**Задание**



Дано:

1. Призма массы $m\_{1}$
2. Пружинка жесткостью $c$ и длины $l\_{0} $
3. Однородный диск радиуса $R$ и массы $m\_{3}$
4. Однородный диск массы $m\_{4}$ и радиуса $r\_{4}$
5. Однородный диск радиуса $r\_{5}=R-2r\_{4}$ и массы $m\_{5}$
6. Невесомый стержень, к которому приложена пара сил с моментом $M$

Задание:

1. При неподвижном диске 5 и отсутствии пружинки найти угловую скорость диска 4 в тот момент времени, когда тело 1 опустилось на расстояние $S$, если в начальный момент времени система находилась в покое.
2. В соответствии с принципом Д’Аламбера найти давление на диск 3 со стороны других тел (как функцию $φ,\dot{φ},x,\dot{x}$)
3. В условиях пункта 1 записать уравнения движения системы в соответствии с принципом Д’Аламбера-Лагранжа.
4. Получить дифференциальные уравнения системы в соответствии с уравнениями Лагранжа 2-го рода в обобщенных координатах $φ,x$.
5. Найти положения равновесия и исследовать на устойчивость.
6. В условиях пункта 1 и наличии пружинки найти период малых колебаний
7. Найти первые интегралы системы из пункта 4.

**Пункт 1**



Дано:

$m\_{1}$,$R$,$m\_{3}$,$m\_{4}$,$r\_{4}$,$M$,$S$

Найти:

$ω\_{4}$

Решение:

В соответствии с интегральной формулировкой теоремы об изменении кинетической энергии механической системы запишем: $T\_{2}-T\_{1}=A\_{12}$.

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то примем $T\_{1}=0$.

Тогда $T\_{2}=A\_{12}$,

где $A\_{12}=m\_{1}gS\sin(α)-Mφ$

$T\_{2}=T^{1}+T^{3}+T^{4}+T^{5} $

Запишем кинетическую энергию тела 1: $T^{1}=\frac{m\_{1}v\_{1}^{2}}{2}$

Кинетическая энергия тела 3:$T^{3}=\frac{J\_{3}ω\_{3}^{2}}{2}=\frac{m\_{3}R^{2}ω\_{3}^{2}}{4}$

Применяя теорему Кёнига, запишем кинетическую энергию тела 4: $T^{4}=T\_{пост}^{4}+T\_{вр}^{4}=\frac{m\_{1}v\_{4}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}r\_{4}^{2}ω\_{4}^{2}}{4}$

Тогда $T\_{2}=\frac{m\_{1}v\_{1}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}R^{2}ω\_{3}^{2}}{4}+\frac{m\_{1}v\_{4}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}r\_{4}^{2}ω\_{4}^{2}}{4}$

Выразим все неизвестные значения через известные данные и искомую $ω\_{4}$

Используя мгновенный центр скоростей, запишем:$ω\_{4}=ω\_{3}\frac{R-r\_{4}}{r\_{4}}$

Откуда $ω\_{3}=\frac{ω\_{4}r\_{4}}{R-r\_{4}}$

По формуле Эйлера:

$v\_{1}=ω\_{3}R=\frac{ω\_{4}r\_{4}R}{R-r\_{4}} $

$v\_{4}=ω\_{3}\left(R-r\_{4}\right)=ω\_{4}r\_{4}$

$φ=\frac{S}{R}$

Запишем уравнение в конечном виде:

$$\frac{m\_{1}ω\_{4}^{2}r\_{4}^{2}R^{2}}{2\left(R-r\_{4}\right)^{2}}+\frac{m\_{3}R^{2}ω\_{4}^{2}r\_{4}^{2}}{4\left(R-r\_{4}\right)^{2}}+\frac{m\_{3}r\_{4}^{2}ω\_{4}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}r\_{4}^{2}ω\_{4}^{2}}{4}=m\_{1}gS\sin(α)-M\frac{S}{R}$$

Упростим полученное уравнение и выразим отсюда $ω\_{4}$

$$ω\_{4}=\frac{\left(R-r\_{4}\right)}{r\_{4}}\sqrt{\frac{4S\left(m\_{1}gR\sin(α)-M\right)}{R\left(2m\_{1}R^{2}+m\_{3}R^{2}+5m\_{4}\left(R-r\_{4}\right)^{2}\right)}}$$

**Пункт 2**



Дано:

$m\_{1}$,$R$,$m\_{3}$,$m\_{4}$,$r\_{4}$,$m\_{5}$,$\left(R-2r\_{4}\right)$,$c$,$l\_{0}$

Найти:

$R\_{x}, R\_{y}$

Решение:

Разделим исходную систему на две и для каждой получившейся системы запишем принцип Д’Аламбера

Система 1:



$T\cos(α)-F\_{упр}\cos(α)-Ф\_{1}\cos(α)-N\_{1}\sin(α)=0$

$N\_{1}\cos(α)-m\_{1}g=0$

Найдем из данных уравнений силу реакции нити $T$

$T=N\_{1}\tan(α)+Ф\_{1}+F\_{упр}$

$N\_{1}=\frac{m\_{1}g}{\cos(α)}$

$Ф\_{1}=m\_{1}W\_{1}=m\_{1}\ddot{x}$

$F\_{упр}=c\left(x-l\_{0}\right)$

$T=m\_{1}\left(g\sin(α)+\ddot{x}\right)+c\left(x-l\_{0}\right)$

Система 2:



$-T\cos(α)-R\_{x}-Ф\_{4}\sin(φ)=0$

$R\_{y}-T\sin(α)-m\_{4}g+Ф\_{4}\cos(φ)-m\_{3}g-m\_{5}g=0$

Найдем проекции силы реакции шарнира

$R\_{x}=-T\cos(α)-Ф\_{4}\sin(φ)$

$Ф\_{4}=m\_{4}W\_{4}=m\_{4}\ddot{φ}r\_{4}$

$R\_{x}=-\left(m\_{1}\left(g\cos(α)+\ddot{x}\right)+c\left(x-l\_{0}\right)\right)\cos(α)-m\_{4}\ddot{φ}r\_{4}\sin(φ)$

$R\_{y}=T\sin(α)+m\_{4}g-Ф\_{4}\cos(φ)+m\_{3}g+m\_{5}g$

$R\_{y}=\left(m\_{1}\left(g\cos(α)+\ddot{x}\right)+c\left(x-l\_{0}\right)\right)\sin(α)+m\_{4}g-m\_{4}\ddot{φ}r\_{4}\cos(φ)+m\_{3}g+m\_{5}g$

**Пункт 3**



Дано:

$m\_{1}$,$R$,$m\_{3}$,$m\_{4}$,$r\_{4}$,$M$,$S$

Найти:

Уравнения движения системы в соответствии с принципом Д’Аламбера-Лагранжа.

Решение:

Определим число степеней свободы системы: $S=2$; $q\_{1}=x, q\_{2}=φ$

Запишем уравнение движения в соответствии с принципом Д’Аламбера-Лагранжа:

$δA=m\_{1}g\sin(α)δx-Ф\_{1}δx-Mδφ-M\_{ф}δφ-m\_{4}g\cos(φ\left(R-r\_{4}\right))δφ-Ф\_{4}\left(R-r\_{4}\right)δφ=0$

Найдем силы и моменты сил инерции: $Ф\_{1}=m\_{1}W\_{1}$, $M\_{ф}=J\_{3}ε=\frac{m\_{3}R^{2}ε}{2}$, $Ф\_{4}=m\_{4}W\_{4}$

Свяжем между собой возможные перемещения с помощью формулы Эйлера: $δx=Rδφ$, $W\_{1}=εR$, $W\_{4}=ε$

Запишем уравнение движения в конечном виде после математических преобразований и сокращения возможных перемещений:

$$m\_{1}g\sin(α)R-m\_{1}εR^{2}-M-\frac{m\_{3}R^{2}ε}{2}-m\_{4}g\cos(φ\left(R-r\_{4}\right))-m\_{4}ε\left(R-r\_{4}\right)=0$$

**Пункт 4**



Дано:

$m\_{1}$,$R$,$m\_{3}$,$m\_{4}$,$r\_{4}$,$m\_{5}$,$\left(R-2r\_{4}\right)$,$c$,$l\_{0}$

Найти:

Дифференциальные уравнения системы в соответствии с уравнениями Лагранжа 2-го рода в обобщенных координатах $φ,x$.

Решение:

Определим число степеней свободы: $S=2$; $q\_{1}=x$, $q\_{2}=φ$.

Запишем кинетическую энергию системы:

$T=T\_{1}+T\_{3}+T\_{4}+T\_{5}$

Запишем кинетическую энергию тела 1: $T\_{1}=\frac{m\_{1}\dot{x}^{2}}{2}$

Кинетическая энергия тела 3:$T\_{3}=\frac{J\_{3}\dot{φ}^{2}}{2}=\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}^{2}}{4}$

Применяя теорему Кёнига, запишем кинетическую энергию тела 4: $T\_{4}=T\_{пост}^{4}+T\_{вр}^{4}=\frac{m\_{1}v\_{4}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}r\_{4}^{2}ω\_{4}^{2}}{4}$

Из условия равенства линейных скоростей тел 4 и 5 в точке их соприкосновения найдем угловую скорость тела 5:

$ω\_{5}\left(R-2r\_{4}\right)=ω\_{4}r\_{4}$

$ω\_{5}=\frac{ω\_{4}r\_{4}}{\left(R-2r\_{4}\right)} $

Найдем угловую скорость тела 4:

$ω\_{4}=\dot{φ}\frac{R-r\_{4}}{r\_{4}}$

Тогда кинетическая энергия тела 5 равна:

$T\_{5}=\frac{J\_{3}ω\_{5}^{2}}{2}=\frac{m\_{3}\dot{φ}^{2}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{4} $

Запишем кинетическую энергию системы с учетом всех математических преобразований:

$T=\frac{m\_{1}\dot{x}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}^{2}}{4}+\frac{\dot{φ}^{2}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{4}\left(5m\_{4}+m\_{5}\right)$

Движение системы будем рассматривать при случае, когда она является консервативной ($M=0$).

Вычислим потенциальную энергию системы:

$П=m\_{1}gx\sin(α)+m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\sin(φ)+\frac{c\left(x-l\_{0}\right)^{2}}{2}$

Вычислим обобщенные силы:

$Q\_{x}=-\frac{∂П}{∂x}=-m\_{1}g\sin(α)-c\left(x-l\_{0}\right)$

$Q\_{φ}=-\frac{∂П}{∂φ}=-m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\cos(φ)$

Вычислим частные производные кинетической энергии:

$\frac{∂T}{∂x}=0$

$\frac{∂T}{∂\dot{x}}=m\_{1}\dot{x}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂T}{∂\dot{x}}\right)=m\_{1}\ddot{x}$

$\frac{∂T}{∂φ}=0$

$\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}}{2}+\frac{\dot{φ}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\left(5m\_{4}+m\_{5}\right)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂T}{∂\dot{φ}}\right)=\frac{m\_{3}R^{2}\ddot{φ}}{2}+\frac{\ddot{φ}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\left(5m\_{4}+m\_{5}\right)$

Запишем систему дифференциальных уравнений в конечном виде:

$\left\{\begin{array}{c}m\_{1}\dot{x}=-m\_{1}g\sin(α)-c\left(x-l\_{0}\right)\\\frac{m\_{3}R^{2}\ddot{φ}}{2}+\frac{\ddot{φ}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\left(5m\_{4}+m\_{5}\right)=-m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\cos(φ)\end{array} \right. $

**Пункт 5**

****

Дано:

$m\_{1}$,$R$,$m\_{3}$,$m\_{4}$,$r\_{4}$,$m\_{5}$,$\left(R-2r\_{4}\right)$,$c$,$l\_{0}$

Найти:

Положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость.

Решение:

Определим число степеней свободы: $S=2$; $q\_{1}=x$, $q\_{2}=φ$.

Вычислим потенциальную энергию системы:

$П=m\_{1}gx\sin(α)+m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\sin(φ)+\frac{c\left(x-l\_{0}\right)^{2}}{2}$

Найдем положение равновесия системы по обобщенной координате $x$:

$\frac{∂П}{∂x}=m\_{1}g\sin(α)+c\left(x\_{0}-l\_{0}\right)=0$

Отсюда $x\_{0}=l\_{0}-\frac{m\_{1}g\sin(α)}{c}$

Исследуем найденное положение равновесия на устойчивость. Для этого исследуем на минимум потенциальную энергию в окрестности положения равновесия в соответствии с теоремой Лагранжа-Дирихле.

Определим знак второй производной потенциальной энергии в точке $x\_{0}$

$\left.\frac{∂^{2}П}{∂x^{2}}\right|\_{x=x\_{0}}=c>0$

Следовательно, в точке $x\_{0}$ потенциальная энергия имеет минимум. Система устойчива.

Найдем положение равновесия системы по обобщенной координате $x$:

$\frac{∂П}{∂φ}=m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\cos(φ\_{0})=0$

Отсюда $\cos(φ\_{0})=0, φ\_{0}=\frac{π}{2}$

Исследуем найденное положение равновесия на устойчивость.

$\left.\frac{∂^{2}П}{∂φ^{2}}\right|\_{φ=φ\_{0}}=-m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\sin(φ\_{0}=-m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right))<0$

В точке $φ\_{0}$ потенциальная энергия максимальна. Система неустойчива.

**Пункт 6**



Дано:

$m\_{1}$,$R$,$m\_{3}$,$m\_{4}$,$r\_{4}$,$ c$,$l\_{0}$

Найти:

$τ$

Решение:

Определим число степеней свободы $S=2$; $q\_{1}=x, q\_{2}=φ$

Период малых колебаний будем находить при условии, что система консервативна ($M=0$).

Запишем кинетическую энергию системы:

$T=\frac{m\_{1}\dot{x}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}^{2}}{4}+\frac{\dot{φ}^{2}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{4}\left(5m\_{4}\right)$

Исключим из выражения кинетической энергии все обобщенные координаты после 2-го порядка:

$T^{2}=\frac{m\_{1}\dot{x}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}^{2}}{4}+\frac{\dot{φ}^{2}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{4}\left(5m\_{4}\right)$

Найдем частные производные кинетической энергии:

$\frac{∂T^{2}}{∂x}=0$

$\frac{∂T^{2}}{∂\dot{x}}=m\_{1}\dot{x}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂T^{2}}{∂\dot{x}}\right)=m\_{1}\ddot{x}$

$\frac{∂T^{2}}{∂φ}=0$

$\frac{∂T^{2}}{∂\dot{φ}}=\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}}{2}+\frac{\dot{φ}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\left(5m\_{4}\right)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂T^{2}}{∂\dot{φ}}\right)=\frac{m\_{3}R^{2}\ddot{φ}}{2}+\frac{\ddot{φ}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\left(5m\_{4}\right)$

Запишем потенциальную энергию системы:

$П=m\_{1}gx\sin(α)+m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\sin(φ)+\frac{c\left(x-l\_{0}\right)^{2}}{2}$

Исключим из выражения потенциальной энергии все обобщенные координаты после 2-го порядка:

Используя разложение в ряд Тейлора:

$\sin(φ)=φ+\frac{φ^{3}}{3!}+…$

$П^{2}=m\_{1}gx\sin(α)+m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)φ+\frac{c\left(x-l\_{0}\right)^{2}}{2}$

Найдем частные производные потенциальной энергии:

$-\frac{∂П}{∂x}=-m\_{1}g\sin(α)-c\left(x-l\_{0}\right)$

$-\frac{∂П}{∂φ}=-m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)$

Составим систему дифференциальных уравнений в соответствии с уравнениями Лагранжа 2-го рода:

$\left\{\begin{array}{c}m\_{1}\ddot{x}+m\_{1}g\sin(α)+c\left(x-l\_{0}\right)=0\\\frac{m\_{3}R^{2}\ddot{φ}}{2}+\frac{\ddot{φ}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\left(5m\_{4}\right)+m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)=0\end{array}\right. $

Найдем круговую частоту колебаний как решение характеристической системы дифференциальных уравнений.

Запишем изменение обобщенных координат в виде гармонического закона и подставим в полученную систему уравнений:

$x=A\sin(λt)$

$φ=B\sin(λt)$

$\ddot{x}=-Aλ^{2}\sin(λt)$

$\ddot{φ}=-Bλ^{2}\sin(λt)$

$\left\{\begin{array}{c}A\sin(λt)\left(c-m\_{1}λ^{2}\right)=0\\-Bλ^{2}\sin(λt)\left(\frac{m\_{3}R^{2}+5m\_{4}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\right)=0\end{array}\right.$

Сократим полученную систему на $\sin(λt)$ и приравняем определитель полученной матрицы к нулю:

$\left(-c+m\_{1}λ^{2}\right)λ^{2}\left(\frac{m\_{3}R^{2}+5m\_{4}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{2}\right)=0$

Решим полученное уравнение при ненулевой частоте:

$m\_{1}λ^{2}-с=0$

$λ\_{1,2}=\pm \sqrt{\frac{c}{m\_{1}}}$

Найдем период колебаний:

$τ=\frac{2π}{λ}=2π\sqrt{\frac{m\_{1}}{c}}$

**Пункт 7**

Дано:

$m\_{1}$,$R$,$m\_{3}$,$m\_{4}$,$r\_{4}$,$m\_{5}$,$\left(R-2r\_{4}\right)$,$c$,$l\_{0}$

Найти:

Первые интегралы уравнений Лагранжа 2-го рода.

Решение:

Первые интегралы будем находить при условии, что система консервативна ($M=0$).

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы, найденные в пункте 4.

$T=\frac{m\_{1}\dot{x}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}^{2}}{4}+\frac{\dot{φ}^{2}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{4}\left(5m\_{4}+m\_{5}\right)$

$П=m\_{1}gx\sin(α)+m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\sin(φ)+\frac{c\left(x-l\_{0}\right)^{2}}{2}$

Запишем обобщенный интеграл энергии:

$T+П=const$

$$\frac{m\_{1}\dot{x}^{2}}{2}+\frac{m\_{3}R^{2}\dot{φ}^{2}}{4}+\frac{\dot{φ}^{2}\left(R-r\_{4}\right)^{2}}{4}\left(5m\_{4}+m\_{5}\right)+m\_{1}gx\sin(α)+m\_{4}g\left(R-r\_{4}\right)\sin(φ)+\frac{c\left(x-l\_{0}\right)^{2}}{2}=const$$

Циклических координат нет, так как все обобщенные координаты входят в уравнения Лагранжа явно. Следовательно, циклического интеграла для данных уравнений Лагранжа не существует.