ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Изучить численные методы решения нелинейных уравнений (половинного деления, метод хорд, метод простой итерации, метод Ньютона – выбрать по номеру варианта из таблицы 3)

2. Изучить численные методы решения определенных интегралов (методы прямоугольников, трапеций, Симпсона – выбрать по номеру варианта из таблицы 3)

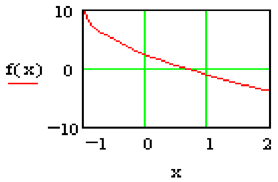
3. Найти приближенное значение корня нелинейного уравнения (задание выбрать по номеру варианта из таблицы 1):

Таблица 1

№ Вар.	$f(x)$	№ Вар.	$f(x)$
1	$3\sin(\sqrt{x})+0{,}35x-3{,}8;\ x\in[2,3]$	16	$3\sin(\sqrt{x})+0{,}35x-3{,}8;\ x\in[2,3]$
2	$x-\dfrac{1}{3+\sin(3{,}6x)};\ x\in[0,1]$	17	$x-\dfrac{1}{3+\sin(3{,}6x)};\ x\in[0,1]$
3	$\arccos x-\sqrt{1-0{,}3x^3};\ x\in[0,1]$	18	$\arccos x-\sqrt{1-0{,}3x^3};\ x\in[0,1]$
4	$\sqrt{1-0{,}4x^2}-\arcsin x;\ x\in[0,1]$	19	$\sqrt{1-0{,}4x^2}-\arcsin x;\ x\in[0,1]$
5	$3x-14+e^x-e^{-x};\ x\in[1,3]$	20	$3x-14+e^x-e^{-x};\ x\in[1,3]$
6	$0{,}25x^3+x-2;\ x\in[0,2]$	21	$0{,}25x^3+x-2;\ x\in[0,2]$
7	$a\cos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)-x;\ x\in[2,3]$	22	$\sqrt{2x^2+1{,}2-\cos x}-1;\ x\in[0,1]$
8	$3x-4\ln(x)-5;\ x\in[2,4]$	23	$3x-4\ln(x)-5;\ x\in[2,4]$
9	$e^x-e^{-x}-2;\ x\in[0,1]$	24	$e^x-e^{-x}-2;\ x\in[0,1]$
10	$\sqrt{1-x}-tgx;\ x\in[0,1]$	25	$\sqrt{1-x}-tgx;\ x\in[0,1]$
11	$\sqrt{2x^2+1{,}2-\cos x}-1;\ x\in[0,1]$	26	$a\cos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)-x;\ x\in[2,3]$
12	$\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)-2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x};\ x\in[1,2]$	27	$\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)-2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x};\ x\in[1,2]$
13	$0{,}1x^2-x\ln(x);\ x\in[1,2]$	28	$0{,}1x^2-x\ln(x);\ x\in[1,2]$
14	$1-x+\sin x-\ln(1+x);\ x\in[0,2]$	29	$1-x+\sin x-\ln(1+x);\ x\in[0,2]$
15	$e^{x-1}-x^3-x;\ x\in[0,1]$	30	$e^{x-1}-x^3-x;\ x\in[0,1]$

3.1 построить график функции $f(x)$ и приблизительно определить один из корней уравнения; решить уравнение $f(x)=0$ с точностью $e=10^{-4}$ с помощью встроенной в *Mathcad* функции *root(f(x),x)*; методом Ньютона (касательных), используя функцию *until*; определить число итераций с помощью функции *last* (см. пример (рис.1)),

1. Отделение корней $f(x) := acos(x)^2 - x$ $x := -1, -0.9 .. 2$



$x_0 := 1$ - начальное приближение, определенное по графику f(x)=0

2. Уточнение корней (методом Ньютона)

$n := 100$
$i := 1 .. n$ - предположительное число итераций $\varepsilon := 10^{-4}$ - задание точности вычислений

$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ - определение функции, вычисляющей производную от f(x)

$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)}$ - вычисление первого приближения по формуле Ньютона

$x_{i+1} := until\left(|x_i - x_{i-1}| - \varepsilon, x_i - \frac{f(x_i)}{df(x_i)}\right)$ - реализация итерационного процесса по методу Ньютона с использованием функции *until*

$j := last(x)$
$j = 4$ - определение числа итераций за которые итерационный процесс сошелся

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.66667 \\ 0.67917 \\ 0.67919 \\ 0 \end{bmatrix}$ - итерационная последовательность

$x_{j-1} = 0.6792$ **- корень уравнения f(x) = 0**

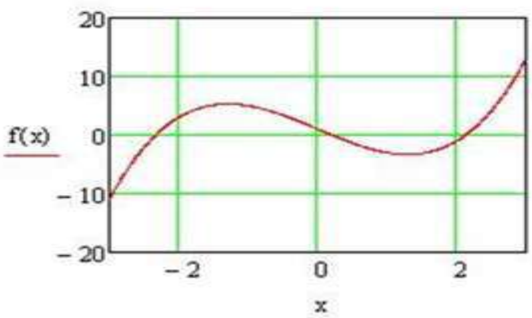
Рис.1

3.2 решить уравнение $f(x) = 0$ с использованием программирования численных методов: половинного деления, хорд, простой итерации, Ньютона (см. примеры на рис.2-5).

Метод половинного деления

$f(x) := x^3 - 5x + 1$ $a := -3$ $b := -1$

```
Dichotomy(f,a,b,ε) := | return ∞  if f(a)·f(b) > 0
                      | while |b − a| > ε
                      |   | c ← (a + b)/2
                      |   | a ← c  if f(a)·f(c) > 0
                      |   | b ← c  otherwise
                      | (a + b)/2
```



$f(a) = -11$ $f(b) = 5$ $x := Dichotomy(f, a, b, 10^{-6})$ $x = -2.33$ $f(x) = 1.861 \times 10^{-6}$

Рис.2

Метод хорд решения нелинейного уравнения в MathCAD

```
Chord(f,f2,a,b,ε) := | n ← 0
                     | if f(a)·f2(a) > 0
                     |    | formula ← 1
                     |    | x0 ← b
                     | otherwise
                     |    | formula ← 2
                     |    | x0 ← a
                     | while 1
                     |    | x1 ← a − f(a)·(x0 − a) / (f(x0) − f(a))   if formula = 1
                     |    | x1 ← x0 − f(x0)·(b − x0) / (f(b) − f(x0))   otherwise
                     |    | break if |x1 − x0| < ε
                     |    | x0 ← x1
                     |    | n ← n + 1
                     |    | break if n > 10000
                     | (x1 + x0) / 2
```

$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

$x := \mathrm{Chord}\left(f, f2, a, b, 10^{-6}\right)$

$x = -2.33$

$f(x) = 6.815 \times 10^{-6}$

Рис.3

Метод простой итерации

```
SimpleIteration(φ,x0,ε) := | n ← 0
                           | while 1
                           |    | x1 ← φ(x0)
                           |    | break if |x1 − x0| < ε
                           |    | x0 ← x1
                           |    | n ← n + 1
                           |    | break if n > 10000
                           | (x1 + x0) / 2
```

$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \qquad \frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 - 5z + 1\right) \to 6 \cdot z$

$M := \max(f1(a), f1(b), f1(0))$

$m := \min(f1(a), f1(b), f1(0))$

$c := \frac{2}{M + m} \qquad c = 0.118$

$\varphi(x) := x - c \cdot f(x) \qquad x_0 := a$

$x := \mathrm{SimpleIteration}\left(\varphi, x_0, 10^{-6}\right)$

$x = -2.33$

$f(x) = -1.272 \times 10^{-6}$

Рис.4

Метод Ньютона для решения нелинейного уравнения в MathCAD

```
Newton(f, x0, ε) := | n ← 0
                    | while 1
                    |   | x1 ← x0 − f(x0)/f1(x0)
                    |   | break if |x1 − x0| < ε
                    |   | x0 ← x1
                    |   | n ← n + 1
                    |   | break if n > 10000
                    | (x1 + x0)/2
```

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

$$x := \text{Newton}\left(f, a, 10^{-6}\right)$$

$$x = -2.33$$

$$f(x) = -7.314 \times 10^{-8}$$

Рис.5

4. Найти приближенное решение определенного интеграла (выбрать по номеру варианта из таблицы 2) с использованием программирования численных методов: прямоугольников, трапеций, Симпсона, а именно: определить "точное" значение искомого интеграла с помощью встроенного в MathCAD численного метода и приближенное решение методами прямоугольников, трапеций и Симпсона, оценить погрешность всех методов, выполнить проверку результатов расчетов с помощью операторов суммы и арифметики MathCAD (см. пример ниже).

Таблица 2

№ вар.	*f(x)*	$[a,b]$
1	$(1/tg2x + 1)$	$[0.4, 0.8]$
2	$cos3x/2(1 - cos3x)$	$[0.8, 1.6]$
3	$1/\left(x\sqrt{x^3 + 4}\right)$	$[0.18, 0.98]$
4	$sinx/(1 + sinx)$	$[0.8, 1.6]$
5	$x^2 lg(x + 2)$	$[0, 0.4]$
6	$x^2 arctg\left(\frac{x}{3}\right)$	$[0.8, 1.6]$
7	$e^{2x} sin3x$	$[0.4, 1.2]$
8	$ctg2x/(sin2x)^2$	$[0.8, 1.2]$
9	$(x + 1)sinx$	$[1, 5]$
10	$5x + xlgx$	$[0.2, 1]$
11	$(2x + 3)sinx$	$[0.4, 1.2]$

12	$cosx/(2x+5)$	$[0.4,1.2]$
13	$1/(1+x+x^2)$	$[0,4]$
14	$(1+x)/(2+x)$	$[0.4,0.8]$
15	$\sqrt{1+e^{-x}}$	$[0.4,1.2]$
16	$(1/tg2x+1)$	$[0.4,0.8]$
17	$cos3x/2(1-cos3x)$	$[0.8,1.6]$
18	$1/\left(x\sqrt{x^3+4}\right)$	$[0.18,0.98]$
19	$sinx/(1+sinx)$	$[0.8,1.6]$
20	$x^2lg(x+2)$	$[0,0.4]$
21	$x^2arctg\left(\frac{x}{3}\right)$	$[0.8,1.6]$
22	$e^{2x}sin3x$	$[0.4,1.2]$
23	$ctg2x/(sin2x)^2$	$[0.8,1.2]$
24	$(x+1)sinx$	$[1,5]$
25	$5x+xlgx$	$[0.2,1]$
26	$(2x+3)sinx$	$[0.4,1.2]$
27	$cosx/(2x+5)$	$[0.4,1.2]$
28	$1/(1+x+x^2)$	$[0,4]$
29	$(1+x)/(2+x)$	$[0.4,0.8]$
30	$\sqrt{1+e^{-x}}$	$[0.4,1.2]$

Пример выполнения задания 4.

$f(x) := \sqrt{x^4 - x^3 + 8}$ $\qquad a := 0 \qquad b := 3.2 \qquad n := 10$

Определяем величину шага h. Для контроля выводим "точное" решение (найденное встроенным в MAthCAD численным методом)

$h := \frac{b-a}{n} \qquad h = 0.32 \qquad\qquad I := \int_a^b f(x)\,dx \qquad I = 13.43187999195271$

Метод левых прямоугольников

$$pr\_l(a,b,n,h,f) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad I \leftarrow I + f(a + i \cdot h) \\ I \cdot h \end{array} \right.$$

$$I1 := pr\_l(a,b,n,h,f) \qquad I1 = 12.500377$$

Метод правых прямоугольников

$$pr\_p(a,b,n,h,f) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad I \leftarrow I + f(a + i \cdot h) \\ I \cdot h \end{array} \right.$$

$$I2 := pr\_p(a,b,n,h,f) \qquad I2 = 14.45905$$

Метод средних прямоугольников

$$pr\_s(a,b,n,h,f) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad I \leftarrow I + f\left(a + i \cdot h + \dfrac{h}{2}\right) \\ I \cdot h \end{array} \right.$$

$$I3 := pr\_s(a,b,n,h,f) \qquad I3 = 13.407967$$

Метод трапеций

$$trap(a,b,n,h,f) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad I \leftarrow I + f(a + i \cdot h) \\ \left(I + \dfrac{f(a) + f(b)}{2}\right) \cdot h \end{array} \right.$$

$$I4 := trap(a,b,n,h,f) \qquad I4 = 13.479713$$

Метод Симпсона (парабол)

$$simp(a,b,n,h,f) := \left| \begin{array}{l} s1 \leftarrow 0 \\ s2 \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} s1 \leftarrow s1 + f(a + i \cdot h) \ \text{ if } \ mod(i,2) \neq 0 \\ s2 \leftarrow s2 + f(a + i \cdot h) \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \left(\dfrac{\dfrac{f(a) - f(b)}{2} + 2 \cdot s1 + s2}{3} \right) \cdot 2 \cdot h \end{array} \right.$$

$I5 := simp(a,b,n,h,f) \qquad I5 = 13.431921$

Метод Симпсона другим способом, без условного оператора

$$simp2(a,b,n,h,f) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} xi1 \leftarrow a + i \cdot h \\ xi \leftarrow xi1 + h \\ s \leftarrow s + f(xi1) + 4 \cdot f\left(\dfrac{xi1 + xi}{2} \right) + f(xi) \end{array} \right. \\ \dfrac{s \cdot h}{6} \end{array} \right.$$

$I6 := simp2(a,b,n,h,f) \qquad I6 = 13.431883$

Оценки погрешностей для всех методов

$|I1 - I| = 0.931503093534339$

$|I2 - I| = 1.027169602736242$

$|I3 - I| = 0.0239126296301$

$|I4 - I| = 0.047833254600951$

$|I5 - I| = 0.000040787508503$

$|I6 - I| = 0.000002665113579$

Реализация методов с помощью операторов суммы и арифметики

Метод средних прямоугольников

$$I1 := h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \cdot h + \frac{h}{2}\right) \qquad I1 = 13.425900085322187$$

Метод трапеций

$$I2 := h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h)\right) \qquad I2 = 13.443840304438137$$

Метод Симпсона

$$I3 := \frac{h}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[f[a + (i-1) \cdot h] + 4 \cdot f\left[(a + i \cdot h) - \frac{h}{2}\right] + f(a + i \cdot h)\right] \qquad I3 = 13.431880158360837$$

$$|I - I1| = 0.005979906630524$$

$$|I - I2| = 0.011960312485426$$

$$|I - I3| = 0.000000166408126$$

Таблица 3

Численные методы	Номера вариантов гр. ЭЛЭТ-21з для выбора теоретического вопроса																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Половинного деления	+	+	+	+	+															
Хорд						+	+	+	+	+										
Простой итерации											+	+	+	+	+					
Ньютона																+	+	+	+	+
Уточненный Ньютона																				
Прямоугольников справа	+					+					+					+				
Прямоугольников слева		+					+					+					+			
Средних прямоугольников			+					+					+					+		
Трапеций				+					+					+					+	
Симпсона					+					+					+					+
Численные методы	Номера вариантов гр. ЭЛЭТ-22з для выбора теоретического вопроса																			
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Половинного деления						+				+										
Хорд							+				+						+			
Простой итерации								+				+				+		+		
Ньютона									+				+		+				+	
Уточненный Ньютона	+	+	+	+	+									+						+
Прямоугольников справа	+																			
Прямоугольников слева		+				+					+	+	+	+						+
Средних прямоугольников			+				+								+				+	
Трапеций				+				+								+		+		
Симпсона					+				+								+			