



Рис.1

Построение эпюр производится **методом сечений**.

Как обычно, стержень, который в данном случае называется **балкой**, разбивается на участки, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы, моменты,

начинается или заканчивается распределенная нагрузка.

На каждом участке выбирается произвольное сечение, и рассматриваются внешние силы с одной стороны от сечения (слева или справа).

**Поперечная сила**  $Q_y$  численно равна сумме проекций внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, на нормаль к оси стержня (в данном случае это ось  $y$ ), взятых со знаками по правилу знаков (см. рис.1).

**Изгибающий момент**  $M_z$  численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести этого сечения, взятых со знаками по правилу знаков (см. рис.1).

### Задача 1.

1. Для балки, изображенной на рис.2, а сначала определим реакции закрепления из уравнений равновесия:

$$\sum F_x = H_A = 0; \quad \sum F_y = R_A - P - ql_2 = 0 \Rightarrow R_A = 20 + 10 \cdot 2 = 40 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_{zA} = M_A - P(l_1 + l_2) - ql_1(l_1 + \frac{l_2}{2}) - M_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A = 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot 2 + 30 = 130 \text{ (кНм)}$$

Напомним, что при записи уравнений равновесия распределенная нагрузка  $q$  условно заменяется равнодействующей  $ql_2$ , приложенной в середине участка  $l_2$ .

### 2. Построение эпюр внутренних усилий.

Теперь, когда известны все внешние силы, приложенные к балке, при построении эпюр можно рассматривать любую сторону от сечения.

Балка разбивается на два участка.

На первом участке рассмотрим все внешние силы слева от произвольного сечения, находящегося на расстоянии  $x_1$  от заделки  $0 \leq x_1 \leq l_1 = 1$  (м):

$$Q_y(x_1) = -R_A = -40 \text{ (кН)}, M_z(x_1) = -M_A + R_A \cdot x_1 = -130 + 40x_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_z(0) = -130 \text{ (кНм)}, M_z = -130 + 40 \cdot 1 = -90 \text{ (кНм)}$$

Для второго участка  $x_2$  - расстояние от правого, свободного конца балки  $0 \leq x_2 \leq l_2 = 2$  (м):

$$Q_y(x_2) = -qx_2 - P = -10x_2 - 20 \Rightarrow Q_y(0) = -20, Q_y(2) = -10 \cdot 2 - 20 = -40 \text{ (кН)}$$

$$M_z(x_2) = -qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} - Px_2 = -5x_2^2 - 20x_2 \Rightarrow M_z(0) = 0, M_z(2) = -60 \text{ (кНм)}.$$

Здесь нагрузка  $q$ , распределенная на участке длины  $x_2$ , заменяется равнодействующей  $qx_2$ , приложенной на расстоянии  $\frac{x_2}{2}$  от сечения.

Анализируя вид эпюр, представленных на рис.2, а можно отметить следующие **свойства**:

- на участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q_y$  постоянная, эпюра  $M_z$  - линейная;
- на участке, где есть распределенная нагрузка, эпюра  $Q_y$  линейная, эпюра  $M_z$  очерчена по параболе, направленной выпуклостью навстречу нагрузке;
- там, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $Q_y$  имеется скачок на величину этой силы, на эпюре  $M_z$  - излом в направлении, противоположном силе (навстречу);
- там, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M_z$  - скачок на величину этого момент, на эпюре  $Q_y$  ничего не меняется.

3. Подберем из условия прочности круглое и прямоугольное сечения для балки, изображенной на рис.2, а, считая  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ . Как видно, опасное сечение - сечение А,  $|M_z|_{\max} = 130 \text{ кНм}$ .

Осевой момент сопротивления круглого сечения радиуса  $R$  вычисляется по формуле  $W_z = \frac{\pi R^3}{4}$ . Подставив это выражение в условие прочности, получаем неравенство для определения  $R$ :

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{4|M_z|_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 130 \cdot 10^3}{\pi \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0.255 \text{ (м)}.$$

Принимаем  $R = 0.255 \text{ м}$ , тогда  $|\sigma_x|_{\max} \approx 10 \text{ МПа}$ , эпюра распределения  $\sigma_x$  по высоте сечения приведена на рис.2, б. Отметим, что нижние волокна балки в опасном сечении (и вообще на всей длине) сжаты ( $\sigma_x < 0$ ), а верхние волокна растянуты ( $\sigma_x > 0$ ).

Для прямоугольного сечения (см.рис.2,в) с соотношением сторон  $\frac{h}{b} = 2$

осевой момент сопротивления равен  $W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$ . Размеры сечения

найдутся из неравенства:  $b \geq \sqrt[3]{\frac{3|M_z|_{\max}}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 130 \cdot 10^3}{2 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0.269 \text{ (м)}$ .

Возьмем  $b = 0.27 \text{ м}$ ,  $h = 0.54 \text{ м}$ , тогда  $|\sigma_x|_{\max} \approx 9.9 \text{ МПа}$ , эпюра  $\sigma_x$  приведена на рис.2, в.

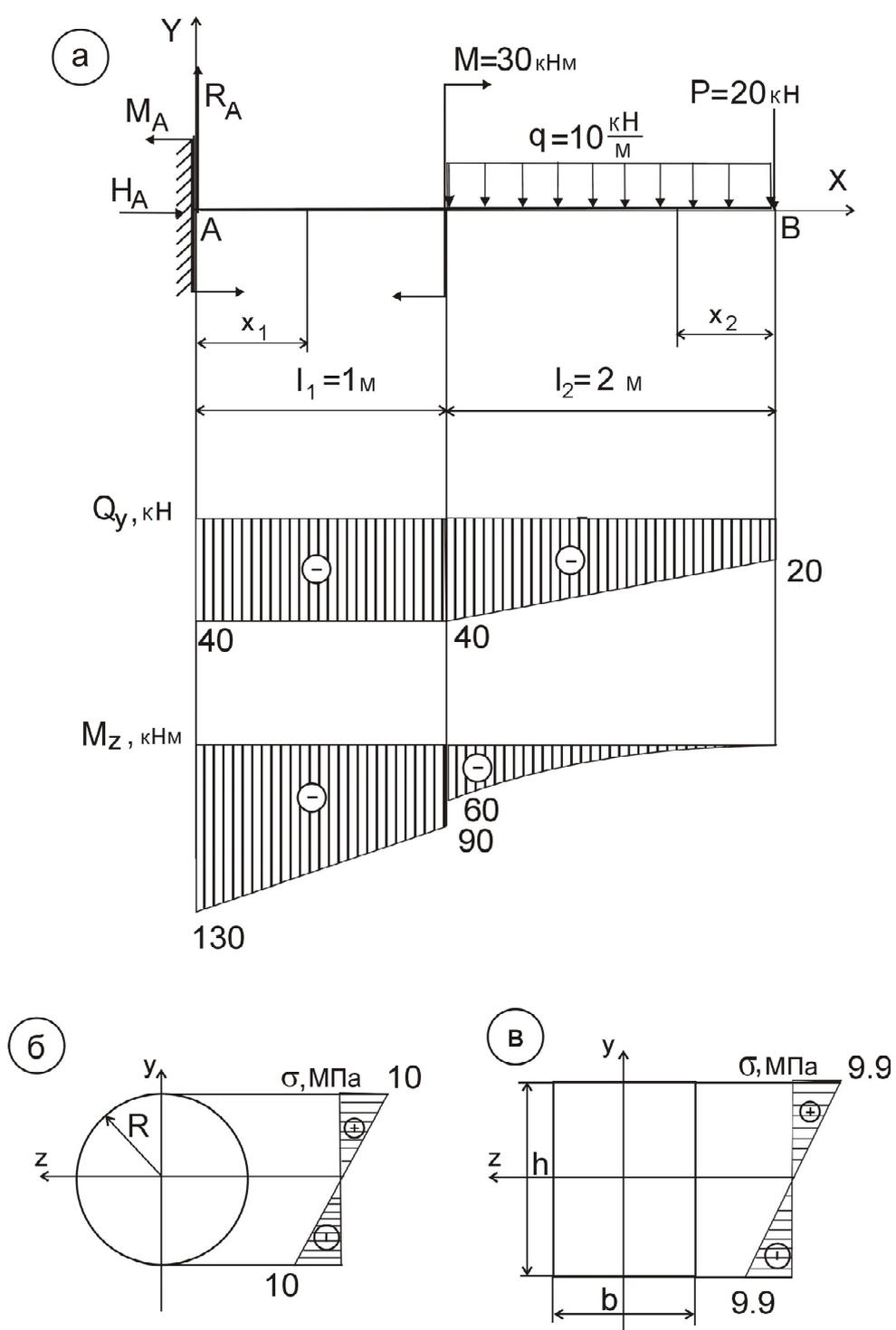


Рис.2

**Задача 2.** На рис.3, а представлена статически неопределимая балка.

1. Запишем уравнения равновесия для нее:

$$\sum F_x = H_A = 0, \quad \sum F_y = R_A + R_B - q \cdot 2 - 2q = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 4q,$$

$$\sum M_{zB} = M_A - 2R_A + q \cdot 2 \cdot 1 + 3q - 2q \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_A - 2R_A = -3q.$$

Как видно, неизвестных реакций здесь 4, а уравнений равновесия - только 3. Говорят, что **степень статической неопределимости** этой балки равна 1, или что балка один раз статически неопределима.

Как обычно, если для определения реакций не хватает уравнений статики, нужно записать уравнения совместности перемещений. Для балок в этом качестве используются условия закрепления:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{в сечении } x = 0 \text{ находится заделка});$$

$$y(2) = 0 \quad (\text{в сечении } x = 2 \text{ находится шарнирная опора}).$$

Отметим, что составлено три дополнительных уравнения совместности, в то время как для нахождения реакций не хватало лишь одного. Это связано с тем, что в дальнейшем потребуется определить еще две постоянные интегрирования для дифференциального уравнения изогнутой оси.

Запишем его по двум участкам балки (см.рис.3, а). При этом будем следовать правилам метода уравнивания постоянных интегрирования.

На первом участке  $0 \leq x \leq 2$ :

$$EI_z y'' = -M_A + R_A x - q \frac{x^2}{2}, \quad EI_z y' = C - M_A x + R_A \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6},$$

$$EI_z y = Cx + D - M_A \frac{x^2}{2} + R_A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24}.$$

На втором участке  $2 \leq x \leq 3$ :

$$EI_z y'' = -M_A + R_A x - q \frac{x^2}{2} + q \frac{(x-2)^2}{2} - 3q \cdot (x-2)^0 + R_B \cdot (x-2).$$

Отметим, что в точке  $x = 2$ , где кончается равномерно распределенная нагрузка, следует ввести слагаемое, соответствующее началу такой же нагрузки, но направленной в противоположную сторону (т.е. с

противоположным знаком):  $+ q \frac{(x-2)^2}{2}$ . Этот прием позволяет включить

ранее написанное для предыдущего участка уравнение в выражение для данного участка без изменения. Перейдем сразу к выражению для прогиба:

$$EI_z y = Cx + D - M_A \frac{x^2}{2} + R_A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + q \frac{(x-2)^4}{24} - 1.5q \cdot (x-2)^2 + R_B \frac{(x-2)^3}{6}$$

Учтем теперь граничные условия. Поскольку сечение  $x = 0$  находится на первом участке, подставляем  $x = 0$  в выражения  $EI_z y'$  и  $EI_z y$  для первого участка, получаем  $C = D = 0$ . Для сечения  $x = 2$ , являющегося границей первого и второго участков, можно использовать выражение  $EI_z y$  для любого из них. Получаем недостающее уравнение и решаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} R_A + R_B &= 4q & R_A &= 2q \\ M_A - 2R_A &= -3q & \Rightarrow & R_B = 2q \\ -2M_A + 1.33R_A &= 6.67q & M_A &= q \end{aligned}$$

2. Теперь, когда статическая неопределимость раскрыта и реакции найдены, можно построить эпюры внутренних усилий (см.рис.3, б). Они строятся в соответствии с алгоритмом метода сечений так, как это сделано в решении **задачи 1**.

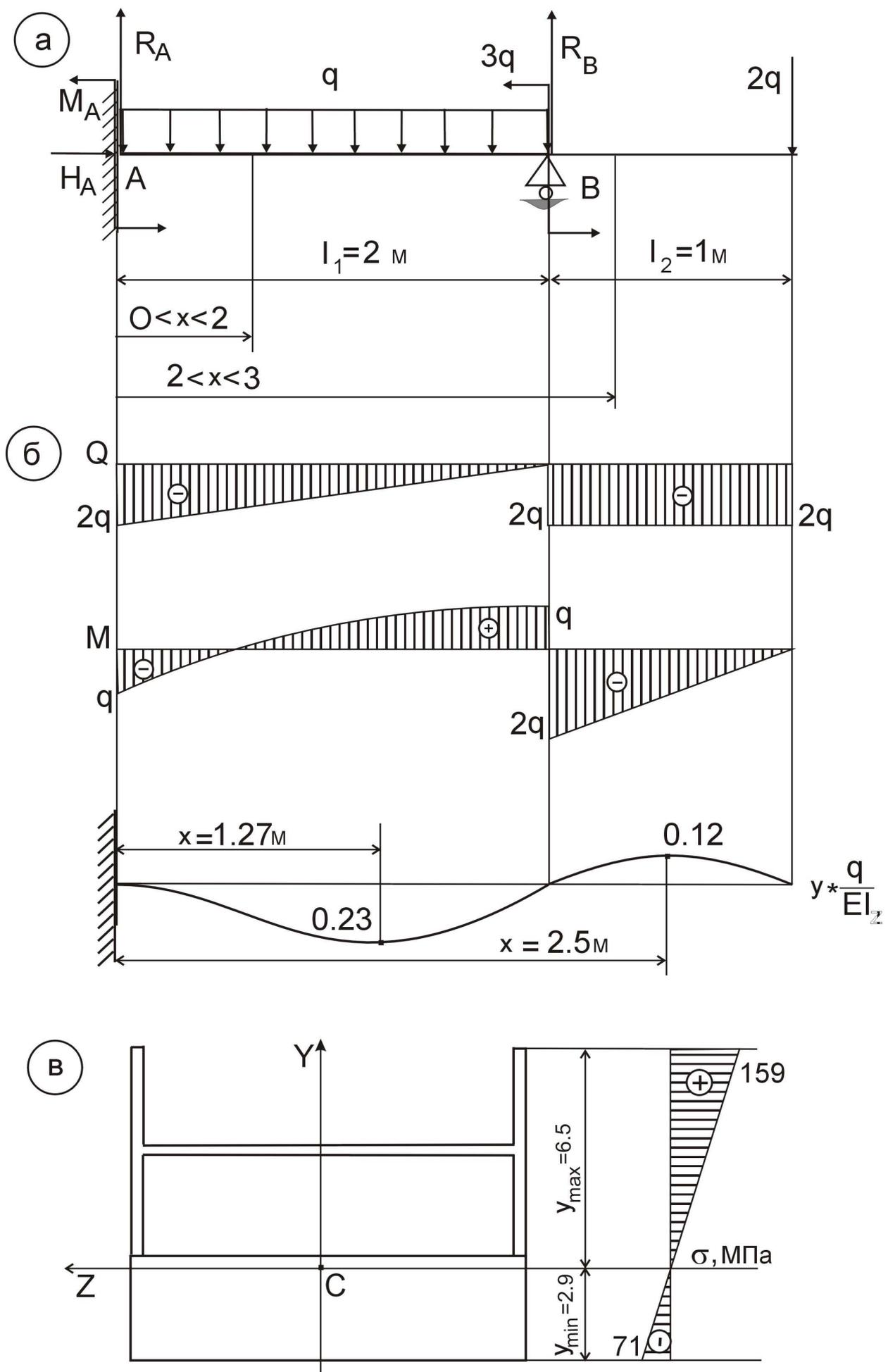


Рис.3

3. Найдем момент инерции и момент сопротивления сложного сечения, изображенного на рис.4 (все размеры в см), относительно его центральной горизонтальной оси. Сечение состоит из двух частей:

- двутавра №12:  $A_1 = 14.7 \text{ см}^2$ ,  $I_{z_1} = 27.9 \text{ см}^4$  ( $I_{z_1} = I_x$  по сортаменту),

- прямоугольника:  $A_2 = d \cdot c = 12 \cdot 3 = 36 \text{ см}^2$ ,  $I_{z_2} = \frac{d \cdot c^3}{12} = \frac{12 \cdot 3^3}{12} = 27 \text{ см}^4$ ,

оси  $z_1$  и  $z_2$  - собственные главные центральные оси инерции двутавра и прямоугольника.

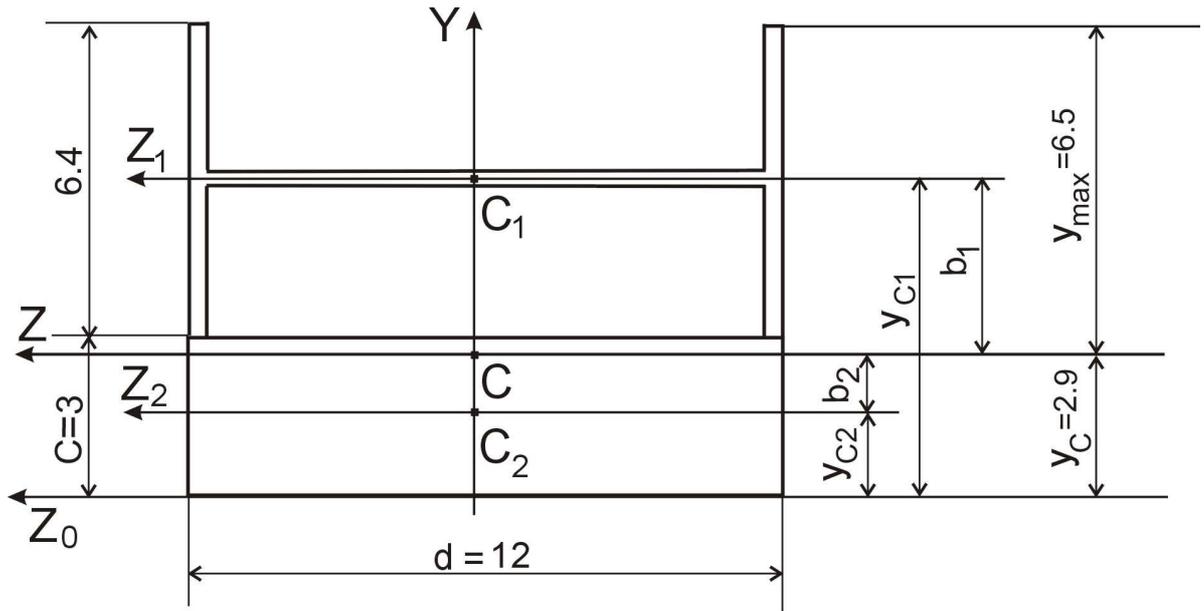


Рис.4

Сначала определим положение центра тяжести составного сечения. Он находится на оси симметрии – оси  $y$ . Координату  $y_c$  найдем относительно некоторой начальной оси  $z_0$ . Как известно из теоретической механики,

$$y_c = \frac{y_{c1} \cdot A_1 + y_{c2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{6.2 \cdot 14.7 + 1.5 \cdot 36}{14.7 + 36} = 2.9 \text{ (см)}.$$

Момент инерции сложного сечения определяем с применением формул преобразования моментов инерции его частей от собственных главных центральных осей  $z_1$  и  $z_2$  к параллельной им главной центральной оси инерции всего сечения  $z$ :

$$I_z = I_{z_1} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{z_2} + b_2^2 \cdot A_2 = 27.9 + 3.3^2 \cdot 14.7 + 27 + 1.4^2 \cdot 36 = 285.5 \text{ (см}^4 \text{)}$$

Здесь  $b_1 = 6.2 - 2.9 = 3.3 \text{ (см)}$  и  $b_2 = 2.9 - 1.5 = 1.4 \text{ (см)}$  - расстояния между осями  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z$  (см. рис.4).

Ось  $z$  при приложении нагрузки в плоскости  $xOy$  станет нейтральной осью. Наибольшие по модулю растягивающие и сжимающие напряжения будут действовать в крайних волокнах, удаленных от нейтральной оси на расстояния  $y_{\min} = y_c = 2.9 \text{ см}$  и  $y_{\max} = 3 + 6.4 - 2.9 = 6.5 \text{ см}$  (см.рис.4).

Момент сопротивления сечения равен  $W_z = \frac{285.5}{6.5} = 43.9 \text{ см}^3$ .

4. Определим грузоподъемность балки  $q$  из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{2q}{43.9 \cdot 10^{-6}} \leq 160 \cdot 10^6 \Rightarrow q \leq 3.51 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right).$$

5. Наряду с условиями прочности проверим условия жесткости.

Определим два характерных прогиба: наибольший прогиб в пролете  $|y_{np}|_{\max}$  (здесь это первый участок) и наибольший прогиб на консоли  $|y_k|_{\max}$  (здесь это второй участок).

Чтобы определить  $|y_{np}|_{\max}$ , найдем точку экстремума функции  $y$ , решив уравнение  $y' = 0$  на первом участке:  $-qx + qx^2 - \frac{q}{6}x^3 = 0$ . Два корня этого уравнения -  $x = 0$  и  $x = 1.27$  принадлежат отрезку  $[0; 2]$  (если аналитическое решение уравнения затруднено, можно решить его приближенным методом половинного деления или просто подбором).

Таким образом,  $|y_{np}|_{\max} = |y(1.27)| = \frac{1}{EI_z} |-0.23q| = \frac{0.23q}{EI_z}$ .

Вычислим теперь  $|y_k|_{\max}$ . Как правило, он равен прогибу на конце консоли, но в данном случае можно убедиться, что  $y(3) = 0$ . Этот пример показывает, что, вообще говоря, необходимо и на консольном участке проводить такое же исследование функции  $y$ , как описано

выше для пролета. Здесь  $y'(2.5) = 0$  и  $|y_k|_{\max} = |y(2.5)| = \frac{0.12q}{EI_z}$ .

$$|y_{np}|_{\max} \leq [y_{np}] = \frac{l_{np}}{750} \Rightarrow \frac{0.23q}{EI_z} \leq \frac{2}{750} = 2.67 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 2.67 (\text{мм}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q \leq \frac{2.67 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}}{0.23} = 6.62 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right),$$

$$|y_{\kappa}|_{\max} \leq [y_{\kappa}] = \frac{l_{\kappa}}{350} \Rightarrow \frac{0.12q}{EI_z} \leq \frac{1}{350} = 2.86 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 2.86 (\text{мм}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q \leq \frac{2.86 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}}{0.12} = 13.6 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right).$$

Выбираем значение  $q = 3.5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ , удовлетворяющее всем условиям.

$$\text{Тогда } |\sigma_{\max}| = \frac{2 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{43.9 \cdot 10^{-6}} = 159 \text{ МПа},$$

$$|\sigma_{\min}| = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} \cdot y_{\min} = \frac{2 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{285.5 \cdot 10^{-8}} \cdot 2.9 \cdot 10^{-2} = 71 \text{ МПа}.$$

Эпюра напряжений по высоте сечения представлена на рис.3, в.

Вычислим наибольшие прогибы:

$$|y_{np}|_{\max} = \frac{0.23q}{EI_z} = \frac{0.23 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}} = 1.4 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 1.4 (\text{мм}),$$

$$|y_{\kappa}|_{\max} = \frac{0.12q}{EI_z} = \frac{0.12 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}} = 0.7 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 0.7 (\text{мм}).$$