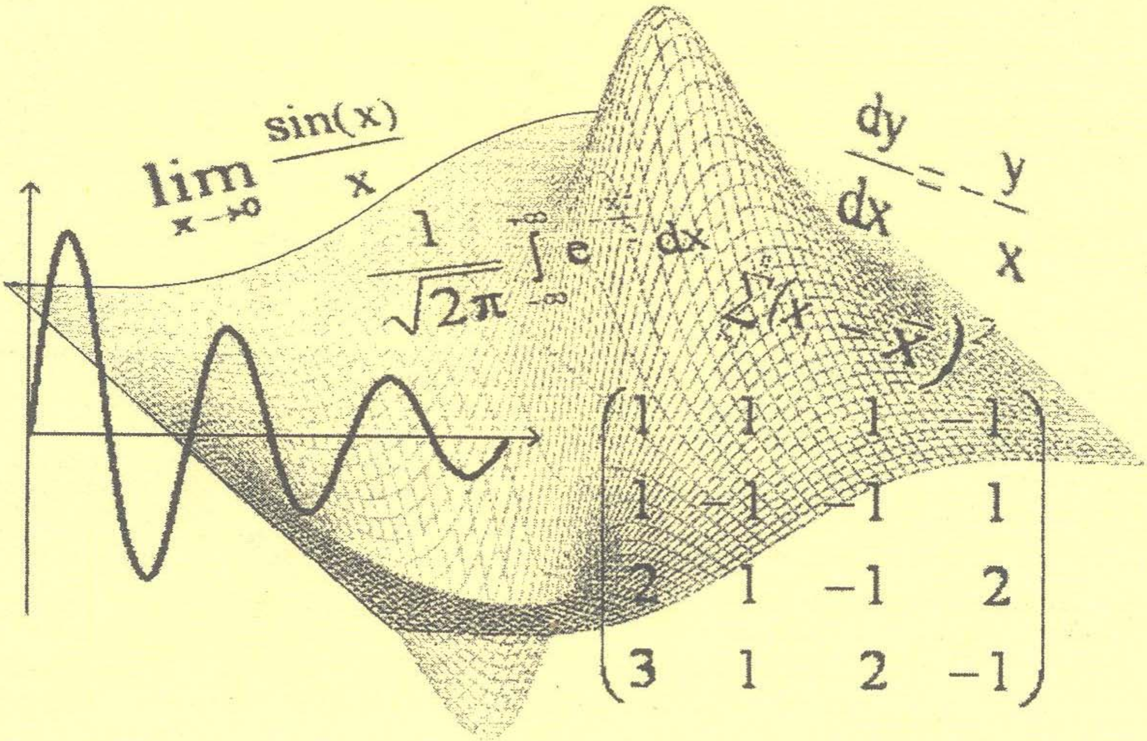
В. Ю. Кара-Ушанов

ВВЕДЕНИЕ В MathCAD



Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет – УПИ
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

В. Ю. Кара-Ушанов

ВВЕДЕНИЕ В MathCAD

Учебное пособие

Научный редактор – проф., канд. физ. - мат. наук В. И. Рогович

Екатеринбург
УГТУ – УПИ
2008

УДК 004.4(075.8)
ББК 32.973-018я73
К21

Рецензенты:
кафедра прикладной информатики в экономике Уральского государственного университета путей сообщений (зав. кафедрой проф., д-р физ.-мат. наук В. И. Радченко.); Г. Б. Захарова, зав. кафедрой прикладной информатики в социальных коммуникациях, доц., канд. техн. наук (Уральская государственная архитектурно-художественная академия, г. Екатеринбург)

Кара-Ушанов В. Ю.

К21 Введение в MathCAD: учебное пособие / В. Ю. Кара-Ушанов. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. 103 с.

ISBN 978-5-321-01416-6

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих в дисциплинах «Информатика» и «Компьютерный практикум» возможности популярного Windows-приложения MathCAD и технологию работы в его среде. Рассматриваются и комментируются примеры решения типовых задач, которые могут встретиться в практике работы инженера. На примерах компьютерных упражнений осваиваются принципы постановки и решения математических и прикладных задач в MathCAD. Предлагаются индивидуальные задания для самостоятельных занятий.

Библиогр.: 7 назв. Рис. 4. Табл. 9.

Подготовлено кафедрой «Вычислительная техника».

УДК 004.4(075.8)

ББК 32.973-018я73

ISBN 978-5-321-01416-6

ВВЕДЕНИЕ

MathCAD является математическим процессором, позволяющим проводить разнообразные научные и инженерные расчеты, начиная от простейших арифметических вычислений и аналитических преобразований и кончая сложными реализациями численных методов [1-7].

Отметим основные особенности MathCAD:

1. Работа в среде MathCAD напоминает обычные математические вычисления на бумаге. Сформулировав задачу (что само по себе не простое дело), ее записывают на экране с помощью **встроенного формульного редактора**. Полностью определенная задача решается на компьютере автоматически без традиционного программирования на алгоритмических языках.
2. MathCAD построен в соответствии с принципом WYSIWYG («What You See Is What You Get» – «Что Вы видите, то Вы и получите»). И условие задачи, и результат представляются в **форме, очень похожей на обычную математическую запись**.
3. MathCAD **позволяет объединить в одном рабочем документе текст, математические формулы и графики** и тем самым облегчает понимание достаточно сложных вычислений.
4. В MathCAD предусмотрена **богатая палитра инструментов**, содержащая специальные математические операторы и функции, легко переносимые в рабочий документ.
5. В MathCAD сочетаются традиционные **методы приближенного решения вычислительных задач**, порождающие результат в виде чисел, **с символьными, аналитическими преобразованиями** и результатом в виде формульного выражения.
6. В MathCAD предусмотрена **работа с размерными величинами, с единицами измерения** и как следствие возможность компьютерного моделирования решения содержательных задач из прикладных областей.
7. Любое изменение рабочего документа MathCAD тот час же вызывает обновление всех зависимых результатов и преобразование графиков.

8. В MathCAD возможен **ввод и вывод данных в файлы** различных форматов.
9. Подобно текстовому процессору MathCAD позволяет получать **рабочие документы высокого полиграфического качества** исполнения при печати.
10. В MathCAD имеется **развитая интерактивная справочная система** и возможность создавать и использовать тематические **электронные книги**.

Несмотря на широкие возможности MathCAD начинающий пользователь должен хорошо уяснить, что MathCAD – это не более чем средство реализации математических проблем. Освобождая пользователя от рутины выполнения вычислений, он дает возможность сконцентрировать внимание на более интеллектуальных проблемах – на математической формулировке и постановке задачи. MathCAD предоставляет свои богатые инструментальные возможности, но возлагает на пользователя заботы о контексте их использования. Иными словами, не следует рассчитывать на то, что MathCAD освободит пользователя от знания математики. Использование потенциальных возможностей MathCAD возможно в пределах знания пользователем тех или иных разделов математики. Для студента-младшекурсника вполне посильными можно считать следующие задачи:

1) символьные преобразования;
2) исследование функций;
3) решение нелинейных уравнений;
4) вычисление пределов, производных и интегралов;
5) задачи векторной и матричной алгебры;
6) решение систем линейных и нелинейных уравнений;
7) решение дифференциальных уравнений и систем;
8) задачи из области математической статистики и другие.

Предлагаемое учебное пособие ориентировано на студентов младших курсов и предназначено для освоения MathCAD на примере посильных задач.

Как пользоваться учебным пособием?

Во-первых, учебное пособие в значительной части состоит из рабочих документов MathCAD, импортированных в текстовый документ как графические объекты (рисунки). В печатном и электронном вариантах их можно использовать как статический документ, содержащий демонстрации по тем или иным темам. При выполнении упражнений их можно использовать как образец.

Во-вторых, учебное пособие в печатном или электронном вариантах сопровождается так называемой электронной книгой MathCAD, которая состоит из файлов, содержащих демонстрационные рабочие документы. При этом можно изменять исходные данные в демонстрационных задачах без ущерба для электронной книги и анализировать получающиеся результаты. Рабочие документы электронной книги могут использоваться:

- как «живые» демонстрации по разным темам, изучаемым в пособии;
- как заготовки для формирования рабочих документов MathCAD по темам индивидуальных заданий в упражнениях.

В-третьих, демонстрационные рабочие документы электронной книги можно копировать полностью или частично при создании нового документа MathCAD по индивидуальному заданию.

В-четвертых, индивидуальные задания бывают трех типов:

1) задание выполняется на основе одной определенной демонстрации по принципу «выполнить по образцу»;
2) задание представляет собой результат интеграции учебного материала нескольких демонстраций;
3) задание с элементами исследования.

Номер варианта индивидуального задания в упражнениях определяется по следующему правилу. Если порядковый номер студента кратен числу вариантов, то номер варианта задания совпадает с числом вариантов. В противном случае он определяется как остаток от целочисленного деления порядкового номера студента на число вариантов в задании.

СОЗДАНИЕ И РЕДАКТИРОВАНИЕ ДОКУМЕНТА

Элементы интерфейса пользователя

В MathCAD все расчеты организуются на изначально пустых рабочих листах, на которых можно размещать текстовые области, формулы и графики. Каждый рабочий документ представляет собой независимую серию математических расчетов и сохраняется в отдельном файле с расширением **.mcd**. Имена файлам присваиваются по правилам Windows. Таким образом, рабочий документ MathCAD одновременно является:

1) листингом специфической программы;
2) результатом исполнения этой программы;
3) документом, предназначенным для распечатки и публикации.

В MathCAD интерфейс пользователя интуитивно понятен и подобен интерфейсам других приложений Windows (рис.1). Его составные части:

1) главное меню или строка меню (menu bar);
2) панели инструментов (toolbars): **Standard** (стандартная) и **Formatting** (форматирование);
3) панель инструментов **Math** (математика) и доступные через нее дополнительные математические панели инструментов;
4) рабочая область (worksheet);
5) строка состояния (status line, или status bar);
6) всплывающие, или контекстные, меню (pop-up menus, или context menus);
7) диалоговые окна, или диалоги (dialogs).

Большинство команд можно выполнить как с помощью меню (верхнего или контекстного), так и панелей инструментов или клавиатуры.

MathCAD допускает размещение в любом месте рабочего документа формул, текста и графиков, которые являются **рабочими областями** (regions). Их место вставки задается мышью при помощи **крестообразного курсора**, который может располагаться только в свободном пространстве между областями. Взаимное расположение областей имеет принципиальное значение. Рабочий документ формируется и редактируется в соответствии с тем, как

MathCAD просматривает и обрабатывает его – в последовательности сверху вниз и слева направо. Поэтому переменные или формулы, определенные где-либо в документе, могут использоваться везде ниже и правее места их определения. Вокруг каждой области MathCAD создает невидимый прямоугольник – **выделяющую рамку**. Чтобы определить взаимное расположение областей, нужно сравнить их точки привязки. Выделение областей возможно мышью или по команде **Edit | Select All** . Области могут перекрываться. Их разделение возможно вручную мышью или по команде **Format | Separate Regions**, а взаимное выравнивание:

- мышью;
- по горизонтали – по команде **Format | Align Regions | Across**;
- по вертикали – по команде **Format | Align Regions | Down**.

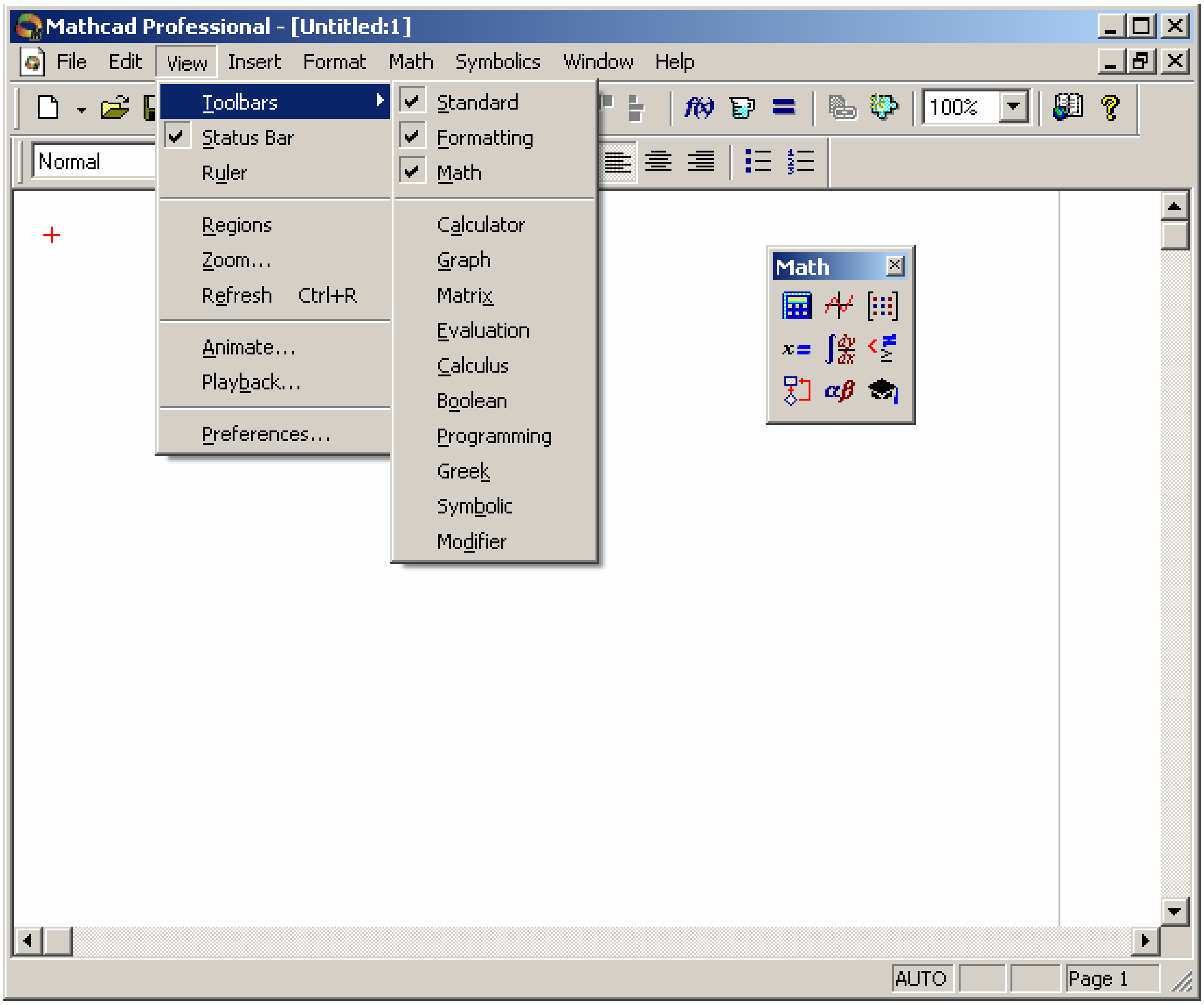
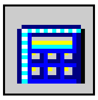


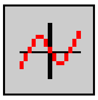
Рис. 1. Главное окно MathCAD

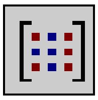
Формирование рабочего документа MathCAD осуществляется при помощи богатых инструментальных возможностей, большинство которых доступно со специализированных панелей инструментов. В MathCAD, подобно другим программам Windows, пользователь может настроить внешний вид панелей инструментов наиболее оптимальным для себя образом.

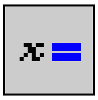
Присутствие панелей на экране регулируется по команде **View | Toolbars** и соответствующих подменю (рис.1). Убрать любую панель с экрана можно еще и посредством контекстного меню, которое вызывается щелчком правой кнопкой мыши в любом месте панели (например, на любой кнопке). В контекстном меню следует выбрать пункт **Hide**. Математические панели, в отличие от основных, можно вызвать или скрыть нажатием соответствующей кнопки панели **Math** (см. рис.1). Присутствие или отсутствие математических панелей показано в виде нажатой (или отжатой) соответствующей кнопки.

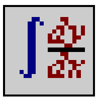
Основной панелью при формировании рабочего документа является панель **Math**. Панель **Math** предназначена для вызова на экран еще девяти панелей (рис. 2), с помощью которых, собственно, и происходит вставка математических операций в документы. Математические панели раскрываются при нажатии соответствующей экранной кнопки панели **Math**. Перечислим назначение математических панелей:

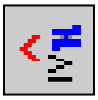
 Математические операции и функции

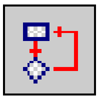
 Построение графиков

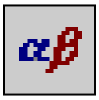
 Матричные и векторные операции

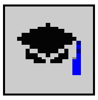
 Операции управления вычислениями

 Операции интегрирования, дифференцирования и суммирования

 Логические операции

 Программные структуры

 Греческие буквы

 Символьные преобразования

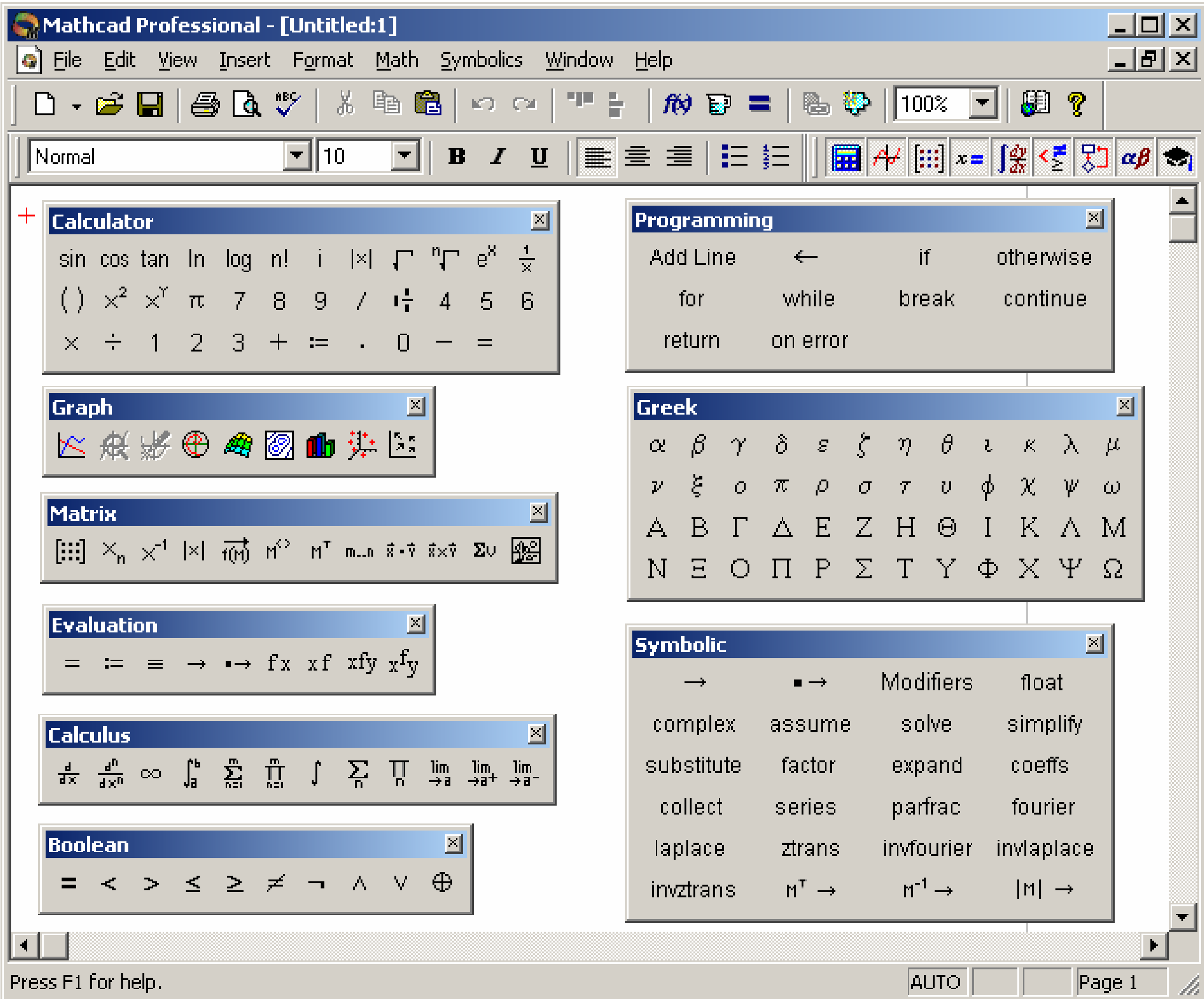


Рис. 2. Математические панели инструментов MathCAD

Ввод формул и выражений

Ввод и редактирование формул и выражений осуществляются под управлением формульного редактора MathCAD. Ввести математическое выражение можно в любое пустое место документа MathCAD. Для этого следует поместить крестообразный курсор ввода в соответствующее место документа, щелкнув по нему мышью, и просто начать вводить формулу, нажимая клавиши на клавиатуре. При этом в документе создается формульная область, которая предназначена для хранения формул, интерпретируемых процессором MathCAD.

Ввод и редактирование математических выражений в MathCAD осуществляется по следующим правилам.

Ввод чисел и имен переменных выполняется непосредственно с клавиатуры. При этом числа могут быть представлены в одной из возможных форм:

- целые десятичные 1234 -557 и т.д.;
- действительные десятичные с фиксированной точкой 2.5 -123.45 и т.д.;
- действительные десятичные с порядком $12.5\cdot10^{-5}$ $-67.89\cdot10^{9}$ $33.3\cdot10^{15}$ и т.д.;
- целые двоичные 11111111b 1010b и т.д. (последний символ b);
- целые восьмеричные 377o 12o и т.д. (последний символ o);
- целые шестнадцатеричные ffh ah и т.д. (последний символ h);
- комплексные 5*i* 3-2*i* и т.д. (мнимая единица *i* или *j* вводится непосредственно за коэффициентом).

Ввод функций осуществляется непосредственно вручную или при помощи мастера по команде **Insert | Function** главного меню.

Ввод специальных математических операторов осуществляется при помощи соответствующих панелей инструментов.

При вводе математических операторов MathCAD создает в рабочем документе в месте ввода шаблоны, подобные ниже приведенным **с полями ввода** в виде небольших черных прямоугольников, в которые следует вводить числа или выражения, например:

$$\lim_{\blacksquare \to \blacksquare} \blacksquare \qquad \frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare \qquad \int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare \qquad \sum_{\blacksquare = \blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare$$

Для ввода и редактирования формул в MathCAD используется еще один элемент интерфейса – **линия редактирования**, которая имеет вид угла синего цвета. Ключевым шагом в редактировании формул в MathCAD является заключение соответствующей части выражения в линию редактирования. Действует следующее правило: то, что является операндом очередного математического оператора, должно быть обрамлено линией редактирования.

Рассмотрим в качестве примера сценарий построения формулы $\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x}}$

1. $\boxed{1-x}$ 2. $\boxed{1-x^{\blacksquare}}$ 3. $\boxed{1-x^2}$ 4. $\boxed{\frac{1-x^2}{\blacksquare}}$ 5. $\boxed{\frac{1-x^2}{1+x}}$ 6. $\boxed{\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x}}}$

Чтобы изменить формулу, следует щелкнуть по ней мышью, поместив, таким образом, в ее область линию редактирования, и перейти к месту исправления. Перемещение линии редактирования в пределах формулы возможно одним из двух способов:

- щелчком в нужном месте мышью;
- при помощи клавиш - со стрелками, пробел и <Ins>.

Клавиши со стрелками имеют естественное назначение перевода линии редактирования вверх, вниз, влево или вправо; клавиша <Ins> переводит вертикальную линию редактирования с одного конца горизонтальной линии редактирования на противоположный; пробел предназначен для выделения различных частей формулы.

Решение и вывод результатов

Решение задач в MathCAD возможно:

- в режиме вычислений;
- в режиме символьных (аналитических) преобразований.

Если режим вычислений выполняется под управлением **вычислительного процессора** MathCAD и представляет собой «запрограммированный» расчет по формулам и численным методам, скрытый от глаза пользователя, то режим символьных преобразований осуществляется в результате работы системы искусственного интеллекта, встроенного в MathCAD и называемого **символьным процессором**.

Символьные преобразования могут выполняться:

- в автоматическом режиме под управлением операторов вывода символьного результата, доступных на математической панели **Symbolic**;

- в интерактивном режиме под управлением меню **Symbolics**.

Основной оператор **вывода символьного результата** имеет вид стрелки ($\rightarrow$) и доступен на математических панелях Symbolic и Evaluation. Он может быть вставлен также по нажатии «горячих» клавиш <**Ctrl**> < **.** >.

Основными операторами в режиме вычислений являются оператор присваивания и оператор вывода численного результата.

Оператор присваивания используется для определения переменных, массивов, функций и имеет вид :=. Он доступен на математических панелях Calculator или Evaluation, а также по нажатии «горячей» клавиши < **:** >. Справа от оператора присваивания появляется поле ввода в виде черного прямоугольника, куда следует ввести значение переменной или массив, или формулу для переменной или функции по образцу:

$$x := -2.5 \qquad M := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y := |x| \qquad f(x) := x^3 - 4 \cdot x$$

Для вывода результатов вычислений выражений (в частности, констант, переменных, массивов, функций) используется **оператор вывода численного результата**, имеющий вид =. Он доступен на математических панелях Calculator или Evaluation, а так же по нажатии «горячей» клавиши <=>. Оператор вывода численного результата означает, что все вычисления проводятся с числами, а различные встроенные алгоритмы реализуются соответствующими численными методами. Результат вывода может иметь вид:

$$-2.5 = -2.5 \qquad x = -2.5 \qquad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y = 2.5 \qquad f(-2) = 0$$

Не вполне соответствующий общепринятому математическому стилю вид оператора присваивания (не =, а :=) является, на самом деле, компромиссом, связанным с назначением MathCAD как системы программирования. Этот оператор показывает, что он действует, в отличие от других, не слева направо, а справа налево, поскольку значение (справа) присваивается переменной (слева). И если непосвященного математика внешний вид этого оператора может ввести в некоторое заблуждение, то пользователю MathCAD он прямо говорит о действии, выполняемом в данном месте документа: значение переменной не выводится на экран (для этого предназначен оператор =), а некоторое значение присваивается (:=) данной переменной. Для подготовки отчетов, тем не менее, может потребоваться изменить отображение оператора присваивания с принятых по умолчанию символов «:=» на символ равенства «=». Это делается для конкретного оператора присваивания с помощью пункта **View Definition As** контекстного меню, либо для всего документа по команде **Math | Options | Display**.

Вычисления и символьные преобразования могут сочетаться в пределах одной и той же задачи. Например, точно так же, как рассчитываются численные значение функций, можно вычислять их и с помощью символьного процессора. Сравните соответствующие результаты, которые представлены ниже. Точно так же можно символьно выводить значения переменных. Например, можно присвоить некоторой переменной значение функции или сложного выражения и затем вывести значение переменной в символьном виде. В правой части оператора присваивания можно использовать результаты символьного преобразования (например, при нахождении коэффициентов полинома или разложении выражения на множители):

$$f(x) := x^3 - 4\cdot x \qquad f(1.15) = -3.079 \qquad f(1.15) \rightarrow -3.079125$$

$$y := f(-1.15) \qquad y = 3.079 \qquad y \rightarrow 3.079125$$

$$a := f(x)\ \text{coeffs}, x\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x) := f(x)\ \text{factor}\ \rightarrow x\cdot(x-2)\cdot(x+2) \qquad \text{polyroots}(a) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

СИМВОЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цель работы: **Познакомиться с возможностми символьных преобразований в MathCAD**

Использование оператора вывода символьного результата	**Использование меню Symbolics**

1. Вычислить предел функции

Команда Symbolics/Evaluate/Symbolically

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{(3\cdot x+6)} \to \frac{1}{3} \qquad\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{(3\cdot x+6)} \quad \frac{1}{3}$$

2. Вычислить производные

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-4\cdot x\right) \to 3\cdot x^2-4 \qquad\qquad \frac{d}{dx}\left(x^3-4\cdot x\right) \quad 3\cdot x^2-4$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3-4\cdot x\right) \to 6\cdot x \qquad\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(x^3-4\cdot x\right) \quad 6\cdot x$$

3. Вычислить интегралы

$$\int x^3\,dx \to \frac{1}{4}\cdot x^4 \qquad\qquad \int x^3\,dx \quad \frac{1}{4}\cdot x^4$$

$$\int_a^b x^2\,dx \to \frac{1}{3}\cdot b^3-\frac{1}{3}\cdot a^3 \qquad\qquad \int_a^b x^2\,dx \quad \frac{1}{3}\cdot b^3-\frac{1}{3}\cdot a^3$$

4. Вычислить сумму или произведение

$$\sum_{k=1}^{n} k \to \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2-\frac{1}{2}\cdot n-\frac{1}{2} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} k \quad \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2-\frac{1}{2}\cdot n-\frac{1}{2}$$

$$\prod_{k=1}^{n} k \to \Gamma(n+1) \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} k \quad \Gamma(n+1)$$

5. Упростить

Набрать выражение и применить оператор символьного вывода simplify

Команда Symbolics/Simplify

$\frac{a^2 - b^2}{a + b}$ simplify $\rightarrow a - b$

$\frac{a^2 - b^2}{a + b}$ $\quad a - b$

6. Разложить по степеням

Набрать выражение, применить оператор символьного вывода expand и указать переменную x

Команда Symbolics/Expand

$(x + y)^3$ expand, x $\rightarrow x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$

$(x + y)^3 \quad x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$

7. Разложить на множители

Набрать выражение, применить оператор символьного вывода factor

Команда Symbolics/Factor

$x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$ factor $\rightarrow (x + y)^3$

$x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3 \quad (x + y)^3$

8. Привести комплексное выражение к виду a + i b

Набрать выражение, применить оператор символьного вывода complex

Команда Symbolics/Evaluate/Complex

$\cos(5i + 2)$ complex $\rightarrow \cos(2) \cdot \cosh(5) - i \cdot \sin(2) \cdot \sinh(5)$

$\cos(5i + 2) \quad \cos(2) \cdot \cosh(5) - i \cdot \sin(2) \cdot \sinh(5)$

9. Принять числовые значения переменных

$a := 1 \quad b := 2 \cdot \pi$

Набрать выражение, применить оператор символьного вывода assume и задать диапазон значений переменной x

$\int_a^b \cos(x)\, dx$ assume, x = realRange(a, b) $\rightarrow -\sin(1)$

10. Разложить в ряд Тэйлора в окрестности точки x с заданным количеством членов ряда

Умолчание: x=0, до x^5, сумма показателей степеней равна 6

Для разложения в ряд нужно выделить переменную, по которой идет разложение

Набрать выражение, применить оператор символьного вывода series и уточнить условия разложения в ряд

Команда Symbolics/Variabe/Expand to Series

$$\sin(x) \text{ series}, x = 0, 4 \rightarrow x - \frac{1}{6}\cdot x^3 \qquad \sin(x) \qquad 1\cdot x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 + O\left(x^6\right)$$

Разложение в окрестности точки x=1 до x^3

$$\ln(x) \text{ series}, x = 1, 4 \rightarrow x - 1 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3$$

$$\ln(1-x) \qquad x - \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^3 + O\left(x^4\right)$$

11. Отобразить числовое значение в формате с плавающей запятой

Набрать выражение, применить оператор символьного вывода float и задать, если нужно, точность представления результата

$$x\cdot\operatorname{acos}(0) \text{ float} \rightarrow 1.5707963267948966193\cdot x$$

$$x\cdot\operatorname{acos}(0) \text{ float}, 4 \rightarrow 1.571\cdot x$$

Команда Symbolics/Evaluate/Floating Point

$$x\cdot\operatorname{acos}(0) \qquad 1.5707963267948966193\cdot x$$

$$\operatorname{asin}(1.) \qquad 1.5707963267948966192$$

После настройки свойства Floating Point Precision = 4

$$\frac{1}{2}\cdot\pi \qquad 1.571$$

12. Привести подобные (разложить по подвыражению)

Например, разложить по степеням x:

$a := a \qquad b := b$ сбросить предыдущие значения переменных

Набрать выражение, применить оператор символьного вывода collect и указать переменную **x**, по которой приводятся подобные

$$a + b\cdot(x-2)^2 + c\cdot\left(x^2 - x\right) + d\cdot x^2 \text{ collect}, x \rightarrow (b + c + d)\cdot x^2 + (-4\cdot b - c)\cdot x + a + 4\cdot b$$

После набора выражения выделить подвыражение **x** и выполнить команду меню Symbolics/Collect

$$a + b\cdot(x-2)^2 + c\cdot\left(x^2 - x\right) + d\cdot x^2 \qquad (b + c + d)\cdot x^2 + (-4\cdot b - c)\cdot x + a + 4\cdot b$$

13. Найти коэффициенты полинома

Набрать выражение, применить оператор
символьного вывода coeffs и указать переменную **x**
аргумент полинома

$$3\cdot b\cdot x^4 - \pi\cdot x^2 + \frac{2}{3}\cdot x - 3\cdot a\cdot b \text{ coeffs}, x \;\rightarrow \begin{pmatrix} -3\cdot a\cdot b \\ \frac{2}{3} \\ -\pi \\ 0 \\ 3\cdot b \end{pmatrix}$$

После набора выражения выделить
переменную x и выполнить команду
меню Symbolics/Polinomial Coefficients

$$3\cdot b\cdot x^4 - \pi\cdot x^2 + \frac{2}{3}\cdot x - 3\cdot a\cdot b \qquad \begin{pmatrix} -3\cdot a\cdot b \\ \frac{2}{3} \\ -\pi \\ 0 \\ 3\cdot b \end{pmatrix}$$

14. Заменить переменную

Набрать выражение, применить оператор
символьного вывода substitute и указать
условие замены

$$z^2 + \frac{2}{z} \text{ substitute}, z = \sin(x) \;\rightarrow \sin(x)^2 + \frac{2}{\sin(x)}$$

После набора выражения
- набрать и скопировать в буфер обмена (Clipboard)
заменяющее выражение, например f(x), или другое;
- выделить заменяемую переменную, например z;
- выполнить команду меню Symbolics/Variable/Substitute:

$f(x)$	$z^2 + \frac{2}{z}$	$f(x)^2 + \frac{2}{f(x)}$
$\sin(x)$	$z^2 + \frac{2}{z}$	$\sin(x)^2 + \frac{2}{\sin(x)}$
$x\cdot\ln(x)$	$z^2 + \frac{2}{z}$	$x^2\cdot\ln(x)^2 + \frac{2}{x\cdot\ln(x)}$

15. Решить уравнение

Набрать левую часть уравнения вида f(x) = 0;
применить оператор символьного вывода solve
и указать переменную **x**, относительно которой
нужно решить уравнение

$$x^3 - 4\cdot x \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

После набора уравнения
- выделить неизвестную переменную;
- выполнить команду Symbolics/Variable/Solve:

$$x^2 + 2\cdot x + 4 = 0 \quad \begin{pmatrix} -1 + i\cdot\sqrt{3} \\ -1 - i\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$x^2 + 2\cdot x + 4.0 = 0 \quad \begin{pmatrix} -1. + 1.7320508075688772935i \\ -1. - 1.7320508075688772935i \end{pmatrix}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{3}\cdot\tan(x) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{acos}\left(\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Нулевую правую часть уравнения можно не указывать

$$x^3 - 4\cdot x \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

16. Дифференцирование и интегрирование

Для дифференцирования
- набрать выражение;
- выделить переменную **x**;
- выполнить команду меню Symbolics/Variable/Differentiate:

$$x^3 \quad 3\cdot x^2 \qquad\qquad a^x \quad a^x\cdot\ln(a)$$

Для интегрирования
- набрать выражение;
- выделить переменную **x**;
- выполнить команду меню Symbolics/Variable/Integrate:

$$a\cdot x^3 \quad \frac{1}{4}\cdot a\cdot x^4 \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \ln\left[x + \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

17. Разложение на простые дроби

Набрать выражение, выделить переменную **x** и применить оператор символьного вывода parfrac

$$\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{x^3+2\cdot x^2-9\cdot x-18}\ \text{convert, parfrac}, x\ \rightarrow \frac{1}{3\cdot(x-3)}+\frac{14}{3\cdot(x+3)}-\frac{3}{(x+2)}$$

Набрать выражение выделить переменную **x** и выполнить команду меню Simbolics/Varable/Convert to Partial Fraction:

$$\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{x^3+2\cdot x^2-9\cdot x-18}\qquad \frac{1}{3\cdot(x-3)}+\frac{14}{3\cdot(x+3)}-\frac{3}{(x+2)}$$

Упражнения

1. Выполнить символьные преобразования в автоматическом режиме под управлением оператора вывода символьного результата и в интерактивном режиме по меню Symbolics.
2. Выполнить следующие преобразования:
   - 2.1. Вычисление предела;
   - 2.2. Вычисление производной;
   - 2.3. Вычисление интеграла;
   - 2.4. Вычисление суммы или произведения;
   - 2.5. Упрощение выражения;
   - 2.6. Разложение выражения по степеням переменной;
   - 2.7. Разложение выражения на множители;
   - 2.8. Разложение функции в ряд Тэйлора.

Таблица 1

Варианты заданий для самостоятельной работы с символьными преобразованиями

№ п/п	Предел	Производная	Интеграл	Сумма или произведение	Упростить	Разложить по степеням	Разложить на множители	Разложить в ряд Тэйлора
1	$\lim_{x \to 1} \left[(1 - x)\cdot\tan\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)\right]$	$\frac{d}{dx}\sin(x)^3$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx$	$\sum_{i=1}^{n} i$	$\frac{a^3 - b^3}{a - b}$	$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$	$x^3 - 6\cdot x^2 + 11\cdot x - 6$	$\sin(x)$
2	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$	$\frac{d}{dx}\sqrt{x}$	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1 - \ln(x)^2}}\,dx$	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2}{a + b}$	$(a + b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2$	$a^3 + b^3$	e^x
3	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2\cdot x + 3}{2\cdot x + 1}\right)^{x+1}$	$\frac{d}{dx}x^3\cdot e^x$	$\int \frac{1}{x^4 + x^2}\,dx$	$\sum_{i=1}^{n} a\cdot q^{n-1}$	$\frac{a^3 + b^3}{a + b}$	$(a - b)\cdot(a^2 + a\cdot b + b^2$	$a^3 - b^3$	$\cos(x)$
4	$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$	$\frac{d}{dx}\mathrm{asin}(x)$	$\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\,dx$	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$	$\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$	$(x - 2)\cdot(x + 1)$	$x^2 - x - 2$	$\ln(x)$
5	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha\cdot x)}{\sin(\beta\cdot x)}$	$\frac{d}{dx}\cos(x)$	$\int a^x\,dx$	$\sum_{i=0}^{10} 2^i$	$\cos(x)^2 - \sin(x)$	$(a + b)^3$	$a^3 + 3\cdot b\cdot a^2 + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$	$\sin(x)$
6	$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5\cdot x + 6}{x^2 - 2}$	$\frac{d}{dx}\ln(x^3 + 7\cdot x + 2)$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cdot x}\cdot\cos(x)\,dx$	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{2^i\cdot i!}$	$\sin(x)^2 + \cos(x)$	$(a - b)^3$	$a^3 - 3\cdot b\cdot a^2 + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3$	e^x
7	$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3\cdot x + 6}$	$\frac{d}{dx}(x + 1)^5$	$\int x\cdot e^x\,dx$	$\sum_{i=0}^{\infty} a^i$	$\frac{a^2 - b^2}{a + b}$	$(a + b)^2$	$a^2 + 2\cdot b\cdot a + b^2$	$\cos(x)$

Окончание табл.1

№ п/п	Предел	Производная	Интеграл	Сумма или произведение	Упростить	Разложить по степеням	Разложить на множители	Разложить в ряд Тэйлора
8	$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha \cdot x} - e^{\beta \cdot x}}{x}$	$\frac{d}{dx}\operatorname{atan}(x)$	$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$	$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3 + 1}$	$\frac{a^2 - b^2}{a - b}$	$(a - b)^2$	$a^2 - 2 \cdot b \cdot a + b^2$	$\ln(x)$
9	$\lim_{x \to 1} \frac{3 \cdot x + 5}{4 \cdot x - 2}$	$\frac{d}{dx}a^x$	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\, dx$	$\prod_{i=1}^{\infty} \sqrt{i}$	$\frac{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{a - b}$	$(a - b) \cdot (a + b)$	$a^2 - b^2$	$\sin(x)$
10	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^2$	$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2\, dx$	$\prod_{i=2}^{10} \left(1 - \frac{1}{i^3}\right)$	$e^{(2 \cdot \ln(a))}$	$(a + b) \cdot (a + b)$	$a^2 + 2 \cdot b \cdot a + b^2$	e^x

ТАБУЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Цель работы: **Научиться применять процедуры построения таблицы и графика функциональной зависимости**

Задание Исследовать функцию f(x), заданную аналитически:

1) построить таблицу;
2) построить график.

1. Формирование данных для исследования

1.1. Диапазон значений аргумента задается по схеме:

<аргумент> := <нач. значение>,<след. значение>..<послед. значение>

$x := -3, -2.5 .. 3$

1.2. Аналитическое задание функции, её первой и второй производных

Операторы присваивания **:=** и дифференцирования **df(x)/dx**, **d²f(x)/dx²** "взять" на панелях инструментов.

функция f(x):= $\qquad f(x) := x^3 - 4 \cdot x$

первая производная f1(x):=df(x)/dx $\qquad f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

вторая производная f2(x):=d²f(x)/dx² $\qquad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

2. Построение таблицы и графиков

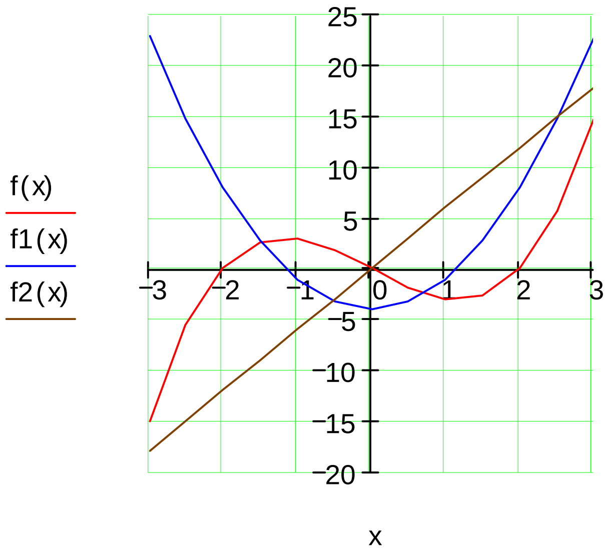
Для построения таблицы набрать x= f(x)= f1(x)= f2(x)=

Для вывода шаблона графика нажать @

ТАБЛИЦА

x =	f(x) =	f1(x) =	f2(x) =
-3	-15	23	-18
-2.5	-5.625	14.75	-15
-2	0	8	-12
-1.5	2.625	2.75	-9
-1	3	-1	-6
-0.5	1.875	-3.25	-3
0	0	-4	0
0.5	-1.875	-3.25	3
1	-3	-1	6
1.5	-2.625	2.75	9
2	0	8	12
2.5	5.625	14.75	15
3	15	23	18

ГРАФИКИ



Наиболее распространенными типами графиков являются графики в декартовых координатах и в полярных координатах.

Исходные данные для построения графиков могут быть заданы:
1) в аналитическом виде, в виде функции f(x) от аргумента с известным законом изменения (как в данном случае);
2) в табличном виде, в виде массивов значений аргумента x_i и функции y_i;
3) в виде параметрической зависимости y(t)=f(x(t)).

Построение плоского графика выполняется по команде **Insert | Graph | X-Y Plot** или по нажатии "горячей" клавиши @ или экранной кнопки на панели **Graph.**

В процессе заполнения шаблона графика центральные гнезда ввода, расположенные по осям, заполняются через запятую (,) именами функций, массивов и переменных. Каждой зависимости на графике соответствует своя кривая (*Trace*).
После построения графиков их можно выделить мышью и форматировать, например, по команде **Format | Graph | X-Y Plot.**
В процессе форматирования чаще всего настраиваются следующие свойства графиков:
на закладке X-Y Axes

Grid Lines	показать линии масштабной сетки
Numbered	показать оцифровку осей
Autoscale	включить режим автомасштабирования
Number of Grids	задать число ячеек масштабной сетки
Equal Scales	одинаковый масштаб по осям
Boxed	оси по сторонам прямоугольника
Crossed	оси по месту их пересечения
None	без осей

на закладке Traces

Legend Label	метка линии на легенде
Symbol	символ для дискретных точек
Line	стиль линии
Color	цвет линии
Type	тип линии
Weight	толщина линии

Более подробно построение графиков обсуждается в работе "Элементы графики и анимации".

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы:	**Научиться решать нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений.** **Познакомиться с функциями root, polyroots, find и minerr**

РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Решение нелинейных уравнений выполняется в два этапа:
1. Отделениие корней - определение приближенного значения корня на интервале локализации, где известно, что имеется только один корень.
2. Задание приближенного значения корня и точности, с которой требуется найти корень.

Отделение корней уравнения f(x) = 0 может быть выполнено при помощи табличного или графического представления функции f(x) или ещё как-то.

В качестве примера рассмотрим уравнение **x^2 - 5 sin(x) = 0.**

Построение таблицы и графика функции **f(x) = x^2 - 5 sin(x).**

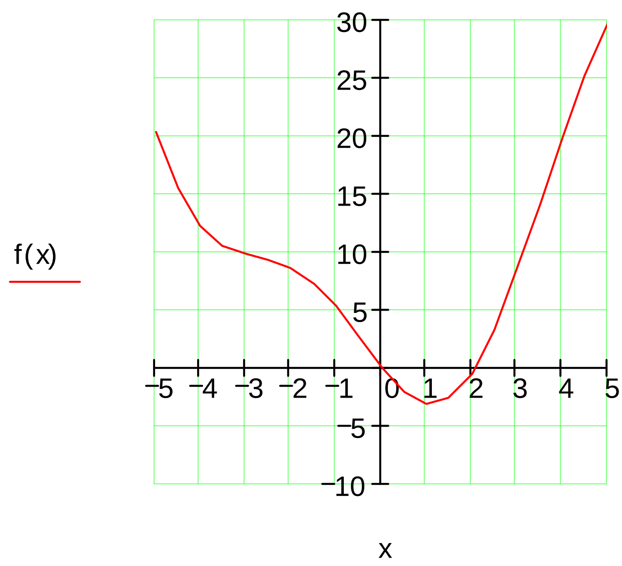
$x := -5, -4.5 .. 5$

$f(x) := x^2 - 5 \cdot \sin(x)$

Для построения таблицы набрать x= и f(x)=

Для вывода шаблона графика нажать @

x =	f(x) =
-5	20.2053786267
-4.5	15.3623494117
-4	12.2159875235
-3.5	10.4960838616
-3	9.7056000403
-2.5	9.2423607205
-2	8.5464871341
-1.5	7.237474933
-1	5.207354924
-0.5	2.647127693
0	0
0.5	-2.147127693
1	-3.207354924
1.5	-2.737474933
2	-0.5464871341
2.5	3.2576392795



1. Решение нелинейного уравнения при помощи функции root(f(x),x) с предопределенной точностью

Из таблицы и графика видно, что два корня уравнения **x^2- 5 sin(x)=0** находятся в окрестности значений 0 и 2. Эти значения можно взять в качестве начальных для уточнения корней.

1-й корень: $x := 0 \quad x_1 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad x_1 = 0$

2-й корень: $x := 2 \quad x_2 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad x_2 = 2.0859342865$

Решение найдено с предопределенной точностью $TOL = 1 \times 10^{-3}$.

Точность представления числового результата задается командой **Math|Options|Built-In Variables**. В данном случае по умолчанию 3. Вы можете выполнить команду и настроить точность представления чисел, например 10. При точности вычисления TOL=0.001 это будет значить, что только 3 цифры после точки будут значащими.

2. Решение нелинейного уравнени при помощи функции root(f(x),x) с заданной точностью TOL

Точность нахождения корней может быть задана или путем настройки переменной TOL командой **Math|Options|Built-In Variables,** или путем непосредственного задания её значения (имя TOL набирается большими буквами).

$TOL := 0.000001$

1-й корень: $x := 0 \quad x_3 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad x_3 = 0$

2-й корень: $x := 2 \quad x_4 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad x_4 = 2.0859345838$

Решение найдено с заданной точностью $TOL = 1 \times 10^{-6}$.

При точности вычислени TOL=0.000001 это будет значить, что 6 цифр после точки будут значащими.

3. Решение нелинейного уравнени в блоке решения given-find или given-minerr при помощи функции find(x) с заданной точностью TOL или minerr(x)

Настройки точности вычисления TOL и точности представления чисел в предыдущей задаче остаются в силе.

"Жирный" знак равенства = (операция "равно") в блоке given-find набирается комбинацией горячих клавиш Ctrl - =, не путать со знаком присваивания := и знаком получения числового результата =.

1-й корень: $x := 0$

Given $f(x) = 0$

$x_5 := \mathrm{Find}(x)$ $x_5 = 0$

2-й корень $x := 2$

Given $f(x) = 0$

$x_6 := \mathrm{MinErr}(x)$ $x_6 = 2.0859345422$

Решение найдено с заданной точностью $TOL = 1 \times 10^{-6}$.

Решение уранений в блоке given -minerr оформляется аналогично.
В отличие от find(x), которая "ищет" решение с заданной точностью, minerr(x) "ищет" решение "до минимальной ошибки", т.е. до наилучшего удовлетворения условий в блоке решения.

4. Решение алгебраического нелинейного уравненя (нахождение корней полинома вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$) при помощи функции polyroots(a)

Допустим, необходимо найти корни полинома **f(x) = x3 - 10x + 2**, т.е. решить уравнение **f(x)=0.**
Формируем вектор коэффициентов полинома:

$$a := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шаблон вектора "возьмите" на панели инструментов или нажмите клавиши Ctrl-M, или выполните команду **Insert|Matrix**.

Укажите число строк (4) и столбцов (1).

Заполните шаблон вектора **a** коэффициентами полинома.

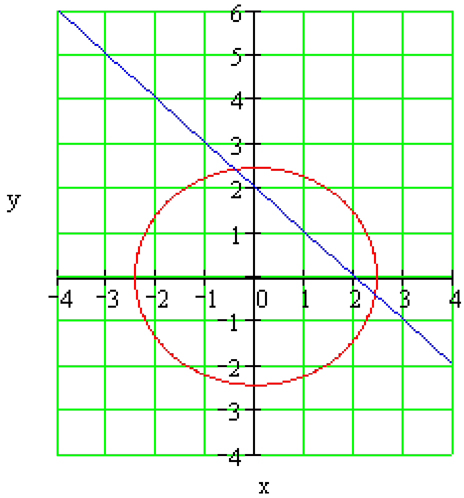
Решение ищется в виде вектора **x**:

$$x := \mathrm{polyroots}(a) \quad x = \begin{pmatrix} -3.257897013 \\ 0.2008097564 \\ 3.0570872566 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение системы нелинейных уравнений в блоке решений во многом повторет решение нелинейного уравнени и включает в себя:
1) задание начальных значений;
2) формирование блока решений, который может содержать уравнения системы и неравенства, ограничивающие область допустимых значений.

Допустим, в качестве примера, необходимо найти координаты точек пересечения окружности, заданной уранением $\mathbf{x^2 + y^2 = 6}$ и прямой $\mathbf{x + y = 2}$**,** т.е. решить систему уравнений.



5. Решение системы нелинейных уравнений в блоке решения given-find.

Найдем одно решение при условии **x<=1** и **y>2**.

Начальные значения $x := 1$ $y := 1$

Given Начало блока решения given-find

$x^2 + y^2 = 6$

$x + y = 2$ В уравнениях используется знак равенства = (Ctri-=).

$x \le 1$

$y > 2$

Решение ищется в виде вектора:

$\begin{pmatrix} xr \\ yr \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x, y)$ $xr = -0.4142135624$ $yr = 2.4142135624$

Проверка:

$xr^2 + yr^2 = 6$

$xr + yr = 2$

6. Решение системы нелинейных уравнений в блоке решения given-minerr

Пусть решается та же задача, при тех же начальных значениях, но при других ограничениях (ищется вторая точка пересечения): **x>1** и **y<0**

Начальные значения $x := 1$ $y := 1$

Given Начало блока решения given-minerr

$x^2 + y^2 = 6$

$x + y = 2$ В уравнених используетсв знак равенства **=** (Ctri-=).

$x > 1$ Другие ограничения на допустимые значения **x** и **y.**

$y < 0$

Решение ищется в виде вектора:

$\begin{pmatrix} xr \\ yr \end{pmatrix} := \mathrm{MinErr}(x, y)$ $xr = 2.4142135624$

$yr = -0.4142135624$

Результаты другие (координаты второй точки).

Проверка:

$xr^2 + yr^2 = 6$

$xr + yr = 2$

Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстраций «Табулирование функции» и «Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений». Выполнить исследование функции:

1) построить таблицу и график самой функции, а также ее первой и второй производных;
2) локализовать по графику или таблице особые точки функции: нули, экстремумы, точки перегиба;
3) особые точки искать как результат решения соответствующего нелинейного уравнения на основе исходной функции, ее первой и второй производных;
4) применить разные методы решения нелинейных уравнений в MathCAD.

Таблица 2

Варианты заданий для самостоятельной работы по исследованию функции

№	Функция	Диапазон
1	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot (1 + \lvert x \rvert)$	$x = 0, 0.1 .. 7$
2	$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$	$x = 0.5, 0.6 .. 3.5$
3	$f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$	$x = 1, 2 .. 50$
4	$f(x) = \sin\left(x^2\right)$	$x = -2, -1.9 .. 2$
5	$f(x) = \dfrac{2 \cdot x}{x^2 - x + 1}$	$x = -5, -4.9 .. 5$
6	$f(x) = \sin\left(\ln\left(x^2\right)\right)$	$x = 0.1, 0.2 .. 6$
7	$f(x) = x \cdot \sin(x)$	$x = -4, -3.9 .. 8$
8.	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2^x}$	$x = -2, -1.9 .. 10$
9	$f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$x = 0.1, 0.11 .. 0.5$
10	$f(x) = e^{-0.2 \cdot x} \cdot \sin(x)$	$x = 0, 0.1 .. 8$

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ЕДИНИЦАМИ ИЗМЕРЕНИЯ

Цель работы: **Научиться работать с именованными величинами**

Доступ к единицам измерения осуществляется по команде **Insert|Unit**.
Единицы измерения используются как операнды выражений.

В качестве примера содержательной задачи рассмотрим задачу о движении тела с заданной высоты h под углом α к поверхности земли с начальной скоростью v_0.

1. Исходные данные:

$v_0 := 100 \cdot \frac{m}{sec}$ начальная скорость тела;

$\alpha := 45 \cdot deg$ угол вылета тела;

$g := 1 \cdot g$ ускорение свободного падения;

$h := 100 \cdot m$ высота.

2. Решение:

уравнения движения тела:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$

$$y(t) = h + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

время движения тела до падения:

$$t_{max} := \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha) + \sqrt{(v_0 \cdot \sin(\alpha))^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}$$

дальность полета тела:

$$x_{max} := \frac{\left[0.5 \cdot v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + \sqrt{\left(0.5 \cdot v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)\right)^2 + 2 \cdot g \cdot h \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2}\right]}{g}$$

высота полета тела: $x_{max} = 1.111 \times 10^3 \, m$

$$y_{max} := h + \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin(\alpha)^2 \qquad y_{max} = 354.929 \, m$$

максимальная высота полета тела:

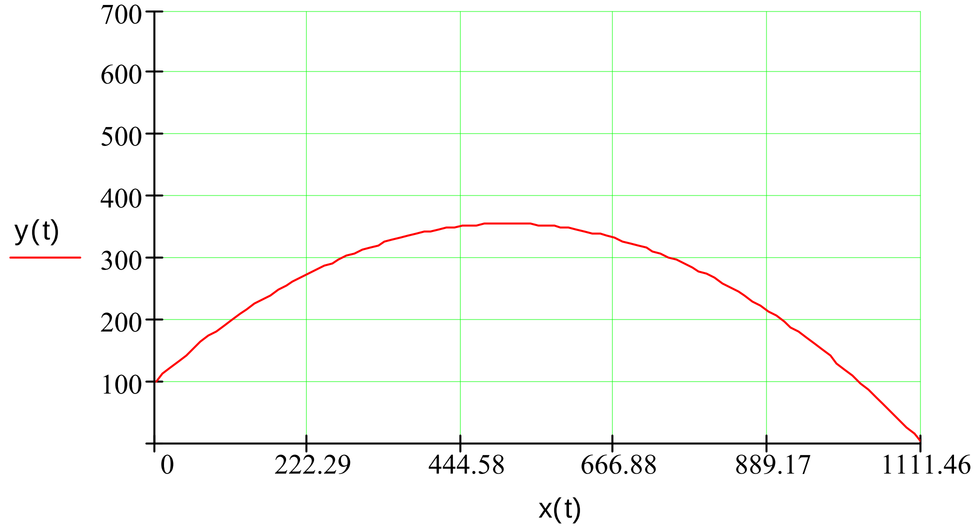
$$y_m := h + \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \qquad y_m = 609.858 \, m$$

3. График траектории полета тела

$$t_0 := 0 \cdot sec \qquad t := t_0, t_0 + \frac{t_{max}}{100} .. t_{max}$$

$$x(t) := t \cdot v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$y(t) := h + \left(t \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha) - \frac{g \cdot t^2}{2} \right)$$

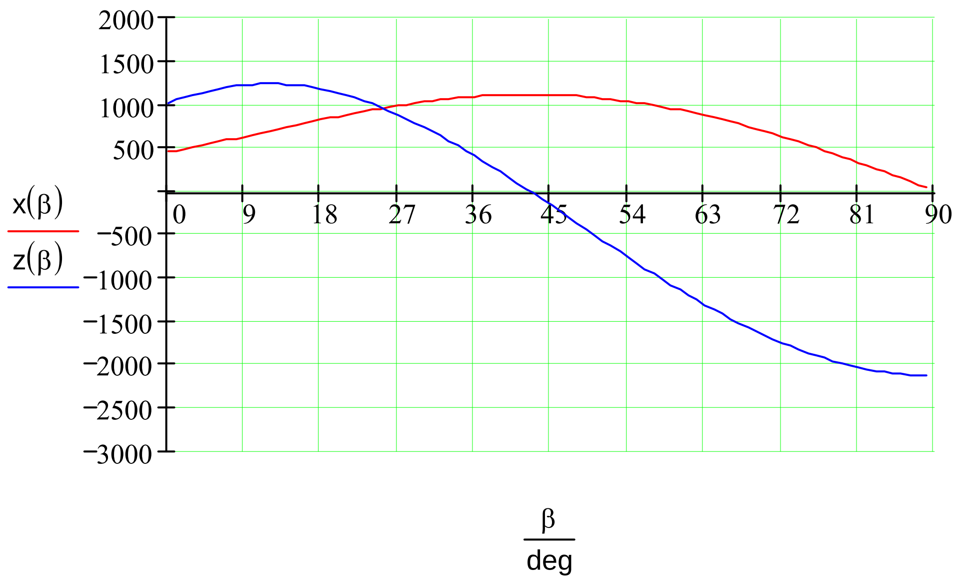


4. Исследование максимальной дальности полета от угла вылета:

$$\beta_0 := 0 \cdot deg \qquad \beta_{max} := 90 \cdot deg \qquad \beta := \beta_0, \beta_0 + \frac{\beta_{max}}{90} .. \beta_{max}$$

$$x(\beta) := \frac{\left[0.5 \cdot v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \beta) + \sqrt{\left(0.5 \cdot v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \beta)\right)^2 + 2 \cdot g \cdot h \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\beta))^2} \right]}{g}$$

$$z(\beta) := \frac{d}{d\beta} x(\beta)$$



Упражнения

1. Вариант 1. Дополнить условие демонстрационной задачи усложняющим фактором – движение тела осуществляется с поверхности земли, но не только под действием гравитационного поля, но и под действием силы ветра F в попутном или встречном направлениях. Движение тела описывается параметрическими уравнениями:

Исходные данные

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + \dfrac{F \cdot t^2}{2 \cdot M} \\ y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

$v_0 := 100 \cdot \dfrac{m}{sec}$ $\alpha := 45 \cdot deg$ $g := 1 \cdot g$

$M := 0.001 \cdot kg$ $F := 5 \cdot newton$

2. Вариант 2. Дополнить условие демонстрационной задачи усложняющим фактором – движение тела с зарядом q осуществляется с поверхности земли, но не только под действием гравитационного поля, но под действием электростатического поля E, силовые линии которого образуют угол β с силой тяжести. Движение тела описывается уравнениями:

Исходные данные

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + \dfrac{E \cdot q \cdot \sin(\beta) \cdot t^2}{2 \cdot M} \\ y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2} - \dfrac{E \cdot q \cdot \cos(\beta) \cdot t^2}{2 \cdot M} \end{cases}$$

$v_0 := 100 \cdot \dfrac{m}{sec}$ $\alpha := 45 \cdot deg$

$g := 1 \cdot g$ $M := 0.001 \cdot kg$

$q := 1 \cdot coul$ $E := 10 \cdot \dfrac{newton}{coul}$

$\beta := 30 \cdot deg$

3. В процессе решения задачи:
   3.1. Найти параметры траектории: максимальную дальность и максимальную высоту;
   3.2. Построить график траектории;
   3.3. Исследовать зависимость параметров и графика траектории от исходных данных;
   3.4. Исследовать зависимость максимальной дальности от угла вылета α и от угла β между силовыми линиями потенциальных полей;
   3.5. Определить по соответствующим графикам оптимальные условия (углы α и β при максимально возможной дальности полета).

ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ И МАТРИЦАМИ

Цель работы: **Познакомиться с основными операциями над векторами и матрицами**

Операции с векторами и матрицами предполагают их предварительное формирование. Формирование векторов и матриц выполняется при помощи шаблона. Вывод на экран шаблона выполняется по команде **Insert | Matrix** при помощи комбинации клавиш Ctrl-M или экранной кнопки на панели **Matrix**.

При формировании структуры вектора или матрицы необходимо указать число строк (Rows) и столбцов (Columns). Вектор формируется как матрица с одним столбцом.

ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ

1. Формирование векторов

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Вывод векторов и их компонентов

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Элементы вектора являются переменными с индексами. Индексы формируются или при помощи клавиши **[** (левая квадратная скобка) или на панели **Matrix** (элемент $\mathbf{X_i}$).

$u_1 = 0 \quad u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad v_3 = 1$

Нумерация элементов векторов и матриц начинается с 0. Изменить начало отсчета можно при помощи настроечной переменной ORIGIN. Значение ORIGIN может быть задано по выполнении команды **Math|Options|Built-In Variables** или непосредственно в тексте, например:

$$ORIGIN := 1$$

Примечание. В дальнейшем нумерация элементов векторов и матриц будет начинаться с **1**.

$u_1 = 1 \quad u_4 = 0 \quad v_1 = 0 \quad v_4 = 1$

3. Норма (модуль) вектора $\sqrt{\sum (v_i)^2}$

$|u| = 1$

$|v| = 1$

Для вычисления нормы вектора необходимо выделить имя вектора и нажать клавиши **Shift-|** или выбрать на панели **Matrix** элемент **|X|**.

4. Длина (число элементов), среднее арифметическое, максимальный и минимальный элементы

Эти характеристики вычисляются при помощи встроенных функций:

$\mathrm{length}(v) = 4 \quad \mathrm{mean}(v) = 0.25 \quad \max(v) = 1 \quad \min(v) = 0$

5. Сумма элементов

$\sum v = 1$

Для вычисления суммы элементов вектора необходимо выделить имя вектора и нажать клавиши **Ctrl-4** или выбрать на матричной панели инструментов элемент $\sum v$.

6. Сложение, вычитание и скалярное перемножение векторов

$u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Скалярное произведение векторов коммутативно:

$u \cdot v = 0 \quad v \cdot u = 0$

7. Транспонирование (вывод по горизонтали)

$u^T = (1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)$

$v^T = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1)$

Для транспонирования вектора необходимо выделить имя вектора и нажать клавиши **Ctrl-1** или выбрать на панели **Matrix** элемент $\mathbf{M^T}$.

8. Векторное произведение трехмерных векторов

Векторное произведение применимо только для трехмерных векторов. Для выполнения векторного произведения необходимо нажать клавиши **Ctrl-8** или выбрать на панели **Matrix** элемент **X** x **Y.**

Векторное произведение не коммутативно.

$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \times y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \times x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. Векторизация (вычисление векторных функций от векторных аргументов)

Для вычисления векторной функции необходимо набрать справа от оператора присваивания определяющее выражение, выделить его и нажать клавиши **Ctrl -** или выбрать на матричной панели элемент $\overrightarrow{f(M)}$.

$$z := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f1 := \overrightarrow{z^2} \qquad f1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$f2 := \overrightarrow{\sin(z)} \qquad f2 = \begin{pmatrix} 0.841 \\ 0.909 \\ 0.141 \end{pmatrix} \qquad f3 := \overrightarrow{\exp(\ln(z))} \qquad f3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10. Заполнение вектора заданной длины (5) равномерно распределенными случайными числами в дипазоне от 0 до 100

$y := \mathrm{runif}(5, 0, 100)$

$y^T =$

	1	2	3	4	5
1	0.127	19.332	58.501	35.031	82.284

11. Инверсия вектора

$\mathrm{reverse}(y)^T =$

	1	2	3	4	5
1	82.284	35.031	58.501	19.332	0.127

12. Сортировка вектора по возрастанию и убыванию

$\mathrm{sort}(y)^T =$

	1	2	3	4	5
1	0.127	19.332	35.031	58.501	82.284

$\mathrm{reverse}(\mathrm{sort}(y))^T =$

	1	2	3	4	5
1	82.284	58.501	35.031	19.332	0.127

ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ

13. Формирование матриц

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

14. Вывод матриц и их элементов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Напомним, что всё ещё действует настройка ORIGIN=1, т.е. нумерация элементов матрицы начинается с **1.**

Элементы матрицы являются переменными с индексами типа $A_{i,j}$. Индексы формируются или при помощи клавиши **[** (левая квадратная скобка) или на матричной панели (элемент $\mathbf{X_i}$) и перечисляются через запятую.

$$A_{1,1} = 1 \qquad A_{3,1} = 3 \qquad B_{1,2} = 2 \qquad B_{2,2} = 4$$

15. Определитель квадратной матрицы

$|A| = -2$ Для вычисления определителя матрицы необходимо выделить имя матрицы и нажать клавиши **Shift-|** или выбрать на матричной панели элемент **|X|**.

16. Некоторые характеристики матрицы

Эти характеристики вычислнются при помощи встроенных функций:

$\mathrm{cols}(A) = 3$ число столбцов

$\mathrm{rows}(A) = 3$ число строк

$\max(A) = 3$ максимальный элемент

$\min(A) = 0$ минимальный элемент

$\mathrm{tr}(A) = 3$ след (сумма элементов $A_{i,i}$ на главной диагонали)

$\mathrm{rank}(A) = 3$ ранг

17. Извлечение прямоугольного фрагмента из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \mathrm{submatrix}(A, 2, 3, 1, 3) \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Соединение матриц по вертикали

$$AC := \mathrm{stack}(A, C) \qquad AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Соединение матриц по горизонтали

$$AB := \mathrm{augment}(A, B) \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

20. Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

$$\lambda := \mathrm{eigenvals}(A) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 2.732 \\ -0.732 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения квадратной матрицы **A.**

$$z1 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_1) \qquad z1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

Собственный вектор матрицы **A** для собственного значения λ_1.

$$z2 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_2) \qquad z2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

Собственный вектор матрицы **A** для собственного значения λ_2.

$$z3 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_3) \qquad z3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственный вектор матрицы **A** для собственного значения λ_3.

$z := \mathrm{eigenvecs}(A)$

Матрица, столбцы которой являются собственными векторами квадратной матрицы **A**:

$$z = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.866 & 0.866 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы матрицы **A**:

$$z^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.866 \end{pmatrix} \qquad z^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.866 \end{pmatrix} \qquad z^{\langle 3 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Примечание. Вектор-столбец матрицы М может быть получен после выделения имени матрицы комбинацией клавиш **Ctrl-6** или на матричной панели при помощи элемента $\mathbf{M}^{<>}$.

21. Получение матриц специального типа

$E := \mathrm{identity}(3)$ $\qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Единичная матрица **E** ранга n=3 .

$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad D := \mathrm{diag}(v)$ $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Диагональная матрица **D** с диагональю, заданной вектором **v** .

$LA := \mathrm{geninv}(A)$ $\quad LA = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$ $\qquad LA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Матрица **LA**, обратная слева к исходной матрице **A**, т.е. **LA** х **A = E** .

22. Обращение матрицы

Набрать имя матрицы и выполнить операцию возведение в степень **-1.** Для этого нажать ^ или выбрать на панели **Calculator** элемент $\mathbf{X^Y}$ и набрать **-1** .

Проверка:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Транспонирование матрицы

Набрать имя матрицы и выполнить операцию транспонирования. Для этого нажать **Ctrl-1** или выбрать на панели **Matrix** элемент $\mathbf{M^T}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Возведение матрицы в степень

Набрать имя матрицы и выполнить операцию возведение в степень **.** Для этого нажать ^ или выбрать на панели **Calculator** элемент $\mathbf{X^Y}$ и набрать показатель степени.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

25. Сложение и вычитание матриц (клавиши + и -)

Пусть $C := A^T$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A - C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Перемножение матриц размерности N x M **и** M x L (клавиша *)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц некоммутативно:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

РАБОТА С ВНЕШНИМИ ФАЙЛАМИ ДАННЫХ

Цель работы: **Научиться работать в MathCAD с внешними файлами данных**

1. Вывод во внешний структурированный файл одномерного массива

ORIGIN:= 1 Настройка на начало отсчета идексов с 1.

Исходный одномерный массив-вектор

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X_1 = 1 \quad X_2 = 2 \quad X_3 = 3 \quad X_4 = 4$$

Вывод массива X во внешний файл fX1.prn при помощи мастера компонентов по команде **Insert|Component|File Read or Write**

C:\..\fX1.prn

X

Вывод массива X во внешний файл fX2.prn при помощи функции WRITEPRN("file").

WRITEPRN("fX2.prn") := X

2. Ввод из внешнего структурированного файла данных в одномерный массив

Ввод данных в массив Y1 из внешнего файл fX1.prn при помощи мастера компонентов по команде **Insert|Component|File Read or Write**

Y1 :=

C:\..\fX1.prn

Ввод данных в массив Y2 из внешнего файла fX2.prn при помощи функции READPRN("file").

Y2 := READPRN("fX2.prn")

Проверка:

$$Y1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad Y2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Вывод во внешний структурированный файл двумерного массива-матрицы

Настройка на начало отсчета идексов с 1 не изменилась.

Исходный двумерный массив-матрица.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_{1,1} = 1 \quad A_{1,4} = 4 \quad A_{2,2} = 3$$

Вывод матрицы A во внешний файл fA1.prn при помощи мастера компонентов по команде **Insert|Component|File Read or Write**.

C:\..\fA1.prn

A

Вывод матрицы A во внешний файл fX2.prn при помощи функции WRITEPRN("file").

WRITEPRN("fA2.prn") := A

4. Ввод из внешнего структурированного файла данных в двумерный массив

Ввод данных в массив B1 из внешнего файл fA1.prn при помощи мастера компонентов по команде **Insert|Component|File Read or Write**.

B1 :=

C:\..\fA1.prn

Ввод данных в массив B2 из внешнего файла fA2.prn при помощи функции READPRN("file").

B2 := READPRN("fA2.prn")

Проверка

$$B1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ПРОСТАЯ СТАТИСТИКА

Цель работы: **Научиться работать в MathCAD с основными статистическими функциями**

1. Формирование исходных данных при помощи генератора случайных чисел

ORIGIN:= 1 Настройка на начало отсчета идексов с 1.

10 нормально распределенных случайных чисел со средним выборочным 2 и средним квадратическим отклонением 1 заносятся в массив Y.

$y := rnorm(10, 2, 1)$

$y^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.561	1.321	1.527	1.049	0.314	2.044	1.879	2.556	4.192	2.809

2. Вывод массива случайных чисел во внешний структурированный файл

WRITEPRN("StatData.prn") := y

3. Чтение данных из внешнего файла (имитация результатов измерений)

x := C:\..\StatData.prn

$x^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.561	1.321	1.527	1.049	0.314	2.044	1.879	2.556	4.192	2.809

4. Обработка результатов измерений

4.1. Количество измерений в выборке

$n := length(x)$ $n = 10$

4.2. Среднее выборочное

По определению С использованием встроенных функций

$$xsr := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

применить функцию *mean*

$xsr = 1.925$

4.3. Дисперсия

По определению

$$dx := \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - xsr\right)^2$$

$dx = 1.15$

С использованием встроенных функций

применить функцию *Var*

4.4. Среднее квадратическое отклонение (СКО)

По определению

$$sx := \sqrt{dx}$$

$sx = 1.073$

С использованием встроенных функций

применить функцию *Stdev*

4.5. Определение границ доверительного интервала

Обратное распределение Стьюдента *qt(p1,k)* для вероятности *p1* и числа степеней свободы *k=n-1* возвращает значение $t_{кр}$ такое, что выполняется условие одностороннего ограничения $P(t<t_{кр}) = p1$

Между вероятностями для односторонней границы *p1* и двусторонней *p2* имеется соотношение *p1 = 0,5(1+p2).*

Коэффициент Стьюдента $t_{кр}$ для вероятности *p2=0,95* и числа степеней свободы *k=n-1* для двустороннего ограничения вычисляется по формуле:

$$t_{kp} := qt(0.9750, n-1) \qquad t_{kp} = 2.262$$

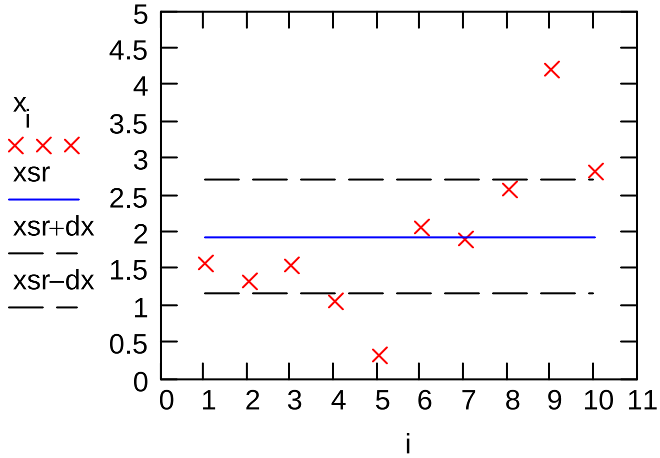
$$dx := t_{kp}\cdot\frac{sx}{\sqrt{n}} \qquad dx = 0.767 \qquad xsr = 1.925$$

Границы доверительного интервала:

$xsr + dx = 2.692$

$xsr - dx = 1.158$

$i := 1 .. n$



Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстраций «Операции с векторами и матрицами», «Работа с внешними файлами данных» и «Простая статистика». Требуется воспроизвести решение задачи «Простая статистика»:

1) сгенерировать множество нормально распределенных случайных чисел, заданное вариантом индивидуального задания, в виде вектора;
2) вывести результат во внешний файл;
3) считать данные из внешнего файла в новый вектор и рассматривать его в дальнейшем как источник данных для статистической обработки;
4) самостоятельно освоить и применить встроенные функции MathCAD для вычисления среднего выборочного ***mean(x)***, дисперсии ***Var(x)*** и среднего квадратического (стандартного) отклонения ***Stdev(x)***;
5) вычислить по определению и при помощи встроенных функций:
   - количество элементов в выборке;
   - среднее выборочное;
   - дисперсию;
   - среднее квадратическое отклонение;
6) определить границы доверительного интервала для двусторонней доверительной вероятности **0,95**.

Таблица 3

Варианты заданий для самостоятельной работы со статистическими характеристиками

№	Число элементов в выборке	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение
1.	10	1	1
2.	15	2	2
3.	20	3	1
4.	10	4	2
5.	15	5	1
6.	20	1	2
7.	10	2	1
8.	15	3	2
9.	20	4	1
10.	10	5	2

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель работы: **Освоить технологию метода наименьших квадратов в MathCAD при обработке экспериментальных данных**

1. Обрабатываемые данные вводятся с клавиатуры

Всего получено n = 10 экспериментальных точек

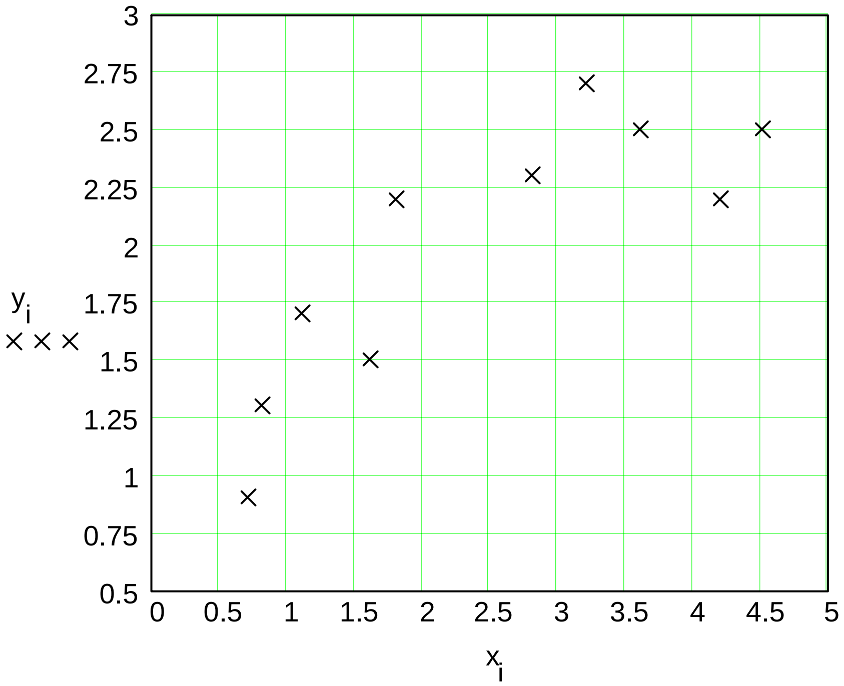
$n := 10 \qquad i := 0..n-1$

$x := (0.7\ \ 0.8\ \ 1.1\ \ 1.6\ \ 1.8\ \ 2.8\ \ 3.2\ \ 3.6\ \ 4.2\ \ 4.5)$

$y := (0.9\ \ 1.3\ \ 1.7\ \ 1.5\ \ 2.2\ \ 2.3\ \ 2.7\ \ 2.5\ \ 2.2\ \ 2.5)$

Обрабатываемые данные должны быть векторами-столбцами

$x := x^T \qquad y := y^T$



Задание. 1. Методом наименьших квадратов найти аппроксимирующую зависимость, которая наилучшим образом описывает результаты эксперимента.
2. Испытать линейную и квадратичную зависимости.

2. Регрессия-линейная модель $y = a_0 + a_1 x$

2.1. Решение (коэффициенты полинома a_0 и a_1) ищется по результирующим формулам метода наименьших квадратов

$$a_0 := \frac{\left[\sum_i (x_i)^2\right] \cdot \sum_i y_i - \left(\sum_i x_i\right) \cdot \sum_i x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_i (x_i)^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}$$

$$a_1 := \frac{n \cdot \sum_i x_i \cdot y_i - \left(\sum_i x_i\right) \cdot \left(\sum_i y_i\right)}{n \cdot \sum_i (x_i)^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}$$

$a_0 = 1.123$ $\qquad$ $a_1 = 0.353$

2.2. Неизвестные параметры a_0 и a_1 вычисляются методом наименьших квадратов с помощью встроенных функций intercept(x,y) и slope(x,y):

$a_0 := \mathrm{intercept}(x, y)$ $\qquad$ $a_1 := \mathrm{slope}(x, y)$

$a_0 = 1.123$ $\qquad$ $a_1 = 0.353$

2.3. Решение ищется при помощи функции linfit (x,y,F) в виде линейной комбинации произвольных функций:

$$y = a_0\, f_0(x) + a_1\, f_1(x) + \ldots + a_n\, f_n(x)$$

Функция F(x) возвращает вектор, состоящий из функций $f_i(x)$:

$f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, которые образуют линейную комбинацию:

$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ $\qquad$ $a := \mathrm{linfit}(x, y, F)$

$a_0 = 1.123$ $\qquad$ $a_1 = 0.353$

Все способы дают одинаковые результаты !!!

$y1(x) := a_0 + a_1 \cdot x$ $\qquad$ Линейная модель.

3. Регрессия-нелинейная модель $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Решение ищется п ри помощи функции linfit (x,y,F) в виде линейной комбинации

$$y = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + ... + c_n f_n(x)$$

функций: $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.

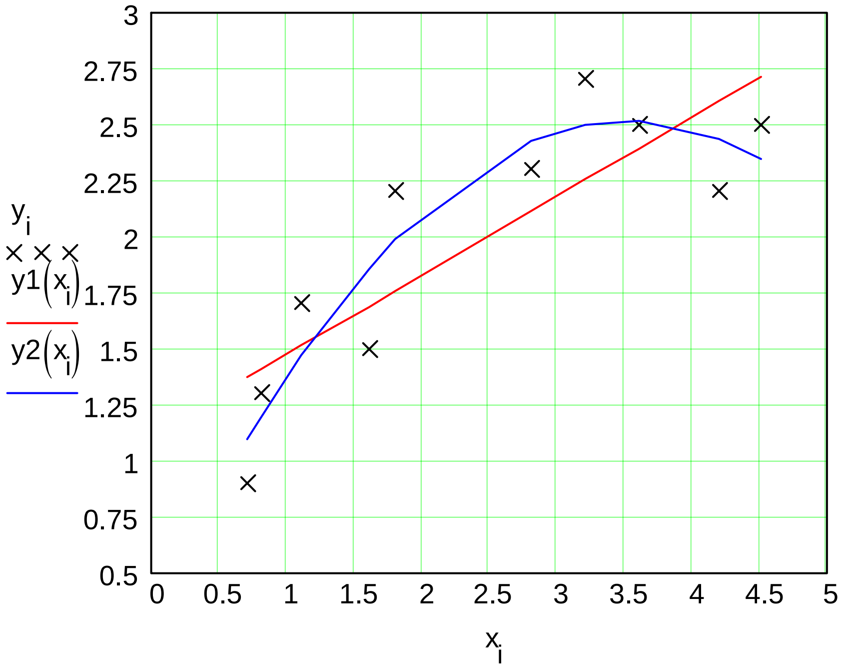
Функция F(x) возвращает вектор, состоящий из функций $f_i(x)$, которые образуют линейную комбинацию:

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad c := \mathrm{linfit}(x, y, F)$$

$c_0 = 0.294$ $\qquad$ $c_1 = 1.263$ $\qquad$ $c_2 = -0.179$

$y2(x) := c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$ $\qquad$ Нелинейная модель.

4. Графическое представление результатов аппроксимации



5. Сумма квадратов отклонения для линейной и нелинейной моделей:

$$ss1 := \sum_i \left(y_i - y1(x_i)\right)^2 \qquad ss2 := \sum_i \left(y_i - y2(x_i)\right)^2$$

$ss1 = 0.954$ $\qquad$ $ss2 = 0.41$

Вывод. Нелинейная модель точнее описывает результаты эксперимента.

Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстраций «Операции с векторами и матрицами», «Работа с внешними файлами данных» и «Статистическая обработка данных методом наименьших квадратов». Требуется исследовать полином первой степени в качестве теоретической зависимости, аппроксимирующей исходные данные, имитирующие результаты некоторого эксперимента. Для выполнения задания предлагается:

1) взять за основу демонстрацию «Статистическая обработка данных методом наименьших квадратов»;
2) считать данные из внешнего файла, заданного вариантом индивидуального задания, в матрицу;
3) на основе первого столбца матрицы сформировать вектор значений независимой переменной, а на основе второго столбца матрицы сформировать вектор значений зависимой переменной;
4) коэффициенты аппроксимирующего полинома найти:
   - используя результирующие формулы метода наименьших квадратов;
   - при помощи встроенных функций MathCAD ***intercept*** и ***slope*** ;
   - при помощи встроенной функции MathCAD ***linfit***;
   - при помощи встроенной функции MathCAD ***line***, с которой предлагается познакомиться самостоятельно;
   - при помощи встроенных функций MathCAD ***regress*** и ***interp***, с которыми предлагается познакомиться самостоятельно;
5) отобразить в виде графика результаты аппроксимации исходных данных теоретической зависимостью.

Таблица 4

Варианты заданий для самостоятельной работы

№	Файл	№	Файл	№	Файл	№	Файл
1	1-1.prn	6	2-4.prn	11	4-3.prn	16	22.prn
2	1-2.prn	7	3-1.prn	12	11.prn	17	23.prn
3	2-1.prn	8	3-2.prn	13	12.prn	18	31.prn
4	2-2.prn	9	4-1.prn	14	13.prn	19	34.prn
5	2-3.prn	10	4-2.prn	15	21.prn	20	42.prn

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: **Познакомиться с особенностями решения систем линейных алгебраических уравнений**

Речь идет о решении системы уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A_{11}\,X_1 + A_{12}\,X_2 + \ldots + A_{1n}\,X_n = B_1}\\
&\mathbf{A_{21}\,X_1 + A_{22}\,X_2 + \ldots + A_{2n}\,X_n = B_2}\\
&\mathbf{A_{31}\,X_1 + A_{32}\,X_2 + \ldots + A_{3n}\,X_n = B_3}\\
&\qquad\qquad\quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots\\
&\mathbf{A_{n1}\,X_1 + A_{n2}\,X_2 + \ldots + A_{nn}\,X_n = B_n}
\end{aligned}$$

или в матричной форме $A\,X = B$.
Здесь А-квадратная матрица (размера N x N) коэффициентов, В-вектор-столбец (размера N) свободных членов, Х -вектор N неизвестных.

1. Исходные данные

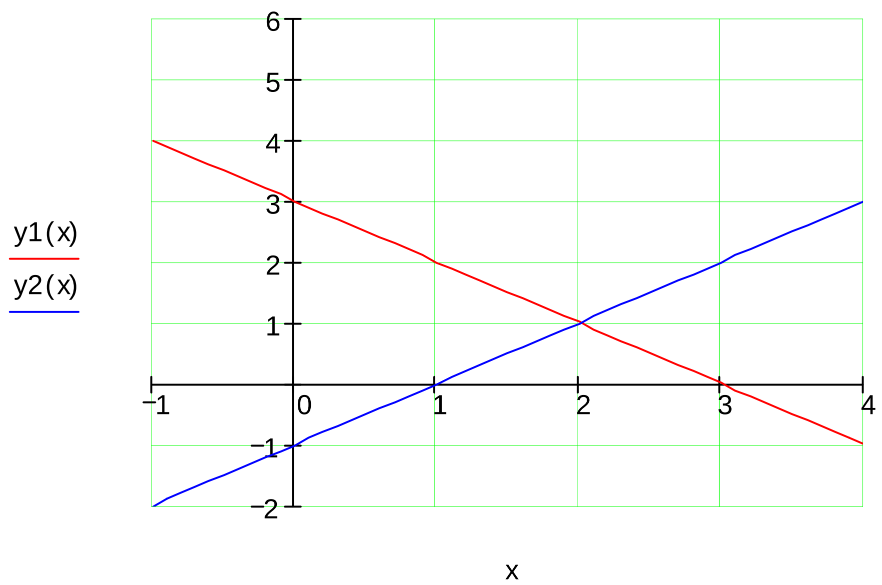
ORIGIN:= 1 N := 2

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Графический образ системы

$x := -1, -0.9 .. 4$

$$y1(x) := \frac{B_1 - A_{1,1}\cdot x}{A_{1,2}} \qquad y2(x) := \frac{B_2 - A_{2,1}\cdot x}{A_{2,2}}$$



3. Решение системы уравнений методом Крамера

Определитель матрицы А:

$\Delta := |A| \qquad \Delta = -2$

Замена столбцов определителя матрицы А столбцом свободных членов В:

$i := 1 .. N$

Первый корень

$A1 := A \qquad A1^{\langle 1 \rangle} := B$

$\Delta 1 := |A1| \qquad \Delta 1 = -4$

$X_1 := \dfrac{\Delta 1}{\Delta} \qquad X_1 = 2$

Второй корень

$A2 := A \qquad A2^{\langle 2 \rangle} := B$

$\Delta 2 := |A2| \qquad \Delta 2 = -2$

$X_2 := \dfrac{\Delta 2}{\Delta} \qquad X_2 = 1$

Решение: Проверка:

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Число обусловленности матрицы коэффициентов А:

$\nu := \mathrm{condi}(A) \qquad \nu = 2$

Если определитель матрицы А не равен нулю, решение может быть получено при помощи встроенной функции lsolve(A,B).

Решение:

$Xl := \mathrm{lsolve}(A, B)$

Результат: Проверка:

$Xl = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot Xl = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: **Познакомиться с принципами составления программ в MathCAD и основными операторами**

Программа MathCAD представляет собой частный случай выражения. Точно так же, как переменную или функцию можно определить через выражение, их можно определить и с помощью программы. Главным различием между выражением и программой является способ задания вычислений. При использовании выражения алгоритм получения результата должен быть описан одним оператором. В программе может быть использовано столько операторов, сколько нужно.

В MathCAD имеются средства программирования базовых управляющих структур: следование, ветвление и цикл. Соответствующий инструмент доступен на панели Programming (программирование).

Базовые управляющие структуры в MathCAD введем в контексте решения задачи о корнях квадратного уранения.

1. Простая программа с линейным алгоритмом на основе структуры "следование".

Исходные данные-коэффициенты квадратного трехчлена:
$a\,x^2 + b\,x + c = 0$
Результат-вектор *r(2)*, содержащий корни уравнения.

Последовательность операторов, образующих блок, задается вертикальной управляющей линией (инструмент **Add Line** на панели программирования).
Основной оператор -оператор присваивания в виде стрелки, направленной влево.

```
| <переменная1>  ←  <выражение1>
| <переменная2>  ←  <выражение2>
|       ...               ...
| <переменнаяN>  ←  <выражениеN>
```

ORIGIN:= 1

Программа:

$$qvur(a,b,c) := \left| \begin{array}{l} discr \leftarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ num_1 \leftarrow -b + \sqrt{discr} \\ num_2 \leftarrow -b - \sqrt{discr} \\ denom \leftarrow 2 \cdot a \\ r_1 \leftarrow \dfrac{num_1}{denom} \\ r_2 \leftarrow \dfrac{num_2}{denom} \\ r \end{array} \right.$$

Возврат результата.

Примеры использования программы:

$$qvur(1,-2,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$qvur(1,-2,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Простая программа с разветвляющимся алгоритмом на основе структуры "ветвление"

Предыдущая задача дополнена проверкой условия корректности вычисления дискрименанта.
Для программирования структуры "ветвление" используется условный оператор **if**. Его полный формат содержит две ветви. В случае, когда <условие> имеет значение "истина", выполняется выражение "да".
В противном случае выполняется выражение "нет" ветви **otherwise**.
В демонстрационном примере в ветви otherwise осуществляется вывод сообщения об ошибке.

| <выражение «да»> if <условие>
| <выражение «нет»> otherwise

Программа:

$$qvur(a,b,c) := \left| \begin{array}{l} discr \leftarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ \text{if } discr \ge 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} num_1 \leftarrow -b + \sqrt{discr} \\ num_2 \leftarrow -b - \sqrt{discr} \\ denom \leftarrow 2 \cdot a \\ r_1 \leftarrow \dfrac{num_1}{denom} \\ r_2 \leftarrow \dfrac{num_2}{denom} \\ r \end{array} \right. \\ (error(\text{"discr < 0"})) \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

Проверка условия.

Возврат результата.

Вывод сообщения об ошибке.

Примеры использования программы:

$$qvur(1,-2,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$qvur(1,-2,4) = ▮$ Дискрименант меньше нуля.

3. Простая программа с циклическим алгоритмом на основе структуры "цикл с параметром"

Предыдущая задача дополнена условиями формирования таблицы-матрицы *z*. Ее первый столбец содержит значения аргумента, второй -значения функции исследуемого квадратичного полинома $y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.
Для программирования структуры "цикл" В MathCAD определены оператор цикла с предусловием **while** и оператор цикла с параметром **for**.
В демонстрационном примере используется оператор for для формирования вектора значений аргумента *x* из заданного диапазона и вектора значений функции *y*.

$$
\left|\begin{array}{l} \textbf{for} \quad i \in 1..n \\ \quad \langle\text{операторы}\rangle \end{array}\right.
$$

Программа:

$$
qvur(a,b,c) := \left|\begin{array}{l}
discr \leftarrow b^2 - 4\cdot a\cdot c \\
\text{if } \; discr \ge 0 \\
\quad \left|\begin{array}{l}
num_1 \leftarrow -b + \sqrt{discr} \\
num_2 \leftarrow -b - \sqrt{discr} \\
denom \leftarrow 2\cdot a \\
r_1 \leftarrow \dfrac{num_1}{denom} \\
r_2 \leftarrow \dfrac{num_2}{denom} \\
\text{for } \; i \in 1..13 \\
\quad \left|\begin{array}{l}
x_i \leftarrow -3 + 0.5\cdot(i-1) \\
y_i \leftarrow \left(x_i - r_1\right)\cdot\left(x_i - r_2\right)
\end{array}\right. \\
z^{\langle 1\rangle} \leftarrow x \\
z^{\langle 2\rangle} \leftarrow y \\
z
\end{array}\right. \\
(\text{error}(\text{"discr < 0"})) \quad \text{otherwise}
\end{array}\right.
$$

Формирование столбцов результирующей матрицы.

Возврат результата.

Примеры использования программы:

$$
qvur(1,-2,1)^T = \begin{pmatrix} -3 & -2.5 & -2 & -1.5 & -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 3 \\ 16 & 12.25 & 9 & 6.25 & 4 & 2.25 & 1 & 0.25 & 0 & 0.25 & 1 & 2.25 & 4 \end{pmatrix}
$$

$qvur(1,-2,4)^T = \blacksquare$ Дискрименант меньше нуля.

4. В качестве содержательного примера с элементами программирования рассмотрим задачу о решении системы линейных уравнений методом Крамера

Речь идет о решении системы уравнений вида:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_{11}\,X_1 + A_{12}\,X_2 + \ldots + A_{1n}\,X_n = B_1}\\
\mathbf{A_{21}\,X_1 + A_{22}\,X_2 + \ldots + A_{2n}\,X_n = B_2}\\
\mathbf{A_{31}\,X_1 + A_{32}\,X_2 + \ldots + A_{3n}\,X_n = B_3}\\
\ldots \qquad\qquad \ldots\\
\mathbf{A_{n1}\,X_1 + A_{n2}\,X_2 + \ldots + A_{nn}\,X_n = B_n}
\end{aligned}$$

или в матричной форме $A\ X = B$.
Здесь A-квадратная матрица (размера N x N) коэффициентов,
B-вектор-столбец (размера N) свободных членов, X -вектор
N неизвестных

4.1. Исходные данные

ORIGIN:= 1

Здесь следует сформировать исходные данные:
A-матрицу коэффициентов и
B-вектор свободных членов.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$N := \mathrm{rank}(A)$ $\qquad N = 4$ $\qquad$ Ранг матрицы.

4.2. Решение системы уравнений методом Крамера

Определитель матрицы А:

$$\Delta := |A| \qquad \Delta = 6$$

Для нахождения решения-вектора X, используется выражение в виде программы на MathCAD

Система несовместна или имеет множетво решений, если определитель матрицы А равен нулю.
Невозможность решения индецируется выводом сообщения об ошибке.

$$X := \left| \begin{array}{l} \text{if } \Delta \neq 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} AN_i \leftarrow A \\ \left(AN_i\right)^{\langle i \rangle} \leftarrow B \\ \Delta N_i \leftarrow |AN_i| \\ X_i \leftarrow \dfrac{\Delta N_i}{\Delta} \end{array} \right. \\ X \end{array} \right. \\ (\text{error}(\text{"zero determinant"})) \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

Создается i-копия матрицы А.

Производится замена i-столбца матрицы А вектором-столбцом свободных членов В.

Вычисляется i-определитель.

Вычисляется i-компонент вектора-решения X.

Возврат результата X.

Вывод сообщения об ошибке.

4.3. Проверка результата решения системы уравнений методом Крамера

Решение:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстраций «Операции с векторами и матрицами», «Решение системы линейных алгебраических уравнений» и «Элементы программирования» Предлагается воспроизвести «Решение системы линейных алгебраических уравнений» для исходных данных, соответствующих варианту индивидуального задания. Для выполнения задания предлагается:

1) взять в качестве исходных данные соответствующего варианта;
2) воспроизвести решение задачи;
3) идентифицировать задачу, отнести ее к одной из возможных ситуаций:
   - система совместна, хорошо обусловлена, имеет единственное решение;
   - система совместна, плохо обусловлена, имеет единственное решение;
   - система совместна, имеет множество решений;
   - система несовместна, не имеет решения;
4) в случае, когда система имеет единственное решение исследовать влияние малых изменений исходных данных на точность результатов;
5) для выбранного варианта воспроизвести решение системы с элементами программирования на основе демонстрации «Элементы программирования».

Таблица 5

Варианты заданий для самостоятельной работы по решению системы линейных алгебраических уравнений

№	Система уравнений	№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x_1 - 0{,}5x_2 = 3 \\ 4x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 7x_1 - x_2 = 3 \\ 14x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -3 \\ 4x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x_1 - 1{,}5x_2 = 3 \\ -4x_1 + 3x_2 = -6 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11 \\ 10x_1 + 101x_2 = 111 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 1{,}03x_1 + 0{,}991x_2 = 2{,}5 \\ 0{,}991x_1 + 0{,}943x_2 = 2{,}4 \end{cases}$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Цель работы: **Найти собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы и привести её к диагональному виду. Выполнить проверку полученных результатов.**

Операции с векторами и матрицами предполагают их предварительное формирование. Формирование векторов и матриц выполняется при помощи шаблона. Вывод на экран шаблона выполняется по команде **Insert|Matrix**, при помощи комбинации клавиш Ctrl-M или экранной кнопки на панели **Matrix**.

При формировании структуры вектора или матрицы необходимо указать число строк (Rows) и столбцов (Columns). Вектор формируется как матрица с одним столбцом.

1. Исходные данные

ORIGIN:= 1 n := 4

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 3 & 4 \\ 1.5 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1.5 \\ 4 & 2 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Поиск собственных значений матрицы А

Решение характеристического уравнения:

$$R(\lambda) := \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1.5 & 3 & 4 \\ 1.5 & 1-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda & 1.5 \\ 4 & 2 & 1.5 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|R(\lambda)| \rightarrow -.4375 - 19.00\cdot\lambda - 31.50\cdot\lambda^2 - 4\cdot\lambda^3 + \lambda^4$$

$$Q(\lambda) := |R(\lambda)|$$

$$q := Q(\lambda)\ \text{coeffs}, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} -.4375 \\ -19.00 \\ -31.50 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} -0.438 \\ -19 \\ -31.5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(q) = \begin{pmatrix} -3.485 \\ -0.642 \\ -0.024 \\ 8.151 \end{pmatrix}$$

Использование встроенной функции ***eigenvals(A)***:

$\lambda := \mathrm{eigenvals}(A)$ Вывод результата $\lambda = \begin{pmatrix} -0.024 \\ -0.642 \\ -3.485 \\ 8.151 \end{pmatrix}$

Проверка:

$|A| = -0.4375$ $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = -0.4375$ $\mathrm{tr}(A) = 4$ $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 4$

Произведение собственных значений должно быть равно определителю матрицы, а сумма-ее следу

Проверка характеристического уравнения матрицы А для каждого собственного значения.

Построить единичную матрицу Е того же ранга, что и матрица **А**.

$E := \mathrm{identity}(n)$ Вывод результата $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Найти определитель δ_i матрицы **А - λЕ** для каждого собственного значения λ_i:

$i := 1 .. n$

$\delta_i := |A - \lambda_i \cdot E|$ $\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Определитель для каждого собственного значения должен быть равен нулю.

3. Поиск собственных векторов матрицы А

$P := \mathrm{eigenvecs}(A)$

Вывод результата $P = \begin{pmatrix} 0.384 & 0.162 & 0.701 & -0.579 \\ -0.724 & -0.529 & 0.187 & -0.401 \\ -0.362 & 0.724 & -0.355 & -0.467 \\ 0.445 & -0.411 & -0.59 & -0.534 \end{pmatrix}$

Собственные векторы матрицы А:

$$X_i := P^{\langle i \rangle}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.384 \\ -0.724 \\ -0.362 \\ 0.445 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0.162 \\ -0.529 \\ 0.724 \\ -0.411 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0.701 \\ 0.187 \\ -0.355 \\ -0.59 \end{pmatrix} \quad X_4 = \begin{pmatrix} -0.579 \\ -0.401 \\ -0.467 \\ -0.534 \end{pmatrix}$$

Проверка:

В базисе собственных векторов матрица приводится к диагональному виду:

$AD := P^{-1} \cdot A \cdot P$ AD - должна быть диагональной матрицей

$$AD = \begin{pmatrix} -0.024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.642 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.151 \end{pmatrix}$$

Элементы диагональной матрицы-собственные значения исходной матрицы:

$$AD_{i,i} = \begin{pmatrix} -0.024 \\ -0.642 \\ -3.485 \\ 8.151 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -0.024 \\ -0.642 \\ -3.485 \\ 8.151 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(AD) = \begin{pmatrix} -0.024 \\ 8.151 \\ -0.642 \\ -3.485 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матриц А и AD совпадают а собственные векторы связаны отношением

$$XD = P^{-1}\ X$$

$PD := \text{eigenvecs}(AD)$ $\quad XD_i := PD^{\langle i \rangle}$

$$XD_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad XD_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad XD_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad XD_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1}\cdot X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}\cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1}\cdot X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Скалярные произведения каждого собственного вектора с каждым

$i := 1..n \quad j := 1..n$

$$scal_{i,j} := X_i \cdot X_j \qquad scal = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстраций «Операции с векторами и матрицами» и «Собственные значения и собственные векторы матрицы». Предлагается полностью воспроизвести решение последней задачи для исходных данных, соответствующих варианту индивидуального задания.

Таблица 6

Варианты заданий для самостоятельной работы по нахождению собственных значений и собственных векторов матрицы

№	**Матрица**	**№**	**Матрица**	**№**	**Матрица**
1	$\begin{Vmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{Vmatrix}$	5	$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$	9	$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{Vmatrix}$
2	$\begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$	6	$\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{Vmatrix}$	10.	$\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$
3	$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$	7	$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$	11.	$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$
4	$\begin{Vmatrix} 13 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & -3 \\ 4 & -3 & 9 \end{Vmatrix}$	8	$\begin{Vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 12 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$	12.	$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ

Цель работы: **Освоить технологию полиномиальной регрессии в MathCAD при обработке экспериментальных данных**

1. Обрабатываемые данные вводятся с клавиатуры

Всего получено n = 10 экспериментальных точек:

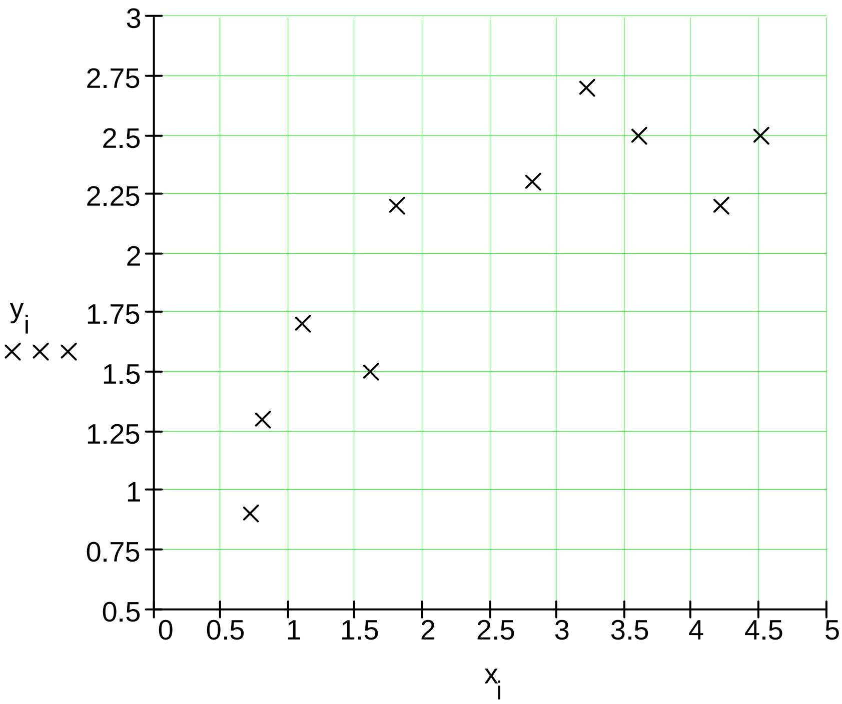
$n := 10 \qquad i := 0..n-1$

$x := (0.7\ \ 0.8\ \ 1.1\ \ 1.6\ \ 1.8\ \ 2.8\ \ 3.2\ \ 3.6\ \ 4.2\ \ 4.5)$

$y := (0.9\ \ 1.3\ \ 1.7\ \ 1.5\ \ 2.2\ \ 2.3\ \ 2.7\ \ 2.5\ \ 2.2\ \ 2.5)$

Обрабатываемые данные должны быть векторами-столбцами:

$x := x^T \qquad y := y^T$



Задание. 1. Методом наименьших квадратов найти аппроксимирующую зависимость, которая наилучшим образом описывает результаты эксперимента.
2. Испытать полиномиальную зависимость для полиномов 1, 2, 3, 4 и 5 степени.

2. Решение методом полиномиальной регрессии с помощью встроенных функций *regress(x,y,k)* и *interp(s,x,y,t)*

Полиномиальная регрессия осуществляется комбинацией встроенной функции *regress* и полиномиальной интерполяции *interp*:
regress(x,y,k)-вектор коэффициентов для построения полиномиальной регрессии данных;
interp(s,x,y,t)-результат полиномиальной регрессии;
s = regress(x,y,k);
x-вектор действительных значений независимой величины, элементы которого расположены по возрастанию;
y-вектор того же размера значений зависимой величины;
k-степень полинома (целое положительное число);
t-значения аргумента полинома регрессии.
Для построения полиномиальной регрессии сначала следует использовать функцию *regress*, затем *interp*.

$k := 1$ степень аппроксимирующего полинома

$s := \mathrm{regress}(x, y, k)$ $\quad s^T = (3 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 1.123 \;\; 0.353)$

$f1(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$ полином первой степени

$k := 2$ степень аппроксимирующего полинома

$s := \mathrm{regress}(x, y, k)$ $\quad s^T = (3 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 0.294 \;\; 1.263 \;\; -0.179)$

$f2(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$ полином второй степени

$k := 3$ степень аппроксимирующего полинома

$s := \mathrm{regress}(x, y, k)$ $\quad s^T = (3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 0.147 \;\; 1.513 \;\; -0.291 \;\; 0.014)$

$f3(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$ полином третьей степени

$k := 4$ степень аппроксимирующего полинома

$s := \mathrm{regress}(x, y, k)$ $\quad s^T = (3 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 0.427 \;\; 0.854 \;\; 0.2 \;\; -0.128 \;\; 0.014)$

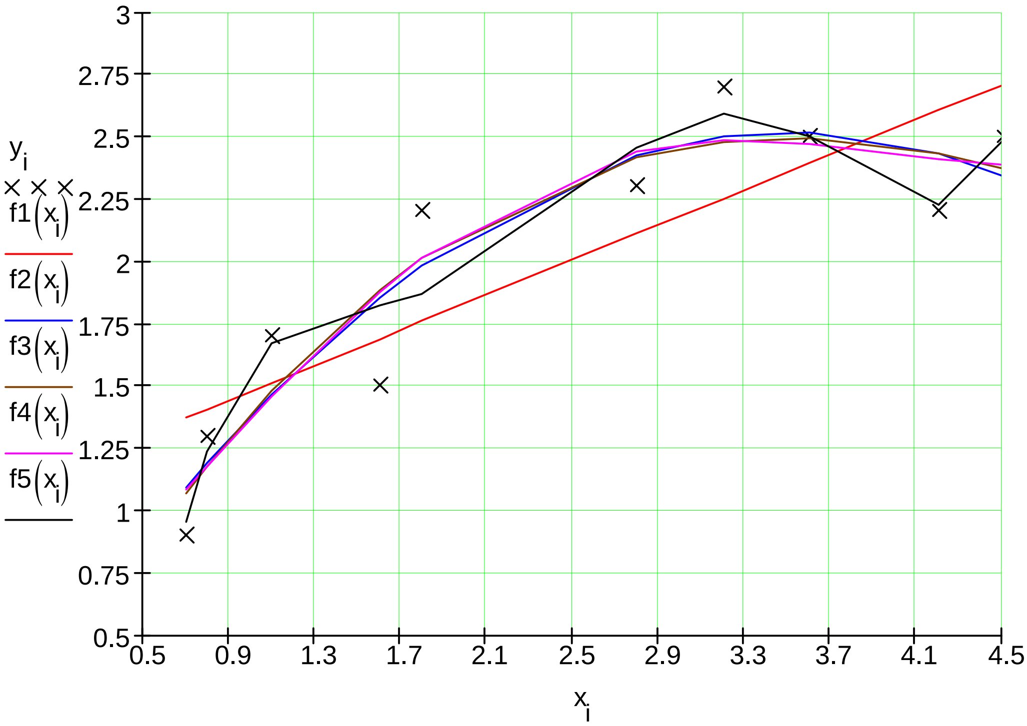
$f4(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$ полином четвертой степени

$k := 5$ степень аппроксимирующего полинома

$s := \mathrm{regress}(x, y, k)$ $\quad s^T = (3 \;\; 3 \;\; 5 \;\; -5.107 \;\; 16.487 \;\; -15.253 \;\; 6.72 \;\; -1.379 \;\; 0.106)$

$f5(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$ полином пятой степени

3. Графическое представление результатов полиномиальной аппроксимации



4. Сумма квадратов отклонений для полиномиальных моделей

$$ss1 := \sum_i \left(y_i - f1(x_i)\right)^2 \qquad ss1 = 0.954$$

$$ss2 := \sum_i \left(y_i - f2(x_i)\right)^2 \qquad ss2 = 0.41$$

$$ss3 := \sum_i \left(y_i - f3(x_i)\right)^2 \qquad ss3 = 0.407$$

$$ss4 := \sum_i \left(y_i - f4(x_i)\right)^2 \qquad ss4 = 0.404$$

$$ss5 := \sum_i \left(y_i - f5(x_i)\right)^2 \qquad ss5 = 0.26$$

Вывод. Выбор полинома 5 степени предпочтительнее **.**

НАХОЖДЕНИЕ НУЛЕЙ ПОЛИНОМА КАК ПРИМЕР ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Цель работы: Найти нули полинома

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

и исследовать зависимость результатов решения от степени *n* полинома и малых изменений его коэффициентов a_n.

1. Формирование полинома

ORIGIN:= 0 n := 5 степень полинома.

Исследуемый полином

$$\prod_{i=1}^{n} (x-i) \text{ expand}, x \rightarrow x^5 - 15 \cdot x^4 + 85 \cdot x^3 - 225 \cdot x^2 + 274 \cdot x - 120$$

Коэффициенты полинома

$$a := \prod_{i=1}^{n} (x-i) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -120 \\ 274 \\ -225 \\ 85 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	-120	274	-225	85	-15	1

2. Нахождение нулей полинома

ORIGIN:= 1

x := polyroots(a)

Нули полинома

$x^T =$

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5

3. Вычисление чисел обусловленности коэффициентов полинома

$$\nu_1 := \frac{|a_1|}{\prod_{i=2}^{n} |x_1 - i|}$$

$k := 2..n$

$$\nu_k := \frac{|a_k| \cdot (x_k)^{k-1}}{\prod_{i=1}^{k-1} |x_k - i| \cdot \prod_{i=k+1}^{n} |x_k - i|}$$

Числа обусловленности коэффициентов полинома

$\nu^T =$

	1	2	3	4	5
1	5	91.333	506.248	906.666	$5.858 \cdot 10^7$

4. Исследование нулей полинома в зависимости от малого изменения коэффициентов a $_i$

ORIGIN:= 0

$m := 5$ $a_m := a_m + 0$

Здесь можно задать малое изменение любого коэффициента полинома a $_m$.

$a^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	-120	274	-225	85	-15	1

ORIGIN:= 1

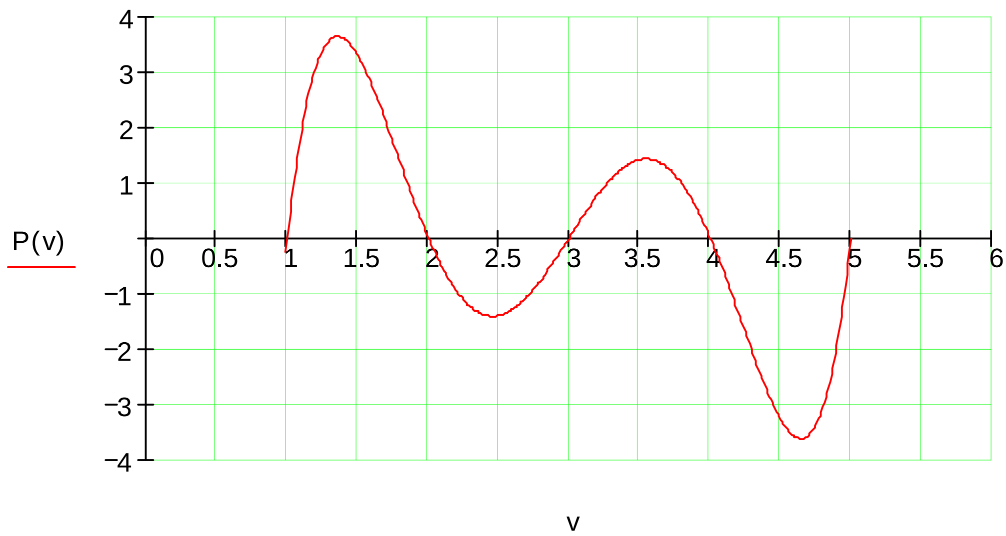
x := polyroots(a)

$x^T =$

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5

$v := (\mathrm{Re}(x_1) - 0.01), \mathrm{Re}(x_1)..[(\mathrm{Re}(x)_n) + 0.01]$

$$P(v) := \sum_{j=1}^{n+1} a_j \cdot v^{j-1}$$



Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстраций «Полиномиальная регрессия» и «Нахождение нулей полинома как пример плохо обусловленной задачи». Предлагается полностью воспроизвести решение последней задачи, взяв в качестве исходных данных полиномы, полученные в задаче «Полиномиальная регрессия». Для выполнения задания предлагается:

1) задать вручную коэффициенты исходного полинома;
2) найти нули полинома;
3) найти числа обусловленности коэффициентов полинома;
4) исследовать влияние малых изменений коэффициентов полинома при низких и высоких степенях аргумента на значения нулей и график полинома;
5) исследовать влияние малых изменений коэффициентов полиномов низких и высоких степеней.

Таблица 7

Варианты полиномов для исследования

№	Полином
1	$P(x) = 1{,}123 + 0{,}353x$
2	$P(x) = 0{,}294 + 1{,}263x - 0{,}179x^2$
3	$P(x) = 0{,}147 + 1{,}513x - 0{,}291x^2 + 0{,}014x^3$
4	$P(x) = 0{,}427 + 0{,}854x + 0{,}2x^2 - 0{,}128x^3 + 0{,}014x^4$
5	$P(x) = -5{,}107 + 16{,}487x - 15{,}253x^2 + 6{,}72x^3 - 1{,}379x^4 + 0{,}106x^5$

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Цель работы: Познакомиться с возможностями решения дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения -это уравнения, в которых неизвестными являются не переменные (т. е. числа), а функции одной или нескольких переменных. Эти уравнения (или системы) включают соотношения между искомыми функциями и их производными. Если в уравнения входят производные только по одной переменной, то они называются обыкновенными дифференциальными уравнениями (часто используется сокращение ОДУ). В противном случае говорят об уравнениях в частных производных.

Решить (иногда говорят проинтегрировать) дифференциальное уравнение-значит определить неизвестную функцию на определенном интервале изменения ее переменных при заданных начальных условиях.

Для решения в MathCAD ОДУ должно быть представлено в виде *dy/dx = f(x, y)*.

В качестве примера дифференциальное уравнение *dy/dx = - y(x)* решается приближенным методом Рунге-Кутта.

1. Решение с постоянным или переменным шагом в блоке *Given-odesolve* в виде функции y(x)

$x1 := 0$ начальная граница диапазона

$x2 := 3$ конечная граница диапазона

$n := 3$ число шагов

Given

$\frac{d}{dx}y(x) = -y(x)$ ОДУ

$y(x1) = 1$ начальное условиев

$y := \mathrm{odesolve}(x, x2, n)$ решение в виде функции y(x)

При решении ОДУ в блоке ***Given-odesolve*** имеется возможность выбора между двумя модификациями численного метода Рунге-Кутта. Для соответствующей настройки необходимо нажатием правой кнопки мыши на области функции odesoive вызвать контекстное меню и выбрать в нем один из двух пунктов: **Fixed** (с фиксированным шаг) или **Adaptive** (с переменным шагом). По умолчанию применяется первый из них.

2. Решение с фиксированным шагом при помощи функции *rkfixed* в виде матрицы z (n x 2)

2.1. Вектор начальных условий

$$v_0 := 1$$

2.2. Функция, задающая производную (правую часть уравнения при начальных условиях)

$$d(x, v) := -v_0$$

2.3. Матрица-решение

$$z := \mathrm{rkfixed}(v, x1, x2, n, d)$$

3. Решение с переменным шагом при помощи функции *Rkadapt* в виде матрицы v (n x 2) (аргументы те же самые)

$$w := \mathrm{Rkadapt}(v, x1, x2, n, d)$$

4. Графическое представление решения

Приближенное решение методом Рунге-Кутта:

$$x := x1, x1 + \frac{x2 - x1}{n} .. x2$$

$$i := 0 .. n$$

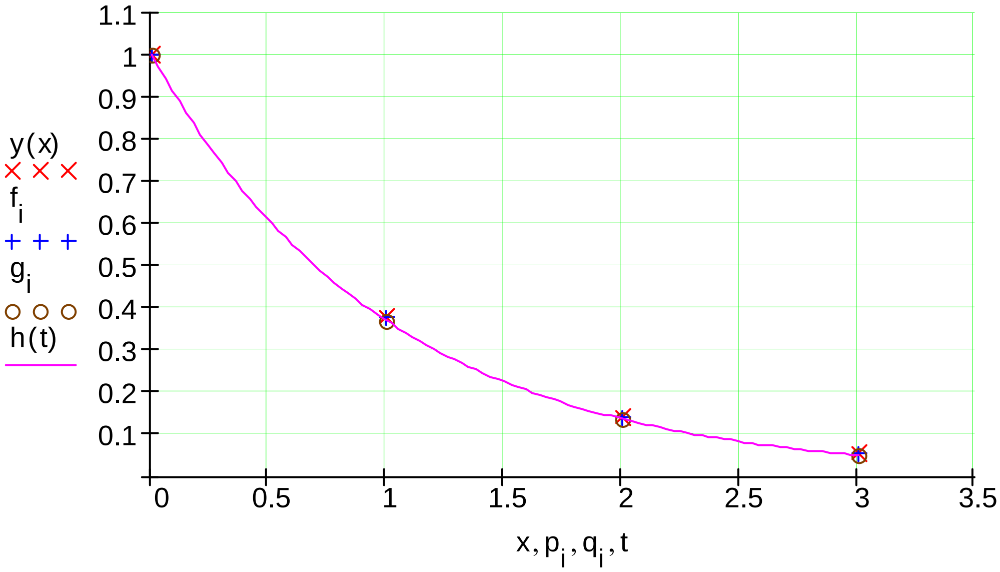
$$p := z^{\langle 0 \rangle} \qquad f := z^{\langle 1 \rangle}$$

$$q := w^{\langle 0 \rangle} \qquad g := w^{\langle 1 \rangle}$$

Точное аналитическое решение:

$$t := x1, x1 + \frac{x2 - x1}{100} .. x2$$

$$h(t) := e^{-t}$$



5. Сравнение результатов решения разными методами

	odesolve	rkfixed		Rkadapt		точное решение
x =	y(x) =	f =	0	g =	0	h(x) =
0	1	0	1	0	1	1
1	0.375	1	0.375	1	0.368	0.368
2	0.141	2	0.141	2	0.135	0.135
3	0.053	3	0.053	3	0.05	0.05

Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстрации «Решение дифференциального уравнения». Предлагается полностью воспроизвести решение задачи, взяв в качестве исходных данных дифференциальные уравнения, соответствующие варианту индивидуального задания. Для выполнения задания предлагается:

1) взять за основу демонстрацию «Решение дифференциального уравнения»;
2) решение задачи получить тремя способами:
   - при помощи встроенной функции ***odesolve*** в блоке ***Given-odesolve***;
   - при помощи встроенной функций ***rkfixed***;
   - при помощи встроенной функции ***Rkadapt***;
3) задать функцию, представляющую точное, аналитическое решение дифференциального уравнения;
4) отобразить в виде графика результаты решения дифференциального уравнения приближенными методами (в виде дискретных точек) и точное решение (сплошной линией);
5) вывести результаты также и в численном виде;
6) произвести настройку функции ***odesolve*** на решение методом с фиксированным шагом и с переменным шагом;
7) сравнить результаты решения одного и того же дифференциального уравнения разными способами с точки зрения точности результата;
8) исследовать зависимость точности результата от числа отрезков на интервале интегрирования дифференциального уравнения.

Таблица 8

Варианты заданий для самостоятельной работы по решению дифференциальных уравнений

№	Уравнение	Начальные условия	Диапазон	Аналитическое решение
1	$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$	$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$	$x = 0 - 1$	$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
2	$\frac{dy}{dx} = \cos(x) - y$	$x_0 = 0 \quad y_0 = 1{,}5$	$x = 0 - 7$	$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$
3	$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$	$x_0 = 1 \quad y_0 = 1$	$x = 1 - 5$	$y(x) = \frac{1}{x}$
4	$\frac{dy}{dx} = e^{-x}$	$x_0 = 0 \quad y_0 = 0$	$x = 0 - 5$	$y(x) = 1 - e^{-x}$
5	$\frac{dy}{dx} = x + y$	$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$	$x = 0 - 1$	$y(x) = 2e^{x} - x - 1$
6	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$	$x_0 = 0 \quad y_0 = 0$	$x = 0 - 7$	$y(x) = \sin(x)$
7	$\frac{dy}{dx} = -y$	$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$	$x = 0 - 1$	$y(x) = e^{-x}$
8	$\frac{dy}{dx} = 4x - 2y$	$x_0 = 0 \quad y_0 = 0$	$x = 0 - 1$	$y(x) = e^{-2x} + 2x - 1$
9	$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x} - y}{x}$	$x_0 = 1 \quad y_0 = 0$	$x = 1 - 5$	$y(x) = \frac{e^{x} - e}{x}$
10	$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$	$x_0 = 1 \quad y_0 = -1$	$x = 1 - 5$	$y(x) = -x$

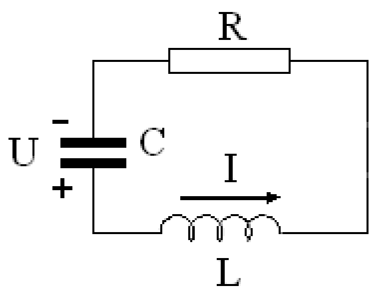
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: **Познакомиться с возможностями MathCAD для решения систем дифференциальных уравнений**

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) имеет единственное решение, если заданы начальные условия - значения искомых функций в начальной точке интервала интегрирования уравнений (задача Коши).
Решить (иногда говорят проинтегрировать) систему ОДУ - значит определить неизвестные функции на определенном интервале изменения ее переменных при заданных начальных условиях.

1. Постановка задачи

В качестве примера рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая переходный процесс (изменение во времени тока *I(t)* и напряжения *U(t)*) в замкнутом колебательном контуре, и ее решение приближенным методом Рунге-Кутта



Система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{C} I(t) + \frac{1}{L} U(t)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{1}{C} I(t)$$

Начальные условия задачи Коши:

$$I(t=0) = 0$$

$$U(t=0) = 10\ в$$

Исходные данные:

$R := 1 \cdot ohm \qquad L := 0.02 \cdot henry \qquad C := 0.2 \cdot farad$

2. Решение с фиксированным шагом при помощи функции *rkfixed* в виде матрицы *z (n* x *m+1)*

$t1 := 0 \cdot sec$ начальная граница диапазона

$t2 := 2 \cdot sec$ конечная граница диапазона

$n := 100$ число шагов

$m := 2$ число уравнений

2.1. Вектор начальных условий размерности *m* x *1* :

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2.2. Векторная функция размерности *m* x *1*, задающая производные (правые части уравнений системы) при начальных условиях -функция двух аргуменов-независимой переменной *t* и вектора начальных условий *v* :

$$d(t,v) := \begin{pmatrix} -\frac{R}{C} \cdot v_0 + \frac{1}{L} \cdot v_1 \\ -\frac{1}{C} \cdot v_0 \end{pmatrix}$$

2.3. Матрица-решение:

$$z := rkfixed(v, t1, t2, n, d)$$

$t := z^{\langle 0 \rangle}$ значения аргумента *t*

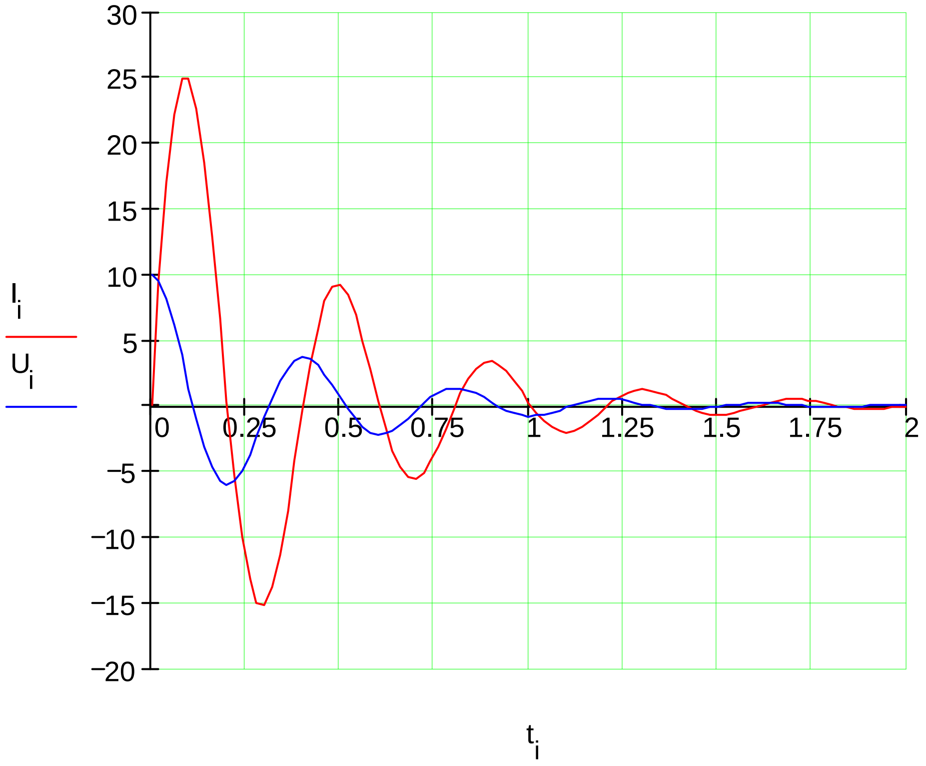
$I := z^{\langle 1 \rangle}$

значения искомых функций *I(t)* и *U(t)*

$U := z^{\langle 2 \rangle}$

$i := 0 .. n$ номера точек, всего n + 1

4. Графическое представление решения



Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстрации «Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений». Предлагается полностью воспроизвести решение задачи, взяв в качестве исходных данных дифференциальные уравнения, соответствующие варианту задания.

Вариант 1.

1. Пружинный маятник совершает колебания в среде с трением. Колебания маятника описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = v(t) \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = -\dfrac{c}{m}v(t) - \dfrac{k}{m}x(t) \end{cases}$$

здесь t – время;

x(t) – смещение маятника относительно положения равновесия;

v(t) – скорость движения маятника;

c – коэффициент трения;

k – коэффициент упругости пружины.

Начальные условия:

$x(t=0)=x_0; \quad v(t=0)=0$.

2. Решить систему дифференциальных уравнений, используя схему (алгоритм), приведенную в демонстрационном примере, и следующие исходные данные:

   $x_0 = 10, \quad m = 0{,}1, \quad c = 1, \quad t = 0-20$.

3. Построить график решения системы и исследовать зависимость результатов от исходных данных.

Вариант 2.

1. Некий химический процесс протекает в виде последовательности двух необратимых реакций:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

Кинетика процесса описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dA(t)}{dt} = -k_1 \cdot A \\ \dfrac{dB(t)}{dt} = k_1 \cdot A - k_2 \cdot B \\ \dfrac{dC(t)}{dt} = k_2 \cdot B \end{cases}$$

здесь t – время;

A(t) – концентрация исходного компонента;

B(t) – концентрация промежуточного продукта;

C(t) – концентрация конечного продукта;

k_1 – константа первой реакции;

k_2 – константа второй реакции.

Начальные условия:

$A(t=0)=A_0; \quad B(t=0)=0; \quad C(t=0)=0$.

1. Решить систему дифференциальных уравнений, используя схему (алгоритм), приведенный в демонстрационном примере и следующие исходные данные:

   $A_0 = 100, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 0{,}5, \quad t = 0-20$.

2. Построить график решения системы и исследовать зависимость результатов от исходных данных.

Вариант 3.

1. Процесс радиоактивного распада изотопов

$$A \xrightarrow{\lambda_1} B \xrightarrow{\lambda_2}$$

описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_A(t)}{dt} = -\lambda_A \cdot N_A(t) \\ \dfrac{dN_B(t)}{dt} = \lambda_A \cdot N_A(t) - \lambda_B \cdot N_B(t) \end{cases}$$

Здесь t – время;

$N_A(t)$ – число атомов материнского изотопа;

$N_B(t)$ – число атомов дочернего изотопа;

λ_A – постоянная распада материнского изотопа;

λ_B – постоянная распада дочернего изотопа.

Начальные условия:

$N_A(t=0) = N_0, \quad N_B(t=0) = 0.$

2. Решить систему дифференциальных уравнений, используя схему (алгоритм), приведенную в демонстрационном примере и следующие исходные данные:

$N_0 = 100, \quad \lambda_A = 1{,}816 \cdot 10^{-5}, \quad \lambda_B = 1{,}910 \cdot 10^{-4}, \quad t = 0 - 10T_B,$

где $T_B = \dfrac{\ln(2)}{\lambda_B}$ – период полураспада дочернего изотопа.

3. Построить график решения системы и исследовать зависимость результатов от исходных данных. Время на графике задать в периодах полураспада дочернего изотопа T_B, а число дочерних изотопов $\dfrac{B(t)}{k}$ – с коэффициентом масштабирования $k = \dfrac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}$.

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Цель работы: **Познакомиться с возможностями использования интегрального преобразования Лапласа для решения прикладных задач в MathCAD**

1. Постановка задачи

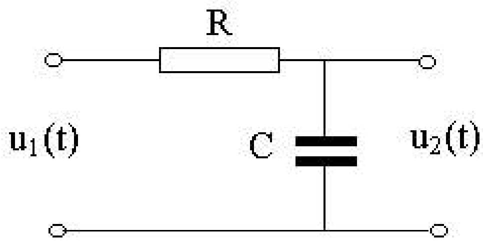
Исследовать прохождение прямоугольного импульса через RC-цепь.
Проанализировать зависимость искажения импульса от параметров цепи
Для решения задачи:
1) с помощью функции Хэвисайда задать контур прямоугольного импульса заданной амплитуды и длительности $u_1(t)$;

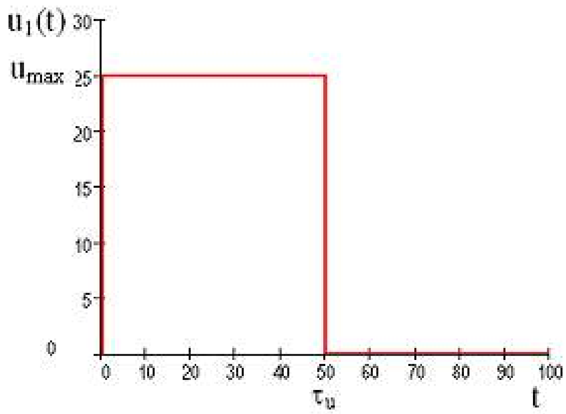
2) используя символьное преобразование Лапласа, найти образ входного сигнала $v_1(s)$;

3) используя образ входного сигнала $v_1(s)$ и образ переходной функци $k(s)$ RC-цепи, найти Лаплас-образ выходного сигнала $u_2(s)$ (перемножением двух функций);
4) используя обратное преобразование Лапласа , найти праобраз выходного сигнала $u_2(t)$;

5) построить графики входного $u_1(t)$ и выходного $u_1(t)$ сигналов.

В качестве примера RC-цепи рассмотрим интегрирующую цепь.

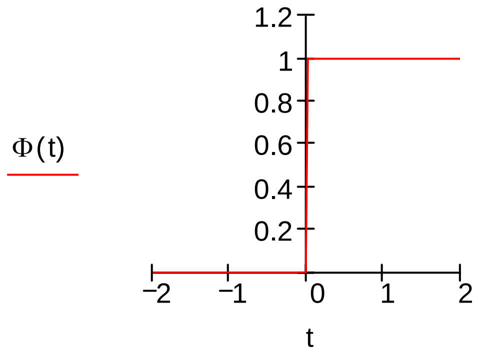




Исходные данные:

$\tau_u := 50$	длительность импульса,
$u_{max} := 25$	амплитуда импульса,
$\tau := 5$	постоянная RC- цепи.

Функция Хэвисайда:



$u_1(t) := u_{max} \cdot \left(\Phi(t) - \Phi\left(t - \tau_u\right)\right)$ * входной сигнал.

2. Прямое преобразование Лапласа для входного сигнала (построение Лаплас-образа входного сигнала)

$$v_1(s) := u_1(t) \left| \begin{array}{l} \text{laplace}, t \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \frac{25.}{s^{1.}} - 25. \cdot \frac{\exp(-50. \cdot s)}{s^{1.}}$$

Символьное преобразование ***float*** здесь и далее необходимо для сокращения числа значащих цифр в результате основной операции ***laplace***.

3. Построение Лаплас-образа выходного сигнала

$$k(s) := \frac{1}{\tau \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \; *$$

переходная функция для интегрирующей RC-цепи.

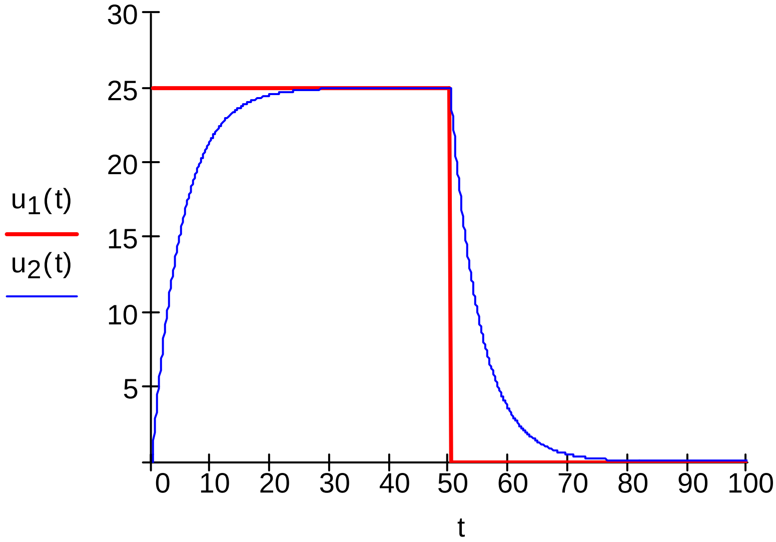
$$v_2(s) := k(s) \cdot v_1(s) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow -25. \cdot \frac{(-1. + \exp(-50. \cdot s))}{s^{1.} \cdot (5. \cdot s + 1.)^{1.}}$$

4. Восстановление выходного сигнала при помощи обратного преобразования Лапласа

$$u_2(t) := v_2(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, s \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 25. - 25. \cdot \exp(-.200 \cdot t) - 25. \cdot \Phi(t - 50.) + 25. \cdot \Phi(t - 50.) \cdot \exp(-.200 \cdot t + 10.)$$

5. Графический образ входного и выходного сигналов

$t := 0, 0.1 .. 100$ время.



Вывод. При прохождении через RC-цепь прямоугольный импульс претерпевает искажения.

Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстрации «Элементы операционного исчисления». Предлагается исследовать прохождение прямоугольного импульса амплитуды u_{max} и длительности τ_u через интегрирующую или дифференцирующую RC-цепь с постоянной τ (рис. 3 и рис. 4).

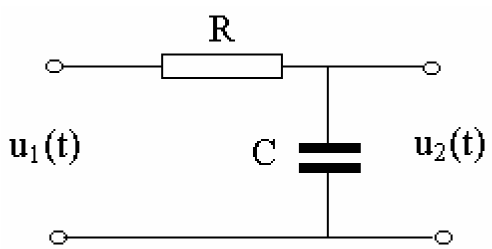


Рис. 3. Интегрирующая RC-цепь

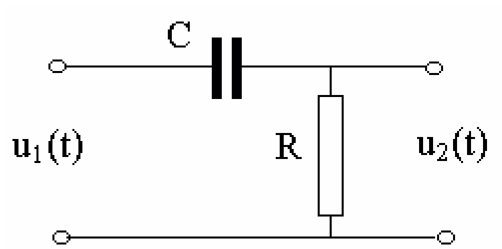


Рис. 4. Дифферецирующая RC-цепь

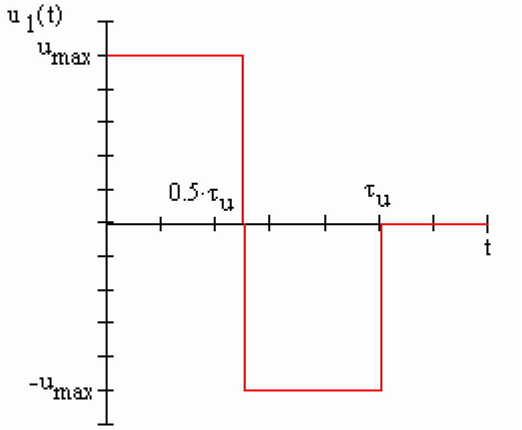
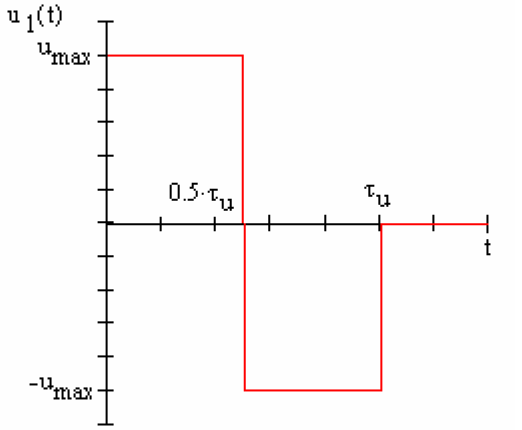
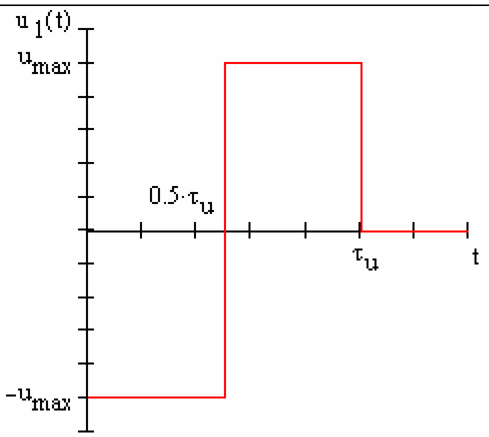
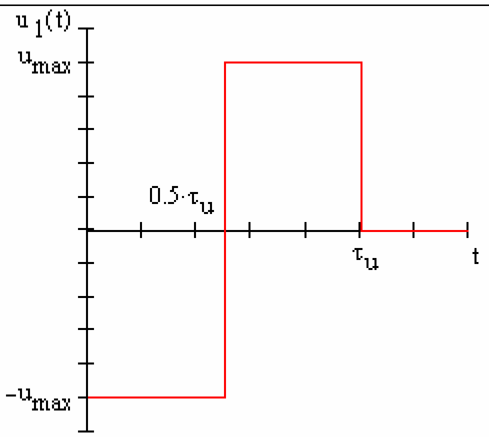
Переходные процессы в RC-цепях описываются передаточными функциями $k(s) = \dfrac{1}{\tau s + 1}$ для интегрирующей и $k(s) = \dfrac{\tau s}{\tau s + 1}$ для дифференцирующей цепей.

Для выполнения задания предлагается:

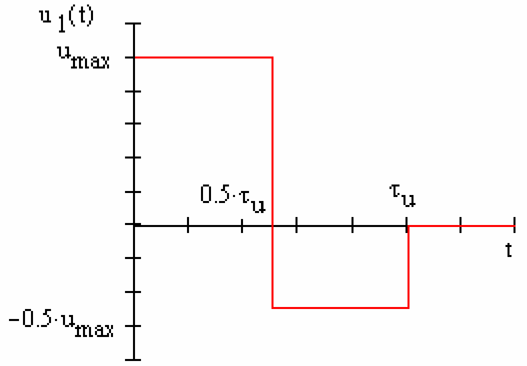
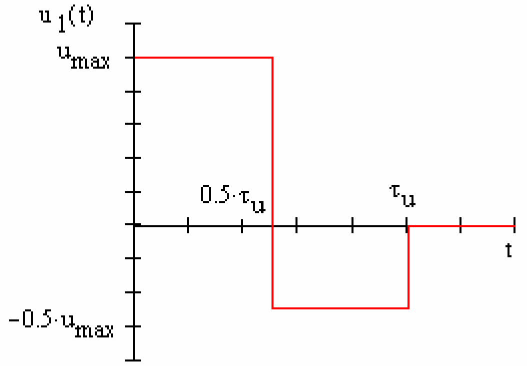
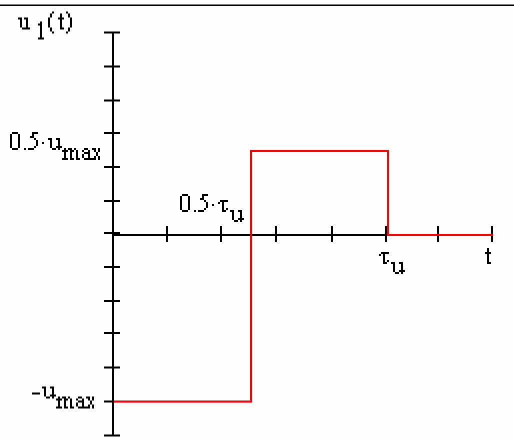
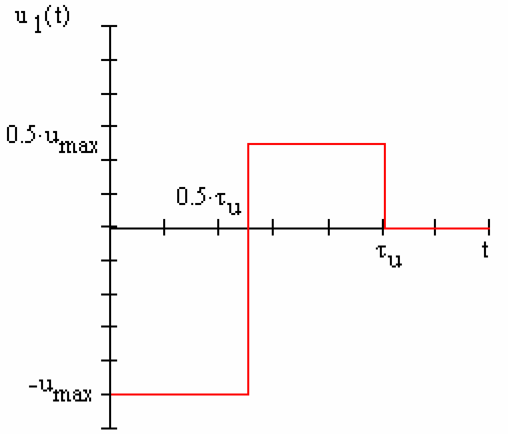
1) взять за основу демонстрацию «Элементы операционного исчисления»;
2) выбрать исходные данные соответствующего варианта;
3) используя функцию Хэвисайда $\Phi(t)$, построить функцию $u_1(t)$ для входного сигнала;
4) следуя алгоритму, описанному в демонстрационном примере, получить функцию $u_2(t)$ для выходного сигнала;
5) исследовать зависимость искажения входного импульса неизменной длительности от постоянной цепи τ:
   - для чего повторить вычислительную процедуру три раза с разными значениями τ;
   - построить на одном рисунке графики функций входного сигнала и выходных сигналов;
   - сравнить графики и сделать вывод о зависимость искажения входного импульса неизменной длительности от постоянной цепи τ;
6) исследовать зависимость искажения входных импульсов разной длительности, проходящих через одну и ту же RC-цепь с постоянной τ:
   - для чего повторить вычислительную процедуру три раза с разными значениями τ_u;
   - построить три графика функций входного и выходного сигналов;
   - сравнить графики и сделать вывод о зависимость искажения входного импульса от его длительности при неизменной постоянной цепи τ.

Таблица 9

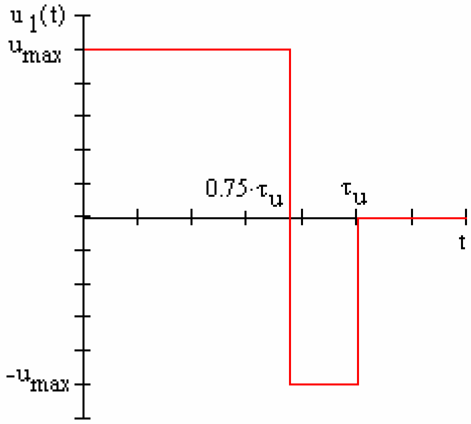
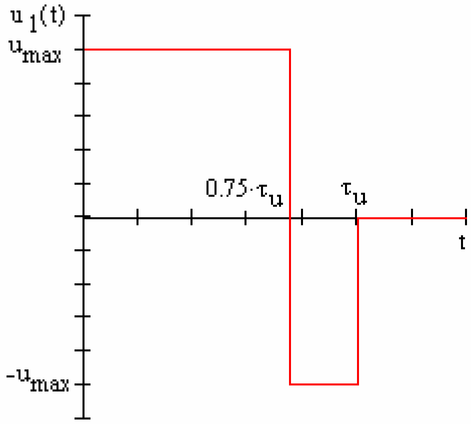
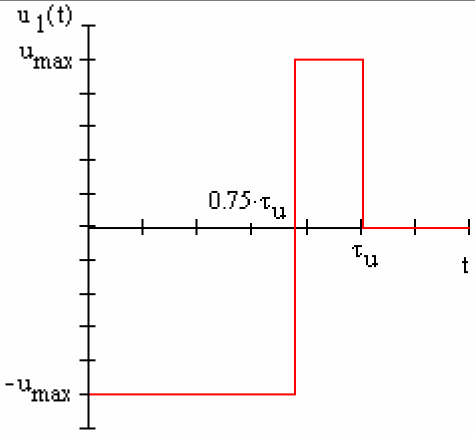
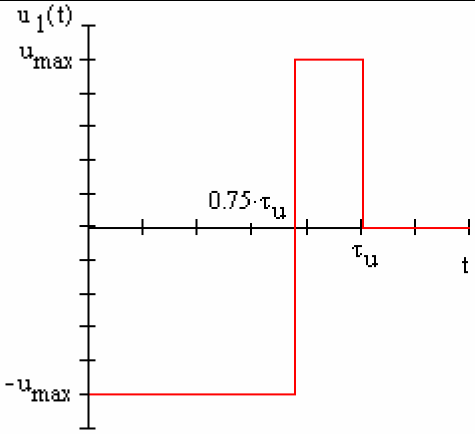
Варианты заданий для самостоятельной работы

№	Импульс	Тип цепи	u_{max}	τ_u	τ
1		интегрирующая	25	50	5
2		дифференцирующая	25	50	100
3		интегрирующая	25	20	5
4		дифференцирующая	25	20	100

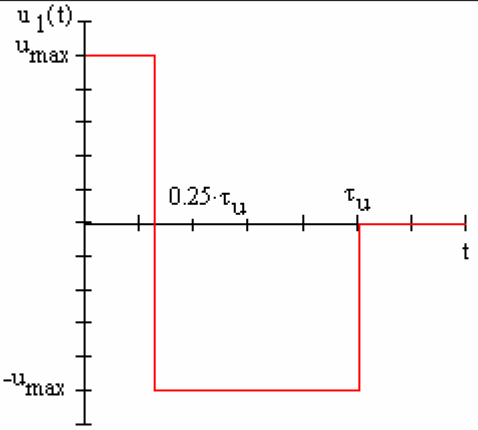
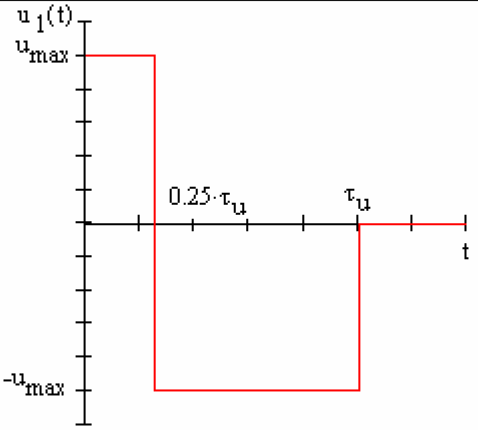
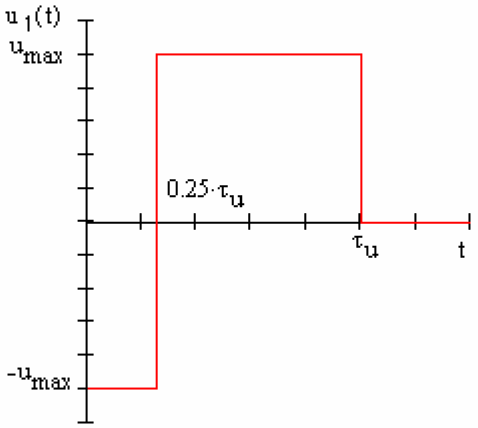
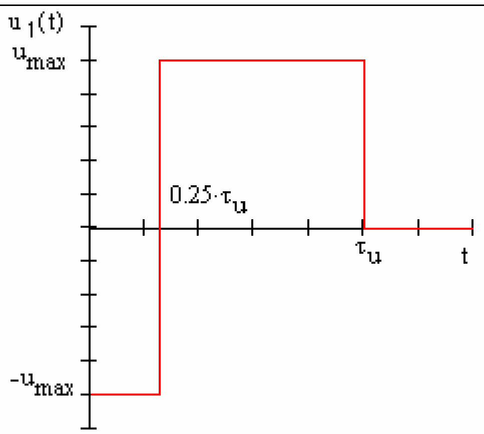
Продолжение табл.9

<table>
<tr><th>№</th><th>Импульс</th><th>Тип цепи</th><th>u_{max}</th><th>τ_u</th><th>τ</th></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>интегрирующая</td><td>15</td><td>50</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>
</td><td>дифференцирующая</td><td>15</td><td>50</td><td>200</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>интегрирующая</td><td>15</td><td>20</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>
</td><td>дифференцирующая</td><td>15</td><td>20</td><td>200</td></tr>
</table>

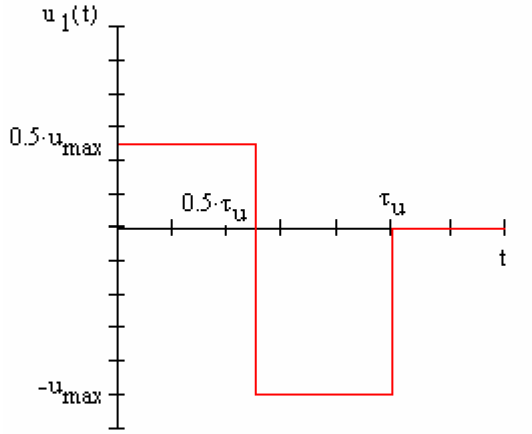
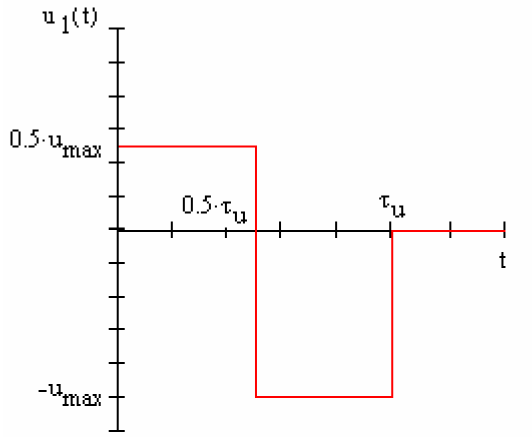
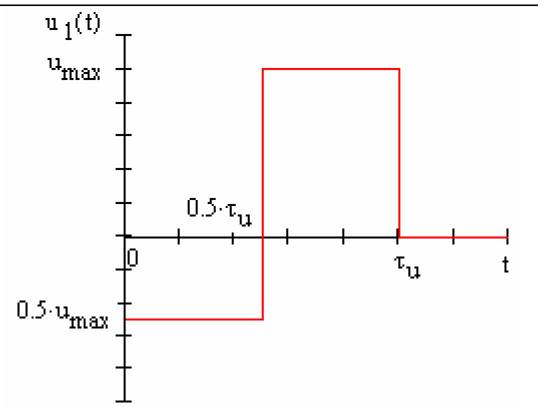
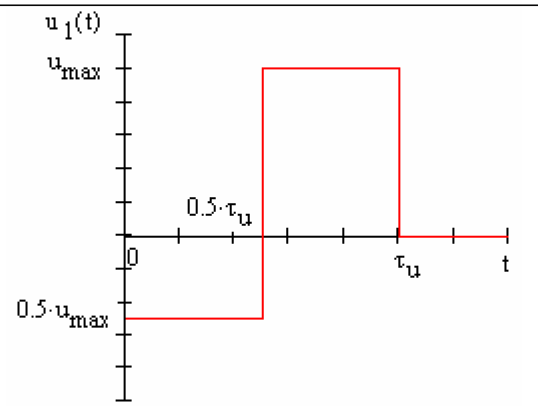
Продолжение табл.9

№	Импульс	Тип цепи	u_{max}	τ_u	τ
9		интегрирующая	20	50	10
10		дифференцирующая	20	50	200
11		интегрирующая	20	10	1
12		дифференцирующая	20	10	100

Продолжение табл.9

№	Импульс	Тип цепи	u_{max}	τ_u	τ
13		интегрирующая	25	20	2
14		дифференцирующая	25	20	200
15		интегрирующая	25	20	10
16		дифференцирующая	25	20	100

Продолжение табл.9

№	Импульс	Тип цепи	u_{max}	τ_u	τ
17		интегрирующая	15	50	10
18		дифференцирующая	15	50	100
19		интегрирующая	15	20	5
20		дифференцирующая	15	20	100

ЭЛЕМЕНТЫ ГРАФИКИ И АНИМАЦИИ

Цель работы: **Познакомиться с возможностями построения плоских графиков и графиков поверхностей пространственных тел и возможностями анимации**

1. Плоские двумерные графики

Рассмотрим наиболее распространенные типы графиков - графики в декартовых координатах и в полярных координатах.

Исходные данные для построения графиков могут быть заданы:
1) в аналитическом виде, в виде функции f(x) от аргумента с известным законом изменения;
2) в табличном виде, в виде массивов значений аргумента x_i и функции y_i;
3) в виде параметрической зависимости y(t)=f(x(t)).

1.1. Плоские двумерные графики в декартовых координатах X-Y

Исходные данные в аналитическом виде:

$$f(x) := x^3 - 4\cdot x$$

$x := -3, -2.9 .. 3$ закон изменения аргумента.

Исходные данные в виде массивов:

$$ORIGIN := 1$$

$$i := 1 .. 61$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

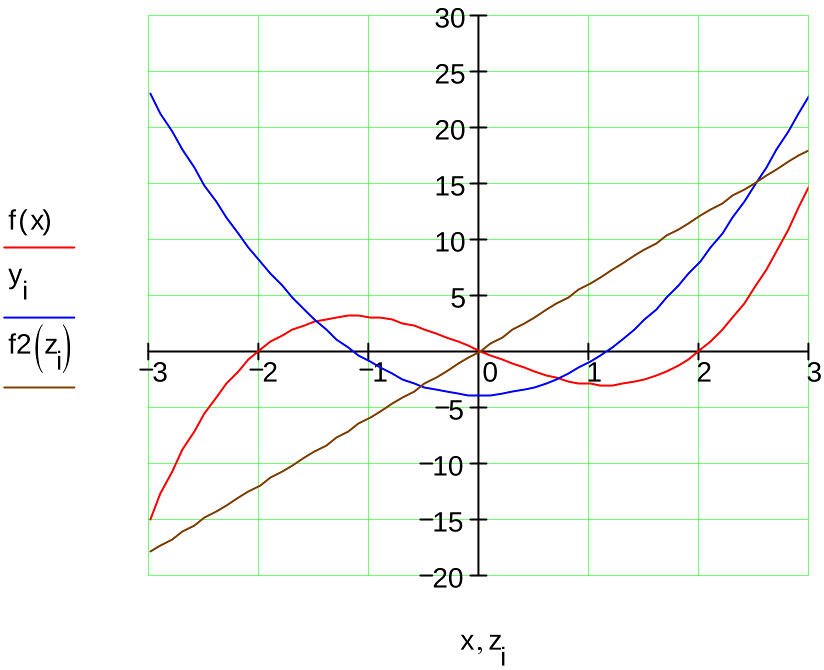
$$z_i := -3 + 0.1\cdot(i - 1)$$

$$y_i := f1(z_i)$$

Исходные данные в аналитическом виде и в виде массива:

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

Построение плоского графика выполняется по команде
Insert | Graph | X-Y Plot



В процессе заполнения шаблона графика центральные гнезда ввода, расположенные по осям, заполняются через запятую (,) именами функций, массивов и переменных. Каждой зависимости на графике соответствует своя кривая (*Trace*).
После построения графиков их можно выделить мышью и форматировать, например по команде **Format | Graph | X-Y Plot**.
В процессе форматирования чаще всего настраиваются следующие свойства графиков:
на закладке X-Y Axes:

Grid Lines	показать линии масштабной сетки
Numbered	показать оцифровку осей
Autoscale	включить режим автомасштабирования
Number of Grids	задать число ячеек масштабной сетки
Equal Scales	одинаковый масштаб по осям
Boxed	оси по сторонам прямоугольника
Crossed	оси по месту их пересечения
None	без осей;

на закладке Traces:

Legend Label	метка линии на легенде
Symbol	символ для дискретных точек
Line	стиль линии
Color	цвет линии
Type	тип линии
Weight	толщина линии.

1.2. Плоские двумерные графики в декартовых координатах X-Y, заданные параметрически

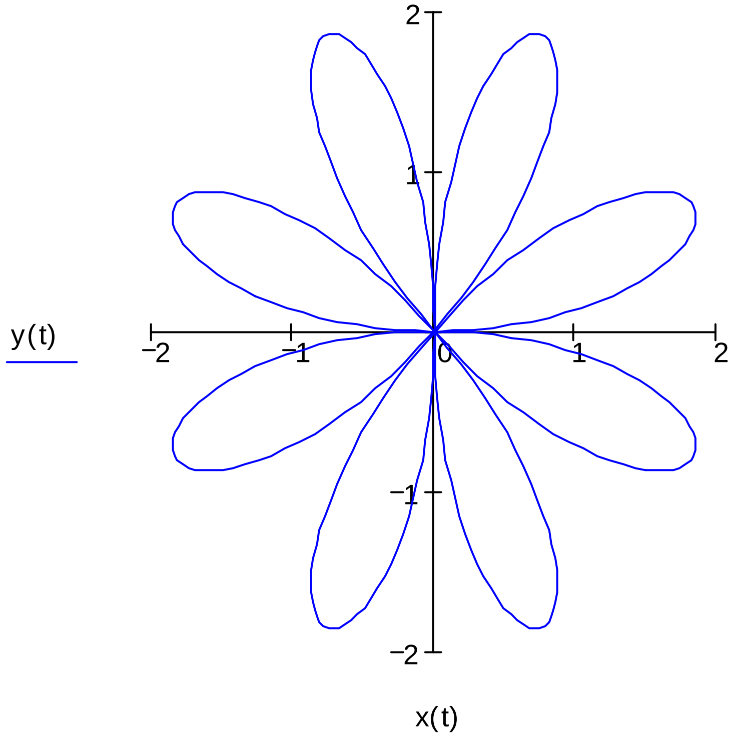
В качестве примера демонстрируются так называемые "розы":

$a := 3 \qquad b := 5$ коэффициенты, определяющие вид "розы";

$x(t) := \sin(a \cdot t) + \sin(b \cdot t)$ функции, определяющие конфигурацию плоской фигуры;

$y(t) := \cos(a \cdot t) - \cos(b \cdot t)$

$t := 0, \frac{\pi}{180} .. 2 \cdot \pi$ параметр.



1.3. Плоские двумерные графики в полярных координатах

$a := 1 \qquad w := 3$ коэффициенты, определяющие вид фигуры.

Исходные данные в аналитическом виде:

$$r1(\alpha) := a \cdot \cos(w \cdot \alpha)$$

$$\alpha := 0, \frac{\pi}{60} .. 2\pi$$

Исходные данные в виде массивов:

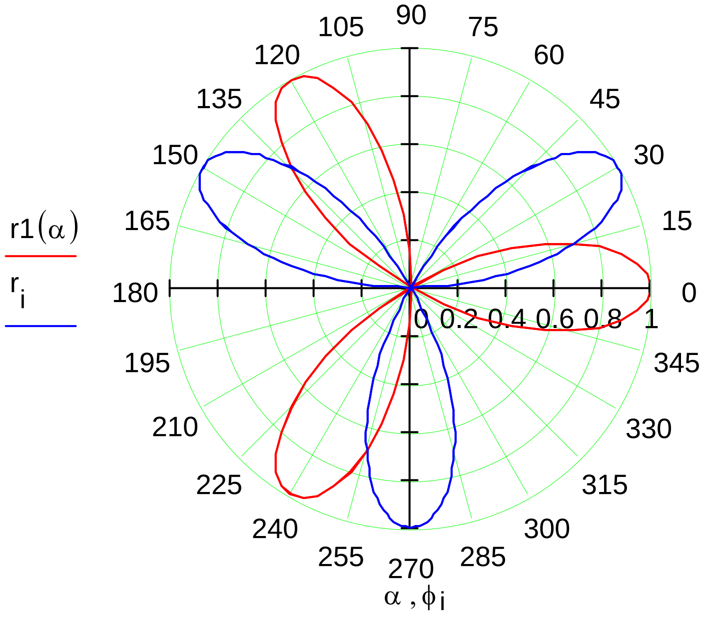
$$r2(\alpha) := a \cdot \sin(w \cdot \alpha)$$

$$ORIGIN := 0$$

$$i := 0 .. 360$$

$$\phi_i := i \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$r_i := r2(\phi_i)$$



2. Трехмерные графики поверхностей

Исходные данные для построения трехмерных графиков поверхностей могут быть заданы:
1) в виде матрицы аппликат (z-координат) точек поверхности, абсцисса (x-координата) и ордината (y-координата) которых задаются регулярным образом
2) путем вращения функции y=f(x) на плоскости относительно осей координат x или y
3) в виде поверхности, точки которой заданы параметрически

2.1. Поверхность, заданная матрицей, определенной на функции двух переменных

$f(x,y) := \sin\left(x^2 + y^2\right)$ функция, определяющая вид поверхности;

$n := 20$ число точек по осям x и y, определяющее степень подробности изображения поверхности;

$i := 0..n$ индексы элементов матрицы;

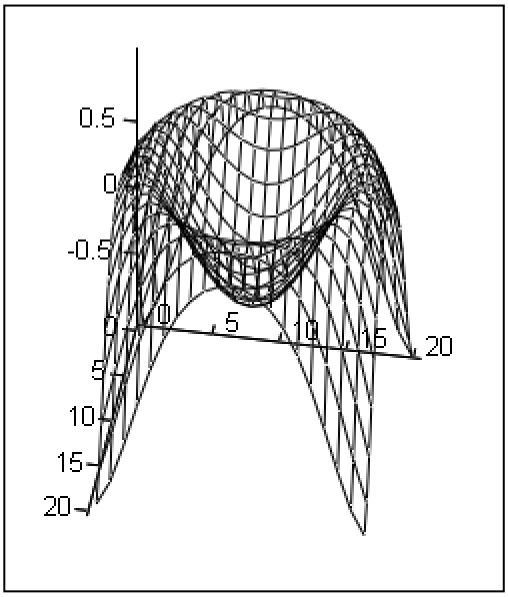
$j := 0..n$

$x_i := -1.5 + \frac{3}{n} \cdot i$ x- и y-координаты точек поверхности;

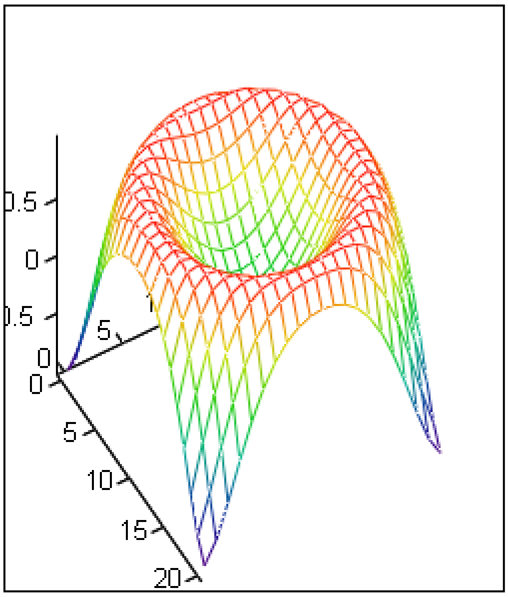
$y_j := -1.5 + \frac{3}{n} \cdot j$

$M_{i,j} := f\left(x_i, y_j\right)$ матрица аппликат точек поверхности.

В процессе заполнения шаблона графика поверхности в единственное гнездо ввода заносится имя образующей матрицы.



M



M

После построения графиков их можно выделить мышью и форматировать, например по команде **Format | Graph | 3D-Plot** .
В процессе форматирования графика поверхности предоставляются богатые возможности настройки параметров изображения.
Наиболее популярные:
на закладке General

Rotation	вращение
Tilt	наклон
Twist	поворот
Axes Style	вид осей координат
Display As	способы представления графика (поверхность, точки, контурные линии, векторные линии и другие);

на закладке Appearence

Fill Surface	заливка поверхности (поверхность становится непрозрачной)
Solid Color	один заданный цвет
Colormap	цветовая схема;

на закладке Advanced (дополнительно) доступны спецэффекты;
на закладке Lighting (подсветка) доступны выбор схемы подсветки, выбор источников и их размещение и другие спецэффекты.

2.2. Поверхность, заданная путем вращения функции одного аргумента вокруг оси y

$f(x) := x^3 - 4 \cdot x$ — функция, определяющая вид поверхности

$a := -2.5$ $\quad b := 2.5$ — границы диапазона значений аргумента поверхности

$m := 25$
$n := 25$ — число точек по осям x и y, определяющее степень подробности изображения поверхности

$i := 0 .. m$
$j := 0 .. n$ — индексы элементов изображающих матриц

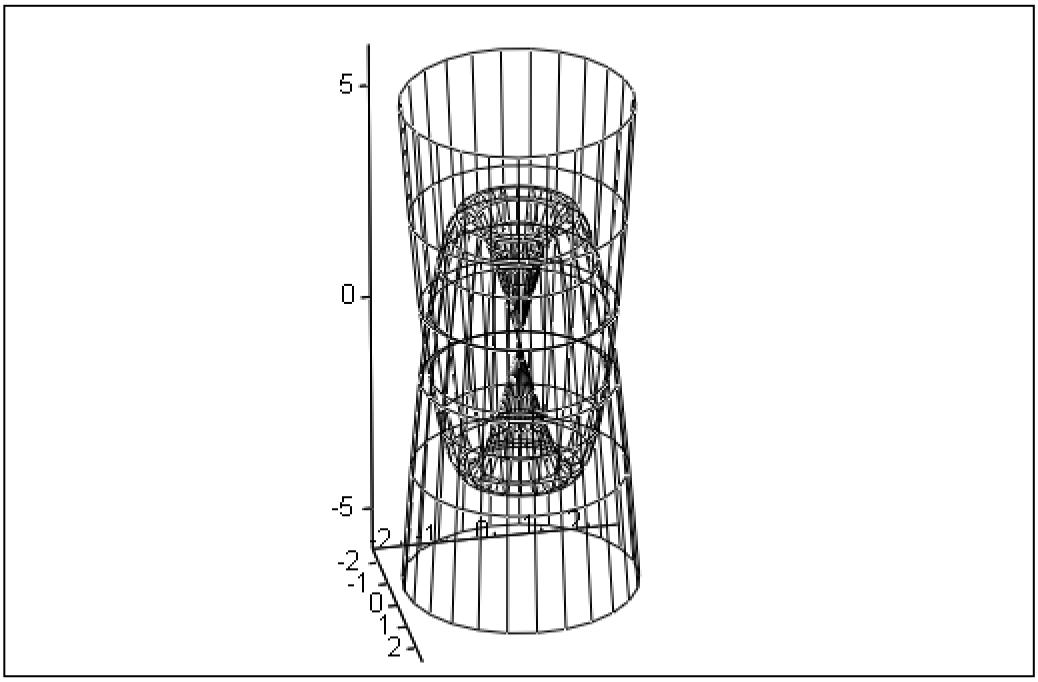
$$r_i := a + \frac{b - a}{m} \cdot i$$ координаты точек поверхности

$$\alpha_j := \frac{2 \cdot \pi}{n} \cdot j$$

$$X_{i,j} := r_i \cdot \sin(\alpha_j)$$

$$Y_{i,j} := r_i \cdot \cos(\alpha_j)$$ матрицы координат точек поверхности

$$Z_{i,j} := f(r_i)$$



(X, Y, Z)

2.3. Поверхность, заданная путем вращения функции одного аргумента вокруг оси x

$f(x) := \sqrt{x}\cdot\sin(x)$ — функция, определяющая вид поверхности

$a := 0 \qquad b := 2\cdot\pi$ — границы диапазона значений аргумента поверхности

$m := 25$

$n := 25$ — число точек по осям x и y, определяющее степень подробности изображения поверхности

$i := 0..m$

$j := 0..n$ — индексы элементов изображающих матриц

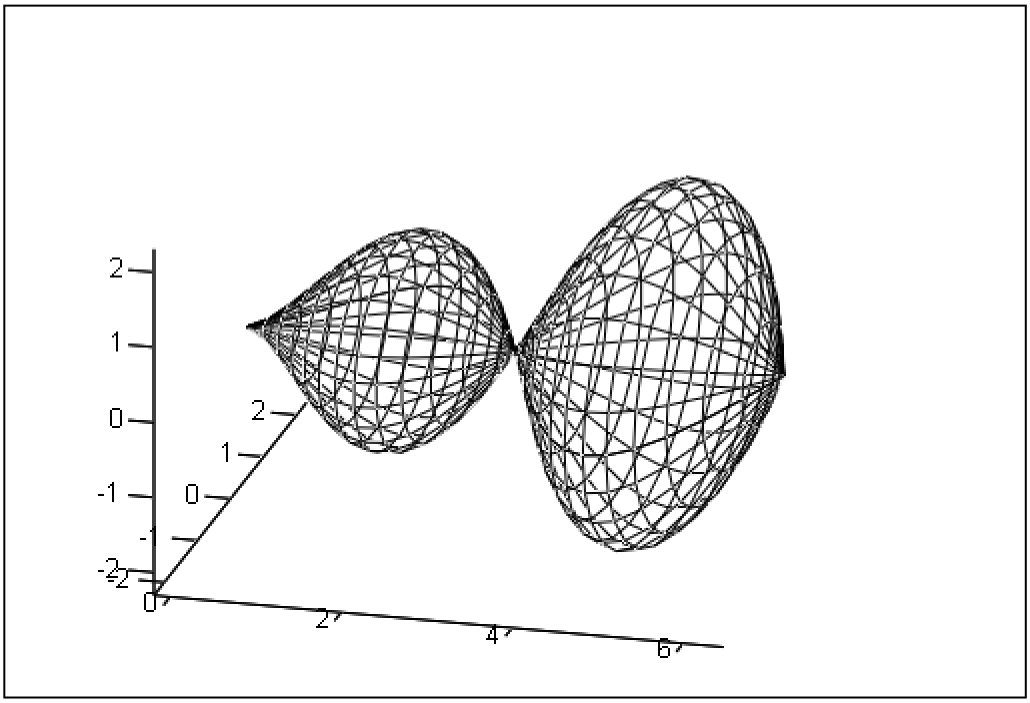
$r_i := a + \frac{b-a}{m}\cdot i$ — координаты точек поверхности

$\alpha_j := \frac{2\cdot\pi}{n}\cdot j$

$X_{i,j} := r_i$

$Y_{i,j} := f(r_i)\cdot\cos(\alpha_j)$ — матрицы координат точек поверхности

$Z_{i,j} := f(r_i)\cdot\sin(\alpha_j)$



(X , Y , Z)

2.4. Поверхность, заданная параметрически

В качестве примеров рассмотрим поверхности орбиталей электронов. По современным представлениям электронные уровни в атоме определяются четырьмя квантовыми числами. Форма электронного облака определяется двумя из этих чисел:

- число l определяет тип орбитали (значения 0, 1, 2, 3 соответствуют s-, p-, d-, f-орбиталям);
- число m определяет магнитный момент электрона и может изменяться в диапазоне от -1 до +1.

При m=0 форма электронного облака определяется на основе полиномов Лежандра первого рода:

$$P(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$$

здесь l - степень полинома. В этом случае

$$Y(\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot \left|P(\cos\phi)\right|$$

Параметрическое задание соответствующей поверхности орбиталей описывается следующими уравнениями:

$$X0(\theta,\phi) = Y(\phi)\sin\phi \cdot \cos\theta$$
$$Y0(\theta,\phi) = Y(\phi)\sin\phi \cdot \sin\theta$$
$$Z0(\theta,\phi) = Y(\phi)\cos\phi$$

Углы-параметры θ и ϕ изменяются в диапазоне от 0 до 2 π :

$l := 2$ орбитальное квантовое число определяет тип орбитали

$i := 0 .. 100$ $j := 0 .. 100$

$\theta_i := i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{100}$ $\phi_j := j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{100}$

$P(x) := \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l$ полином Лежандра

$Y(\phi) := \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{4 \cdot \pi}} \cdot \left|P(\cos(\phi))\right|$

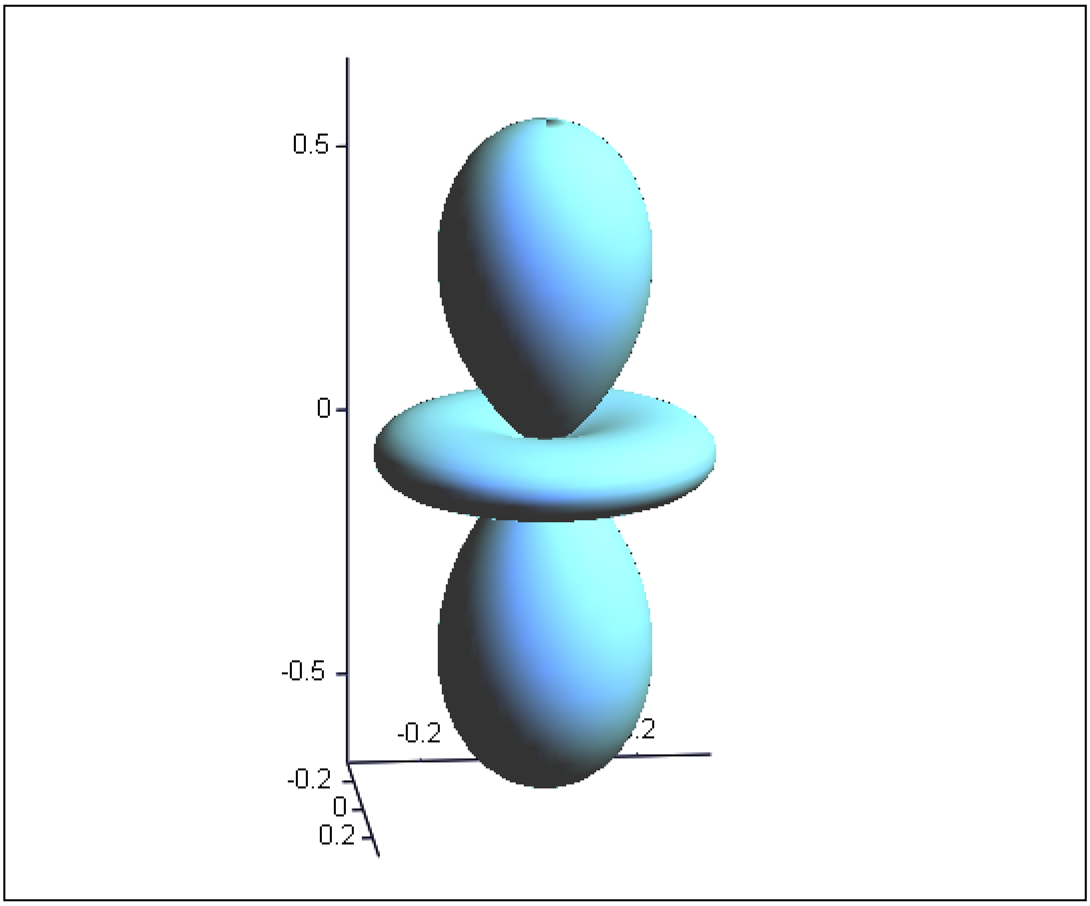
Параметрические уравнения орбиталей:

$$X0_{i,j} := Y(\phi_j)\cdot\sin(\phi_j)\cdot\cos(\theta_i)$$

$$Y0_{i,j} := Y(\phi_j)\cdot\sin(\phi_j)\cdot\sin(\theta_i)$$

$$Z0_{i,j} := Y(\phi_j)\cdot\cos(\phi_j)$$

Трехмерный график поверхности орбитали после форматирования:
General | Equal scales (равный масштаб)
Appearance | Fill Surface (заливка поверхности)
Appearence | No Lines (без линий)
Lighting |Enable Lighting (включить подсветку) и отключить все источники света кроме первого Light1
Lighting | Light Direction (подобрать координаты источника света x=1, y=1, z=1)



(X0 , Y0, Z0)

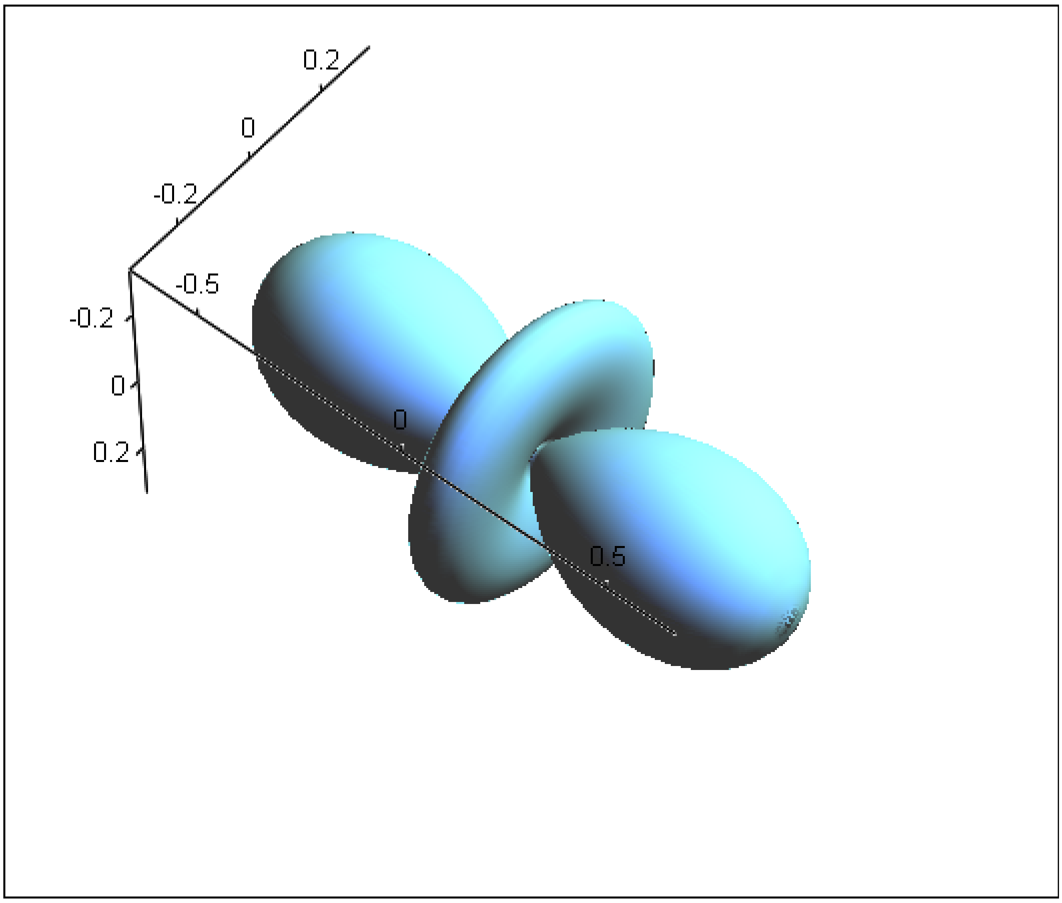
Решение той же задачи при помощи функции ***CreateMesh*** **:**

$$X0(\theta,\phi) := Y(\phi)\cdot\sin(\phi)\cdot\cos(\theta)$$

$$Y0(\theta,\phi) := Y(\phi)\cdot\sin(\phi)\cdot\sin(\theta)$$

$$Z0(\theta,\phi) := Y(\phi)\cdot\cos(\phi)$$

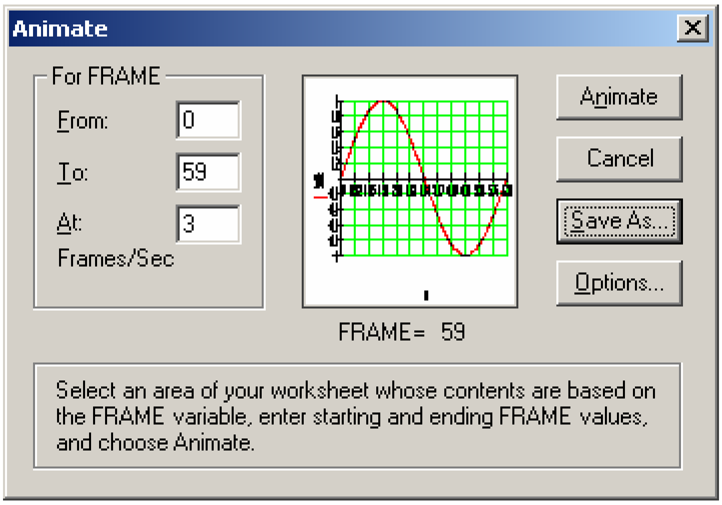
$$S := \mathrm{CreateMesh}(X0, Y0, Z0, 0, 2\cdot\pi, 0, 2\cdot\pi, 100)$$



(S)

3. Графики в движении

В MathCAD используется покадровая анимация - последовательность кадров, каждый из которых представляет собой выделенный участок рабочего документа. При этом расчеты производятся для каждого кадра отдельно, причем формулы и графики которые содержатся в кадре должны представлят собой функции от номера кадра. Управление анимацией осуществляется при помощи встроенной переменной FRAME, для которой в режиме создания анимации задаются номера начального и конечного кадров, а также скорость анимации.
Процедура создания анимации состоит из следующих шагов:
1) построить график, чьи параметры должны зависить от FRAME
2) по команде **View | Animate** в диалоговом окне настроить свойства переменной FRAME

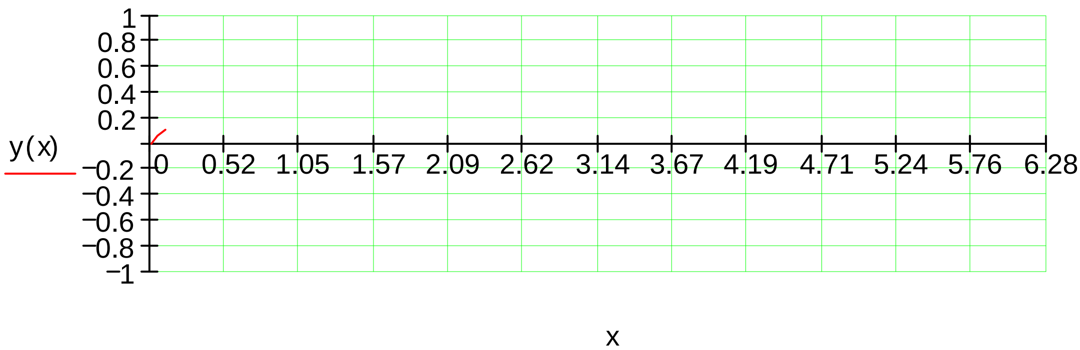


3) выделить участок рабочего документа с графиком, который должен стать объектом анамации и "запустить" режим анимации
4) оценить результат и при желании сохранить анимацию как файл в формате **avi**
5) файл анимации может быть исполнен при помощи Windows Media Player или вставлен в текст рабочего документа по команде **Insert | Object** как статический объект

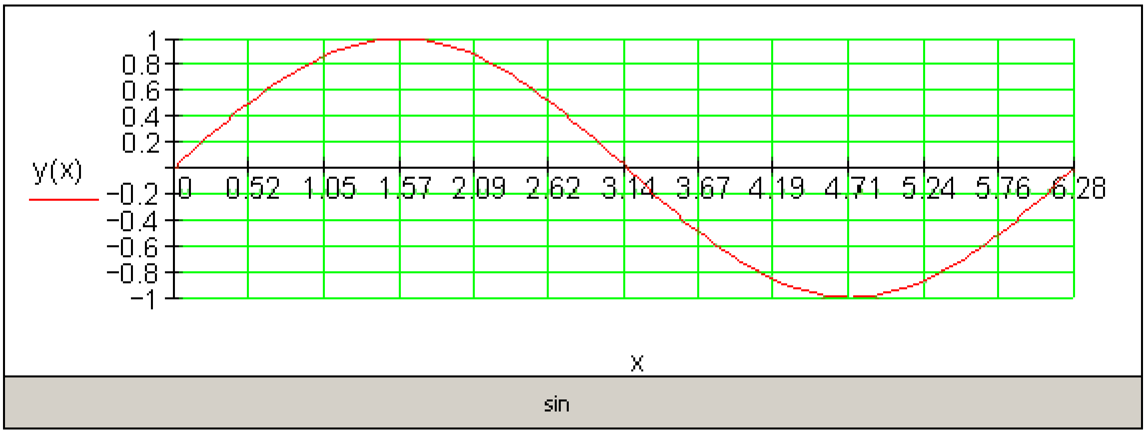
3.1 Анимация X-Y графика по точкам

$$x := 0, \frac{\pi}{60} .. \frac{FRAME + 1}{60}\cdot 2\cdot\pi$$

$$y(x) := \sin(x)$$



Файл анимации



3.2. Анимация X-Y - графика, заданного параметрически

Фигуры Лиссажу:

$a := 3 \qquad b := 4 \qquad \phi := 0$

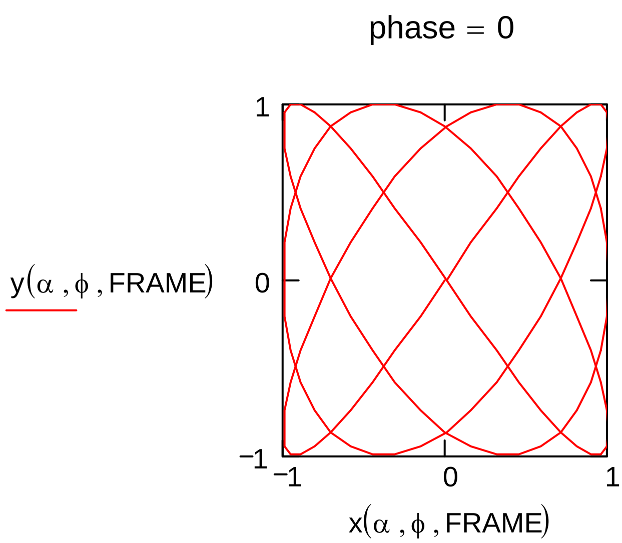
$$\alpha := 0, \frac{\pi}{60} .. 2\cdot\pi$$

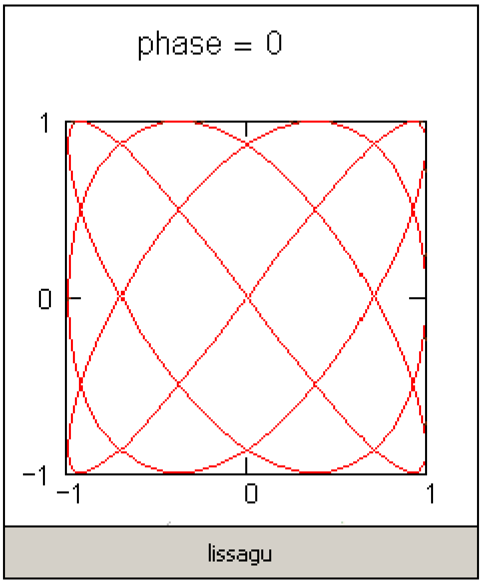
$$x(\alpha, \phi, t) := \sin(a\cdot\alpha)$$

$$y(\alpha, \phi, t) := \sin\left[\left(\phi + t\cdot\frac{\pi}{12}\right) + b\cdot\alpha\right]$$

$$phase := \phi + FRAME\cdot\frac{\pi}{12}$$

Файл анимации





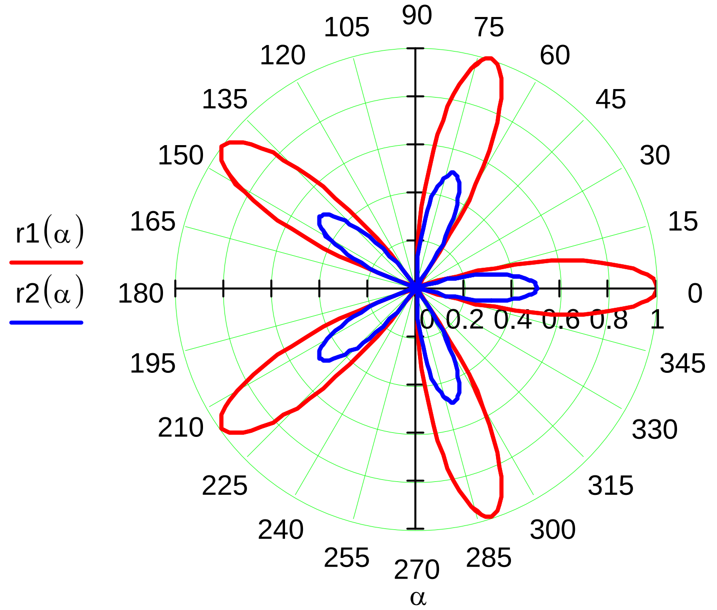
3.3. Анимация графика в полярных координатах

$$a := 1 \qquad w := 5$$

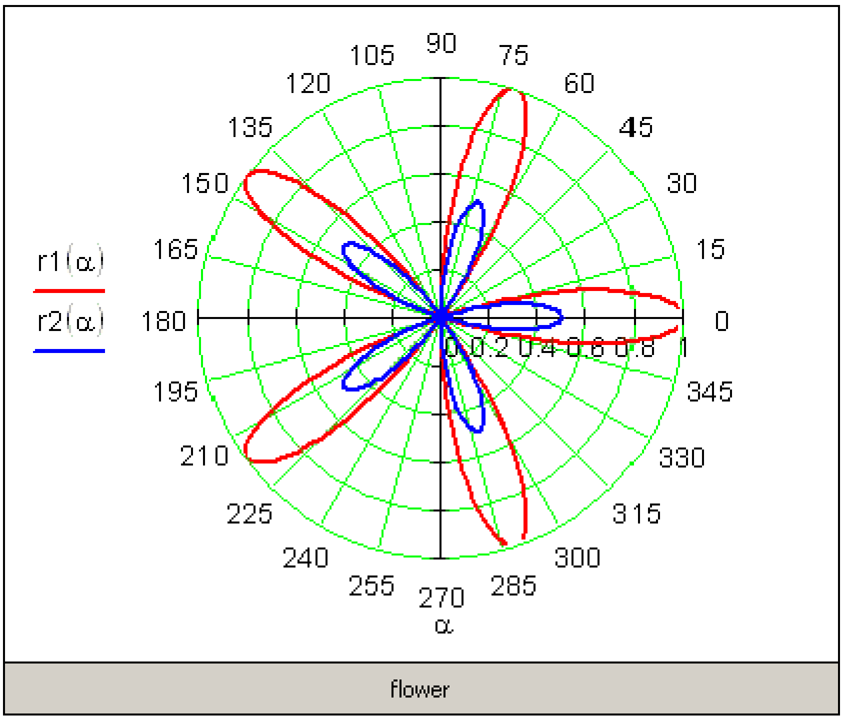
$$\alpha := 0, \frac{\pi}{180} .. 2\pi$$

$$r1(\alpha) := a \cdot \cos\left[w \cdot \left(\alpha + \frac{FRAME \cdot \pi}{12}\right)\right]$$

$$r2(\alpha) := 0.5 \cdot a \cdot \cos\left[w \cdot \left(\alpha - \frac{FRAME \cdot \pi}{12}\right)\right]$$



Файл анимации



Упражнения

Упражнения выполняются на основе демонстрации «Элементы графики и анимации». Предлагается построить графики и исследовать самостоятельно различные приемы настройки свойств графических изображений:

1. Построить 3D-график поверхности, заданной функцией:

   $$f(x, y) = 3\cos(\sqrt{x^2 + y^2})..$$

   Координаты изменять по закону:

   $$x_i = -5 + \frac{10}{n} i, \quad y_j = -5 + \frac{10}{n} j, \quad i = 0 - n, \quad j = 0 - n, \quad n = 50.$$

   Применить к 3D-графику различные настройки форматирования и проследить эффект.

2. Построить график поверхности, заданной параметрически (сфера):

   $$X_{ij} = \sin(\varphi_i)\cos(\theta_j);$$
   $$Y_{ij} = \sin(\varphi_i)\sin(\theta_j);$$
   $$Z_{ij} = \cos(\varphi_i).$$

   Координаты изменять по закону:

   $$\varphi_i = \frac{2\pi}{n} i, \quad \theta_j = \frac{2\pi}{n} j, \quad i = 0 - n, \quad j = 0 - n, \quad n = 50.$$

   Применить к 3D-графику различные настройки форматирования и проследить эффект.

3. Применить элементы анимации к графикам, построенным в других демонстрационных примерах, например «Вычисления с единицами измерения», «Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений» или в других.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Очков В.Ф. MathCAD 6.0 для студентов и инженеров /В.Ф. Очков. - М.: ТОО фирма «Компьютер Пресс», 1996. - 238 с.
2. Очков В.Ф. MathCAD 7 Pro для студентов и инженеров /В.Ф. Очков. М.: Компьютер Пресс, 1998. -384 с.
3. Учебник по MathCAD 2001: Центр юношеского научно-технического творчества. г. Северодвинск: [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.syt.edu.severodvinsk.ru/znai/megabook/cad/mathcad/index.htm.
4. Иллюстрированный самоучитель по MathCAD 12: [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://tutornet.nsu.ru/library/books/Math/MATHCAD/12/menu.html
5. Шушкевич Г.Ч. Введение в MathCAD 2000; учеб. пособие /Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. Гродно: ГрГУ, 2001. 138 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.ict.edu.ru/ft/004937/shushkevich.pdf.
6. Пекунов В.В. Основы системного использования ЭВМ. Работа с системой MathCAD, Электронный конспект лекций /В.В. Пекунов. Иваново: Ивановский государственный энергетический университет [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://elib.ispu.ru/library/lessons/pekunov/index.html.
7. Справочник MathCad [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://el1504.narod.ru/

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ………………………………………………………………….... 3
СОЗДАНИЕ И РЕДАКТИРОВАНИЕ ДОКУМЕНТА………………………. 6
СИМВОЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ……………………………………. 14
ТАБУЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ…………………………………………… 22
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ……………………………………………………………….. 24
ВЫЧИСЛЕНИЯ С ЕДИНИЦАМИ ИЗМЕРЕНИЯ………………………… 30
ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ И МАТРИЦАМИ………………………… 33
РАБОТА С ВНЕШНИМИ ФАЙЛАМИ ДАННЫХ…………………….... 40
ПРОСТАЯ СТАТИСТИКА………………………………………………… 42
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ………………………………………… 45
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.. 49
ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ…………………………….….. 51
СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ.. 58
ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ……………………………………. 62
НАХОЖДЕНИЕ НУЛЕЙ ПОЛИНОМА КАК ПРИМЕР ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ……………………………………...… 65
РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ………………… 68
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ……………………………………………………………….. 72
ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ…………………….. 77
ЭЛЕМЕНТЫ ГРАФИКИ И АНИМАЦИИ……………………………... 86
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК……………………………………101

Учебное издание

Кара-Ушанов Владимир Юрьевич

Введение в MathCAD

Редактор *О.С. Смирнова*

Компьютерная верстка *В.Ю. Кара-Ушанова*

Подписано в печать 23.10.08		Формат 60x84 1/16
Бумага писчая	Плоская печать	Усл. печ. л. 5,92
Уч.-изд. л. 5,6	Тираж 50 экз.	Заказ

Редакционно-издательский отдел УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

rio@mail.ustu.ru

Ризография НИЧ УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19