \end{cases}$$

Получаем уравнение $Y = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/X}$.

**III часть.** Оценка надёжности уравнения $Y = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/X}$ (используем уравнение, полученное самым точным методом).

*Способ 1.* 1) Проверка воспроизводимости опытов по критерию Кохрена:

$$G_{\max} = \frac{S^2_{u_{\max}}}{\sum S^2_{u_i}} \le G_{\text{табл}}; \qquad G_{\text{табл}} = f(\alpha; n; f_u);$$

$$S^2_{u_i} = \frac{\sum (Y_i - Y_{\text{ср}i})^2}{m-1}; \quad f_u = m - 1;$$

$$S^2_{u_1} = \frac{(2{,}2 - 2{,}15)^2 + (2{,}1 - 2{,}15)^2}{2-1} = 0{,}005;$$

$$S^2_{u_2} = \frac{(7{,}9 - 8{,}05)^2 + (8{,}2 - 8{,}05)^2}{2-1} = 0{,}045;$$

$$S^2_{u_3} = \frac{(15{,}8 - 15{,}55)^2 + (15{,}3 - 15{,}55)^2}{2-1} = 0{,}125;$$

$$S^2_{u4} = \frac{(20{,}1 - 20{,}65)^2 + (21{,}2 - 20{,}65)^2}{2-1} = 0{,}605;$$

$$S^2_{u_5} = \frac{(26{,}1 - 25{,}45)^2 + (24{,}8 - 25{,}45)^2}{2-1} = 0{,}845;$$

$$S^2_{u6} = \frac{(29{,}4 - 28{,}15)^2 + (26{,}9 - 28{,}15)^2}{2-1} = 3{,}125;$$

$$G_{\max} = \frac{3{,}125}{0{,}005 + 0{,}045 + 0{,}125 + 0{,}605 + 0{,}845 + 3{,}125} = 0{,}678;$$

$$G_{\text{табл}} = f(0{,}05;\ 6;\ 1) = 0{,}7808 \text{ (см. прил. 4).}$$

$G_{\max} < G_{\text{табл}}$, следовательно, все опыты воспроизводимы.



2) Определение дисперсии воспроизводимости и числа ее степеней свободы:

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{\sum S^2_{u_i}}{n}; \qquad f_{\text{воспр}} = n(m-1);$$

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{0{,}005 + 0{,}045 + 0{,}125 + 0{,}605 + 0{,}845 + 3{,}125}{6} = 0{,}792;$$

$$f_{\text{воспр}} = 6(2-1) = 6.$$

3) Определение расчётных значений параметра $Y$:

$$Y_{\text{расч}_i} = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/X_i}$$

$$Y_{\text{расч}_1} = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/1} = 2{,}00; \qquad Y_{\text{расч}_4} = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/4} = 20{,}54;$$

$$Y_{\text{расч}2} = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/2} = 9{,}44; \qquad Y_{\text{расч}_5} = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/5} = 23{,}99;$$

$$Y_{\text{расч}_3} = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/3} = 15{,}85; \qquad Y_{\text{расч}_6} = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/6} = 26{,}61.$$

4) Определение дисперсии адекватности и числа ее степеней свободы:

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{\sum \left(Y_{\text{ср}_i} - Y_{\text{расч}_i}\right)^2}{n - L}; \qquad f_{\text{ад}} = n - L,$$

где $L$ – число значимых коэффициентов в полученном уравнении;

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{(2{,}15 - 2{,}00)^2 + (8{,}05 - 9{,}44)^2 + (15{,}55 - 15{,}85)^2 + (20{,}65 - 20{,}54)^2}{6-2} +$$

$$+ \frac{(25{,}45 - 23{,}99)^2 + (28{,}15 - 26{,}61)^2}{6-2} = 1{,}640;$$

$$f_{\text{ад}} = 6 - 2 = 4.$$

5) Проверка адекватности уравнения по критерию Фишера:

$$F = \frac{S^2_{\text{ад}}}{S^2_{\text{воспр}}} \le F_{\text{табл}}; \quad F_{\text{табл}} = f(\alpha; f_{\text{ад}}; f_{\text{воспр}});$$

$$F = \frac{1{,}640}{0{,}792} = 2{,}071; \quad F_{\text{табл}} = f(0{,}05;4;6) = 4{,}53 \text{ (см. прил. 5).}$$

Так как $F < F_{\text{табл}}$, то уравнение $Y = 44{,}67 \cdot 10^{-1{,}35/X}$ адекватно (надёжно) описывает результаты эксперимента.

*Способы 2 и 3.* Данные способы не используем, так как в опытах проводились параллельные определения.

*Способ 4.* 1) Определение средних значений параметров (с учетом замены переменных $X$ и $Y$):

$$X^*_{\text{ср}} = \frac{\sum X^*_i}{n}; \qquad Y^*_{\text{ср}} = \frac{\sum Y^*_i}{n};$$

$$X^*_{\text{ср}} = \frac{2{,}450}{6} = 0{,}408; \qquad Y^*_{\text{ср}} = \frac{6{,}600}{6} = 1{,}100.$$

2) Определение среднего квадратичного отклонения параметров:

$$S_{X^*} = \sqrt{\frac{\sum\left(X^*_i - X^*_{\text{ср}}\right)^2}{n-1}}; \qquad S_{Y^*} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y^*_i - Y^*_{\text{ср}}\right)^2}{n-1}};$$

$$S_{X^*} = \sqrt{\frac{(1{,}000-0{,}408)^2 + (0{,}500-0{,}408)^2 + (0{,}333-0{,}408)^2}{6-1} +}$$

$$+ \sqrt{\frac{(0{,}250-0{,}408)^2 + (0{,}200-0{,}408)^2 + (0{,}167-0{,}408)^2}{6-1}} = 0{,}313;$$

$$S_{Y^*} = \sqrt{\frac{(0{,}332-1{,}100)^2 + (0{,}906-1{,}100)^2 + (1{,}192-1{,}100)^2}{6-1} +}$$

$$+ \sqrt{\frac{(1{,}315-1{,}100)^2 + (1{,}406-1{,}100)^2 + (1{,}449-1{,}100)^2}{6-1}} = 0{,}424.$$

3) Определение выборочного коэффициента корреляции:

$$r = \frac{\sum\left[\left(X^*_i - X^*_{\text{ср}}\right)\left(Y^*_i - Y^*_{\text{ср}}\right)\right]}{(n-1)S_{X^*}S_{Y^*}};$$

$$r = \frac{(1{,}000-0{,}408)(0{,}332-1{,}100) + (0{,}500-0{,}408)(0{,}906-1{,}100)}{(6-1)0{,}313\cdot 0{,}424} +$$

$$+ \frac{(0{,}333-0{,}408)(1{,}192-1{,}100) + (0{,}250-0{,}408)(1{,}315-1{,}100)}{(6-1)0{,}313\cdot 0{,}424} +$$

$$+ \frac{(0{,}200-0{,}408)(1{,}406-1{,}100) + (0{,}167-0{,}408)(1{,}449-1{,}100)}{(6-1)0{,}313\cdot 0{,}424} = -1{,}00.$$



Так как $r = -1{,}00$, то между величинами $X^*$ и $Y^*$ существует строгая функциональная зависимость, причем с увеличением одной переменной другая уменьшается и наоборот.

# 2. ОПИСАНИЕ МНОГОФАКТОРНОЙ СИСТЕМЫ

Многофакторная система – это система, на которую действуют несколько факторов. Для математического описания таких систем часто используются алгебраические полиномы. В случае двухфакторной системы $Y=f(X_1;X_2)$ полином I степени (линейное уравнение связи) имеет вид $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$; неполный полином II степени (неполное квадратное уравнение) – $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$; полный полином II степени – $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2$. При необходимости могут использоваться полиномы более высокого порядка.

Для расчета этих уравнений используются результаты опытов, число которых не должно быть меньше числа неизвестных коэффициентов ($b_0$, $b_1$, $b_2$…). При необходимости оценки надежности полученного уравнения связи число опытов должно превышать число коэффициентов (хотя бы на 1).

## 2.1. Расчёт линейного уравнения связи (полинома I степени)

В курсовой работе для расчета полинома $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ даются данные 3 опытов. После подстановки опытных данных получается система из 3 уравнений, которую требуется решить методом Крамера.

Метод Крамера предполагает расчет коэффициентов путем составления и решения определителей. Главный определитель системы ($\Delta$) составляется из множителей при неизвестных коэффициентах, а частные определители ($\Delta b_0$, $\Delta b_1$, $\Delta b_2$) – путем замены соответствующих множителей на столбец свободных членов. Значения коэффициентов рассчитываются по формулам:

$$b_0 = \frac{\Delta b_0}{\Delta}; \qquad b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta}; \qquad b_2 = \frac{\Delta b_2}{\Delta}.$$