Негосударственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Центросоюза Российской Федерации

СИБИРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ

МАТЕМАТИКА

Программа, методические указания и задания
контрольной и самостоятельной работы
для всех направлений бакалавриата заочной формы обучения.

Новосибирск 2013

Кафедра статистики и математики.

Математика: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы для студентов заочной формы обучения всех направлений. Составители: доцент С.А.Шинкаренко; НОУ ВПО Центросоюза РФ СибУПК– Новосибирск,2013.- с.

Рецензент : к. ф.-м. н., доцент О.В.Брюханов

Рекомендовано к изданию кафедрой статистики и математики, протокол от 15 апреля 2013 г. № 9.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения……………………………………………...4
2. Объём дисциплины и виды учебной работы по срокам обучения (час)………………………………………………………… 5
3. Содержание дисциплины……………………………………...10
4. Методические указания к выполнению и оформлению контрольных работ...…………………………………………….... 15
5. Задания контрольных работ..…………………………………... 20
6. Задания самостоятельной работы студентов……………......91
7. Список рекомендуемой литературы……………………….. 105

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данная работа предназначена для студентов заочной формы обучения, выполняющих работу по дисциплине «Математика».

Предлагаемая методическая разработка содержит задания контрольных работ и методические указания по их выполнению, где сформулированы основные теоретические положения и даны образцы решения задач контрольной работы. Поскольку эти задачи не охватывают весь программный материал, то в разделе «Задания самостоятельной работы студентов» сформулированы самые важные вопросы и приведены типовые задачи по каждой теме, входящей в программу дисциплины. Эти вопросы и задачи студенту рекомендуется использовать для подготовки к экзамену. Ответы на вопросы студент может найти в любом учебнике из « Списка рекомендуемой литературы», а на многие важные вопросы ответы имеются в этой методической работе.

Математика – это наука о количественных соотношениях и пространственных формах реального мира, понимаемых в самом широком смысле. Длительный исторический путь развития науки привел к проникновению математических методов во все сферы научной и практической деятельности человека. Математика стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Математика предоставляет мощные средства для решения разнообразных практических задач.

Цель дисциплины «Математика» в системе подготовки современного специалиста – это освоение необходимого математического аппарата, позволяющего моделировать, решать и анализировать прикладные экономические и управленческие задачи, с применением, в случае необходимости, компьютерной техники.

Программа дисциплины «Математика» предусматривает изучение студентами первого и второго курсов специальностей коммерческого профиля основ классических разделов математики: аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей, линейной алгебры, экономико-математических методов. Данная работа составлена на основе учебных программ по дисциплине «Математика» и предназначена для студентов первого и второго курсов заочной формы обучения.

2. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ ПО СРОКАМ ОБУЧЕНИЯ (ЧАС)

Ошибка! Ошибка связи.**обучение – 3 года 6 месяцев ,4 года 6 месяцев**

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**256**	**128**	**128**
Общая трудоёмкость	**288**	**144**	**144**
Вид итогового контроля		Зачёт	Экзамен

2.2. *Сервис* (100100.62)
обучение – 3 года 6 месяцев ,4 года 6 месяцев

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**256**	**128**	**128**
Общая трудоёмкость	**288**	**144**	**144**
Вид итогового контроля		Экзамен	Экзамен

2.3. *Торговое дело* (100700.62)
обучение – 3 года 6 месяцев

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**256**	**128**	**128**
Общая трудоёмкость	**288**	**144**	**144**
Вид итогового контроля		Зачёт	Экзамен

2.4.*Торговое дело* (100700.62)
обучение – 4 года 6 месяцев

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**256**	**92**	**128**
Общая трудоёмкость	**252**	**108**	**144**
Вид итогового контроля		Экзамен	Экзамен

2.5. *Гостиничное дело* (101100.62)
обучение – 3 года 6 месяцев ,4 года 6 месяцев

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**220**	**92**	**128**
Общая трудоёмкость	**252**	**108**	**144**
Вид итогового контроля		Экзамен	Экзамен

2.6. *Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции*(110900.62)
обучение – 3 года 6 месяцев ,4 года 6 месяцев

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**148**	**56**	**92**
Общая трудоёмкость	**180**	**72**	**108**
Вид итогового контроля		Зачёт	Экзамен

2.7. *Технология продукции и организация общественного питания* (260800.62)

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**292**	**164**	**128**
Общая трудоёмкость	**324**	**180**	**144**
Вид итогового контроля		Зачёт	Экзамен

2.8. *Товароведение* (100800.62)
обучение – 3 года 6 месяцев ,4 года 6 месяцев

Вид занятия	Всего часов	1-й курс	2-й курс
Аудиторные занятия:	**32**	**16**	**16**
- лекции	16	8	8
- практические занятия	16	8	8
Контрольная работа		1	1
Самостоятельная работа	**184**	**92**	**92**
Общая трудоёмкость	**216**	**108**	**108**
Вид итогового контроля		зачёт	Экзамен

2.9 *Туризм* (100400.62)
обучение – 3 года 6 месяцев ,4 года 6 месяцев

Вид занятия	1-й курс
Аудиторные занятия:	**16**
- лекции	8
- практические занятия	8
Контрольная работа	1
Самостоятельная работа	**92**
Общая трудоёмкость	**108**
Вид итогового контроля	Экзамен

3. ТЕМЫ И ИХ КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Математический анализ

Тема 1.1. *Множества.*

Понятие множества, операции над ними. Взаимно-однозначное соответствие.

Тема 1.2. *Аналитическая геометрия на плоскости.*

Системы координат. Общее уравнение прямой линии. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении. Взаимное расположение двух прямых, угол между ними. Общий вид уравнения кривых второго порядка. Эллипс, гипербола, парабола. Приведение уравнения к каноническому виду.

Тема 1.3. *Функция и предел функции.*

Числовая функция, способы задания. Свойства функций: четность, нечетность, монотонность, периодичность, ограниченность. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

Числовая последовательность, как функция натурального аргумента. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними. Основные свойства предела. Первый и второй замечательные пределы. Экспоненциальная функция и натуральные логарифмы. Виды неопределенностей и способы их раскрытия. Непрерывность функции. Точки разрыва, их виды. Теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций.

Тема 1.4. *Дифференциальное исчисление и его приложения.*

Понятие производной, ее геометрический, механический и экономический смысл. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функций.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и суперпозиции функций. Производные высших порядков. Применение производных в экономическом анализе.

Правило Лопиталя. Теорема Лагранжа. Признаки монотонности функции. Понятие экстремумов, необходимые и достаточные условия экстремумов. Исследования функции на экстремум. Приложения производной. Признаки выпуклости и вогнутости функции. Точки перегиба.

Асимптоты функции, их виды и нахождение. Схема полного исследования функции.

Тема 1.5. *Интегральное исчисление и его приложения.*

Первообразная функция. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Методы интегрирования. Интегрирование простейших рациональных дробей.

Определенный интеграл, его основные свойства. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла с помощью замены переменной и интегрирования по частям. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы, их сходимость.

Тема 1.6. *Дифференциальные уравнения.*

Обыкновенные дифференциальные уравнения, их общее и частные решения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Линейные уравнения первого порядка.

Тема 1.7. *Ряды*.

Числовые ряды. Определение числового ряда. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Степенные ряды, их области сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена.

Тема 1.8. *Аналитическая геометрия в пространстве*.

Векторы и операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.

Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с известным вектором нормали. Уравнение плоскости проходящей через три заданные точки. Уравнение прямой в пространстве: каноническое и параметрическое задание. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Тема 1.9. *Функции нескольких переменных.*

Предел и непрерывность. Частные производные. Дифференциал. Производная функции по направлению. Градиент, его свойства.

Экстремумы. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Наименьшее и наибольшее значения функции в ограниченной замкнутой области. Метод наименьших квадратов.

Раздел 2. Линейная алгебра

Тема 2.1. *Матрицы.*

Векторное пространство R^n. Матрица, действия над ними. Определители, их свойства. Обратная матрица. Ранг матрицы. Собственные значения и собственные векторы матриц.

Тема 2.2. (*СЛАУ Система линейных алгебраических уравнений*).

Методы решения СЛАУ: правило Крамера, матричный способ, метод исключения Жордана - Гаусса. Основные и свободные переменные. Базисные решения СЛАУ. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение СЛАУ.

Раздел 3. Теория вероятностей

Тема 3.1. *Основные понятия и теоремы теории вероятностей.*

Испытание, события, виды событий. Случайные события. Частота и вероятность. Операции над событиями. Полная группа элементарных событий. Классическое и статистическое определение вероятности. Зависимые и независимые события, условная вероятность.

Основные формулы для вычисления вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Тема 3.2. *Повторные независимые испытания.*

Формула Бернулли. Локальная и интегральная формулы Лапласа. Наивероятнейшее число наступлений событий.

Тема 3.3. *Дискретная случайная величина.*

Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Основные числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их смысл, свойства и вычисление.

Тема 3.4. *Непрерывная случайная величина.*

Дифференциальная и интегральная функции распределения непрерывной случайной величины, их вероятностный смысл, свойства и графики. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Нормальный закон распределения. Особенности нормального закона распределения непрерывной случайной величины, его основные характеристики. Кривая Гаусса. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток .Понятие о законе больших чисел..

Раздел 4. Экономико-математические методы

Тема 4.1. *Задачи линейного программирования*.

Экономические задачи, решаемые методами ЛП. Математическая постановка задачи ЛП. Выпуклые множества и их свойства. Выпуклые многогранники в R^n. Существование решения задачи ЛП. Канонический вид задачи ЛП. Графический метод решения задачи ЛП. Симплекс-метод решения задачи ЛП, его сущность. Целочисленное линейное программирование.

Тема 4.2. *Транспортная задача*.

Постановка транспортной задачи. Составление первого опорного плана. Критерий оптимальности в методе потенциалов. Перераспределение плана поставок.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В методических указаниях даны образцы решения типовых задач, предлагаемых студенту в контрольной работе. Особое внимание обращено на основные трудности и типичные ошибки, которые допускаются студентами при выполнении работы.

Оформляя контрольную работу, детально приводите решения задач, не вдаваясь в подробные словесные объяснения.

Контрольная работа должна быть выполнена в межсессионный период и представлена на проверку в методкабинет.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы по математике нужно придерживаться следующих правил.

1. Выполнять контрольную работу в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради разборчиво написать фамилию, инициалы, учебный шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. В конце работы указать использованную литературу, дату выполнения и расписаться.
3. Работа обязательно должна содержать все задачи именно Вашего варианта.
4. Решения задач нужно располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи следует записать полностью ее условие.
6. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
7. После получения проверенной работы следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо в короткий срок исправить указанные ошибки и недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

После правильного выполнения всех заданий контрольной работы со студентом проводится собеседование, по результатам которого выставляется оценка: **«зачтено»** или **«не зачтено».** Защита контрольных работ осуществляется в межсессионный период и во время сессии.

Если контрольная работа имеет оценку «не зачтено», то студент к экзамену или зачёту не допускается. Студент обязан выполнить и защитить контрольную работу до сдачи экзамена (зачёта).

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА

080200.62 *Менеджмент* 100700.62 *Торговое дело*, 110900.62 *Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции*, 100800.62 *Товароведение*, 260800.62 *Технология продукции и организация общественного питания*, 100100.62 *Сервис* 101100.62 *Гостиничное дело*
100400.62 *Туризм*

Студенты обучающиеся на первом курсе выполняют контрольную работу №1.
Студенты второго курса выполняют контрольную работу №2.

Сначала найдите таблицу выбора задач соответствующей контрольной работы, приведённые на страницах 18 и 19 .

Вариант контрольной работы определяется по двум последним цифрам номера зачетной книжки студента. Например, если номер зачетной книжки ТХБ-3С-01-11-051 Д, то вариант контрольной работы 51 В верхней строке (по горизонтали), где помещены цифры от 0 до 9, следует выбрать цифру, являющуюся последней в номере вашего шифра.

В левой графе таблицы (по вертикали), где также помещены цифры от 0 до 9, необходимо найти цифру, являющуюся предпоследней в номере вашего шифра.

На пересечении вертикальной и горизонтальной линий Вы найдете столбец номеров задач своей контрольной работы.

Например, если номер варианта 51, то контрольная работа №1 должна включать задачи 9, 12, 29, 34, 46, 56.

Будьте внимательны при выборе варианта. Работа, выполненная не по своему варианту, возвращается без проверки.

По всем вопросам, связанным с изучением математики, студент может обратиться на кафедру статистики и математики, по адресу: 630087, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 26. СибУПК, корпус 1, ауд. 104, тел. кафедры 346-21-87.

ТАБЛИЦА ВЫБОРА ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
	0 или 1 или 2	1	2	3	10	4	5	6	7	8	9
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		29	30	21	28	22	23	24	25	26	27
		34	31	36	35	39	37	40	38	33	32
		50	47	46	44	41	42	43	45	48	49
		57	58	59	52	51	55	54	53	60	56
	3 или 4 или 5	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
		33	34	35	36	37	38	39	40	31	32
		44	46	45	50	47	43	41	48	49	42
		58	56	51	53	52	54	60	55	57	59
	6 или 7 или 8 или 9	2	1	6	7	3	8	4	5	10	9
		12	13	14	11	19	16	15	17	20	18
		30	28	29	26	21	27	22	23	24	25
		35	36	32	31	33	34	40	37	38	39
		41	44	48	43	45	49	42	47	46	50
		56	57	53	58	59	60	55	51	52	54

ТАБЛИЦА ВЫБОРА ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

	Последняя цифра шифра									
Предпоследняя цифра шифра	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
0 или 1 или 2	61	62	63	70	64	65	66	67	68	69
	71	72	73	80	74	75	76	77	78	79
	90	81	88	89	87	86	84	85	83	82
	99	100	91	98	92	93	94	95	96	97
	104	101	106	105	109	107	110	108	103	102
	120	117	116	114	111	112	113	115	118	119
3 или 4 или 5	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
	103	104	105	106	107	108	109	110	101	102
	114	116	115	120	117	113	111	118	119	112
6 или 7 или 8 или 9	62	61	66	67	63	68	64	65	70	69
	72	73	74	71	79	76	75	77	80	78
	88	90	82	83	84	85	86	87	89	81
	100	98	99	96	91	97	92	93	94	95
	105	106	102	101	103	104	110	107	108	109
	111	114	118	113	115	119	112	117	116	120

5. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Аналитическая геометрия на плоскости

Задачи 1–10

Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Сделать чертеж и найти:

1. длину отрезка AB;
2. уравнение прямой, проходящей через точки A и B;
3. уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно прямой AB;
4. уравнение прямой, проходящей через вершину C перпендикулярно прямой AB;
5. расстояние от точки C до прямой AB.

1.	A (– 2; 2),	B (1; 6),	C (1; 1);
2.	A (1;–1),	B (– 2; 3),	C (–3; 1);
3.	A (2;– 4),	B (5; 0),	C (–1; 2);
4.	A (2; 0),	B (–1; 4),	C (3; 2);
5.	A (5;–1),	B (2; 3),	C (–3;– 2);
6.	A (4; 1),	B (1;–3),	C (– 4; 2);
7.	A (–1; 0),	B (2; 4),	C (3; 2);
8.	A (2; – 2),	B (–1; 2),	C (4; 2);
9.	A (3; 3),	B (0;–1),	C (4; 1);
10.	A (1; 0),	B (4; 4),	C (–1; 4).

Методические указания к решению задач 1 – 10

Приведём основные формулы аналитической геометрии на плоскости.

1.Формула *расстояния между двумя точками* $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

2. *Уравнения прямой на плоскости*

Прямую линию на плоскости можно задавать различными способами, приведем некоторые их них.

- Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0, \quad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right).$

- Уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$$y = kx+b.$$

Если известны координаты двух различных точек $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$ на прямой, то угловой коэффициент можно вычислить по формуле

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

- Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через точку $(x_0;y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Если в этом уравнении менять k, то получим семейство прямых, проходящих через точку $(x_0;y_0)$, которое называют «пучком прямых».

- Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Если $x_B = x_A$, то прямая параллельна оси Oy, её уравнение: $x = x_A$.

Если $y_B = y_A$, то прямая параллельна оси Ox, её уравнение: $y = y_A$.

3. *Взаимное расположение прямых.*

Пусть k_1 и k_2 – угловые коэффициенты двух прямых.

- Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.
- Условие перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

4. *Положение точки относительно прямой.*

Формула нахождения расстояния от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Точка $M(x_0;y_0)$ лежит на прямой $Ax + By + C = 0$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, то есть справедливо равенство $Ax_0 + By_0 + C = 0.$ Очевидно, что в этом случае $\boldsymbol{d} = 0$.

Задача. Рассмотрим решение задачи, аналогичной задачам 1-10, если даны точки *A(2;1), B(–4;4), C(–1,5).*

Решение. Начнем решение задачи с выполнения чертежа (рис. 1). Построим точки *A(2;1), B(–4;4), C(–1;5)* в прямоугольной системе координат О*xy*. Проведем прямую *AB,* уравнение которой необходимо найти, а затем через точку *C* проведем прямую *CK* параллельно *AB* и прямую *CD* перпендикулярно *AB*.

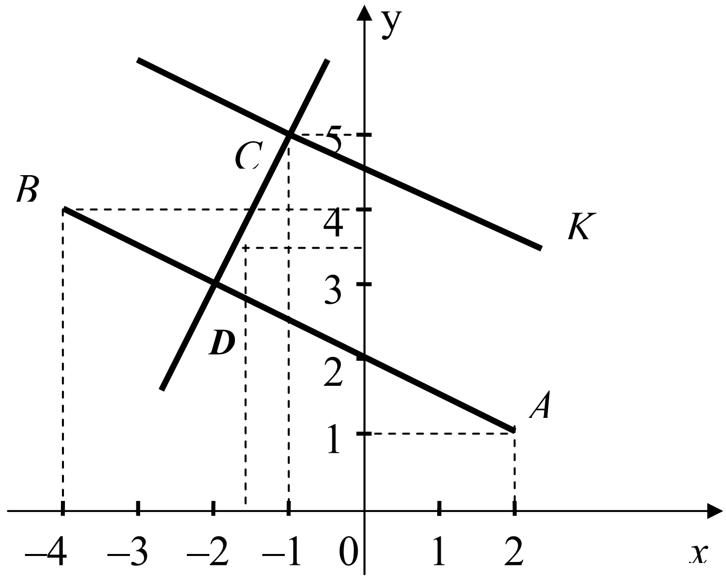


Рис. 1

1. Длину отрезка *AB* находим как расстояние между двумя точками *A(2;1)* и *B(–4;4)*:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (4-1)^2} =$$
$$= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,7.$$

2. Уравнение прямой *AB* найдем по формуле уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$

в нашем случае:

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-1}{4-1}\text{ , то есть }\frac{x-2}{-6}=\frac{y-1}{3}.$$

Запишем пропорцию: 3×(*x* – 2) = – 6×(*y* – 1), раскроем скобки и перенесём все слагаемые в левую часть уравнения, получим окончательный ответ 3*x* + 6*y* – 12 = 0 − уравнение прямой *AB*.

3. Найдем угловой коэффициент прямой *AB*:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-1}{-4-2}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2},$$

по условию перпендикулярности прямых *CD* и *AB:* $k_{CD}\cdot k_{AB}=-1.$

Тогда $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{-1/2}=2.$ Уравнение прямой *CD* запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку *C*:

$$y-y_C=k(x-x_C).$$

Подставив в уравнение координаты точки *C*(– 1, 5) и значение $k=k_{CD}=2,$ получим *y –5=2(x+1);*

y –5=2x+2;

2x – y+7=0 – уравнение прямой *CD*.

4. По условию параллельности прямых *CE* и *AB*: $\boldsymbol{k_{CE}=k_{AB}=-\frac{1}{2}}$.

Уравнение прямой *CE* запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку *C*: $y-y_C=k(x-x_C)$.

Подставив в уравнение координаты точки *C*(– 1, 5) и значение $\boldsymbol{k=k_{CE}=-\frac{1}{2}}$, получим $y-5=-\frac{1}{2}(x+1);$

y –5=−0,5x−0,5;

0,5x + y−4,5=0 – уравнение прямой *CE*.

5. Расстояние от точки *C* до прямой *AB* найдём по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Уравнение прямой *AB* найдено ранее (см. пункт 2): 3*x* + 6*y* – 12 = 0.

Тогда $\boldsymbol{d=\dfrac{|3x_C+6y_C-12|}{\sqrt{3^2+6^2}}=\dfrac{|3\cdot(-1)+6\cdot5-12|}{\sqrt{45}}=\dfrac{15}{3\sqrt5}=\dfrac{5}{\sqrt5}=\sqrt5\approx2{,}24}$.

Ответы. 1) $|AB|=5\sqrt3\approx6{,}7;$

2) 3*x* + 6*y* – 12 = 0 − уравнение прямой *AB;*

3) $2x-y+7=0$ – уравнение прямой CD;
4) $0,5x+y-4,5=0$ – уравнение прямой CE;
5) $d=\sqrt{\mathbf{5}}\approx\mathbf{2{,}24}$.

Введение в математический анализ

Задачи 11–20

Вычислить пределы функции $y=f(x)$, при указанном поведении аргумента x.

11. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$;

а) $x\to 1$; *б)* $x\to 2$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to 3$; *д)* $x\to\infty$.

12. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-1}$;

а) $x\to -2$; *б)* $x\to 0,5$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to 3$; *д)* $x\to\infty$.

13. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-2x-3}$;

а) $x\to 1$; *б)* $x\to -1,5$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to 3$; *д)* $x\to\infty$.

14. $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-2x}$;

а) $x\to 5$; *б)* $x\to 2$; *в)* $x\to -\dfrac{1}{3}$; *г)* $x\to 0$; *д)* $x\to\infty$.

15. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-9x-5}$;

а) $x\to 5$; *б)* $x\to 2$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to -0,5$; *д)* $x\to\infty$.

16. $f(x)=\dfrac{4x^2-x}{4x^2+3x-1}$;

а) $x\to 1$; *б)* $x\to 0$; *в)* $x\to -1$; *г)* $x\to \dfrac{1}{4}$; *д)* $x\to\infty$.

17. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+4x-5}$;

а) $x \to 1$; *б)* $x \to -5$; *в)* $x \to -\frac{5}{2}$; *г)* $x \to 3$; *д)* $x \to \infty$.

18. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 12x + 4}{x^2 + x - 6}$;

а) $x \to -3$; *б)* $x \to 2$; *в)* $x \to -1$; *г)* $x \to \frac{2}{5}$; *д)* $x \to \infty$.

19. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - 13x + 12}$;

а) $x \to -1$; *б)* $x \to \frac{4}{3}$; *в)* $x \to 1$; *г)* $x \to 3$; *д)* $x \to \infty$.

20. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{2x^2 + x - 28}$;

а) $x \to -4$; *б)* $x \to 2$; *в)* $x \to \frac{7}{2}$; *г)* $x \to 3$; *д)* $x \to \infty$.

Методические указания к решению задач 11 – 20

Пределы функций, основные теоремы о пределах

1. *Предел функции.* Предел функции $f(x)$ - это **число А**, к которому неограниченно приближаются значения функции при указанном стремлении аргумента x.

2. *Теоремы о пределах.*

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = cA$, где c – число;

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B},\quad \text{если}\quad \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0.$$

3. *Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*
Бесконечно малой функцией при $x\to x_0$ называется функция $\alpha(x)$, предел которой равен нулю при $x\to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Если значения функции *f(x)* неограниченно возрастают по абсолютной величине при $x\to x_0$, то такую функцию называют *бесконечно большой при* $x\to x_0$. Предел этой функции обозначают знаком бесконечности ∞: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\ (\pm\infty)$.

Теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.

$$\text{Если}\ \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\ \text{то}\ \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\alpha(x)}=\infty.$$

$$\text{Если}\ \lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,\ \text{то}\ \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0.$$

Утверждения всех вышеприведённых теорем также справедливы, если $x\to\infty$ ($+\infty$ или $-\infty$).

Задача. Вычислить пределы функции $f(x)=\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$ при

а) $x\to 1$; *б*) $x\to -4$; *в*) $x\to \dfrac{1}{4}$; *г*) $x\to\dfrac{2}{3}$; *д*) $x\to\infty$.

Решение. В задаче следует найти предел частного. С этой целью необходимо вычислить пределы числителя и знаменателя дроби, подставив в них предельное значение аргумента *x*.

а) $$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot 1^2+10\cdot 1-8}{4\cdot 1^2+15\cdot 1-4}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

б) $$\lim_{x\to -4}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}.$$

При подстановке $x=-4$ в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их значения равны нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь не применима. В данном случае говорят, что имеется неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *при* $x \to x_0$ *может быть раскрыта сокращением дроби на множитель вида* (x–x_0), *который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль,* в данном случае на (x+4). Поэтому следует разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

$3x^2+10x-8=0;$

$D=10^2-4\cdot 3\cdot(-8)=196;$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3}=\frac{-10\pm 14}{6};$$

$x_1=-4;\quad x_2=\dfrac{2}{3}.$

$3x^2+10x-8=3(x+4)(x-2/3)=$

$=(x+4)(3x-2).$

$4x^2+15x-4=0;$

$D=15^2-4\cdot 4\cdot(-4)=289;$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{289}}{2\cdot 4}=\frac{-15\pm 17}{8};$$

$x_1=-4;\quad x_2=\dfrac{1}{4}.$

$4x^2+15x-4=4(x+4)(x-1/4)=$

$=(x+4)(4x-1).$

Таким образом,

$$\lim_{x\to -4}\frac{3x^2+10x-8}{4x^4+15x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(3x-2)}{(x+4)(4x-1)}=\lim_{x\to -4}\frac{3x-2}{4x-1}=\frac{-14}{-17}=\frac{14}{17}.$$

в) $$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+10\cdot\frac{2}{3}-8}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+15\cdot\frac{2}{3}-4}=\frac{0}{70/9}=0.$$

Здесь применима теорема о пределе частного, так как предел знаменателя существует и не равен нулю.

г) $$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\frac{1}{16}+10\cdot\frac{1}{4}-8}{4\cdot\frac{1}{16}+15\cdot\frac{1}{4}-4}=\left(\frac{\mathbf{-85/16}}{0}\right)=\infty.$$

Здесь использована теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$.

Пределы числителя и знаменателя дроби равны ∞. В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида «бесконечность на бесконечность». Теорема о пределе частного здесь не применима.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *при* $x\to\infty$, *каждый член числителя и знаменателя дроби делят на x в наивысшей степени* (*в нашем примере на* x^2), *отчего величина дроби не изменится, но исчезнет неопределенность.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{10x}{x^2}-\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{15x}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{10}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{4+\dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x}=0;$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2}=0;$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15}{x}=0;$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$

(по теореме о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Ответы. *а)* $\mathbf{\dfrac{1}{3}}$; *б)* $\mathbf{\dfrac{14}{17}}$; *в) 0;* *г)* ∞; *д)* $\mathbf{\dfrac{3}{4}}$.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задачи 21–30

Найти производные данных функций и их дифференциалы.

21. *а)* $y=3x^4-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+2$; *б)* $y=\dfrac{2x^2}{1-3x}$;

в) $y=2\cos x\cdot\ln x+\sqrt{1-4x^2}$.

22. *а)* $y=5x^2+4\sqrt[3]{x^5}+3$; *б)* $y=\dfrac{x^3-2x}{3x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}x^4-x\cdot\ln x$.

23. *а)* $y=\frac{1}{4}x^8+8\sqrt[8]{x^3}-1$; *б)* $y=\frac{4x^2-1}{1-x^2}$;

в) $y=\cos(\ln x)+x^2\cdot\operatorname{tg}x$.

24. *а)* $y=\frac{1}{5}x^5-3x\cdot\sqrt[3]{x}-4$; *б)* $y=\frac{x+3}{2x-5}$;

в) $y=\ln\sqrt{x-1}+x^3\cdot\operatorname{arctg}x$.

25. *а)* $y=3x^8+5\sqrt[5]{x^2}-3$; *б)* $y=\frac{3x^4}{x-3}$;

в) $y=\operatorname{tg}e^x+\sin x\cdot\ln x$.

26. *а)* $y=5x^4-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3$; *б)* $y=\frac{2x-1}{x^5}$;

в) $y=\ln(\sin x)-x^6\cdot\operatorname{tg}x$.

27. *а)* $y=4x^3+\frac{3}{x\cdot\sqrt[3]{x}}-2$; *б)* $y=\frac{1-6x^2}{1+x}$;

в) $y=\sqrt{\sin x}-x\cdot\operatorname{ctg}x$.

28. *а)* $y=7x^5-3x\cdot\sqrt[3]{x^2}-6$; *б)* $y=\frac{2x+4}{1+x^2}$;

в) $y=\sqrt{\ln x}-(1-2x^2)\cdot\sin x$.

29. *а)* $y=3x^4-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-3$; *б)* $y=\frac{x^6-1}{2x+1}$;

в) $y=\operatorname{tg}x^2+\sin x\cdot e^x$.

30. *а)* $y=8x^2-\frac{9}{x^2\cdot\sqrt{x}}+6$; *б)* $y=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$;

в) $y=\arcsin x^3+\ln x\cdot\cos x$.

Методические указания к решению задач 21 – 30

Производная и дифференциал функции одной переменной

1. Понятие производной. Производной для функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю и указанный предел существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Производная $f'(x_0)$ показывает скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0. Геометрически $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Нахождение производной для функции $f(x)$ называется её дифференцированием.

2. *Дифференциал функции.*
Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной $dx = \Delta x$:

$$dy = f'(x)dx.$$

3. *Правила дифференцирования.* Пусть даны дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$, тогда справедливы формулы:

$$(u+v)' = u' + v';$$

$$(u-v)' = u' - v';$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Отметим также, что:
а) производная от независимой переменной равна единице: $x' = 1$;
б) производная постоянной величины *с* равна нулю: $c' = 0$;
в) постоянный множитель выносится за знак производной:
$(cu)' = c \cdot u'$.

4. *Производная сложной функции. Сложная функция (суперпозиция функций)* – это функция вида $y = f(u)$, где $u = u(x)$, то есть это функция от функции. Например,

- функция $y = \sin 2x$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = 2x$;
- функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = e^{u}$, где $u = \operatorname{tg} x$.

Производную сложной функции находят по правилу

$$\left[f(u(x))\right]' = f'_u \cdot u'_x \ .$$

5. *Таблица производных.*

Производные основных элементарных функций	**Производные сложных функций**
1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
2. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$	2. $(a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$
$(e^{x})' = e^{x}$	$(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
4. $(\sin x)' = \cos x$	4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
9. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	10. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	11. $(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{-1}{1+u^2}\cdot u'$

Задача. Найти производные данных функций и их дифференциалы.

Решение. *а*) $y = 4x^3 - \dfrac{6}{x^3\cdot\sqrt{x}} + 3$.

Приведем функцию y к виду, удобному для дифференцирования, используя правила действия со степенями

$$y = 4x^3 - \frac{6}{x^3\cdot x^{\frac{1}{2}}} + 3 = 4x^3 - \frac{6}{x^{\frac{7}{2}}} + 3 = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3.$$

По правилу дифференцирования суммы и разности функций:

$$y' = \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3\right)' = \left(4x^3\right)' - \left(6x^{-\frac{7}{2}}\right)' + 3' =$$

$$= 4\cdot 3x^{3-1} - 6\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot x^{-\frac{7}{2}-1} + 0 = 12x^2 + 21x^{-\frac{9}{2}} = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

Тогда дифференциал функции y:

$$dy = f'(x)dx = \left(12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}\right)dx.$$

б) $y=\dfrac{1+9x}{x^3+3}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2},\quad \text{где } u=1+9x,\quad v=x^3+3.$$

$$y'=\left(\frac{1+9x}{x^3+3}\right)'=\frac{\left(1+9x\right)'\cdot(x^3+3)-(1+9x)\cdot\left(x^3+3\right)'}{(x^3+3)^2}=$$

$$=\frac{9\cdot(x^3+3)-(1+9x)\cdot 3x^2}{(x^3+3)^2}=\frac{9x^3+27-3x^2-27x^3}{(x^3+3)^2}=\frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy=f'(x)dx=\frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}\,dx\,.$$

в) $y=\sqrt{\cos x}-\operatorname{tg}x\cdot\ln x$.

Функция $\sqrt{\cos x}$ - сложная. Ее можно представить в виде $y=\sqrt{u}$, где $u=\cos x$. Применим формулу $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

$$\left(\sqrt{\cos x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(\cos x)'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Производную функции $\operatorname{tg}x\cdot\ln x$ находим по правилу дифференцирования произведения:

$$(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v',\ \text{где } u=\operatorname{tg}x,\quad v=\ln x.$$

$$(\operatorname{tg}x\cdot\ln x)'=(\operatorname{tg}x)'\cdot\ln x+\operatorname{tg}x\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln x+\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$y'=\left(\sqrt{\cos x}\right)'-\left(\operatorname{tg}x\cdot\ln x\right)'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{\ln x}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg}x}{x}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\ln x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) dx.$$

Исследование функции

Задачи 31–40

Исследовать функцию $y = f(x)$ средствами дифференциального исчисления и построить её график.

31. $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$.

32. $y = -2x^3 + 6x^2$.

33. $y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4$.

34. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

35. $y = \frac{1}{25}(5x^4 - x^5)$.

36. $y = -2x^3 - 8x^2 - 8x$.

37. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$.

38. $y = x^3 + 3x^2$.

39. $y = \frac{1}{50}(x^5 - 5x^4)$.

40. $y = 2x^3 + 12x^2 + 18x$.

Методические указания к решению задач 31 – 40

1. *Чётность, нечётность и периодичность функции.*

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любых x из области определения функции справедливо равенство $f(-x)= f(x)$, причём область определения также симметрична относительно точки 0, в этом случае график функции симметричен относительно оси Oy.

Для *нечётной* функции для любых x из области определения справедливо равенство $f(-x)= - f(x)$, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T > 0$ такое, что для любых x из области определения функции справедливо $f(x+T)= f(x)$.

2. Проиллюстрируем *на примере некоторые важные свойства графика функции* (рис. 2).

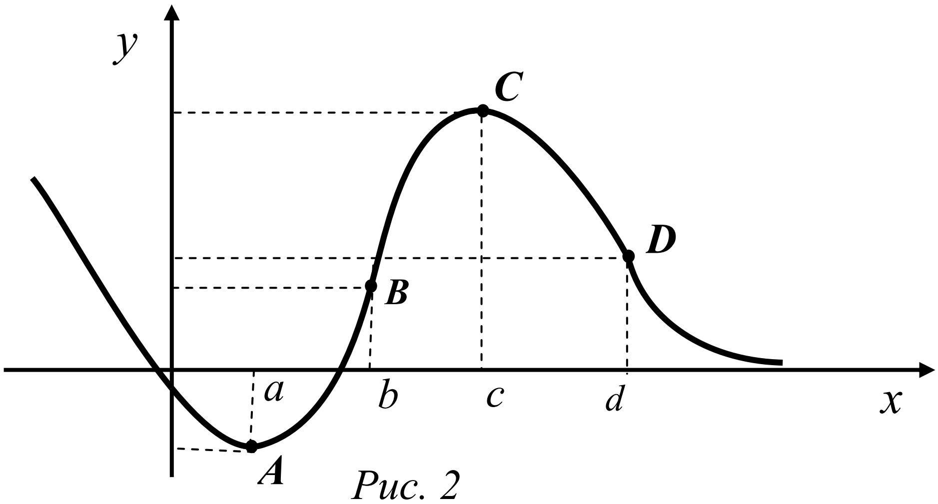


Рис. 2

Интервалы монотонности:

- функция возрастает при $x \in (a;c)$;
- функция убывает при $x \in (-\infty;a)$ и $x \in (c;+\infty)$.

Точки экстремума:

C – точка максимума (max); A – точка минимума (min).

Интервалы выпуклости и вогнутости:

- функция выпуклая при $x \in (b;d)$;
- функция вогнутая при $x \in (-\infty;b)$ и при $x \in (d;+\infty)$.

Точки B и D являются точками перегиба, так как в них происходит смена выпуклости и вогнутости.

2. *Правило исследования функции y = f(x) на монотонность и точки экстремума.*

а) Вычислить первую производную $f'(x)$.

б) Найти *критические* точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

в) Определить знак производной на интервалах между критическими точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках монотонности функции согласно *признакам монотонности:*

если $f'(x) < 0$ на $(a;b)$, то функция убывает при $x \in (a;b)$,
если $f'(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция возрастает при $x \in (a;b)$.

д) Сделать выводы о наличии точек экстремума согласно *достаточному признаку существования экстремума:* если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

3. *Правило исследования функции y = f(x) на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.*

а) Вычислить вторую производную $f''(x)$.

б) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, эти точки называются подозрительными на перегиб.

в) Определить знак второй производной на интервалах между найденными точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках выпуклости и вогнутости согласно *признакам выпуклости и вогнутости:*

если $f''(x) > 0$ на *(a;b),* то график вогнутый при $x \in (a;b)$,
если $f''(x) < 0$ на *(a;b),* то график выпуклый при $x \in (a;b)$

д) Сделать выводы о наличии точек перегиба согласно *достаточному условию существования точек перегиба:* если при переходе через подозрительную на перегиб точку вторая производная меняет знак, то в этой точке имеется перегиб графика функции.

Задача. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ и построить ее график**.**

Решение. Исследование будем проводить по следующей схеме.

1. *Область определения функции*.

В нашем примере это множество всех действительных чисел, то есть $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. *Четность и нечетность функции*.

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 - 4(-x)^2 + 8(-x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \pm f(x).$$

Функция не обладает свойствами четности или нечетности. Следовательно, график функции не будет симметричен ни относительно оси Оy, ни относительно начала координат.

3. *Периодичность функции.*

Данная функция непериодическая, так как является многочленом.

4. *Непрерывность функции.*

На всей области определения данная функция непрерывна как многочлен.

5. *Поведение функции на концах области определения.*

Концами области определения являются $-\infty$ и $+\infty$, так как $x \in (-\infty;+\infty)$. Найдем пределы функции при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = +\infty\cdot\frac{1}{2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = -\infty\cdot\frac{1}{2} = -\infty.$$

Таким образом, слева, при $x \to -\infty$, график функции уходит неограниченно вниз, а справа, при $x \to +\infty$, – неограниченно вверх.

6. *Интервалы монотонности и точки экстремума.*

Вычислим производную функции и найдем критические точки.

$$y' = \frac{1}{2}\cdot 3x^2 - 4\cdot 2x + 8 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8.$$

Производная существует при любых *x*. Решим уравнение $y' = 0$.

$$\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = 0.$$

$$3x^2 - 16x + 16 = 0.$$

$$D = 16^2 - 4\cdot 3\cdot 16 = 64;$$

$$x_1 = \frac{16-\sqrt{64}}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{16+\sqrt{64}}{6} = 4.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-4).$$

Точки $x_1 = \dfrac{4}{3}$ и $x_2 = 4$ − критические. Они делят область определения функции на интервалы: $\left(-\infty;\dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$, $(4;\ +\infty)$.

Изобразим эти интервалы на числовой оси (рис. 3).

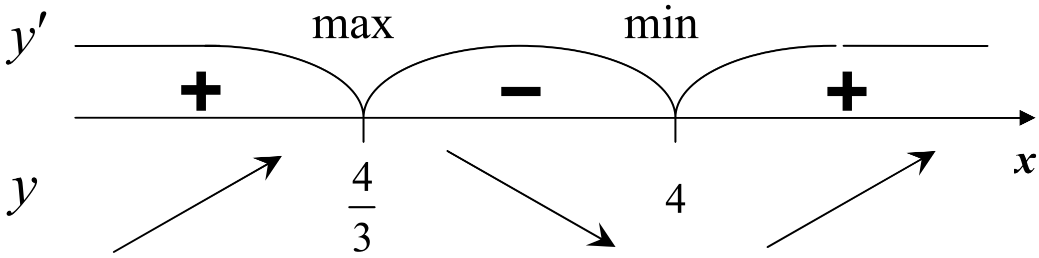


Рис. 3

Поведение функции на каждом интервале определяется знаком производной. Для определения знака y' на интервале достаточно взять любое значение x из рассматриваемого интервала и подставить его в производную y'.

а) На интервале $\left(-\infty;\dfrac{4}{3}\right)$ выберем число, например, $x=0$, и подставим его в производную: $y'(0)=\dfrac{3}{2}(0-4)\left(0-\dfrac{4}{3}\right)>0$.

Так как на интервале $\left(-\infty;\dfrac{4}{3}\right)$ производная $y'>0$, следовательно, функция y возрастает на этом интервале (см. признаки монотонности).

б) На интервале $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$ возьмем $x=3$, подставим в производную, получим $y'(3)=\dfrac{3}{2}(3-4)\left(3-\dfrac{4}{3}\right)<0$. Следовательно, на интервале $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$ функция убывает.

в) На интервале $(4;+\infty)$ возьмем значение $x=5$. Видим, что $y'(5)=\dfrac{3}{2}(5-4)\left(5-\dfrac{4}{3}\right)>0$, следовательно, на интервале $(\ 4;\ +\infty)$ функция возрастает.

Знаки первой производной проставим на рис. 3. При переходе через точку $x = \dfrac{4}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, $x = \dfrac{4}{3}$ является точкой максимума (см. признак экстремума).

Найдем значение функции y в этой точке:

$$y_{\max} = y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\cdot\frac{4}{3} = \frac{128}{27} = 4\frac{20}{27}.$$

Таким образом, график имеет максимум в точке $A\left(1\frac{1}{3};\ \ 4\frac{20}{27}\right)$.

При переходе через точку $x = 4$ производная меняет знак с минуса на плюс (рис. 3). Это означает, что $x = 4$ – точка минимума.

$$y_{\min} = y(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2 + 8\cdot 4 = 0.$$

В точке $B(4;0)$ график функции имеет минимум.

7. *Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*
Найдем производную второго порядка от рассматриваемой функции $y = \dfrac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$. Так как $y' = \dfrac{3}{2}x^2 - 8x + 8$, то $y'' = 3x - 8$. Вторая производная существует при любых значениях x. Найдем точки, где $y'' = 0$:

$$3x - 8 = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3}.$$

Значение x=8/3 является единственным, подозрительным на перегиб. Эта точка делит область определения $(-\infty;+\infty)$ на интервалы $\left(-\infty;\ \dfrac{8}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{8}{3};\ +\infty\right)$ (см. рис. 4).

а) На интервале $\left(-\infty;\ \dfrac{8}{3}\right)$ выберем любое число, например, $x = 0$ и подставим его во вторую производную $y'' = 3x - 8$. Получим $y''(0) = 3\cdot 0 - 8 < 0$, значит, на этом интервале график функции выпуклый (см. признак выпуклости и вогнутости).

б) На интервале $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$ возьмем, например, $x=5$ и подставим во вторую производную. Получим $y''(5)=3\cdot 5-8>0$, значит, на этом интервале график функции вогнутый.Знаки второй производной проставим на рис. 4.

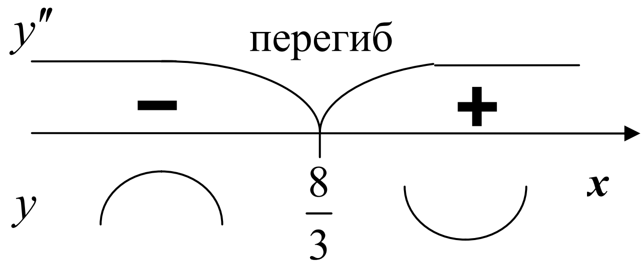


Рис. 4

Так как при переходе через точку $x=\frac{8}{3}$ вторая производная y'' меняет знак, то $x=\frac{8}{3}$ – точка перегиба (см. условие перегиба).

$$y_{перегиб}=y\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}.$$

Таким образом, точка $C\left(2\frac{2}{3};\ 2\frac{10}{27}\right)$ – единственная точка перегиба.

8. *Точки пересечения графика с осями координат.*

На оси Оy для всех точек выполнено условие $x = 0$, поэтому $y(0)=\frac{1}{2}\cdot 0^3-4\cdot 0^2+8\cdot 0=0.$ Получена точка пересечения с осью Оy: (0;0). Для всех точек на оси Оx выполняется условие $y=0$, тогда

$$\frac{1}{2}\cdot x^3-4\cdot x^2+8\cdot x=0, \qquad \text{то есть} \qquad x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-4\cdot x+8\right)=0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, в нашем случае $x=0$ или $\frac{1}{2}x^2-4\cdot x+8=0$. Решим это квадратное уравнение: $D=4^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 8=0;$ $\qquad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{1}=4.$

Значения функции в точках $x = 0$ и $x = 4$ были найдены ранее: $y(0) = 0$, $y(4) = 0$. Таким образом, график функции пересекает ось Оx в точках (0;0) и (4;0).

9. *Дополнительные точки.*

Для более точного построения графика можно найти дополнительные точки. Например, найдем значение функции y при $x = 5$:

$$y(5) = \frac{1}{2} \cdot 5^3 - 4 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

$D(5;\ 2{,}5)$ – дополнительная точка для построения графика.

Выпишем результаты исследования функции $y = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$.

1. Область определения $(-\infty; +\infty)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.
3. Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty;\ 1\frac{1}{3}\right)$ и $(4;\ +\infty)$,

   убывает на промежутке $\left(1\frac{1}{3};\ 4\right)$.
4. Максимум функции в точке $A\left(1\frac{1}{3};\ 4\frac{20}{27}\right)$, минимум – в точке $B(4;0)$.
5. График выпуклый на интервале $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right)$ и вогнутый на интервале $\left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.
6. Точка перегиба $C\left(2\frac{2}{3};\ 2\frac{10}{27}\right)$
7. Точки пересечения с осями координат: (0;0), (4;0).
8. Дополнительная точка $D(5;\ 2{,}5)$.

Построим график функции (рис. 5). На плоскости Оxy отметим все характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки экстремумов, точку перегиба, а также дополнительную точку.

В силу непрерывности функции соединим все отмеченные точки плавной кривой, продолжив график влево вниз и вправо вверх согласно поведению функции на концах области определения и учитывая характер монотонности и выпуклости графика функции.

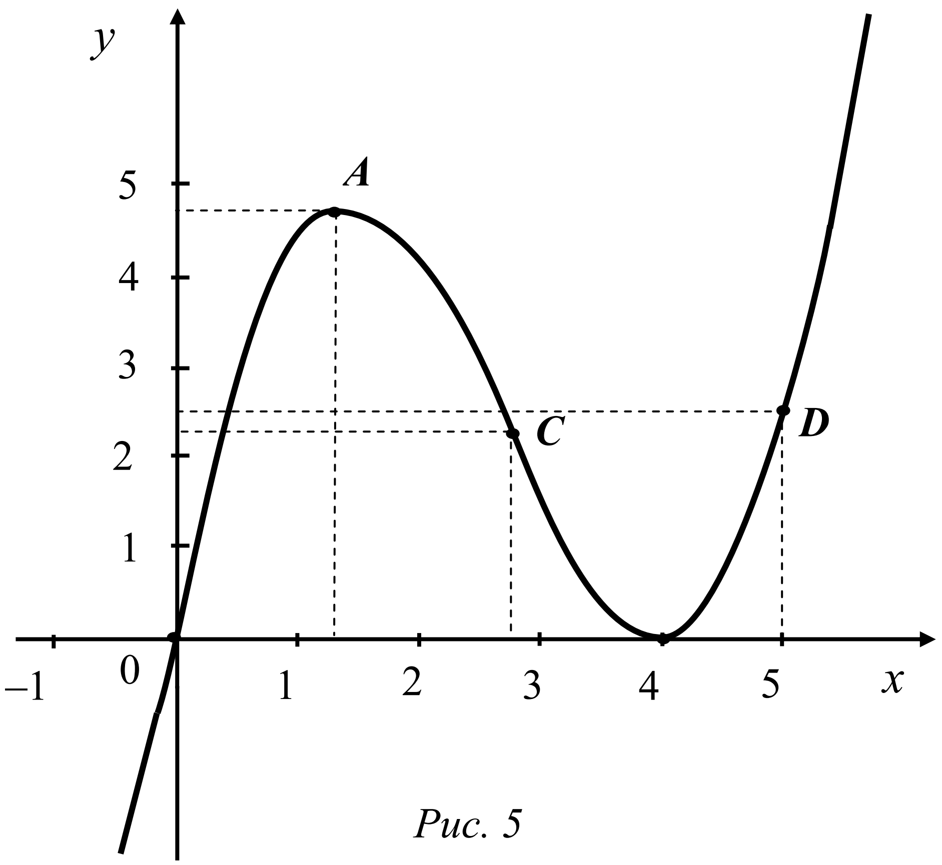


Рис. 5

Интегральное исчисление

Задачи 41– 50

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

41. *а)* $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx;$

б) $\int \cos\left(\frac{2x-5}{3}\right)dx;$

в) $\int x^2 \cdot \sqrt{4-5x^3}\ \ dx;$

42. *а)* $\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt[3]{x}}dx;$

б) $\int \sqrt{4-3x}\ \ dx;$

в) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx;$

43. *а)* $\int \frac{2+3x^3+x\sqrt{x}}{x}dx;$

б) $\int \cos(2x-1)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$

44.*а)* $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\ dx;$

б) $\int e^{3-2x}dx;$

в) $\int \frac{x^2}{(3-2x^3)^2}dx;$

55. *а)* $\int \frac{x^5-x^3\cdot\sqrt{x}+1}{x^2}dx;$

б) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{5}dx;$

в) $\int x^3 e^{x^4+2}dx;$

56.*а)* $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-x^2-3}{x}dx;$

б) $\int \frac{1}{(3+2x)^5}dx;$

в) $\int \frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)}dx;$

47. *а)* $\int \frac{x^5-x+1}{\sqrt[3]{x}}dx;$

б) $\int (2x+5)^6 dx;$

в) $\int x\cos(x^2-1)dx;$

48.*а)* $\int \frac{x^4-9\ \ \sqrt[3]{x}-5}{x^2}dx;$

б) $\int \cos(2-3x)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx;$

9. *а)* $\int \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$

б) $\int e^{-0{,}5x+1}dx;$

в) $\int \frac{x^2-e^{3x}}{x^3-e^{3x}}dx;$

50. *а)* $\int \frac{x^2+3\sqrt[3]{x}+4}{x}dx;$

б) $\int \sin\left(\frac{1-3x}{4}\right)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx;$

Методические указания к решению задач 41 – 50

Неопределенный интеграл, методы интегрирования

1. *Понятия первообразной и неопределенного интеграла.*

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – произвольное число, и называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

2. *Свойства неопределенного интеграла:*

$$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot \int f(x)\,dx,$$

где k – постоянная, отличная от нуля.

3. *Таблица интегралов.*

1. $\int dx = x+C;$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C;$

3. $\int x^{\alpha}\cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha \ne -1;$

4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C;$

6. $\int \sin x \quad dx = -\cos x + C;$ 7. $\int \cos x \quad dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$ 9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$ 11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C;$ 13. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \ x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$

Примечание. Формулы верны, когда переменная x является независимой переменной, а также когда x является функцией другой переменной: $x = x(t)$.

4. *Основные методы интегрирования.*

Идея всех методов интегрирования заключается в приведении искомого интеграла к табличному интегралу или сумме табличных интегралов.

1) *Непосредственное интегрирование.*

Интеграл приводится к табличному виду путем алгебраических или тригонометрических преобразований.

2) *Замена переменной (интегрирование подстановкой).*

Сведение интеграла к табличному виду осуществляется с помощью подстановки $t = \varphi(x)$. Тогда дифференциал dt равен

$$dt = \varphi'(x)dx.$$

Рекомендации по введению новой переменной даны ниже в примерах.

5. *Связь между интегрированием и дифференцированием.*

Интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Если интеграл взят правильно, то производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Задача. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Решение. В контрольной работе интеграл под буквой ***а*** берется методом непосредственного интегрирования. При этом используются табличные интегралы от степенных функций:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Используются также правила действий со степенями.

а) $$\int \frac{3\sqrt[3]{x} - 2 + 6x^4}{\sqrt[3]{x^4}} dx = \int \left(\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{6x^4}{x^{\frac{4}{3}}} \right) dx =$$

$$= \int \left(3x^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{4}{3}} + 6x^{4-\frac{4}{3}} \right) dx = \int \left(3x^{-1} - 2x^{-\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{8}{3}} \right) dx =$$

$$= \int \frac{3}{x}\, dx - \int 2x^{-\frac{4}{3}} dx + \int 6x^{\frac{8}{3}} dx = 3\int \frac{dx}{x} - 2\int x^{-\frac{4}{3}} dx + 6\int x^{\frac{8}{3}} dx =$$

$$= 3\ln|x| - 2\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + 6\frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1} + C = 3\ln|x| - 2\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + 6\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} + C =$$

$$= 3\ln|x| + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{11} x^{3\frac{2}{3}} + C = 3\ln|x| + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{11} x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + C.$$

Проверка.

$$\left(3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}+C\right)'=\left(3\ln|x|\right)'+\left(6x^{-\frac{1}{3}}\right)'+\left(\frac{18}{11}x^{\frac{11}{3}}\right)'+C'=$$

$$=3\frac{1}{x}+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}+\frac{18}{11}\cdot\frac{11}{3}x^{\frac{11}{3}-1}+0=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}+6x^{\frac{8}{3}}=$$

$$=\frac{3x^{\frac{1}{3}}-2+6x^{\frac{8}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{x}-2+6x^4}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

Получена подинтегральная функция, что и требовалось показать.

Интеграл ***б*** в контрольной работе берется методом замены переменной (подстановкой). Приведем ряд примеров.

***б*.1)** $\int\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx.$

За новую переменную возьмем *аргумент подинтегральной функции* $t=\frac{1-2x}{3}$ и найдем dt по формуле:

$$dt=t'(x)dx=\left(\frac{1-2x}{3}\right)'dx=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x\right)'dx=\left(0-\frac{2}{3}\cdot1\right)dx=-\frac{2}{3}dx.$$

Тогда

$$\int\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx=\left|\begin{array}{l} t=\frac{1-2x}{3} \\ dt=-\frac{2}{3}dx \\ dx=-\frac{3}{2}dt \end{array}\right|=\int\sin t\cdot\left(-\frac{3}{2}dt\right)=-\frac{3}{2}\int\sin t\cdot dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\left(-\cos t\right)+C=\frac{3}{2}\cos t+C=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)+C.$$

В последнем действии осуществлен переход к исходной переменной x с учетом, что $t=\dfrac{1-2x}{3}$.

Проверка.

$$\left(\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)+C\right)'=\frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)\right)'+C'=$$

$$=-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)\cdot\left(\frac{1-2x}{3}\right)'+0=-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right).$$

Что и требовалось показать.

***б*.2)** $\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx$.

За новую переменную возьмем *показатель степени* $t=1-\dfrac{1}{3}x$. Тогда

$$\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx=\left|\begin{aligned}&t=1-\frac{1}{3}x\\&dt=-\frac{1}{3}dx\\&dx=-3dt\end{aligned}\right|=\int e^{t}\left(-3dt\right)=-3\int e^{t}dt=-3e^{t}+C=-3e^{1-\frac{1}{3}x}+C.$$

Проверка.

$$\left(-3e^{1-\frac{1}{3}x}+C\right)'=-3\left(e^{1-\frac{1}{3}x}\right)'+C'=-3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(1-\frac{1}{3}x\right)'+0=$$

$$=-3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(-\frac{1}{3}\right)=e^{1-\frac{1}{3}x}.$$

Получена подинтегральная функция, что и требовалось показать.

***б*.3)** $\int\dfrac{1}{(4-3x)^{7}}dx$.

За новую переменную возьмем *функцию, стоящую в основании степени* $t=4-3x$. Тогда

$$\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx = \left| \begin{array}{l} t = 4-3x \\ dt = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^{-7}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-7}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-7+1}}{-7+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot(-6)}\cdot t^{-6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{t^6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6} + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6} + C\right)' = \frac{1}{18}\Big((4-3x)^{-6}\Big)' + C' =$$

$$= \frac{1}{18}(-6)(4-3x)^{-6-1}(4-3x)' + 0 = -\frac{1}{3}(4-3x)^{-7}(-3) = \frac{1}{(4-3x)^7}.$$

Получена подинтегральная функция.

Интеграл под буквой ***в*** в контрольной работе также берется методом замены переменной (подстановкой). Ознакомимся с примерами таких подстановок.

***в*.1)** $\int x\sin(2-3x^2)dx$.

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометриической функции,* если к тому же под интегралом присутствует производная этого аргумента в качестве множителя.

$$\int x\sin(2-3x^2)dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-3x^2 \\ dt = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \int \sin t\left(-\frac{1}{6}dt\right) = -\frac{1}{6}\int \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{6}\cos t + C = \frac{1}{6}\cos(2-3x^2) + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{6}\cos(2-3x^2) + C\right)' = \frac{1}{6}\Big(-\sin(2-3x^2)\Big)(-6x) + 0 = x\sin(2-3x^2).$$

***в*.2)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Здесь за новую переменную удобно принять *показатель степени*, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этого показателя (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{array} \right| = \int e^t\left(2dt\right) = 2\int e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Проверка.

$$\left(2e^{\sqrt{x}} + C\right)' = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)' + C' = 2e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

***в*.3)** $\int \sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\,dx$.

За новую переменную удобно взять *подкоренное выражение*, так как под интегралом присутствует также его производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3-4\cos 3x \\ dt = -4\left(-\sin 3x\right)\cdot 3dx \\ \sin 3x\cdot dx = \dfrac{1}{12}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[6]{t}\cdot\frac{1}{12}dt =$$

$$= \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}}\cdot dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^{7/6}}{7/6} + C = \frac{1}{14}\sqrt[6]{\left(3-4\cos 3x\right)^7} + C.$$

Проверка.

$$\left[\frac{1}{14}(3-4\cos 3x)^{\frac{7}{6}}+C\right]'=\frac{1}{14}\cdot\frac{7}{6}\cdot(3-4\cos 3x)^{\frac{1}{6}}\cdot(3-4\cos 3x)'=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot(3-4\cos 3x)^{\frac{1}{6}}\cdot\left[0-4\cdot(-\sin 3x)\cdot(3x)'\right]=\sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}.$$

Получена подинтегральная функция, что и требовалось показать.

***в*.4)** $\displaystyle\int\frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx$.

За новую переменную берем функцию, стоящую в *основании степени*, так как подынтегральное выражение содержит производную этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int\frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=2+x^4 \\ dt=4x^3dx \\ x^3dx=\dfrac{1}{4}dt \end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{4}dt}{t^2}=\frac{1}{4}\int t^{-2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{4t}+C=-\frac{1}{4(2+x^4)}+C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{1}{4(2+x^4)}+C\right)'=-\frac{1}{4}(-1)\left(2+x^4\right)^{-2}\left(2+x^4\right)'+C'=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2+x^4\right)^{-2}\cdot 4x^3+0=\frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}.$$

Задачи 51–60

Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями. Сделать чертеж.

51.	$xy=-3;$	$x-y-4=0.$
52.	$y=3x^2-2;$	$y=3x+4.$
53.	$xy=3;$	$x+y-4=0.$
54.	$y=x^2+4x+3;$	$y=-x+3.$
55.	$xy=6;$	$x+y-7=0.$
56.	$y=2x-x^2;$	$x+y=0.$
57.	$xy=8;$	$x+y-9=0.$
58.	$y=x^2-3x-4;$	$y=2x-4.$
59.	$xy=-7;$	$y=x+8.$
60.	$y=x^2+x+1;$	$y=x+2.$

Методические указания к решению задач 51 – 60

Определенный интеграл, вычисление площадей

1. *Понятие определенного интеграла.*

Определенный интеграл является **числом**, которое находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f\left(x\right)$, то есть $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$;

a, b – нижний и верхний пределы интегрирования, показывающие, как меняется переменная интегрирования x.

Формула Ньютона-Лейбница связывает определенный и неопределенный интегралы. Чтобы ею воспользоваться, следует взять сначала неопределенный интеграл, то есть найти первообразную, причем удобно взять произвольную постоянную равной нулю: $C=0$, а затем вычислить разность значений этой первообразной в верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Например: $\int\limits_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

2. *Геометрический смысл определенного интеграла.*

Если функция $y=f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S,$$

где S – площадь под кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 6).

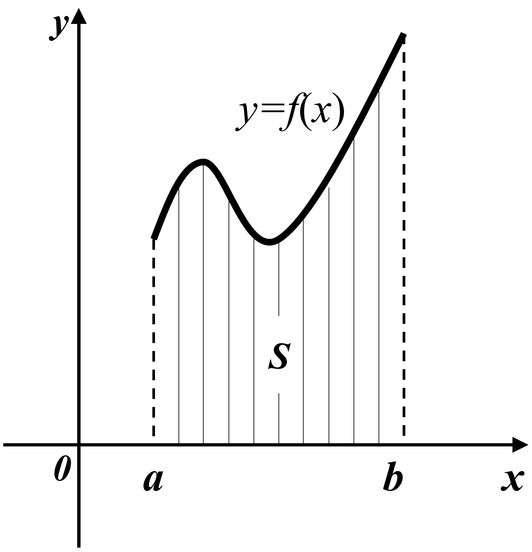


Рис. 6

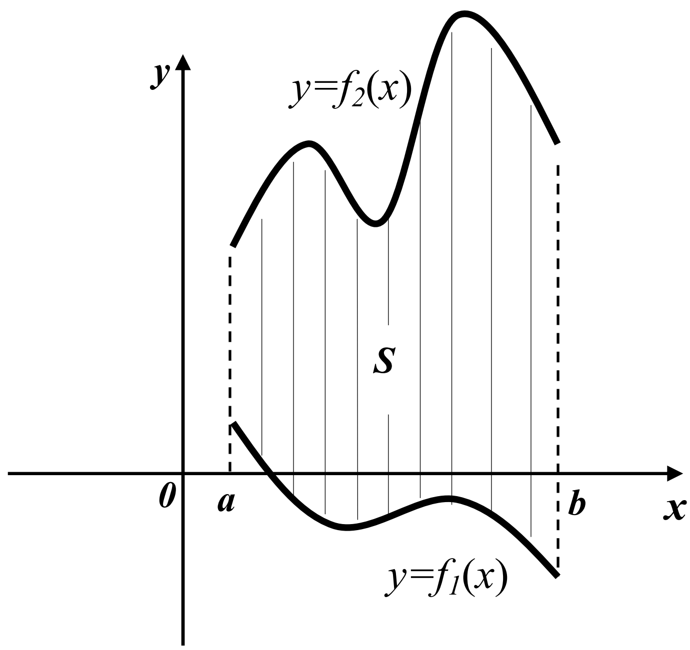


Рис. 7

3. *Вычисление площадей плоских фигур.*

Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx,$$

при этом $f_2(x)\ge f_1(x)$ для $x\in[a;b]$ (рис. 7).

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+5$ и $y=x-1$. Сделать чертеж.

Решение. Выполним чертеж. Первое уравнение определяет параболу, а второе – прямую линию. Для построения параболы найдем координаты её вершины и точки пересечения её с осями координат. Если уравнение параболы $y=ax^2+bx+c$, то вершина параболы находится в точке $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. В данной задаче $x_0=-\dfrac{-6}{2\cdot 1}=3$, $y_0=3^2-6\cdot 3+5=-4$. Итак, вершина параболы − это точка (3;– 4).

Найдем точки пересечения параболы с осями координат.

• *С осью Ox:* $y=0$, тогда $x^2-6x+5=0$. Решив квадратное уравнение (Приложение 1, пункт 2), получаем $x_1=1$, $x_2=5$. Точки пересечения параболы с осью Ox − точки (1;0) и (5;0).

• *С осью Oy:* $x=0$, тогда $y=0^2-6\cdot 0+5=5$. Точка пересечения параболы с осью Oy − точка (0;5).

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх, так как $a=1>0$ (рис. 8).

Прямую $y=x-1$ строим по двум точкам, например,

при $x=0$ $y=0-1=-1$; при $x=1$ $y=1-1=0$.

Получены точки: $(0;-1)$, $(1;0)$.

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x^2-6x+5, \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-6x+5=x-1 \Rightarrow x^2-7x+6=0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$D=7^2-4\cdot 1\cdot 6=25;\quad x_{1,2}=\frac{7\pm 5}{2};\quad x_1=1;\, x_2=6.$$

Найдем соответствующие ординаты $y_{1,2}$ из уравнения $y = x–1$: $y_1 = 1-1 = 0;\quad y_2 = 6-1 = 5$. Итак, точки пересечения параболы и прямой это точки $(1;0)$ и $(6;5)$.

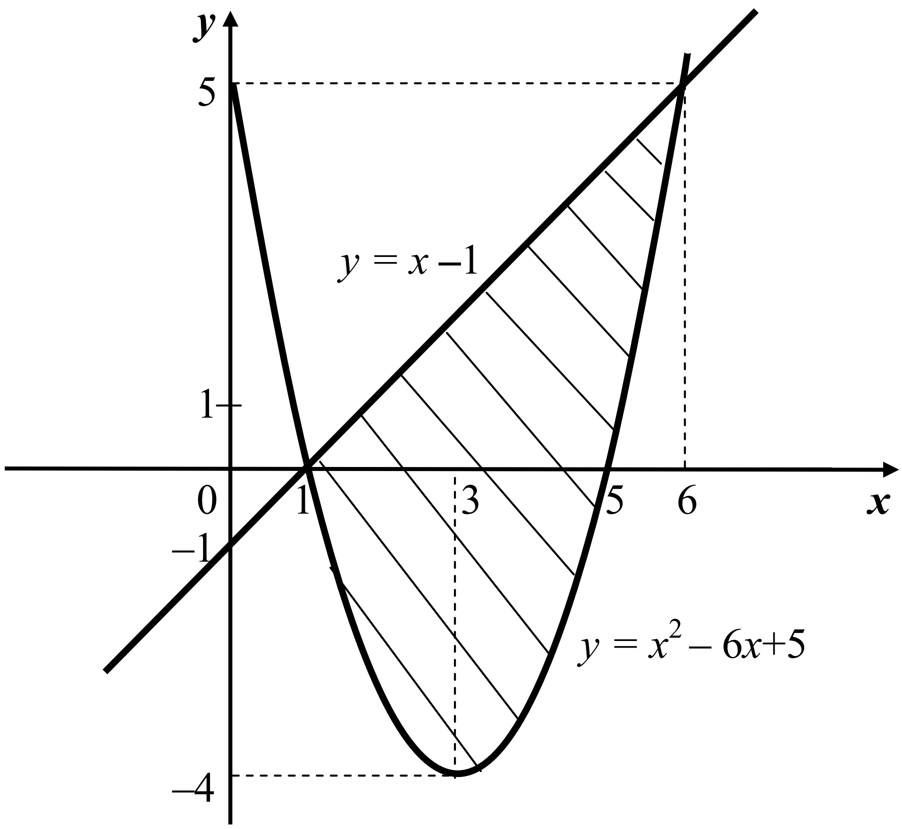


Рис. 8

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой (рис.8). Здесь функции $f_1(x) = x^2 - 6x + 5$ и $f_2(x) = x - 1$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x) \ge f_1(x)$ при $x \in [1;6]$.

Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int_1^6 \left(x - 1 - (x^2 - 6x + 5)\right) dx = \int_1^6 \left(-x^2 + 7x - 6\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_1^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + 7\cdot\frac{6^2}{2} - 6\cdot 6\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 7\cdot\frac{1^2}{2} - 6\cdot 1\right) =$$

$$=\left(-\frac{216}{3}+7\cdot\frac{36}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}.$$

Ответ. Искомая площадь равна: $S=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}$ *кв. ед.*

Замечание. Если одна из линий – гипербола, например, $xy=-6$, то ее можно построить по точкам. Удобно взять точки с абсциссами $x=\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots$ и вычислить соответствующие им ординаты y, в нашем примере по формуле $y=-\frac{6}{x}$.

Теория вероятностей

Задачи 61–70

Партия мужских костюмов состоит из ***k*** костюмов производителя *«A»* и ***m*** костюмов производителя *«B»*. Некто наугад выбирает из партии один за другим два костюма. Найти вероятность того, что

а) оба костюма изготовлены производителем *«A»*;

б) выбраны костюмы разных производителей;

в) хотя бы один из них изготовлен производителем *«A»*.

Найти вероятности указанных событий, если костюмы выбираются по схеме выборки: 1) с возвращением; 2) без возвращения.

61. $k=3$, $m=5$.

62. $k=4$, $m=6$.

63. $k=4$, $m=3$.

64. $k=5$, $m=3$.

65. $k=6$, $m=4$.

66. $k=3$, $m=4$.

67. $k = 4$, $m = 5$.

68. $k = 6$, $m = 3$.

69. $k = 5$, $m = 4$.

70. $k = 3$, $m = 6$.

Методические указания к решению задач 61-70

Основные понятия теории вероятностей

Испытание **–** это изначальное понятие**,** разъясняется как действие, наблюдение, опыт и прочее.

Событие – это результат испытания.

Пример 1: Некто подбросил монету, которая упала гербом вверх. Здесь испытание – подбрасывание монеты, а результат этого испытания – выпадение герба – это событие.

Пример 2: В результате подбрасывания игрального кубика выпало три очка на верхней грани. В этом случае, испытание – подбрасывание кубика, а выпадение трех очков – событие.

Заметим, что монета в примере 1 могла упасть не гербом, а решкой (цифрой вверх). Аналогично, в примере 2, подбрасывание кубика могло бы закончиться выпадением, например, двух или пяти очков. Событие, которое в результате испытания может произойти, а может и не произойти, называется ***случайным***.

Пусть в результате испытания могут появиться несколько событий. События называются ***несовместными,*** если появление одного из них исключает появление других.

Пример 3: Рассмотрим такое испытание, как сдача экзамена по математике одним из студентов. События, которые, например, могут произойти в результате этого испытания, есть следующие:

A – экзамен сдан на оценку «4»,

B – экзамен сдан на оценку «3»,

C – экзамен сдан на оценку выше, чем «3».

В этом случае, события А и В несовместны, так как получение оценки «3» делает невозможным получение оценки «4» за этот же экзамен. Наоборот, события А и С совместны, поскольку они могут произойти одновременно.

Пространством элементарных исходов (или ***событий***), соответствующих рассматриваемому испытанию, будем называть такое множество несовместных событий, одно из которых обязательно произойдет в результате испытания, так что любой интересующий нас результат испытания может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества.

В примере с игральным кубиком пространство элементарных исходов образуют 6 событий: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6,$ которые заключаются в том, что количество выпавших очков составит соответственно 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Действительно, эти события несовместны, одно из них обязательно произойдет в результате подбрасывания кубика, и с их помощью можно описать любые другие события. Например, событие A – выпало четное число очков – означает, что появились события E_2 или E_4 или E_6, эти три элементарных исхода благоприятствуют наступлению события A.

Классическое определение вероятности

Элементарные исходы называются ***равновозможными,*** если ни у одного из них нет преимуществ перед другими, чтобы произойти в результате испытания.

Вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению числа ***m*** благоприятствующих событию A **элементарных** исходов к общему числу ***n*** элементарных **равновозможных** исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Рассмотрим пример с урновой схемой. Урна – это ёмкость с шарами.

Пример 4: Пусть в урне находится 20 одинаковых шаров, которые отличаются только цветом, например, 12 из них красные, а остальные – белые. Некто подошел к урне и наугад выбрал один шар. Найдем вероятность того, что этот шар – красный.

Пусть событие К – выбран красный шар. Всего элементарных исходов n = 20 (по количеству шаров), причём все эти исходы равновозможные. Событию К благоприятствует m = 12 исходов (по количеству красных шаров), поэтому

$$P(K) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

Вероятность любого события может принимать значения только от 0 до 1 включительно, то есть

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Достоверное событие – обязательно произойдет в результате испытания, то есть $m = n$, так как все исходы благоприятные:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Невозможное событие – не может произойти в результате испытания, то есть m = 0, так как благоприятных исходов нет:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Случайное событие – может произойти или не произойти в результате испытания: $0<P(A)<1$.

Вероятность является числовой мерой объективной возможности наступления события. Вероятность можно задать в процентах, например $P(A)$= 0,8 (80%).

Основные теоремы теории вероятностей

Условной вероятностью $\boldsymbol{P_A(B)}$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 5. В урне имеется 3 белых и 2 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение: Изначально в урне было 5 шаров, из которых 3белых и 2 черных. После первого испытания в урне осталось 4 шара, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B) = 3/4$.

События A и B называются ***независимыми***, если появление одного из этих событий не изменяет вероятности наступления другого, то есть $P(A) = P_B(A)$ или $P(B) = P_A(B)$. В противном случае события называются ***зависимыми***.

Теорема сложения вероятностей **несовместных** событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

Теорема умножения вероятностей **независимых** событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей **зависимых** событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Теорема сложения вероятностей **совместных** событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$$

Событие $\overline{A}$ (не $\boldsymbol{A}$) называется ***противоположным*** событию A, если оно наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

Пример 4: а) Событие A – изделие бракованное, тогда $\overline{A}$ – изделие без брака; б) B – студент сдал экзамен, тогда событие $\overline{B}$ – студент не сдал экзамен; с) C – хотя бы один лотерейный билет выиграл, тогда $\overline{C}$ – ни один билет не выиграл. Из приведенных примеров видно, что противоположное событие можно сформулировать путем простого логического отрицания.

Вероятность противоположного события находится по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Задача. В партии из 100 одинаковых по внешнему виду изделий смешаны 40 шт. первого сорта и 60 шт. второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наугад два изделия окажутся:

а) оба первого сорта;

б) разных сортов;

в) хотя бы одно из них первого сорта.

Найти указанные вероятности, если изделия выбираются по схеме выборки 1) с возвращением; 2) без возвращения.

Решение. 1). Рассмотрим вначале случай, когда изделия выбирают по схеме выборки с возвращением. В этом случае первое изделие из партии выбирается случайным образом, определяется его сортность, затем оно возвращается в партию и может быть выбрано повторно. Второе изделие выбирается из той же партии, состоящей из ста изделий. Обозначим:

событие A – первое взятое изделие I сорта,

событие $\overline{A}$ – первое взятое изделие II сорта (не I сорта),

событие B - второе взятое изделие I сорта ,

событие $\overline{B}$ – второе взятое изделие II сорта (не I сорта).

Заметим, что в рассматриваемом случае события A и B независимые, так как вероятность события B не зависит от того, какого сорта было выбрано первое изделие.

а) P(оба изделия I сорта) = $P(A$ и $B) = P(A) \cdot P(B) = \dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{40}{100} = 0{,}16.$

Здесь мы воспользовались теоремой умножения вероятностей независимых событий.

б) P (изделия разных сортов) = $P(A$ и $\overline{B}$ или $\overline{A}$ и $B) =$

$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = \dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{60}{100} + \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{40}{100} = 0{,}4 \cdot 0{,}6 +$

$+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48.$

Здесь мы воспользовались теоремой сложения несовместных событий и теоремой умножения для независимых событий.

в) P (хотя бы одно изделие I сорта) = 1 – P (нет ни одного изделия I сорта) = 1 – P (оба изделия II сорта) = $1 - P(\overline{A}$ и $\overline{B}) = 1 -$ $P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{60}{100} = 0{,}64.$

Здесь мы воспользовались формулой для нахождения вероятности противоположного события.

2). Далее, рассмотрим случай, когда изделия выбирают по схеме выборки без возвращения. В этом случае первое изделие из партии выбирается случайным образом, определяется его сортность, но в партию оно **не** возвращается. Второе изделие выбирается из оставшихся изделий. Подчеркнем, что в этом случае события A и B являются зависимыми. Найдем вероятности событий.

а) P(оба изделия I сорта) = $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} = \frac{78}{495}$.

Здесь мы воспользовались теоремой умножения вероятностей для зависимых событий. Поясним более подробно, как были найдены вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$. При выборе первого изделия общее число исходов равно 100 (по числу изделий) и все они равновозможны. Благоприятствующих из них событию A – 40 (по числу изделий I сорта). По классическому определению вероятности $P(A) = m / n = 40 /100$. Найдем условную вероятность $P_A(B)$, то есть вероятность выбрать второе изделие I сорта при условии, что первое выбранное изделие было также I сорта. Посмотрим, как изменился состав партии после того, как выбрали первое изделие: изделий в партии осталось 100 – 1 = 99 (первое забрали), среди них изделий первого сорта осталось 40 – 1 = 39 (выбранное первое изделие было I сорта). Далее, выбираем второе изделие: общее число исходов этого испытания 99 (по числу оставшихся изделий). Благоприятствующих из них событию B – 39 (по числу оставшихся изделий I сорта). По классическому определению вероятности

$P_A(B) = m / n = 39 /99$.

б) P (изделия разных сортов) = $P(A \text{ и } \overline{B} \text{ или } \overline{A} \text{ и } B) =$

$$= P(A) \cdot P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{99} + \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{99} = \frac{16}{33}.$$

Здесь мы воспользовались теоремой сложения вероятностей несовместных событий и теоремой умножения вероятностей зависимых событий.

в) P (хотя бы одно изделие I сорта) = 1 – P (ни одного нет изделия I сорта) = 1 – P (оба изделия II сорта) = $1 - P(\overline{A} \text{ и } \overline{B}) =$

$$1 - P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} = \frac{106}{165}.$$

Задачи 71 -80

71. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,75 , а при наличии конкурирующего товара равна 0,35. Вероятность выпуска конкурентом товара равна 0,45. Найти вероятность того, что товар будет пользоваться спросом.

72. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении – с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

73. На строительство объекта поступают железобетонные плиты от четырех цементных заводов в количестве 50, 10, 40 и 30 штук соответственно. Каждый из заводов допускает при изготовлении плит брак (несоответствие ГОСТ), составляющий соответственно 1%, 5%, 2% и 3%. Какова вероятность того, что наугад взятая плита будет удовлетворять требованиям ГОСТ?

74. В цехе трудятся 3 мастера и 6 их учеников. Мастер допускает брак при изготовлении изделия с вероятностью 0,05; а ученик – с вероятностью 0,15. Какова вероятность, что взятое наугад изделие будет бракованным?

75. В данный район изделия поставляются двумя фирмами. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, у второй фирмы этот показатель 85%. Какова вероятность, что взятое наугад изделие оказалось стандартным, если вероятность того, что оно поставлено первой фирмой, равна 0,4?

76. В магазине имеются два телевизора с импортными и девять с отечественными трубками. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока телевизора с импортной трубкой равна

0,005; с отечественной трубкой равна 0,01. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор выдержит гарантийный срок.

77. В двух ящиках находятся радиолампы. В первом ящике 3% ламп - бракованные, во втором ящике бракованные лампы составляют 5%. Из наудачу выбранного ящика выбирается одна лампа. Найти вероятность того, что она будет без брака.

78. Страховая компания разделяет застрахованных клиентов по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний риск, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50 % - первого класса риска, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго 0,03, третьего 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования?

79. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, а для второго контролера эта вероятность 0,02. Какова вероятность, что взятое наугад изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным?

80. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,92, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,03. Определить, какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия.

Методические указания к решению задач 71 – 80

Формула полной вероятности

События H_1, H_2, ..., H_n образуют **полную группу**, если они попарно несовместны и в результате испытания одно из них обязательно произойдет.

Для таких событий справедливо равенство:

$$P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1.$$

Противоположные события A и $\overline{A}$ всегда образуют полную группу, поэтому

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad \text{или} \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Пусть событие A наступает с одним из событий (гипотез) H_i, тогда вероятность этого события находится по формуле, называемой ***формулой полной вероятности***

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где события $H_1,\ H_2,\ ...,\ H_n$ образуют полную группу.

Задача. Два консервных завода поставляют в магазин мясные и овощные консервы, причем первый завод поставляет 75% всей продукции. Доля овощных консервов в продукции первого завода составляет 60%, а у второго 70%. Для контроля в магазине взято наугад одно изделие. Какова вероятность того, что это окажутся мясные консервы?

Решение. Обозначим:

событие A – взяты мясные консервы;

событие H_1 – консервы изготовлены I заводом;

событие H_2 – консервы изготовлены II заводом.

По условию задачи первый завод поставляет 75% продукции, тогда $P(H_1) = 0{,}75$, второй завод поставляет - 25%, следовательно $P(H_2) = 0{,}25$. Вероятность того, что консервы мясные, для первого завода составляет 40%, то есть $P_{H_1}(A) = 0{,}4$, для второго завода - 30%, то есть $P_{H_2}(A) = 0{,}3$. Учитывая, что событие A произойдет обязательно с одним из событий (гипотез) H_i, образующих полную группу, применяем формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0.75 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}375.$$

Замечание. Задача решается аналогично, если количество заводов будет три или более. Соответственно увеличится число слагаемых в формуле полной вероятности.

Задачи 81-90

Вероятность того, что в результате проверки изделию будет присвоен знак «изделие высшего качества» равна $\boldsymbol{p}$. На контроль поступило $\boldsymbol{n}$ изделий. Какова вероятность того, что знак высшего качества будет присвоен:

а) ровно $\boldsymbol{k}$ изделиям;

б) более чем $\boldsymbol{m}$ изделиям;

в) хотя бы одному изделию;

г) указать наивероятнейшее количество изделий, получивших знак высшего качества, и найти соответствующую ему вероятность.

81. n=8; p=0,4; k=5; m=6.

82. n=7; p=0,3; k=4; m=5.

83. n=6; p=0,2; k=3; m=4.

84. n=5; p=0,3; k=2; m=3.

85. n=4; p=0,6; k=1; m=2.

86. n=9; p=0,2; k=6; m=7.

87. n=7; p=0,7; k=3; m=4.

88. n=6; p=0,4; k=1; m=3.

89. n=8; p=0,6; k=4; m=5.

90. n=5; p=0,5; k=3; m=2.

Методические указания к решению задач 81 – 90

Повторение независимых испытаний

Пусть известна вероятность появления события A в каждом испытании: $P(A) = \boldsymbol{p}$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ – вероятность не появления события A. Испытание повторяется $\boldsymbol{n}$ раз. Требуется найти вероятность того, что событие A наступит при этом ровно $\boldsymbol{k}$ раз.

Обозначим $\boldsymbol{P_n\ (k)}$ – вероятность того, что в $\boldsymbol{n}$ испытаниях событие A наступит $\boldsymbol{k}$ раз. Эта вероятность находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

! - знак факториала, математической операции такой, что

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Например,

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

Внимание: **0!=1**

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ и т. д.

Наивероятнейшее число появлений события

Пусть в $\boldsymbol{n}$ повторных испытаниях событие A появляется $\boldsymbol{k}$ раз, где $\boldsymbol{k}$ может принимать значения: **0; 1; 2;** …; $\boldsymbol{n}$ (то есть $\boldsymbol{0 \le k \le n}$). Для каждого из этих значений $\boldsymbol{k}$ можно найти соответствующую ему вероятность по формуле Бернулли.

Значение $\boldsymbol{k}$, которому соответствует самая большая вероятность, называется ***наивероятнейшим*** числом появления события A.

Наивероятнейшее число k_0 находится как ***целое число*** из промежутка:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

При этом $\boldsymbol{k_0}$ может принимать либо одно значение, либо два соседних целых значения с одинаковой вероятностью.

Вероятность $P_n(k_o)$, соответствующую значению $k = k_0$, находим по формуле Бернулли.

Появление события хотя бы один раз

Вероятность появления события «хотя бы один раз» в $\boldsymbol{n}$ испытаниях находится с помощью противоположного ему события «ни одного раза»:

P_n (событие наступит хотя бы один раз) = 1 – P_n (ни разу) $= 1 - P_n(0) = 1 - \dfrac{n!}{0! \cdot n!} \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1 - q^n$,

при этом учтено, что $0! = 1$ и $p^0 = 1$.

Событие наступит «хотя бы один раз» означает, что оно наступит один или более раз, поэтому можно записать:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Задача. Стрелок поражает цель с вероятностью 0,7. С какой вероятностью в серии из 5 выстрелов он поразит мишень:

а) ровно два раза;

б) более трех раз;

в) хотя бы один раз;

г) указать наивероятнейшее число попаданий и соответствующую ему вероятность.

Решение. По условию задачи: $\boldsymbol{p} = 0{,}7$; $\boldsymbol{n} = 5$; $\boldsymbol{k} = 2$; $\boldsymbol{m} = 3$;

вероятность промаха $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

а) Вероятность попадания ровно два раза в серии из пяти выстрелов находим по формуле Бернулли:

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 10 \cdot 0{,}01323 = 0{,}1323.$$

б) Событие «стрелок поразит мишень более трех раз» запишем в виде: $m > 3$, тогда

$$P_5(m > 3) = P_5(4 \text{ или } 5) = P_5(4) + P_5(5).$$

Здесь применена теорема сложения вероятностей несовместных событий. Используя формулу Бернулли, найдем:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!\cdot(5-4)!}\cdot p^4 \cdot q^1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 5 \cdot 0{,}2401 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015;$$

$$P_5(5) = \frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot p^5 \cdot 1 = 0{,}7^5 = 0{,}16807;$$

$$P_5(m > 3) = 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}52822.$$

в) Событию D – «стрелок поразит мишень хотя бы 1 раз», противоположно событие $\overline{D}$ - «не поразит ни разу», то есть стрелок промахнется все пять раз, следовательно, число попаданий $k = 0$:

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P_5(0) = 1 - \frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot p^0 \cdot q^5 = 1 - q^5 =$$

$$= 1 - 0{,}3^5 = 1 - 0{,}00243 = 0{,}99757.$$

Здесь учтено, что $0! = 1$ и $p^0 = 1$.

г) Наивероятнейшее число попаданий k_o находим как ***целое*** число из промежутка:

$$np - q \le k_o \le np + p;$$

$$5 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le k_o \le 5 \cdot 0{,}7 + 0{,}7;$$

$$3{,}2 \le k_o \le 4{,}2;$$

$$k_o = 4.$$

Соответствующую ему вероятность $P_5(4)$ вычислим по формуле Бернулли. В данной задаче она уже была найдена выше:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015.$$

Задачи 91-100

В рекламных целях торговая фирма вкладывает в свой товар случайным образом некоторые призы. На каждые 100 единиц товара приходится m_1 призов стоимостью a_1 рублей, m_2 призов стоимостью a_2 рублей, m_3 призов стоимостью a_3 рублей и т. д. В остальных единицах товара призов нет.

Составить закон распределения величины стоимости приза для человека, купившего одну единицу товара этой фирмы и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию (двумя способами) и среднее квадратическое отклонение. Пояснить смысл полученных результатов.

91. $a_1=20$; $a_2=10$; $a_3=5$; $a_4=3$;
$m_1=1$; $m_2=2$; $m_3=8$; $m_4=10$.

92. $a_1=18$; $a_2=15$; $a_3=10$; $a_4=35$;
$m_1=2$; $m_2=3$; $m_3=5$; $m_4=20$.

93. $a_1=15$; $a_2=12$; $a_3=8$; $a_4=4$;
$m_1=3$; $m_2=10$; $m_3=15$; $m_4=20$.

94. $a_1=16$; $a_2=10$; $a_3=6$; $a_4=3$;
$m_1=2$; $m_2=5$; $m_3=8$; $m_4=10$.

95. $a_1=10$; $a_2=8$; $a_3=6$; $a_4=4$;
$m_1=5$; $m_2=10$; $m_3=12$; $m_4=15$.

96. $a_1=6$; $a_2=5$; $a_3=4$; $a_4=3$;
$m_1=2$; $m_2=4$; $m_3=6$; $m_4=10$.

97. $a_1=14$; $a_2=12$; $a_3=8$; $a_4=5$;

m_1=2; m_2=8; m_3=15; m_4=20.

98. a_1=12; a_2=10; a_3= 6; a_4= 3;
m_1=5; m_2=8 m_3=14; m_4=25.

99. a_1=8; a_2=5; a_3= 4; a_4= 2;
m_1=4; m_2=6; m_3=12; m_4=20.

100. a_1=5; a_2=4; a_3= 3; a_4= 2;
m_1=8; m_2=10; m_3=15; m_4=25.

Методические указания к решению задач 91 – 100

Основные характеристики дискретной случайной величины

Случайной величиной называется переменная, принимающая свои возможные числовые значения с определенной вероятностью.

Например: X – балл, полученный на экзамене;
Y – число студентов, явившихся на лекцию;
Z – величина выигрыша в лотерее;
U – рост случайно выбранного человека и т.п.

Дискретная случайная величина X принимает отдельные числовые значения. Закон распределения дискретной случайной величины записывается в виде таблицы, где перечислены все значения случайной величины X и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	x_3	**…**	x_n
P(X)	p_1	p_2	p_3	**…**	p_n

Следует иметь в виду, что всегда $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

Основные числовые характеристики закона распределения дискретной случайной величины:

1) ***Математическое ожидание*** (ожидаемое среднее значение случайной величины)

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+\ldots x_n\ p_n=a.$$

2) ***Дисперсия*** (мера рассеяния значений случайной величины *X* от среднего значения ***a***):

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a\ )^2 p_i=(x_1-a)^2 p_1+(x_2-a)^2 p_2+\ldots+(x_n-a)^2 p_n$$

.

Второй способ вычисления дисперсии:

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2,$$

где *M(X)* определено выше, а

$$M(X^2)=x_1^2p_1+x_2^2p_2+\ldots+x_n{}^2p_n=\sum x_i^2 p_i\ .$$

3) ***Среднее квадратическое отклонение*** (характеристика рассеяния в единицах признака *X*):

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X).}$$

Задача. В лотерее на каждые 100 билетов приходится 2 билета с выигрышем по 50 тыс. рублей, 5 билетов по 20 тыс. рублей, 10 билетов по 10 тыс. рублей, 20 билетов по 5 тыс. рублей и 25 билетов по 3 тыс. рублей. Остальные билеты не выигрывают. Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики.

Решение. Обозначим *X* тыс. рублей – величина выигрыша на один билет. Очевидно, что *X* – случайная дискретная величина. Составим закон распределения этой случайной величины, перечислив все ее возможные значения и найдя соответствующие им вероятности.

Число выигрышных билетов из 100 составляет: 2+5+10+20+25=62, значит, число невыигрышных билетов: 100 – 62 = 38.

Располагая величины возможного выигрыша $\boldsymbol{x_i}$ в порядке возрастания, получим следующую таблицу:

$\boldsymbol{x_i}$	0	3	5	10	20	50
p_i	0,38	0,25	0,20	0,10	0,05	0,02

где $p_1 = P(X=0) = \dfrac{38}{100} = 0{,}38$; $p_2 = P(X=3) = \dfrac{25}{100} = 0{,}25$ и т. д.

Отметим, что $\sum p_i = 0{,}38 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}02 = 1.$

1) Математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X)=\sum x_i p_i = 0\cdot 0{,}38+3\cdot 0{,}25+5\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}1+20\cdot 0{,}05+50\cdot 0{,}02=4{,}75.$$

Таким образом, ожидаемый средний выигрыш на 1 билет составляет 4,75 тыс. рублей.

2) Дисперсию случайной величины найдем двумя способами:

1). $$D(X) = \sum_{i=1}^{6} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i =$$

$$=(0-4{,}75)^2\cdot 0{,}38+(3-4{,}75)^2\cdot 0{,}25+(5-4{,}75)^2\cdot 0{,}2+$$

$$+(10-4{,}75)^2\cdot 0{,}1+(20-4{,}75)^2\cdot 0{,}05+(50-4{,}75)^2\cdot 0{,}02=$$

=8,57375+0,76525+0,0125+2,75625+11,628125+40,95125=64,6875.

2). $$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

$$M(X^2)=\sum x_i^2\cdot p_i = 0^2\cdot 0{,}38+3^2\cdot 0{,}25+5^2\cdot 0{,}20+10^2\cdot 0{,}1+20^2\cdot 0{,}05+$$

$$+50^2\cdot 0{,}02=0+2{,}25+5+10+20+50 = 87{,}25.$$

Тогда:

$$D(X) = 87{,}25 - (4{,}75)^2 = 87{,}25 - 22{,}5625 = 64{,}6875.$$

Результаты вычислений дисперсии по обоим способам совпадают.

3) Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{64{,}6875} \approx 8{,}04285 \ .$$

Таким образом, $\boldsymbol{\sigma}$ = 8,04285 тыс. рублей – характеристика разброса фактических значений выигрыша от найденного среднего значения ***a*** = 4,75 тыс. рублей. Это означает, что основные значения случайной величины выигрыша находятся в диапазоне $(4{,}75 \pm 8{,}04285)$ тыс. рублей, что соответствует таблице данных.

Линейная алгебра

Задачи 101–110

Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение, и найти его матричным способом. Сделать проверку.

101. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=-18 \\ 4x_1+3x_2+4x_3=-11 \\ -2x_1+3x_2-x_3=3 \end{cases}$

102. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+3x_3=16 \\ 3x_1+3x_2+4x_3=17 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-30 \end{cases}$

103. $\begin{cases} -3x_1-4x_2+5x_3=17 \\ 5x_1+5x_2-x_3=-7 \\ -5x_1+5x_2+3x_3=-29 \end{cases}$

104. $\begin{cases} 4x_1-2x_2+3x_3=-15 \\ 5x_1-4x_2+x_3=-19 \\ -x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$

105. $\begin{cases} -4x_1+x_2-4x_3=10 \\ 4x_1+3x_2-3x_3=15 \\ 2x_1+x_2+x_3=-1 \end{cases}$

106. $\begin{cases} -4x_1-5x_2-2x_3=-4 \\ 5x_1+4x_2+4x_3=-1 \\ 3x_1-x_2-5x_3=0 \end{cases}$

107. $\begin{cases} -4x_1+4x_2-5x_3=-26 \\ -4x_1-5x_2+5x_3=12 \\ -x_1+5x_2+4x_3=-4 \end{cases}$

108. $\begin{cases} -4x_1-2x_2+3x_3=31 \\ 3x_1-5x_2-4x_3=-6 \\ -2x_1+5x_2+x_3=-11 \end{cases}$

109. $\begin{cases} -2x_1+2x_2-5x_3=-18 \\ -3x_1-3x_2-5x_3=-47 \\ -4x_1+5x_2+x_3=13 \end{cases}$

110. $\begin{cases} -3x_1-2x_2-4x_3=4 \\ -5x_1+x_2-4x_3=-3 \\ -2x_1-4x_2-x_3=2 \end{cases}$

Методические указания к решению задач 101 – 110

Матрицы и определители

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Например, матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размер (2×4). В общем виде матрицу размера $(m \times n)$ записывают так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m)$, $(j=1,2,\ldots,n)$, входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. Индекс i указывает номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца.

Матрица-строка – это матрица, состоящая из одной строки, ***матрица-столбец*** – матрица, состоящая из одного столбца.

Матрица, в которой число строк равняется числу столбцов $(m=n)$, называется ***квадратной***, число ее строк (столбцов) называется ***порядком*** квадратной матрицы.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ***главную диагональ матрицы***. Она идет из левого верхнего угла этой матрицы в ее правый нижний угол.

Единичной матрицей Е называют квадратную матрицу, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Например, единичная матрица третьего порядка запишется следующим образом:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для квадратных матриц вводится важнейшая числовая характеристика, которую называют ***определителем*** (детерминантом) и обозначают одним из символов: Δ, det A, $|A|$.

Рассмотрим сначала квадратную матрицу второго порядка. Ее определителем Δ называется число, равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 1: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 5 - (-3)\cdot 1 = -10 + 3 = -7.$

Рассмотрим теперь определитель третьего порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вычисление этого определителя может быть сведено к вычислению определителей второго порядка. Для этого введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором $\boldsymbol{M}_{\mathbf{ij}}$ определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением $\boldsymbol{A}_{\mathbf{ij}}$ элемента a_{ij} называется минор M_{ij}, взятый со знаком +, если сумма (i +j) – четное число, и со знаком –, если сумма (i +j) есть нечетное число:

$$\boldsymbol{A_{ij}} = \begin{cases} \boldsymbol{M_{ij}}, & \textbf{\textit{если}} \quad (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) \quad \textbf{\textit{четное}} \\ -\boldsymbol{M_{ij}}, & \textbf{\textit{если}} \quad (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) \quad \textbf{\textit{нечетное}} \end{cases}$$

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + a_{i3}\cdot A_{i3} = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + a_{3j}\cdot A_{3j}.$$

Пример 2: Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение: Найдем определитель Δ, используя элементы первой строки этого определителя и их алгебраические дополнения

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Вычислим A_{11} – алгебраическое дополнение элемента a_{11}, то есть элемента, который находится в первой строке (i=1) и в первом столбце (j=1). Сумма $i+j = 1+1 = 2$ есть четное число, следовательно, $A_{11} = M_{11}$. Далее, найдем M_{11}. Для этого в определителе Δ вычеркнем первую строку, так как i=1, и первый столбец, так как j=1. Оставшиеся, невычеркнутые, элементы запишем в виде определителя второго порядка. Получим

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 0 \cdot (-2) = 5.$$

Найдем A_{12} – алгебраическое дополнение элемента a_{12}. Здесь i=1, j=2. Сумма $i+j = 1+2 = 3$ есть нечетное число, значит $A_{12} = -\ M_{12}$. Для нахождения M_{12} вычеркнем в определителе Δ первую строку и второй столбец. Из оставшихся чисел составим определитель второго порядка, таким образом,

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)) = -26.$$

Аналогично, находим

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3.$$

Следовательно,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3 \cdot 5 + (-2)\cdot(-26) + 1\cdot(-3) = 64.$$

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю.

Системой линейных алгебраических уравнений называется совокупность линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ***неизвестные***; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – заданные числа, которые называют ***коэффициентами системы***; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – также известные числа, которые называют ***свободными членами системы***.

Решением системы (1) называется любая совокупность значений неизвестных $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots,\ x_n = \alpha_n$, после подстановки которых в систему все ее уравнения обращаются в верные равенства.

Решить систему уравнений – это значит найти все ее решения.

Система уравнений может иметь единственное решение, в этом случае она называется ***совместной определенной***. Если система уравнений имеет бесконечное множество решений, тогда она называется ***совместной неопределенной***. Система уравнений, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

Матричный способ решения системы

Рассмотрим матричный способ решения системы на конкретном примере.

Задача. Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение. Найти его матричным способом. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad (2)$$

Решение: Свяжем с этой системой матрицы *A, X, B*.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Матрица ***A*** – это матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Матрица ***X*** есть матрица-столбец из неизвестных.

Матрица ***B*** – матрица-столбец, составленная из свободных членов.

Систему уравнений (2) можно записать с помощью этих матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или кратко, в матричном виде,

$$A \cdot X = B$$

Поясним, как матрицу A умножить на матрицу-столбец X. Заметим вначале, что результат произведения $A \cdot X$ есть **матрица-столбец** из трех элементов. Для того, чтобы получить первый элемент (в первой строке) этой матрицы, возьмем первую строку матрицы A - это числа 3; -3; 1, и умножим их соответственно на элементы столбца x_1, x_2, x_3 матрицы неизвестных X, затем полученные произведения сложим: $3 \cdot x_1 + (-3) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$. Аналогично, поступим со второй и третьей строками матрицы A. Таким образом,

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 + 1x_3 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что мы получили матрицу, элементы которой есть ни что иное, как левые части уравнений нашей системы (2).

Две ***матрицы называются равными***, если у них соответствующие (стоящие на одинаковых местах) элементы равны.

В нашем случае матрица $A \cdot X$ равна матрице B:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 + 1x_3 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = B$$

Действительно, равенства соответствующих элементов этих матриц есть уравнения нашей системы. Таким образом мы показали, что систему (2) можно записать в виде $A \cdot X = B$.

Решение системы (2) также можно записать с помощью матриц. Для этого введем понятие обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для квадратной невырожденной матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E единичная матрица такого же порядка, что и матрица A.

Отметим, что умножение матриц A и A^{-1} происходит по тому же принципу, что и описанный выше, а именно: матрицу A умножим на первый столбец матрицы A^{-1} получим первый столбец матрицы произведения $A \cdot A^{-1}$, затем матрицу A умножим на второй столбец матрицы A^{-1}, получим второй столбец матрицы произведения, аналогично получим третий столбец.

Далее, **если матрица A невырожденная** ($\Delta \neq 0$), **то система** (2) **имеет единственное решение** и его можно найти по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где обратную матрицу A^{-1} можно записать, используя алгебраические дополнения:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения, соответствующие элементам строк данной матрицы A, располагаются в столбцах с теми же номерами, что и строки.

Покажем, что наша система имеет единственное решение, и найдем его.

Сначала найдем все алгебраические дополнения (более подробные разъяснения см. в примере 2).

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-6 + 2) = 4$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-6 + 2) = 4$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 3) = 3$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+3) = 3$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 9 = 6$$

Найдем определитель матрицы A.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Для вычисления определителя используем его разложение по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Тогда

$$\Delta = 3 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 18 - 12 + 1 = 7.$$

Видим, что **$\Delta=7\neq 0$**. Значит, наша система имеет **единственное решение**.

Составим A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение данной системы уравнений:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -12+20-1 \\ -8+25-3 \\ -2+15-6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \cdot 7 \\ \frac{1}{7} \cdot 14 \\ \frac{1}{7} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь, в последнем действии, мы воспользовались правилом ***умножения матрицы на число***: нужно каждый элемент матрицы умножить на это число (в примере это число $\frac{1}{7}$).

Далее, из равенства матриц

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Проверка: имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Подставим найденные значения неизвестных x_1, x_2, x_3 в каждое уравнение системы

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = -2 \\ -3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 5 \\ 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

Все равенства верные.

Ответ: (1; 2; 1) – единственное решение системы.

Линейное программирование

Задачи 111-120

Решить графически задачу линейного программирования (ЛП).

111. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = x_1 + x_2 \to \max$

112. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = x_1 + 2x_2 \to \max$

113. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \le 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = 4x_1 + x_2 \to \max$

114. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = 4x_1 + x_2 \to \max$

115. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 4x_1 - x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = x_1 + 2x_2 \to \max$

116. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = 4x_1 + x_2 \to \max$

117. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = x_1 + x_2 \to \max$

118. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
$z = 3x_1 + x_2 \to \max$

119. $\begin{cases} x_1+4x_2\ge 4 \\ 3x_1+2x_2\le 18 \\ 4x_1+x_2\ge 4 \\ x_1+2x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$
$z=x_1+x_2\to\max$

120. $\begin{cases} 3x_1+x_2\le 12 \\ x_1+3x_2\le 12 \\ x_1+2x_2\ge 3 \\ 2x_1+x_2\ge 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$
$z=2x_1+3x_2\to\max$

Методические указания к решению задач 111– 120

Постановка задачи линейного программирования

Многие экономические задачи связаны с нахождением наилучших решений в условиях многочисленных пожеланий и ограничений. Математическое описание таких задач приводит к составлению их математических моделей.

Построение математической модели экономической задачи включает следующие этапы:
1). выбор переменных задачи;
2). выбор и составление целевой функции;
3). составление системы ограничений.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, ..., x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс.

Целевой функцией называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи, и экстремум которой требуется найти.

Системой ограничений называют систему уравнений и неравенств, которым должны удовлетворять переменные задачи.

Часто рассматривают наиболее простой случай, когда целевая функция и система ограничений являются линейными.

В общем виде математическая модель задачи линейного программирования имеет вид:

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_jx_j+\ldots+c_nx_n\to\max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},$$

где x_j – неизвестные; a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины, $z = z\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – целевая функция.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется совокупность значений переменных x_1, x_2, …, x_n, удовлетворяющая системе ограничений, включая условия неотрицательности переменных. Множество допустимых решений образует ***область допустимых решений*** (ОДР).

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения (максимума или минимума).

Система ограничений задачи может содержать как уравнения, так и неравенства. Однако, ее всегда можно привести к виду, когда система содержит только уравнения (каноническая форма записи) или только неравенства (стандартная форма записи). В настоящее время задачи линейного программирования решаются с помощью компьютерных технологий. Если задача линейного программирования в стандартной форме записи содержит две переменные x_1 и x_2, то ее можно решить графически.

Графический метод решения задачи ЛП

Задача. Решить графически задачу линейного программирования

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \mathbf{max}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 - 3x_2 \le -2, \\ 3\tilde{o}_1 - 2\tilde{o}_2 \ge -10 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение: Решение задачи состоит из двух этапов: построение ОДР и нахождения оптимального решения из допустимых.

1). Для построения области допустимых решений изобразим графически множество решений каждого неравенства системы ограничений.

а). Рассмотрим первое неравенство: $1{,}5x_1 + x_2 \le 15$. Множество решений этого неравенства есть полуплоскость с граничной прямой $1{,}5x_1 + x_2 = 15$. Построим эту прямую по двум точкам, например, (0;15) и (10;0). На рис. 10 прямая $1{,}5x_1 + x_2 = 15$ - это прямая (1). Видим, что эта прямая разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Определим, какая из них задается неравенством $1{,}5x_1 + x_2 \le 15$. Это можно сделать с помощью пробной точки. В качестве пробной точки возьмем любую точку, не лежащую на граничной прямой. Например, точку (0,0). Подставим координаты этой точки в неравенство, получим

$$1{,}5 \cdot 0 + 0 \le 15$$

$0 \le 15$ - верное неравенство.

Следовательно, искомая полуплоскость содержит точку (0,0), то есть, выбираем полуплоскость ниже прямой (1).

б). Аналогично, находим графически множество решений второго неравенства. Неравенство $x_1 - 3x_2 \le -2$ есть полуплоскость. Прямая $x_1 - 3x_2 = -2$ - граница этой полуплоскости. Строим эту прямую, найдя координаты двух ее точек, например, (0;2/3) и (-2;0). На рис.10 прямая $x_1 - 3x_2 = -2$ это прямая (2). Выбираем нужную нам полуплоскость с помощью пробной точки (0;0). Подставив точку (0;0) в рассматриваемое неравенство, получим

$$0 - 3 \cdot 0 \le -2$$

$0 \le -2$ - неверное неравенство.

Следовательно, выбираем полуплоскость, которая не содержит точку (0;0), то есть полуплоскость, расположенную выше прямой (2).

с). Далее, множество решений третьего неравенства, $3x_1 - 2x_2 \geq -10$, есть полуплоскость с граничной прямой $3x_1 - 2x_2 = -10$. Строим эту прямую по двум точкам: (0;6) и (-10/3;0). На рис.10 это прямая (3). Искомую полуплоскость определим с помощью пробной точки (0;0): $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \geq -10$ - верное неравенство. Следовательно, искомая полуплоскость содержит точку (0;0) и лежит ниже прямой (3).

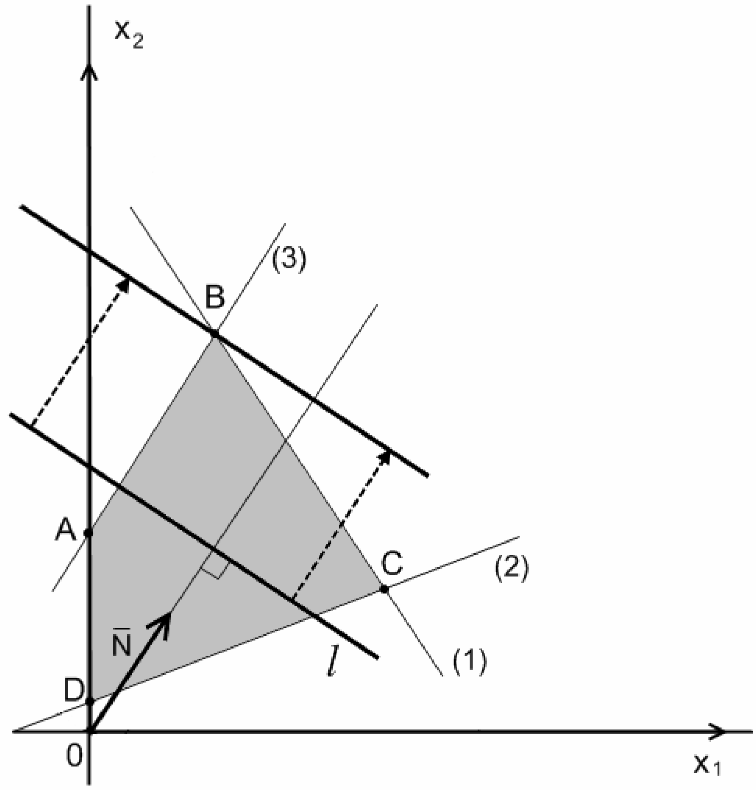
Условия неотрицательности $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ означают, что область допустимых решений находится в I-й четверти.

Найдем множество точек, лежащих одновременно во всех полуплоскостях и в I-й четверти. В нашей задаче, на рис. 10, это четырехугольник АВСД. Точки, лежащие внутри и на границе этого четырехугольника, и есть допустимые решения задачи, очевидно, что их бесконечно много.

2). Из бесконечного множества допустимых решений нужно выбрать оптимальное. Это делается с помощью целевой функции $z = 3x_1 + 4x_2$. На координатной плоскости эту функцию можно изобразить с помощью линий уровня, то есть с помощью линий, на которых значения функции z постоянны, $z = C$ (const) или $3x_1 + 4x_2 = C$. Графически, линии уровня есть семейство параллельных прямых. Покажем, как построить линии уровня.

Если масштабы по осям одинаковые, то построение можно начать с вектора $\overline{N}$, который перпендикулярен всем линиям уровня. Таким вектором является вектор-градиент $\overline{N} = gradz = \{3;4\}$, его координаты совпадают с коэффициентами целевой функции z. Вектор-градиент показывает направление быстрейшего возрастания функции z. Начало этого вектора удобно поместить в точке (0;0), тогда его конец будет в точке (3;4). Построим этот вектор и заметим, что при необходимости его длину можно увеличить, так как для решения задачи важно лишь направление этого вектора.

Линии уровня расположены перпендикулярно этому вектору $\overline{N}$. Проведем одну из них, которая пересекает ОДР. На рис.10 это прямая l.



l: $3x_1+4x_2=C$

Рис. 10

Далее, перемещаем прямую l по направлению вектора $\overline{N}$. Точкой выхода этой прямой из области допустимых решений является точка В. Эта точка и есть точка максимума целевой функции. Видим, что точка В лежит на пересечении прямых (1) и (3). Ее координаты находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}5x_1+x_2=15 \\ 3x_1-2x_2=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=15-1{,}5x_1 \\ 3x_1-2(15-1{,}5x_1)=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{10}{3} \\ x_2=10 \end{cases}$$

Таким образом найдена точка В(10/3;10). Обратите внимание, что ее координаты должны соответствовать графику. Вычислим максимальное значение целевой функции:

$$z_{\max}=z\,(\text{B})=\mathbf{3\cdot 10/3+4\cdot 10=50}$$

Ответ: $z_{\max}=50$ при $x_1=10/3$, $x_2=10$.

Замечание: Для задач на минимум линию уровня перемещаем в направлении, противоположном вектору $\overline{N}$ до тех пор, пока у нее не окажется только одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка и будет точкой минимума.

Если окажется, что линии уровня параллельны одной из сторон ОДР, то в этом случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а задача ЛП будет иметь бесчисленное множество решений.

Задача ЛП может быть неразрешима, если ее ограничения окажутся противоречивыми, тогда ОДР есть пустое множество.

6. ЗАДАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Тема 1.1. Множества.

Основные вопросы.

Понятие множества. Операции над множествами.

Типовые задачи.

1. Установить, какая из двух записей верна:

а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

2. Даны множества: Z – целых чисел, M – отрицательных чисел, P – положительных чисел. Найти для этих множеств $(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{M})\bigcap \boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{M}\bigcap \boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{M}\bigcup \boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{Z}\bigcup \boldsymbol{M}$.

Тема 1. 2. Аналитическая геометрия на плоскости

Основные вопросы.

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Смысл углового коэффициента, особенности расположения прямой в зависимости от величины углового коэффициента.
2. Общее уравнение прямой и его частные случаи.
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Типовые задачи.

1. Построить прямые, заданные уравнениями: a) $y = 4 - 2x$;

б) $3x - 5y + 15 = 0$; *в*) $2y + 5 = 0$; *г)* $x - 6 = 0$; *д*) $4x - 5y = 0$.

2. Найти длину и середину отрезка АВ, если известны точки: $A(1;-2)$ и $B(7; 6)$, сделать чертеж.

3. Найти уравнения прямых, проходящих через точку М(2,-3) параллельно и перпендикулярно прямой $3x - 4y + 12 = 0$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки А(4,-1) и В (-5,3), сделать проверку и чертеж.

5. Найти острый угол между прямыми $5x - 2y + 1 = 0$ и $y = 7 - 3x$.

6. Найти расстояние от точки М(-9;5) до прямой $y = 3x - 8$.

Тема 1.3. Функция и предел функции

Основные вопросы.

1. Понятие предела функции в точке и на бесконечности, их графические пояснения. Односторонние пределы.

1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и взаимная связь.
2. Первый и второй замечательные пределы. Число ***e***.
3. Определение эквивалентных бесконечно-малых, привести примеры эквивалентных бесконечно-малых.
4. Понятие непрерывности функции в точке. Точки разрыва, их виды.

Типовые задачи.

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^7 - 5x^5 + 2}{7x^6 - 3x - 4}$; *б*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 7\sqrt{x} + 2}{5x^2 + 6x - 4}$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3}{x + 2}$; *г*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin^3 x} - 1}{x^2 - x^3}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg^2 2x}{x \sin 5x}$; *е*) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n + 1}{2n - 1}\right)^{2n + 4}$;

2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{2x}{x - 1}$, изобразить схематически ее график.

Тема 1.4. Дифференциальное исчисление и его приложения

Основные вопросы.

1. Понятие производной и дифференциала функции.
2. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
3. Признаки возрастания и убывания функции.
4. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.
5. Признаки выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Необходимые и достаточные условия перегиба графика функции.

Типовые задачи.

1. Найти производные функций:

а) $y = 5x - \dfrac{4}{x^3}$; б) $y = arctg(2x+3)$

в) $y = \dfrac{3 - x^2}{5x+1}$ г) $y = x^2\ln(3x\text{-}1)$.

2. Исследовать функции средствами дифференциального исчисления и построить их графики:

а) $y = x^3 - 9x^2$; б) $y = xe^{-x}$; в) $y = xlnx$.

3. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = 4x - x^2$ в точке $x = 1$. Результаты изобразить графически.

4. Найти пределы функций по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2 - 15x + 18}{x^2 - 4x - 12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x} - 1}{sin2x}$.

Тема 1.5. Интегральное исчисление и его приложения

Основные вопросы.

1. Определённый интеграл, его геометрический смысл.
2. Основные методы интегрирования.

Типовые задачи.

1. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-5}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{2x^3+5\sqrt{x}-x}{x^2}dx$; $\quad$ $в)\ \int x\cos\left(4x^2\right)dx$;

$г)\ \int \frac{x+2,5}{x^2+5x-6}dx$; $\quad$ $д)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$; $\quad$ $е)\ \int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$.

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

а) $y = x^2$, $\quad y = 0,\ \ x = 2$;
б) $y = x^3$, $\quad y = 8$;
в) $y = x^2$, $\quad y = \sqrt{x}$;
г) $y = 4 - x^2$, $\quad y = x^2 - 2x$.

Тема 1.6. Дифференциальные уравнения

Основные вопросы.

1. Понятие дифференциального уравнения и его порядка.
2. Задача Коши для дифференциальных уравнений первого и второго порядков.
3. Общее и частное решение дифференциального уравнения.
4. Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Типовые задачи.

1. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$a)\ y' = \frac{y}{x}; x_0 = 1, y_0 = 2$ $\qquad$ $б)\ y' - 4x^3y = 0; x_0 = 0, y_0 = 2$

2. Найти общее решение и частное решение, удовлетворяющее начальному условию, для следующих линейных уравнений:

$a)\ y' - \frac{5y}{x} = x^{-2}; x_0 = 1, y_0 = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $б)\ y' + 2y = e^{-x}; x_0 = 0, y_0 = 3$

3. Найти общее решение и решение задачи Коши для однородных линейных ДУ с постоянными коэффициентами:

$$а)\ y'' - 10y' + 25y = 0; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -5$$

$$б)\ y'' - 12y' + 45y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 9$$

Тема 1.7. Ряды

Основные вопросы.

1. Числовой ряд, определение сходимости и расходимости ряда.
2. Гармонические и геометрические ряды, их сходимость.
3. Необходимый признак сходимости числовых рядов.
4. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.
5. Степенные ряды, радиус и интервал сходимости степенного ряда.
6. Разложение функции в ряды Тейлора и Маклорена.

Типовые задачи.

1. Найти пятый член ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$.

2. Найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$.

3. Установить сходимость или расходимость положительных числовых рядов:

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ $\quad$ $б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n+2}}$ $\quad$ $в)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1};$ $\quad$ $г)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$

4. Исследовать сходимость знакочередующихся числовых рядов и установить вид сходимости:

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n};$ $\quad$ $б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$ $\quad$ $в)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$

5. Найти область сходимости степенных рядов:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

6. Записать первые три члена разложения в ряд Маклорена для функции $f(x) = ln(1+3x)$.

Тема 1.8. Аналитическая геометрия в пространстве

Основные вопросы.

1. Линейные операции над векторами, заданными геометрически и в координатной форме.
2. Скалярное произведение векторов.
3. Понятие векторного произведения векторов, его вычисление в координатной форме.
4. Условия коллинеарности и ортогональности векторов.
5. Общее уравнение плоскости в пространстве. Его частные случаи.
6. Общие и канонические уравнения прямой в пространстве.

Типовые задачи.

1. Найти вектор $4\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

2. Найти скалярное и векторное произведения векторов:

$$\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}, \qquad \overline{b} = 6\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$$

3. Найти параметр t так, чтобы векторы $\boldsymbol{a} = -6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ были ортогональны.

4. Найти угол между векторами $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$ и $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;3;4)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 5\overline{k}$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3;4)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = (3;2;0)$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(3;2;1)$ и $B(0;2;5)$.

8. Найти точку пересечения прямой $x = 2t - 1,\ y = t + 2,\ z = 1 - t$ с плоскостью $3x - 2y + z = 0$.

9. Найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $M_1(3; -1;5)$, $M_2(-2;1;4)$ и $M_3(0;-3;6)$.

Тема 1.9. Функции нескольких переменных

Основные вопросы.

1. Понятие функции двух переменных, её графическое изображение. Линии уровня для функции двух переменных.
2. Понятие частных производных, их смысл. Полный дифференциал для функции двух и трёх переменных.
3. Производная по направлению, её смысл.
4. Вектор-градиент, его смысл.
5. Понятие экстремума для функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Типовые задачи.

1. Найти уравнение линий уровня и построить несколько линий уровня для функции:

а) $z = x - 2y$; *б*) $z = xy$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции:

а) $z = x^4 e^y + \sqrt[3]{x^2 y}$; *б*) $z = x^3 e^{x^2 + y^2}$.

3. Найти градиент функции $z = x^4 + y^3 + 2xy$ в точке $M(2;1)$.

4. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2)$ в точке $M(2;3)$ в направлении вектора $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$.

5. Найти экстремум функции во всей её области определения:

а) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; *б*) $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = x^3 + y^3 - 3xy$, в области $0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Тема 2.1. Матрицы

Основные вопросы.

1. Векторное пространство R^n.
2. Матрицы, действия над матрицами.
3. Определители. Свойства определителей.
4. Обратная матрица.

Типовые задачи.

1. Вычислить определители:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad б)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \; c)\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить обратную матрицу и сделать проверку:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; б)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad c)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Тема 2.2. Система линейных алгебраических уравнений

Основные вопросы.

1. Решение СЛАУ методом исключения Жордана-Гаусса.
2. Решение СЛАУ методом Крамера и обратной матрицы.
3. Решение однородных систем алгебраических уравнений.
4. Фундаментальная система решений СЛАУ.

Типовые задачи.

1. Решить систему уравнений:

$$a)\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \; б)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Исследовать совместность системы уравнений и в случае совместности найти её общее решение:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 + -18x_4 = -1 \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5 \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$

Тема 3.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Основные вопросы.

1. Испытание, события, виды событий.
2. Классическое и статистическое определения вероятности.
3. Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.
4. Теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.
5. Вероятность появления хотя бы одного события.
6. Полная группа событий.
7. Формула полной вероятности и формула Байеса.

Типовые задачи.

1. Эксперт оценивает качественный уровень трех видов изделий по потребительским признакам. Вероятность того, что изделию первого вида будет присвоен знак качества, равна 0,95; для изделия второго вида эта вероятность равна 0,85; а для изделия третьего вида 0,65. Найти вероятность того, что знак качества будет присвоен: *а*) всем изделиям; *б*) только одному изделию; *в*) хотя бы одному изделию.

2. В партии товара, состоящей из 50 мужских костюмов, находится 30 изделий местного производства. Товаровед наудачу отбирает три изделия. Какова вероятность, что все три изделия окажутся: *а*) местного производства; *б*) не местного производства?

Тема 3.2. Повторные независимые испытания

Основные вопросы.

1. Повторение независимых испытаний. Формула Бернулли.
2. Наивероятнейшее число появлений события в **n** испытаниях.
3. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Типовые задачи.

1. В магазин поступает натуральный сок в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причем местный изготовитель поставляет 30% всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции – 0,6%, а для иногородней – 2%. Найти вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется неразбитой.

2. Оптовая база снабжает товаром n магазинов. Вероятность того, что в течение дня поступит заявка на товар, равна p для каждого магазина. Найти вероятность того, что в течение дня: 1) поступит k заявок; 2) не менее k_1 и не более k_2 заявок; 3) каково наивероятнейшее число поступающих в течение дня заявок и чему равна соответствующая ему вероятность?

а) $p = 0,6$; $n = 7$; $k = 4$; $k_1 = 0$; $k_2 = 2$;

б) $p = 0,7$; $n = 20$; $k = 7$; $k_1 = 8$; $k_2 = 14$.

Тема 3.3. Дискретная случайная величина

Основные вопросы.

1. Случайные величины, их виды и способы задания.
2. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.
3. Биноминальный закон распределения дискретной случайной величины.

Типовые задачи.

1. Найти: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по известному закону ее распределения , заданному таблично:

X	12	14	18	24	27
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Тема 3.4. Непрерывная случайная величина

Основные вопросы.

1. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

2. Нормальный закон распределения, показательный и равномерный законы распределения случайной величины.
3. Закон больших чисел.

Типовые задачи.

1. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5 % коробок имеют массу, меньшую 500 г. Вес коробок распределён по нормальному закону. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) отличается от средней не более, чем на 30 г?

2. Интервал движения автобуса равен 15 минут. Какова вероятность того, что пассажир на остановке автобуса будет ждать его не более 5 минут?

Тема 4.1. Задачи линейного программирования

Основные вопросы.

1. Постановка задачи линейного программирования (ЛП).
2. Выпуклые многогранники в R^n. Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП.
3. Существование решения задачи ЛП. Задача ЛП как экстремальная задача функции нескольких переменных.
4. Схема симплекс – метода.

Типовые задачи.

1. Для изготовления компота двух видов используются яблоки, вишни, сливы. Количество фруктов в килограммах для изготовления одной банки компота и цена одной банки компота каждого вида даются в таблице:

Фрукты	Вид компота		Запасы фруктов
	Первый	Второй	
Яблоки	1,6	0,8	8000
Вишни	0,4	0	1200
Сливы	0	1,2	9600
Цена одной банки, руб.	10	8	

Составить план производства, дающий максимальный доход от реализации продукции.

2. Решить графически задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 4; \\ x_1 - x_2 \leq 0. \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad \boldsymbol{Z = 4x_1 + 2x_2} \to \min.$$

Тема 4.2. Транспортная задача линейного программирования

Основные вопросы.

1. Постановка транспортной задачи, сведение ее к задаче ЛП.
2. Схема решения транспортной задачи.

Типовые задачи.

1. На трех станциях A_1, A_2, A_3 сосредоточен однородный груз соответственно в объемах *9,16,5 (т),* который необходимо доставить четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно в объемах *11, 7, 8, 4 (т).* Затраты на перевозку тонны груза из каждой станции до каждого потребителя заданы матрицей тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется спланировать перевозки так, чтобы обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов.

Тема 4.3. Оптимизационные задачи

Основные вопросы.

1. Экономические задачи, приводящие к задаче математического программирования. Построение математической модели.
2. Задачи на безусловный экстремум, задача на условный экстремум, множители Лагранжа.

Типовые задачи.

1. Найти экстремумы функции $f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 4x_2$ при условии $\boldsymbol{x_1^2 + 4x_2^2 = 8}$.

2. Имеется 3 механизма: A_1, A_2, A_3, каждый из которых может быть использован на каждой из трёх видов работ: B_1, B_2, B_3. Производительность их даётся в таблице

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	2	4	1
A_3	3	1	5

Требуется так распределить механизмы по видам работ, чтобы суммарная производительность была наибольшей, причём каждый механизм выполнял бы только один вид работ.

Тема 4.4. Игровые методы в экономике

Основные вопросы.

1. Матричные игры. Равновесная ситуация.
2. Основная теорема теории матричных игр.
3. Основные свойства оптимальных смешанных стратегий.
4. Графический метод решения матричных игр.
5. Решение игр с помощью линейного программирования.
6. Игры с природой. Игры с нулевой суммой. Кооперативные игры.

Типовые задачи.

1. Рассмотреть игру с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 9 & 7 \\ 8 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Путем исключения недоминирующих стратегий свести эту игру к игре с матрицей 2×2, которую решить в смешанных стратегиях.

2. Указать диапазон значений параметра λ, в котором игра имеет седловую точку

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & -3 \\ 7 & 6 & \lambda & 2 \\ 4 & -2 & -5 & 3 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 4.5. Методы сетевого планирования и управления

Основные вопросы.

1. Методы сетевого планирования и управления.
2. Графы: плоские, эйлеровы, гамильтоновы, орграфы.
3. Сетевые графики. Правила построения сетевых графиков.
4. Сети Петри.
5. Временные параметры сетевых графиков.
6. Коэффициент напряженности работы.
7. Анализ и оптимизация сетевого графика.

Типовые задачи.

1. Нарисовать граф, соответствующий матрице A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тема 4.6. Системы массового обслуживания

Основные вопросы.

1. Системы массового обслуживания.
2. Марковский случайный процесс.
3. Потоки событий.
4. СМО с отказами.
5. СМО с неограниченным ожиданием.
6. СМО с ожиданием и с неограниченной длиной очередью.
7. Определение эффективности использования трудовых и производственных ресурсов в СМО.

Типовые задачи.

1. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов составляет 0,4 судна в сутки. Интенсивность разгрузки судов составляет 0,5 судна в сутки. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Определить показатели эффективности работы причала и вероятность того, что ожидают разгрузки не более двух судов.

7. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

6.1. Основная литература

1. Ячменев, Л.Т. Высшая математика: учебник / Л. Т. Ячменев; – М.: ИЦ РИОР. НИЦ Инфра–М, 2013. – 752 с. – (ЭБС znanium.com)
2. Клюшин В. Л. Высшая математика для экономистов: учебник / В. Л. Клюшин; Рос. ун-т. дружбы народов. – М.:ИНФРА–М, 2006.– 447 с.
3. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: КноРус, 2009. – 376 с.

6.2 Дополнительная литература

4. Шипачев, В. С. Основы высшей математики: учебн. пособие для вузов / В. С. Шипачев; под ред. А. Н. Тихонова. – 7-е изд. – М.: Юрайт: Высшее образование, 2009. – 479 с.
5. Грес, П. В. Математика для гуманитариев: учебн. пособие для вузов / П. В. Грес. – М.: Логос, 2004. – 158 с.
6. Баврин, И. И. Высшая математика: учебн. пособие для вузов / И. И. Баврин, В. Л. Матросов. – М.: Владос, 2002. – 398 с.
7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман; – 8-е изд., стер. – М.: Высш. образование, 2006. – 479 с.: ил.
8. Яковлев, В. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. П. Яковлев. – 2-е изд. – М.: Дашков и Ко, 2009. – 181 с.
9. Гусак, А. А. Теория вероятностей: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричинова. – 3-е изд., стер. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 286 с.
10. Ниворожкина, Л. И. Математическая статистика с элементами теории вероятностей в примерах и задачах с решениями: учеб. пособие для вузов / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. – Ростов н / Д: МарТ, 2005. – 600 с.