Курсовая работа
по курсу «Дифференциальные уравнения».
Выполнил студент группы 7о-201С Иванов И.И.
Вариант №1

Этап #5

Задание:

Вариант №1	***Этап #5***
1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}, \quad x(0) = -4,\ y(0) = 0$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}, \quad x(0) = -4, y(0) = 0$	**<u>Задание 1</u>**. Решить задачу Коши для системы линейных однородных ДУ (СЛОДУ). Общее решение системы найти методом Эйлера. **<u>Задание 2</u>**. Исследовать на устойчивость систему. Построить траектории движения вблизи точки покоя.

Задание 1.

Пример 1.

<u>Дано:</u> $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

<u>Решение:</u>

Решим сначала систему линейных однородных ДУ (СЛОДУ) методом Эйлера.

Составим матрицу коэффициентов системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Замечание.
В первую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из первого уравнения системы.
Во вторую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из второго уравнения системы.

Составим матрицу $A - \lambda E$: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot(4-\lambda)-3\cdot 1=\lambda^2-6\lambda+5$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2-6\lambda+5=0$ - характеристическое уравнение.
Найдем собственные значения матрицы , решив уравнение:

$$\lambda^2-6\lambda+5=0$$

$$D=6^2-4\cdot 5=16$$

$$\lambda_1=\frac{6-\sqrt{16}}{2}=1 \qquad \lambda_2=\frac{6+\sqrt{16}}{2}=5$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, действительные.

Запишем матрицу $A-\lambda_1 E$, где $\lambda_1=1$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}2-1 & 3\\ 1 & 4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_1 из уравнения:

$$(A-\lambda_1 E)\cdot V_1=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}v_1+3v_2=0\\ v_1+3v_2=0\end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:
Пусть $v_2=1$, тогда из первого уравнения системы $v_1=-3v_2=-3$.
Окончательно:

$$V_1=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $A-\lambda_2 E$, где $\lambda_2=5$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}2-5 & 3\\ 1 & 4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A-\lambda_2 E)\cdot V_2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-3v_1+3v_2=0\\ v_1-v_2=0\end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:
Пусть $v_2=1$, тогда из второго уравнения системы $v_1=v_2=1$.
Окончательно:

$$V_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Запишем решение системы в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5 \cdot t}$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

<u>Проверка:</u>

Из решения: $\dot{x} = -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$ и $\dot{y} = C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$

Подставим выражения для x, y, $\dot{x}$ в первое уравнение исходной системы:

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = 2(-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 3(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -6C_1 \cdot e^t + 2C_2 \cdot e^{5t} + 3C_1 \cdot e^t + 3C_2 \cdot e^{5t}$$

$$\underline{-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}}$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x, y, $\dot{y}$ во второе уравнение исходной системы:

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = (-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 4(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} + 4C_1 \cdot e^t + 4C_2 \cdot e^{5t}$$

$$\underline{C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}}$$

получено верное тождество

Решим теперь задачу Коши.

Условие $x(0) = -4$ означает, что при $t = 0$ функция x принимает значение равное -4:

$$1 = -3C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^{5 \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad -3C_1 + C_2 = 4$$

Условие $y(0) = 0$ означает, что при $t = 0$ функция y принимает значение равное 0:

$$0 = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^{5 \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 0$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} -3C_1 + C_2 = -4 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -1$$

Подставим найденные значения в общее решение системы.

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = -3e^t - e^{5 \cdot t} \\ y = e^t - e^{5 \cdot t} \end{cases}}$

Пример 2.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$

Решение:

Решим сначала систему линейных однородных ДУ (СЛОДУ) методом Эйлера.

Составим матрицу коэффициентов системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Замечание.
В первую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из первого уравнения системы.
Во вторую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из второго уравнения системы.

Составим матрицу $A - \lambda E$: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 1\cdot(-2) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Найдем собственные значения матрицы, решив уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.

$$D = 16 - 4\cdot 5\cdot 1 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 2\cdot i}{2} = 2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i \end{matrix}$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, комплексно-сопряженные.

Т.к. корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 простые, комплексно-сопряженные, выберем любой из них, например $\lambda_2 = 2 - i$.

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 2 - i$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1-2+i & 1 \\ -2 & 3-1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A-\lambda_2 E)\cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (-1+i)\cdot v_1 + v_2 = 0 \\ -2v_1 + (1+i)\cdot v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение. Пусть $v_1 = 1$, тогда из первого уравнения системы $v_2 = (1-i)\cdot v_1 = 1-i$.

Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произведение:

$$P = V_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\cdot e^{(2-i)\cdot t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\cdot[\cos t - i\cdot\sin t]\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} \cos t - i\cdot\sin t \\ (1-i)\cdot(\cos t - i\cdot\sin t) \end{pmatrix}\cdot e^{2t} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t - i\cdot\sin t \\ \cos t - i\cdot\cos t - i\cdot\sin t - \sin t \end{pmatrix}\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} \cos t - i\cdot\sin t \\ (\cos t - \sin t) - i\cdot(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}\cdot e^{2t}$$

Окончательно:

$$P = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}\cdot e^{2t} - i\cdot\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}\cdot e^{2t}$$

4. Запишем решение системы в векторной форме в виде линейной комбинации действительной и мнимой частей полученного произведения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}\cdot e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}\cdot e^{2t}$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = C_1\cos t\cdot e^{2t} + C_2\sin t\cdot e^{2t} \\ y = (C_1 + C_2)\cdot\cos t\cdot e^{2t} + (-C_1 + C_2)\cdot\sin t\cdot e^{2t} \end{cases}$$

<u>Проверка:</u>

Из решения: $\dot{x} = C_1(-\sin t\cdot e^{2t} + 2\cos t\cdot e^{2t}) + C_2(\cos t\cdot e^{2t} + 2\sin t\cdot e^{2t})$ и

$\dot{y} = (C_1 + C_2)\cdot(-\sin t\cdot e^{t} + 2\cos t\cdot e^{t}) + (-C_1 + C_2)\cdot(\cos t\cdot e^{t} + 2\sin t\cdot e^{t})$

Подставим выражения для x, y, $\dot{x}$ в первое уравнение исходной системы:

$$C_1(-\sin t\cdot e^{2t} + 2\cos t\cdot e^{2t}) + C_2(\cos t\cdot e^{2t} + 2\sin t\cdot e^{2t}) = C_1\cos t\cdot e^{2t} + C_2\sin t\cdot e^{2t} +$$

$$+ (C_1 + C_2)\cdot\cos t\cdot e^{2t} + (-C_1 + C_2)\cdot\sin t\cdot e^{2t}$$

$$C_1(-\sin t\cdot e^{2t}+2\cos t\cdot e^{2t})+C_2(\cos t\cdot e^{2t}+2\sin t\cdot e^{2t})=C_1\cos t\cdot e^{2t}+C_2\sin t\cdot e^{2t}+$$
$$+C_1\cos t\cdot e^{2t}+C_2\cos t\cdot e^{2t}-C_1\sin t\cdot e^{2t}+C_2\sin t\cdot e^{2t}$$

$$C_1(-\sin t\cdot e^{2t}+2\cos t\cdot e^{2t})+C_2(\cos t\cdot e^{2t}+2\sin t\cdot e^{2t})=$$
$$=C_1(-\sin t\cdot e^{2t}+2\cos t\cdot e^{2t})+C_2(\cos t\cdot e^{2t}+2\sin t\cdot e^{2t})$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x, y, $\dot{y}$ во второе уравнение исходной системы:

$$(C_1+C_2)(-\sin t\cdot e^{2t}+2\cos t\cdot e^{2t})+(-C_1+C_2)\cdot(\cos t\cdot e^{2t}+2\sin t\cdot e^{2t})=$$
$$=-2(C_1\cdot\cos t\cdot e^{2t}+C_2\cdot\sin t\cdot e^{2t})+3((C_1+C_2)\cdot\cos t\cdot e^{2t}+(-C_1+C_2)\cdot\sin t\cdot e^{2t})$$

$$C_1(-3\sin t\cdot e^{2t}+\cos t\cdot e^{2t})+C_2(3\cos t\cdot e^{2t}+\sin t\cdot e^{2t})=$$
$$C_1(-2\cos t\cdot e^{2t}+3\cos t\cdot e^{2t}-3\sin t\cdot e^{2t})+C_2(-2\sin t\cdot e^{2t}+3\cos t\cdot e^{2t}+3\sin t\cdot e^{2t})$$

$$C_1(-3\sin t\cdot e^{2t}+\cos t\cdot e^{2t})+C_2(3\cos t\cdot e^{2t}+\sin t\cdot e^{2t})=$$
$$=C_1(-3\sin t\cdot e^{2t}+\cos t\cdot e^{2t})+C_2(3\cos t\cdot e^{2t}+\sin t\cdot e^{2t})$$

получено верное тождество

Решим теперь задачу Коши.

Условие $x(0)=-4$ означает, что при $t=0$ функция x принимает значение равное -4:

$$-4=C_1\cos 0\cdot e^{2\cdot 0}+C_2\sin 0\cdot e^{2\cdot 0}\quad\Rightarrow\quad C_1=-4$$

Условие $y(0)=0$ означает, что при $t=0$ функция y принимает значение равное 0:

$$0=(C_1+C_2)\cos 0\cdot e^{2\cdot 0}+(-C_1+C_2)\sin 0\cdot e^{2\cdot 0}\quad\Rightarrow\quad C_1+C_2=0$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases}C_1=-4\\C_1+C_2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad C_1=-4,\quad C_2=4$$

Подставим найденные значения в общее решение системы.

Ответ: $\boxed{\begin{cases}x=-4\cos(t)\cdot e^{2t}+4\sin(t)\cdot e^{2t}\\y=8\sin(t)\cdot e^{2t}\end{cases}}$

Задание 2.

Пример 1.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

Решение:

Составим матрицу коэффициентов системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы (см. задание №1).

Собственные значения матрицы $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ являются:

- действительными
- различными (простыми),
- одного знака (положительными),

следовательно, точка покоя – ***неустойчивый узел.***

Для построения траекторий движения построим на плоскости (x, y) собственные вектора матрицы (см. задание №1): $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Траектории движения будут касаться прямой, проходящей вдоль вектора $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.к. этот вектор соответствует меньшему по модулю корню $\lambda_1 = 1$.

Замечание.
Собственные векторы строятся на чертеже **ТОЛЬКО** в случаях узла, вырожденного узла и седла.
Касание траекторий и собственного вектора имеет место **ТОЛЬКО** в случаях узла и вырожденного узла.

Построим траектории методом изоклин.

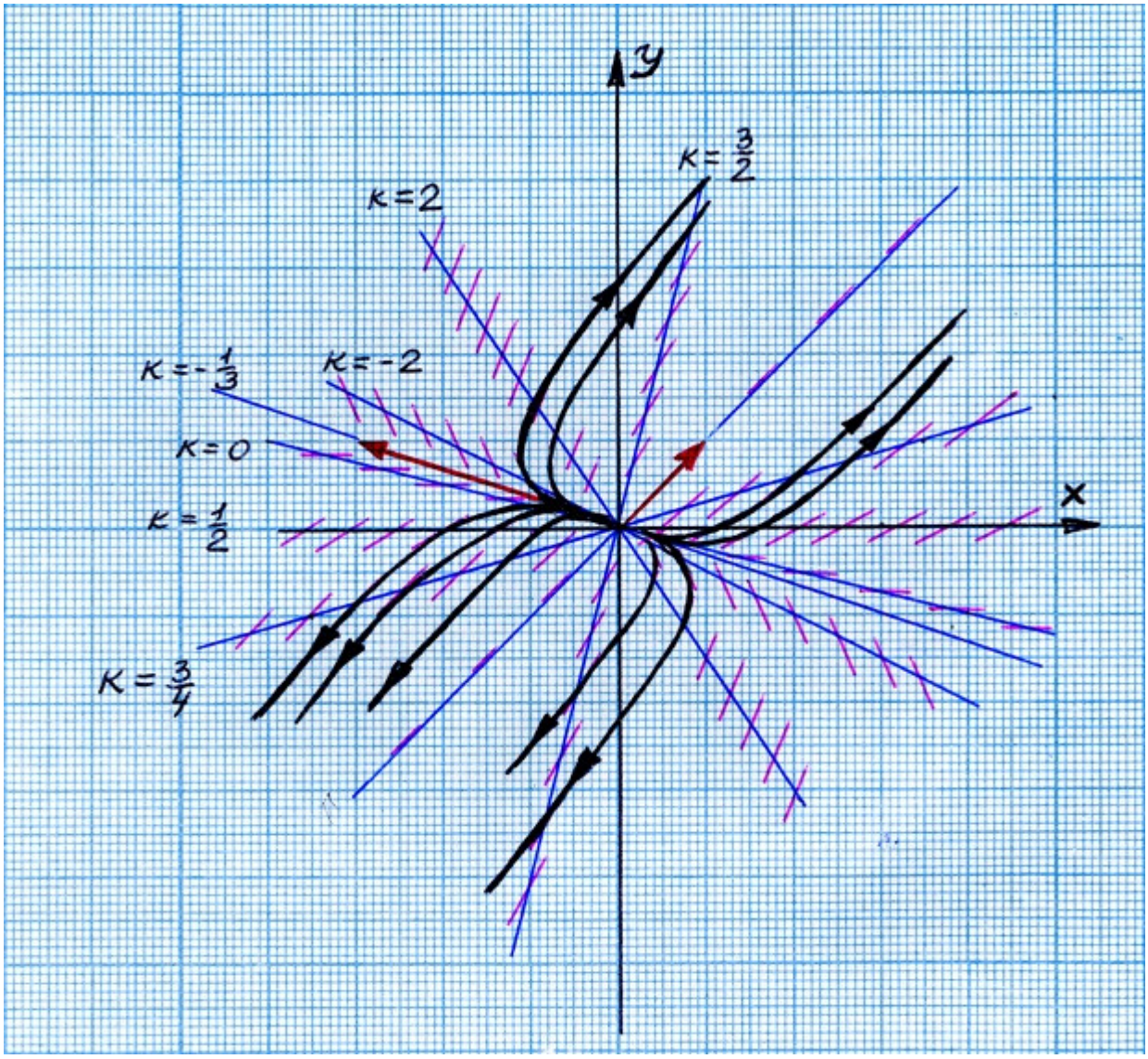
Разделим второе уравнение системы на первое и получим уравнение 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases} \Rightarrow \quad y' = \frac{4y + x}{2x + 3y}$$

Найдем уравнение изоклин: $\dfrac{4y + x}{2x + 3y} = k \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \dfrac{x(1 - 2k)}{3k - 4}}$ - уравнение изоклин.

Далее см. этап №1.

Образец выполнения этапа #5



Пример 2.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$

Решение:

Составим матрицу коэффициентов системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы (см. задание №1).

Собственные значения матрицы $\lambda_1 = 1 + 3 \cdot i$, $\lambda_1 = 1 - 3 \cdot i$ являются:

- комплексно-сопряженными,
- их действительная часть не равна 0 (корни не являются чисто мнимыми),
- их действительная часть положительна,

следовательно, точка покоя – ***неустойчивый фокус.***

Для определения направления закручивания траекторий найдем вектор скорости в произвольной точке плоскости, например в точке $(1, 1)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 3 \cdot 1 \\ \dot{y} = 3 \cdot 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2 \\ \dot{y} = 4 \end{cases}$$

Построим вектор $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ на плоскости из точки $(1, 1)$.

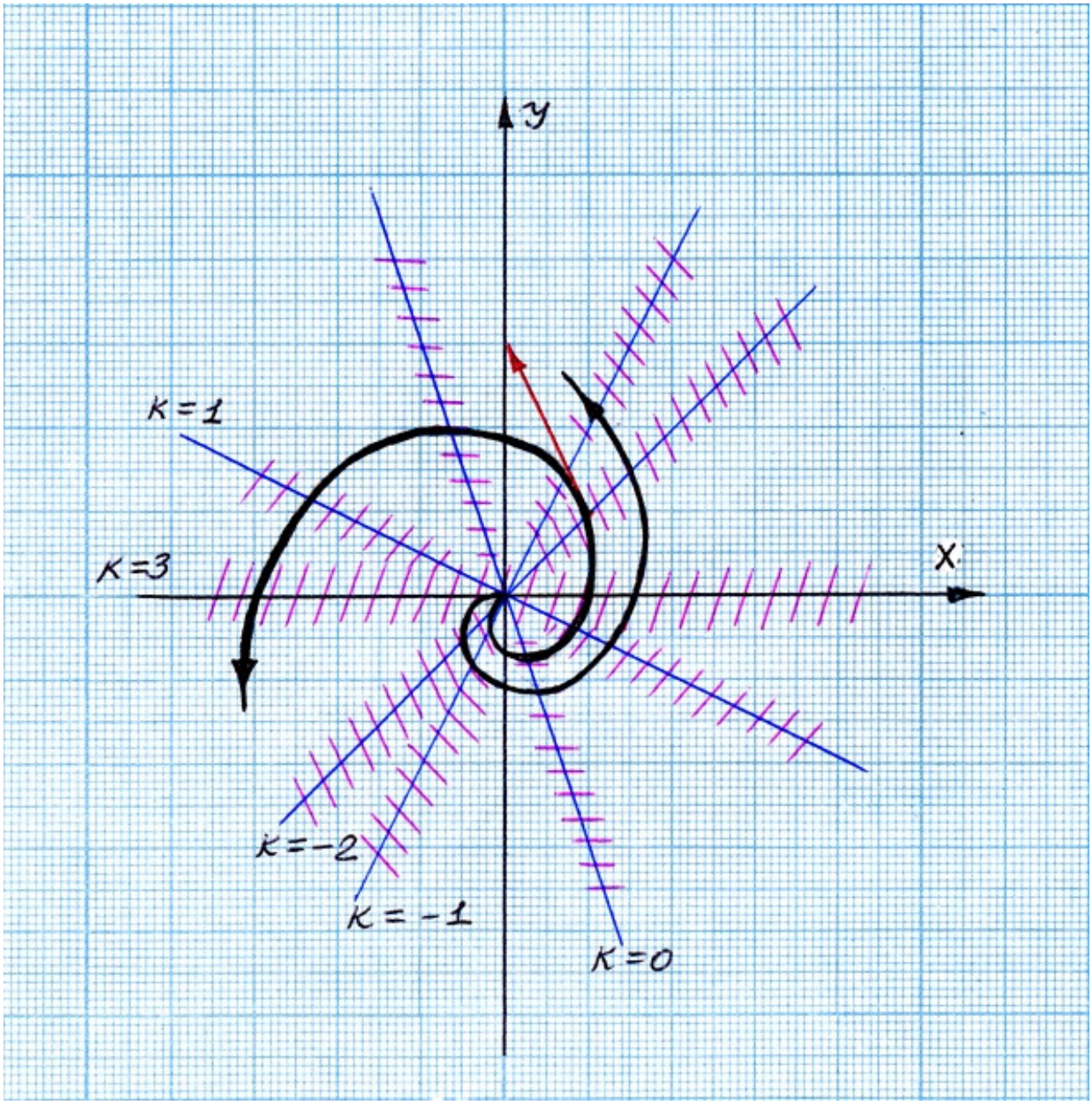
Замечание.
Вектор скорости строится на чертеже **ТОЛЬКО** в случае фокуса.

Построим траектории методом изоклин.

Разделим второе уравнение системы на первое и получим уравнение 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{x - 3y}{3x + y}$$

Найдем уравнение изоклин: $\frac{x - 3y}{3x + y} = k \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{x(k - 3)}{1 + 3k}}$ - уравнение изоклин.

Далее см. этап №1.

Образец выполнения этапа #5