

**Санкт-Петербургский государственный политехнический университет**

**Институт металлургии и машиностроения**

**Кафедра «Конструкторско-технологическое обеспечение  
автоматизированных машиностроительных производств»**

## **КУРСОВАЯ РАБОТА**

**Расчет вала в условиях сложного сопротивления на статическую и  
усталостную прочность**

**по дисциплине «сопротивление материалов»**

Выполнил  
Студент гр. \_\_\_\_\_

Руководитель

\_\_\_\_\_

Д.А. Китаева

Санкт Петербург

2017

## Содержание

Введение.....	2
1. Определение силы давления шкивов на вал .....	4
1.1. Зубчатое зацепление.....	5
1.2. Ременная передача.....	7
2. Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	8
2.1. Построение эпюры продольных сил.....	8
2.2. Построение эпюры крутящих моментов. ....	8
2.3. Построение эпюры изгибающих моментов в вертикальной плоскости .....	9
2.4. Построение эпюры изгибающих моментов в горизонтальной плоскости .....	10
3. Определение диаметра сплошного вала .....	12
4. Построение эпюры нормальных и касательных напряжений.....	13
5. Исследование напряженного состояния в наиболее опасной точке.....	15
6. Усталостный расчет.....	16
Заключение .....	18
Библиографический список: .....	19

## Введение

В рамках курсовой работы требуется провести расчет вала в условиях сложного сопротивления на статическую и усталостную прочность. Вал закреплен в двух подшипниках, из которых один является неподвижной шарнирной опорой (НО), а другой - подвижной (ПО). На валу закреплены два шкива: ведущий диаметра  $D_1$  и ведомый диаметра  $D_2$ . Ведущий шкив передает момент  $M$  и представляет собой зубчатое колесо, находящееся в зацеплении с другим зубчатым колесом в точке, определяемой углом  $\alpha_1$ . Ведомый шкив включен в плоскоременную передачу с углом наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_2$ .

В ходе расчета необходимо:

- Начертить в аксонометрии схему вала, соблюдая масштаб.
- Определить силы давления шкивов на вал, приняв соотношения
  - а) для зубчатого колеса радиальная сила  $F_r = 0.4 \cdot F_t$ , осевая сила  $F_x = 0.3 \cdot F_t$ , где  $F_t$  – окружная сила;
  - б) для плоскоременной передачи  $T_2 = 2t_2$ .
- Построить эпюру продольной силы  $N_x$ .
- Построить эпюру крутящего момента  $M_x$ .
- Построить эпюры изгибающих моментов  $M_y$  в горизонтальной плоскости и  $M_z$  в вертикальной плоскости, а также эпюру суммарных изгибающих моментов.
- Определить опасное сечение и подобрать диаметр сплошного вала по третьей теории прочности (принять  $[\sigma] = 160$  МПа), округлив его до стандартного ближайшего значения в мм по ГОСТ 3478-79: 10, 12, 15, 17, 20, 22, 25, 28, 30, 32, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 120, 130, 140, 150.

- В опасном сечении построить эпюру распределения нормальных и касательных напряжений, определить положение нейтральной линии и отрезки, отсекаемые ею на осях координат.
- Для элемента, выделенного из боковой поверхности вала в окрестности опасной точки, определить положение главных площадок и значение главных напряжений, показать их на рисунке элемента.
- Для опасного сечения провести усталостный расчет.

## 1. Определение силы давления шкивов на вал

На рис. 1.1, приведен чертеж компоновка вала, передающего вращающий момент  $M = 1$  кНм от одного шкива (колеса) к другому. Вал закреплен в двух подшипниках качения, радиальном А (шарнирно-подвижная опора, условно обозначенная ПО) и радиально-упорном В (шарнирно-неподвижная опора, условно обозначенная НО), располагающихся в сечениях 1 и 3 соответственно. В сечении 2 находится ведомый шкив диаметра  $D_1 = 0.4$  м, представляющий собой косозубое зубчатое колесо, входящее в зацепление с другим колесом в составе зубчатой передачи в точке (полюсе), определяемой углом  $\alpha_1 = 30^\circ$  (рис.1.2, а). Ведущий шкив диаметра  $D_2 = 0.5$  м, находящийся в сечении 4, включен в плоскоремennую передачу с углом наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_2 = 35^\circ$  (рис.1.2, б).

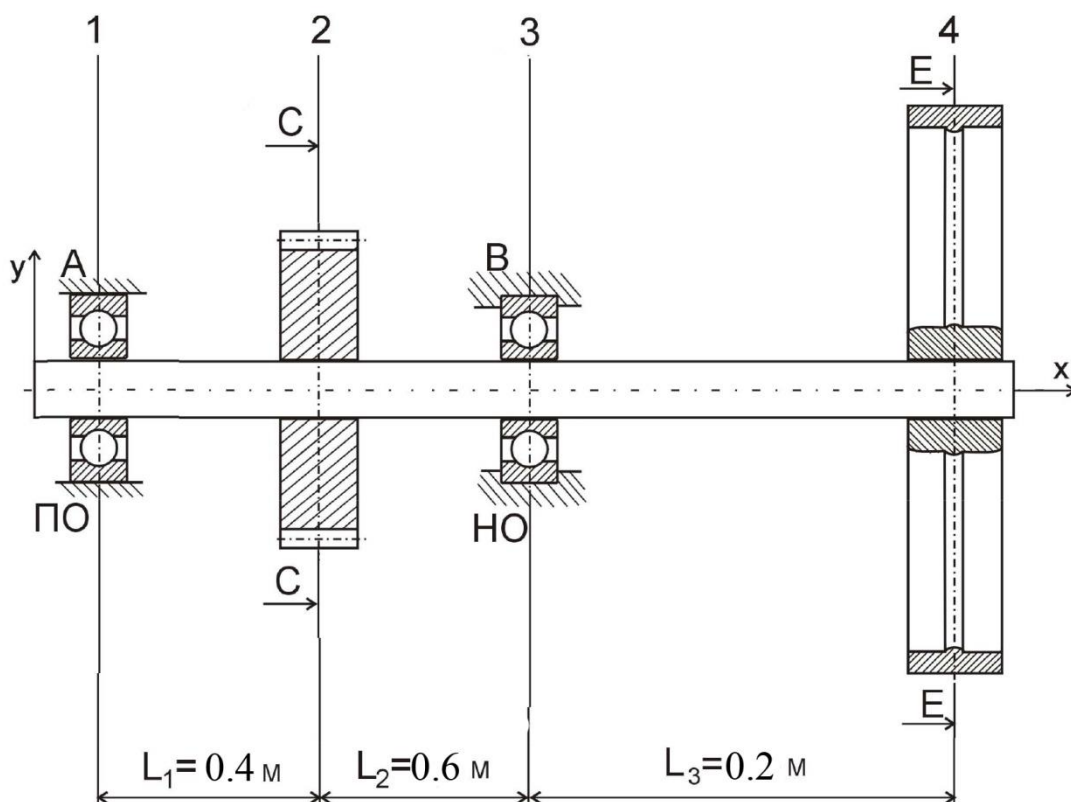


Рис.1.1 Чертеж компоновки вала.

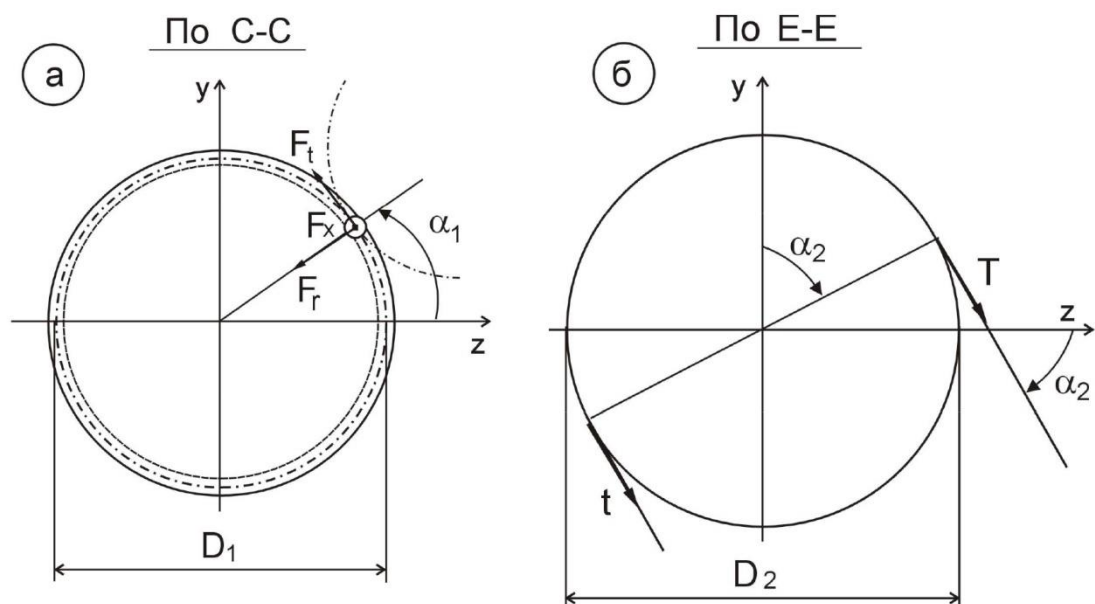


Рис.1.2 Сечения косозубого зубчатого колеса (а) и ведущего шкива (б).

Изобразим в аксонометрии схему приложения внешних сил к валу (рис.1.3). Для упрощения дальнейших расчетов приведем к оси вала внешние силы, приложенные в точках, не лежащих на оси вала, при этом сразу будем раскладывать их на составляющие, направленные вдоль координатных осей.

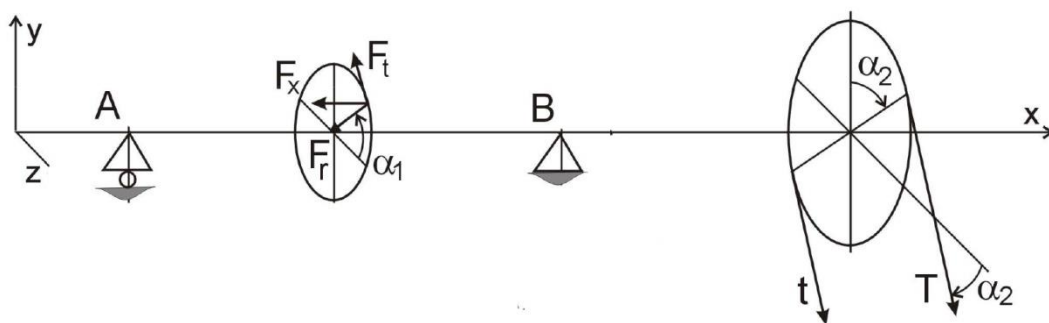


Рис.1.3 Схема приложения внешних сил к валу в аксонометрии.

### 1.1. Зубчатое зацепление.

Рассмотрим зубчатое зацепление (рис.1.4).

Внешний вращающий момент  $M_{K1} = M$  получается при переносе на ось вала окружной силы:

$$F_t \cdot M = F_t \cdot \frac{D_1}{2} \rightarrow F_t = \frac{2M}{D} = \frac{2 \cdot 1}{0.4} = 5 \text{ кН.}$$

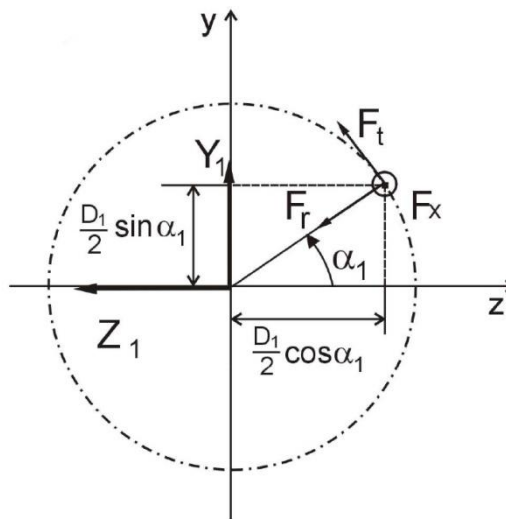


Рис.1.4 Силы, действующие в зубчатом зацеплении.

Будем считать, что параметры зубчатой передачи таковы, что мы получили для осевой и радиальной сил следующие численные выражения:

$$F_x = 0.3F_t = 1.5 \text{ кН},$$

$$F_r = 0.4F_t = 2 \text{ кН}.$$

При параллельном переносе на ось вала осевой силы  $F_x$ , приложенной в точке зацепления на начальной окружности зубчатого колеса, возникают моменты:

$$M_{y1} = F_x \cdot \frac{D_1}{2} \cdot \cos\alpha_1 = 1.5 \cdot \frac{0.4}{2} \cdot \cos 30 = 0.26 \text{ кНм},$$

$$M_{z1} = F_x \cdot \frac{D_1}{2} \cdot \sin\alpha_1 = 1.5 \cdot \frac{0.4}{2} \cdot \sin 30 = 0.15 \text{ кНм},$$

сама же сила остается неизменной  $X_1 = F_x = 1.5 \text{ кН}$

При переносе радиальной силы  $F_r$  не возникает моментов, т.к. она действует вдоль радиуса окружности и, следовательно, пересекает ось вала.

Для удобства дальнейших расчетов разложим  $F_t$  и  $F_r$  на составляющие по осям  $y$  и  $z$  и просуммируем их:

$$Y_1 = F_t \cdot \cos 30^\circ - F_r \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot \sin 30^\circ = 3.33 \text{ кН},$$

$$Z_1 = F_t \cdot \sin 30^\circ + F_r \cdot \cos 30^\circ = 5 \cdot \sin 30^\circ + 2 \cdot \cos 30^\circ = 4.23 \text{ кН},$$

## 1.2. Ременная передача.

Рассмотрим ременную передачу (рис.1.5).

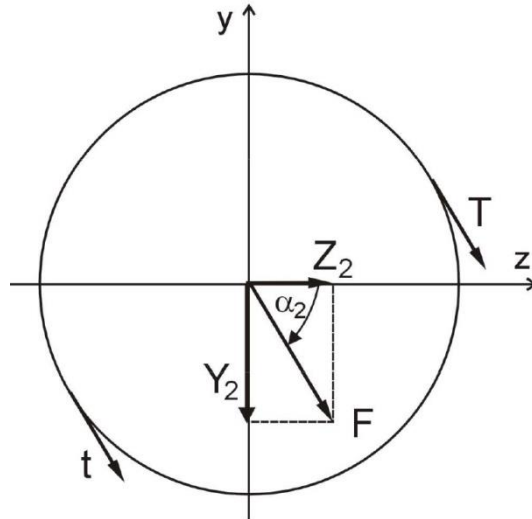


Рис.1.5 Силы, действующие в ременной передаче.

Внешний вращающий момент  $M_{K2} = M$ , возникающий при переносе сил натяжения ремней на ось вала, равен:

$$M = t \cdot \frac{D_2}{2} \rightarrow t = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 1}{0.5} = 4 \text{ кН},$$

$$T = 2t = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}.$$

Суммарная сила давления шкива на ось вала направлена под углом  $\alpha_2 = 35^\circ$  к горизонту и равна  $F = T + t = 12$  (кН). Ее составляющие:

$$Y_2 = F \cdot \sin 35^\circ = 6.88 \text{ кН};$$

$$Z_2 = F \cdot \cos 35^\circ = 9.83 \text{ кН}.$$



## 2. Построение эпюр внутренних силовых факторов

Теперь все внешние силы приведены к оси вала (рис.2.1). В соответствии с принципом суперпозиции, рассмотрим по отдельности внешние нагрузки, соответствующие разным видам деформации.

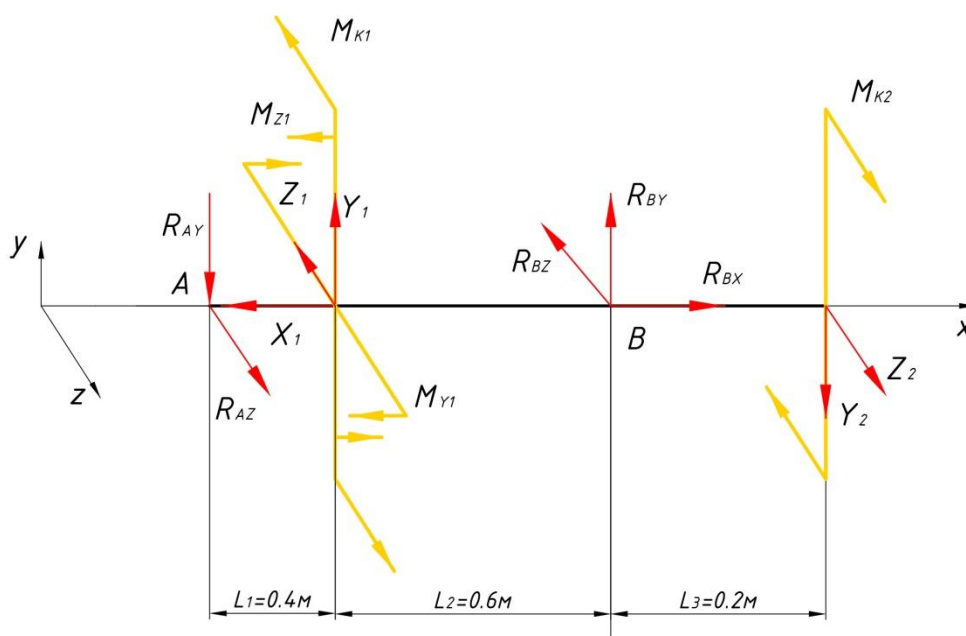


Рис.2.1 Силы, действующие на вал.

### 2.1. Построение эпюры продольных сил.

Силы, действующие вдоль оси вала, обуславливают деформацию растяжения. Найдем горизонтальную реакцию в опоре В:

$$\sum F_x = -X_1 + R_{BX} = 0 \rightarrow R_{BX} = X_1 = 1.5 \text{ кН.}$$

Вычислим продольные силы на участках вала 2 и 3. Очевидно, внешние силы, действующие по одну сторону от сечений, одинаковы и равны  $X_1$  или  $R_{BX}$ , поэтому:

$$N_{X1} = N_{X2} = N_{X3} = 1.5 \text{ кН (эпюра на рис.2.2, а).}$$

### 2.2. Построение эпюры крутящих моментов.

Построим эпюру крутящего момента (рис.2.2, б), учитывая, что на 2 и 3 участке по одну сторону от любого сечения находятся внешние моменты  $M_{K2}$  или  $M_{K3}$ , а на 1 участке (слева) - ничего:

$$M_{X2} = M_{X3} = M_{K2} = M_{K3} = 1 \text{ кНм}, M_{X1} = 0.$$

### 2.3. Построение эпюры изгибающих моментов в вертикальной плоскости

Рассмотрим плоский изгиб, связанный с силами, действующими в вертикальной плоскости (рис.2.2,в). Вертикальные реакции находятся из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= Y_1 \cdot 0.4 + M_{Z1} - Y_2 \cdot 1.2 + R_{BY} \cdot 1 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow R_{BY} &= \frac{-Y_1 \cdot 0.4 - M_{Z1} + Y_2 \cdot 1.2}{1} = 6.774 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -Y_1 \cdot 0.6 + M_{Z1} - Y_2 \cdot 0.2 + R_{AY} \cdot 1 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow R_{AY} &= \frac{Y_1 \cdot 0.6 - M_{Z1} + Y_2 \cdot 0.2}{1} = 3.224 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Статическая проверка:

$$\sum F_y = -R_{AY} + R_{BY} - Y_2 + Y_1 = 0$$

Эпюра изгибающего момента  $M_z$  (рис.2.2,г) строится по алгоритму метода сечений:

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 0.4\text{м.}$ )

$$M_z(x_1) = -R_{AY} \cdot x_1,$$

$$M_z(0) = 0, M_z(0.2) = 1.29 \text{ кНм}$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 0.2\text{м.}$ )

$$M_z(x_2) = -Y_2 \cdot x_2,$$

$$M_z(0) = 0, M_z(0.2) = -1.376 \text{ кНм.}$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 0.6\text{м.}$ )

$$M_z(x_3) = -Y_2 \cdot (x_3 + 0.2) + R_{BY} \cdot 0.6,$$

$$M_z(0) = -1.376, M_z(0.6) = -1.44 \text{ кНм}$$

## 2.4. Построение эпюры изгибающих моментов в горизонтальной плоскости

Рассмотрим плоский изгиб, связанный с силами, действующими в горизонтальной плоскости (рис.2.2, д). Горизонтальные реакции находятся из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = Z_1 \cdot 0.4 - M_{Y1} - Z_2 \cdot 1.2 + R_{BZ} \cdot 1 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow R_{BZ} = \frac{-Z_1 \cdot 0.4 + M_{Y1} + Z_2 \cdot 1.2}{1} = 10.36 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -Z_1 \cdot 0.6 - M_{Y1} - Z_2 \cdot 0.2 + R_{AZ} \cdot 1 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow R_{AZ} = \frac{Z_1 \cdot 1.2 + M_{Y1} - Z_2 \cdot 0.4}{1} = 1.195 \text{ кН};$$

Статическая проверка:

$$\sum F_y = -R_{AZ} + R_{BZ} - Z_2 + Z_1 = 0$$

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (рис.2.2,е)

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 0.4\text{м}$ )

$$M_Y(x_1) = -R_{AZ} \cdot x_1,$$

$$M_Y(0) = 0, M_Y(0.4) = -1.906 \text{ кНм}$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 0.2\text{м}$ )

$$M_Y(x_2) = -Z_2 \cdot x_2,$$

$$M_Y(0) = 0, M_Y(0.2) = -1.966 \text{ кНм}$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 0.6\text{м}$ )

$$M_Y(x_3) = -Z_2 \cdot (x_3 + 0.2) + R_{BZ} \cdot x_3,$$

$$M_Y(0) = -1.966 \text{ кНм}, M_Y(0.6) = -1.646 \text{ кНм}$$

Поскольку сечение вала круглое, в нем будет происходить плоский изгиб в плоскости, перпендикулярной суммарному вектору изгибающего момента  $M_{изг}$ . Определим опасное сечение, построив эпюру  $M_{изг} = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}$  (рис.2.2,ж).

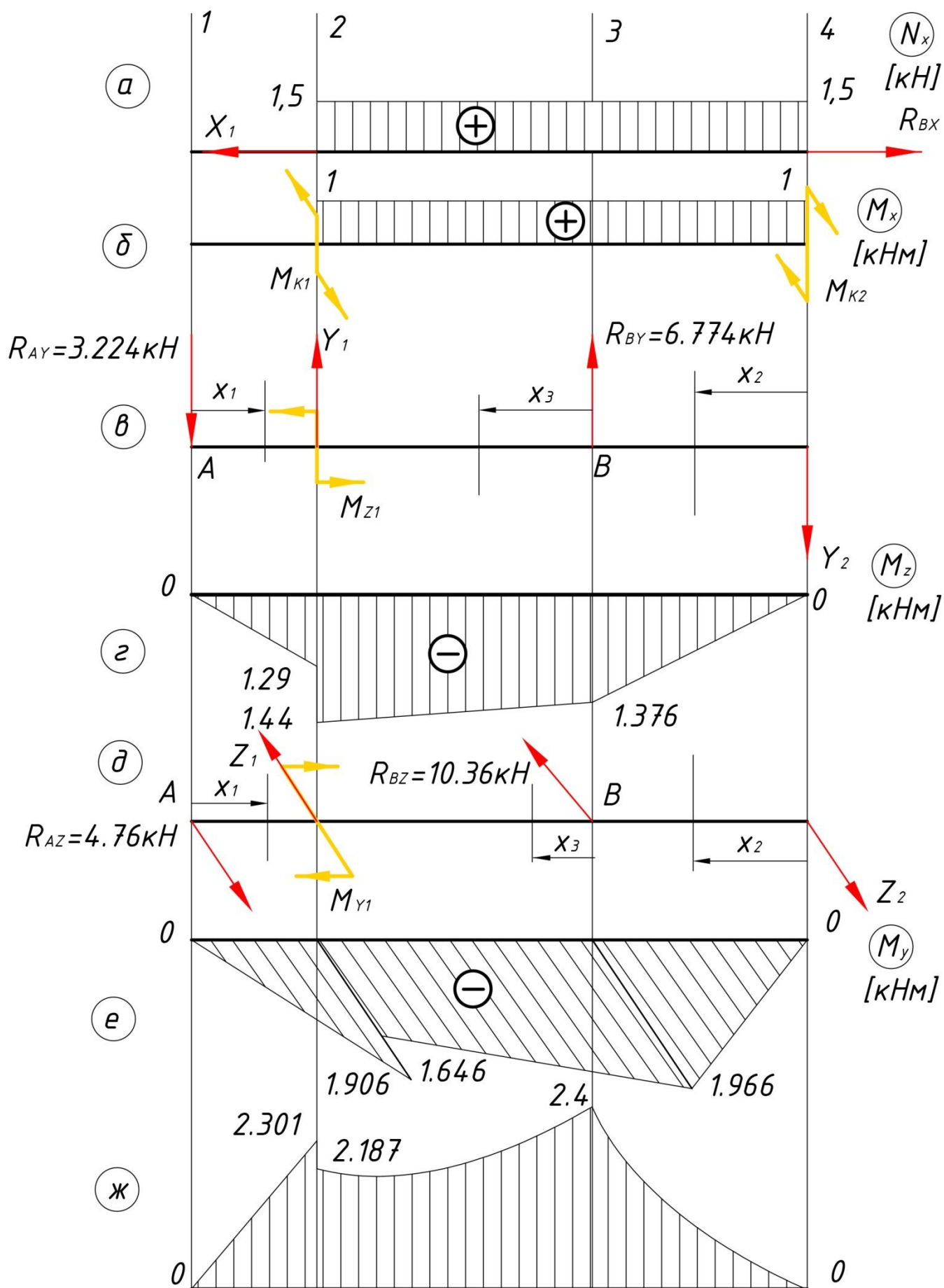


Рис.2.2 Эпюры внутренних силовых факторов

### 3. Определение диаметра сплошного вала

Сопоставляя эпюры  $M_x$  и  $M_{изг}$ , находим опасное сечение – это сечение 3 слева. Внутренние усилия в нем:  $N_x = 1.5$  кН,  $M_x = 1$  кНм,  $M_y = 1.966$  кНм,  $M_z = 1.376$  кНм,  $M_{изг} = 2.4$  кНм (рис.3.1).

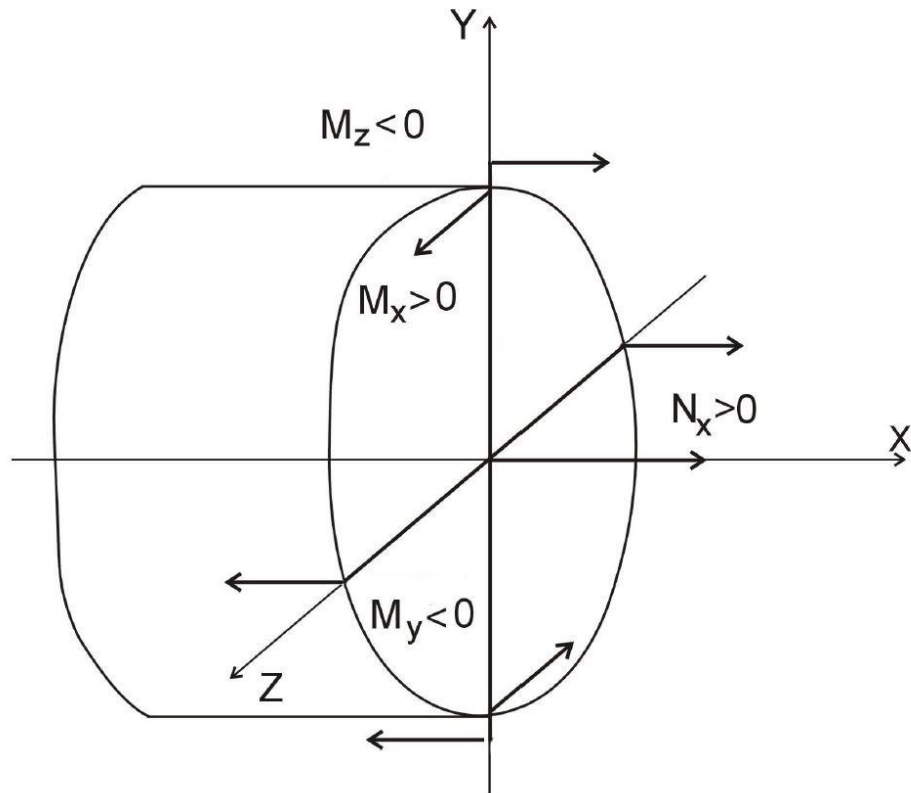


Рис.3.1 Внутренние силовые факторы в наиболее опасном сечении.

Первоначальный подбор сечения по 3-ей теории прочности без учета продольной силы производится по формуле:

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{4 \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1^2 + 1,966^2 + 1,376^2}}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.0275 \text{ м}$$

Диаметр сечения  $d = 2R = 0.0550$  (м) = 55 (мм), округляя его до ближайшего большего стандартного значения по ГОСТ 3478-79, принимаем  $d = 55$  (мм) = 0.055 (м).

#### 4. Построение эпюры нормальных и касательных напряжений

Вычислим геометрические характеристики сечения:

$$\text{Площадь} - A = \frac{\pi d^2}{4} = 2.375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$\text{Осевой момент сопротивления} - W = \frac{\pi d^3}{32} = 1.633 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3,$$

$$\text{Полярный момент сопротивления} - W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 3.265 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Вычислим нормальные напряжения в точках В и С, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис.4.1):

$$\sigma_B = \frac{N_x}{A} + \frac{M_{изг}}{W} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{2.375 \cdot 10^{-3}} + \frac{2.4 \cdot 10^3}{1.633 \cdot 10^{-5}} = 148 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = \frac{N_x}{A} - \frac{M_{изг}}{W} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{2.375 \cdot 10^{-3}} - \frac{2.4 \cdot 10^3}{1.633 \cdot 10^{-5}} = -146.34 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения во всех точках контура равны:

$$\tau_B = \tau_C = \tau_{max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{1 \cdot 10^3}{3.265 \cdot 10^{-5}} = 30.6 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке В по третьей теории прочности равно:

$$\sigma_{эквВ} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4 \cdot \tau_B^2} = \sqrt{148^2 + 4 \cdot 30.6^2} = 160.15 \text{ МПа} > [\sigma]$$

$$\Delta, \% = \frac{160.15 - 160}{160.15} \cdot 100\% = 0.09\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

Как видно, диаметр, подобранный без учета продольной силы, удовлетворяет условию прочности.

Эпюры распределения нормальных и касательных напряжений представлены рис. 4.1.

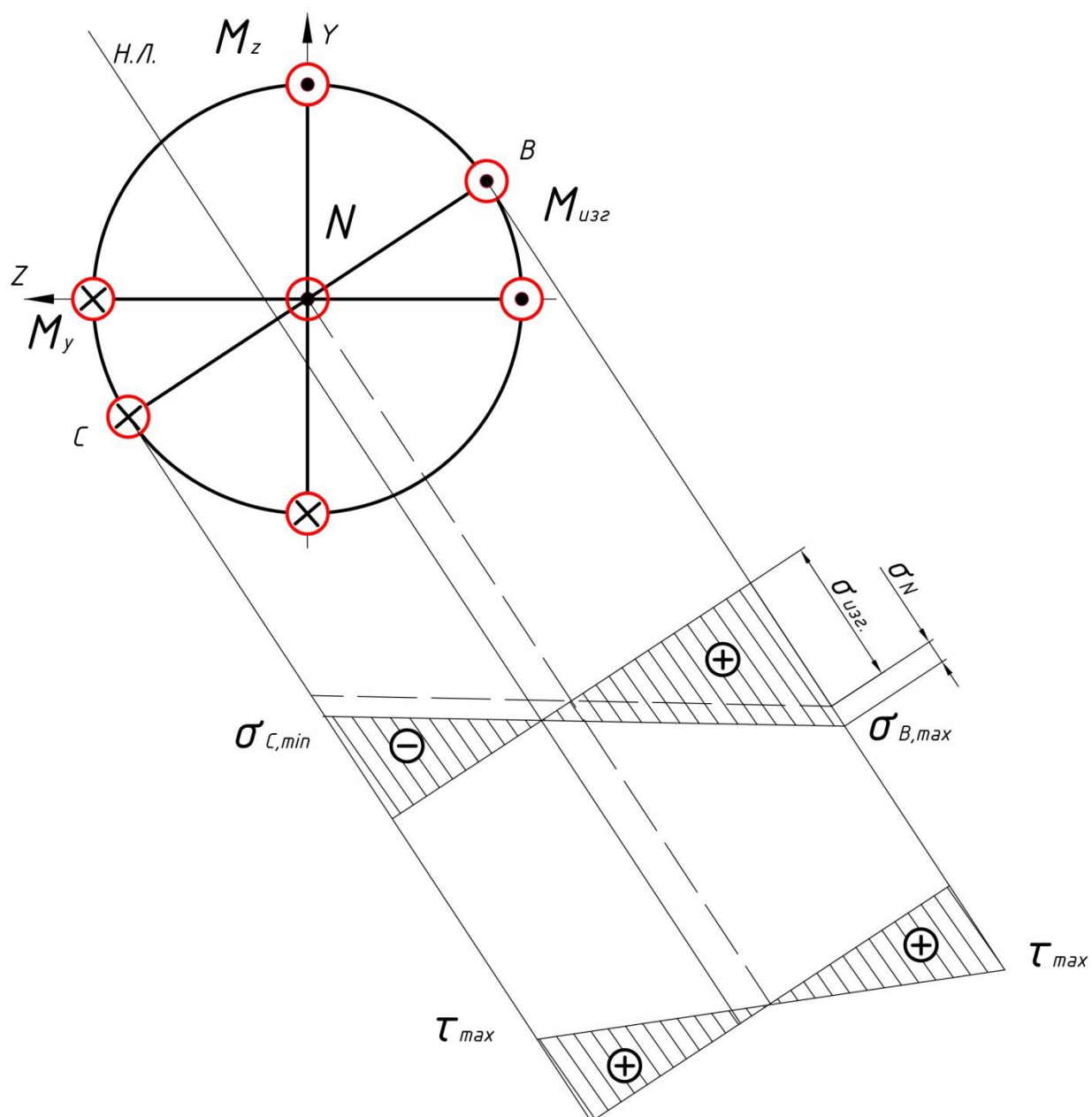


Рис.4.1 Эпюры нормальных и касательных напряжений.

## 5. Исследование напряженного состояния в наиболее опасной точке

Рассмотрим напряженное состояние элемента материала, выделенного из боковой поверхности вала в окрестности опасной точки (рис.5.1):  $\sigma_x=148$  МПа,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy}=30.6$  МПа. Главные напряжения вычислим по формулам:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{148}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{148^2 + 4 \cdot 30.6^2} = 74 \pm 80.07 = \frac{154.07 \text{ МПа}}{-6.07 \text{ МПа}}$$

В соответствии с правилом нумерации главных напряжений:

$$\sigma_1 = 154.07 \text{ МПа}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -6.07 \text{ МПа}.$$

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha_0$ :

$$tg 2 \alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 30.6}{148} = -0.413 \rightarrow \alpha_0 = -11.22^\circ.$$

Главные площадки и главные напряжения представлены на рис.5.1.

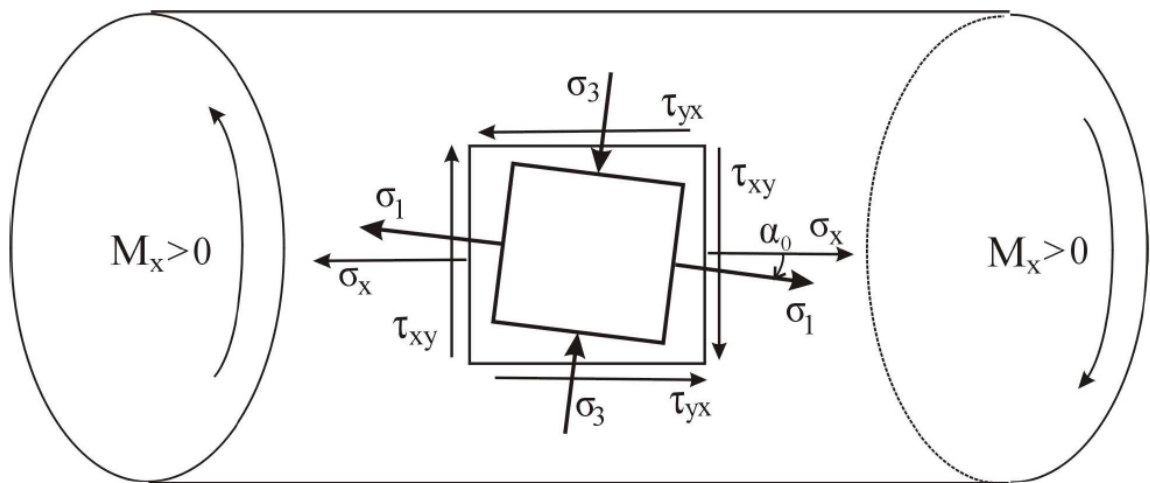


Рис.5.1 Главные площадки и напряжения.



## 6. Усталостный расчет

Проведем теперь расчет на усталостную прочность, считая известными коэффициенты  $K_\sigma = 2.56$ ,  $K_f = 0.88$ ,  $K_d = 0.72$ , причем  $K_d$  определяется по таблице с использованием линейной интерполяции.

Среднее напряжение цикла равно нормальному напряжению от продольной силы, постоянному по всей площади сечения, амплитудное же значение напряжения связано с линейно изменяющимися по высоте сечения нормальными напряжениями от изгиба:

$$\sigma_m = \frac{N_x}{A} = 0.63 \text{ МПа}, \sigma_a = \frac{M_{\text{изг}}}{W} = 147 \text{ МПа}.$$

При вращении вала нормальные напряжения изменяются:

от  $\sigma_{\max} = \sigma_B = 148 \text{ МПа}$  до  $\sigma_{\min} = \sigma_C = -146.34 \text{ МПа}$  (рис.6.1)

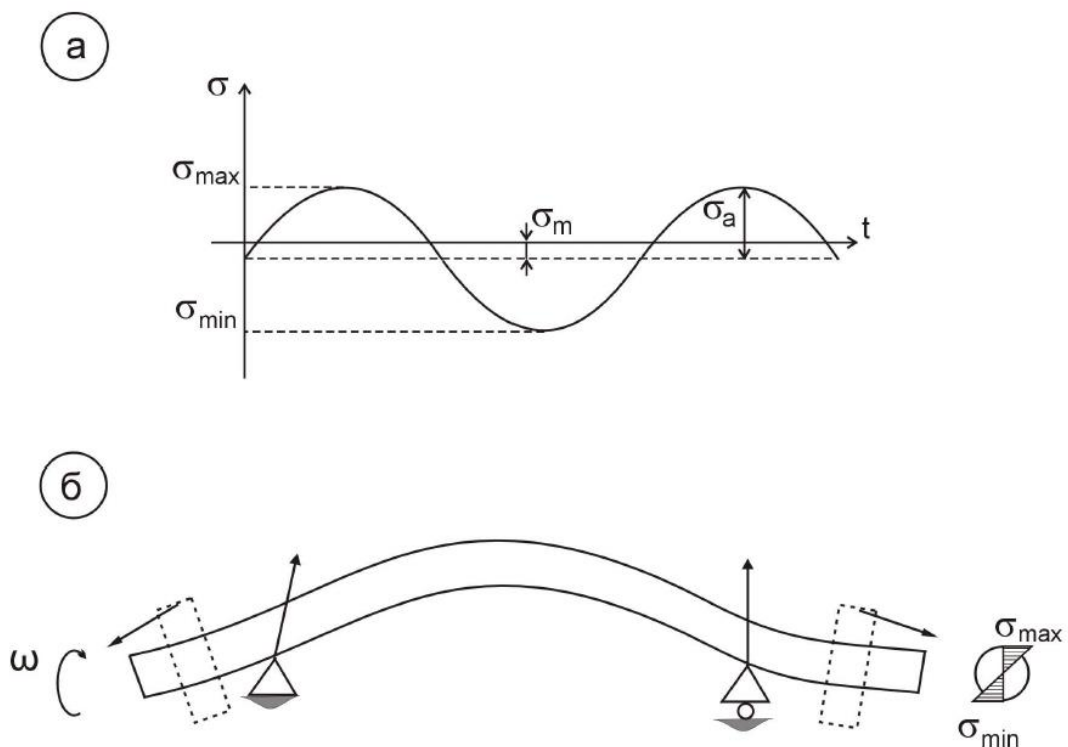


Рис. 6.1

Вычислим приведенную амплитуду циклических напряжений:

$$\sigma_a^* = \frac{K_\sigma}{K_F \cdot K_d} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m = \frac{2.56}{0.88 \cdot 0.72} \cdot 147 + 0.5 \cdot 0.63 = 594.25 \text{ МПа.}$$

Здесь принято соотношение пределов прочности и выносливости

$$\psi_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} = 0.5.$$

Теперь, считая предел выносливости равным  $\sigma_{-1} = 300$  МПа, определим коэффициент запаса усталостной прочности:

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = \frac{300}{594.25} = 0.504 \leq [S] = 1.7.$$

Как видно, условие усталостной прочности  $S_\sigma \leq [S]$  не выполняется. Поскольку нормальные напряжения обратно пропорциональны  $d^3$ , увеличим диаметр в  $\gamma$  раз ( $\gamma = \sqrt[3]{\frac{1.7}{0.504}} = 1.5$ ) и округлим его до ближайшего стандартного значения:  $d = 1.5 \cdot 55 = 82.5 \text{ мм} \rightarrow 85 \text{ мм}$ .

## Заключение

При выполнении курсовой работы, были определены нагрузки, передающиеся от шкивов, на вал. После чего, построены эпюры внутренних силовых факторов: продольных сил, крутящих моментов, изгибающих моментов. Кроме того, построена суммарная эпюра изгибающих моментов. Сопоставляя эпюры, было определено наиболее опасное сечение вала (№3), в котором возникают следующие внутренние силовые факторы:  $N_x = 1.5 \text{ кН}$ ,  $M_x = 1 \text{ кНм}$ ,  $M_y = 1.966 \text{ кНм}$ ,  $M_z = 1.376 \text{ кНм}$ ,  $M_{изг} = 2.4 \text{ кНм}$ . Используя третью теорию прочности, был определен диаметр вала  $d = 55$  из условия статической прочности. Определив геометрические характеристики поперечного сечения вала, были посчитаны и построены эпюры распределения нормальных и касательных напряжений. После этого было проведено исследование напряженного состояния наиболее опасной точки вала, определены главные напряжения и положение главных площадок. Также, в рамках курсовой работы, был проведен усталостный расчет, в ходе которого был уточнен диаметр вала  $d = 85 \text{ мм}$ , который удовлетворяет условию усталостной прочности.

### **Библиографический список:**

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: Учеб. для техн. вузов-5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высш.шк., 1989-624 с.
2. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. Пособие для вузов/ под ред. Л.С. Минина.-3-е изд., перераб. и доп.-М.:Высш.шк., 2001.-592с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов-11-е изд., стереотип.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.-592с.