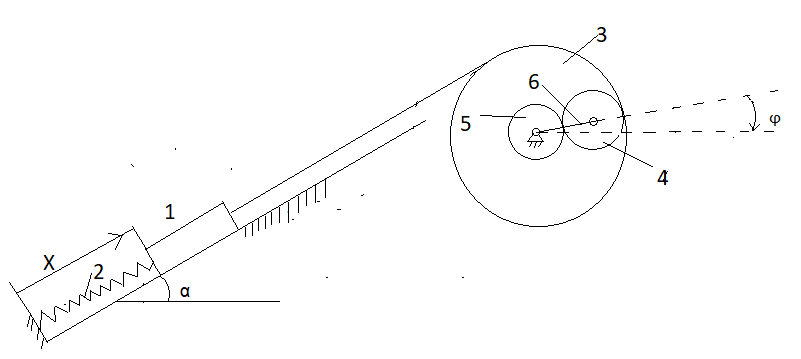
**Задание**



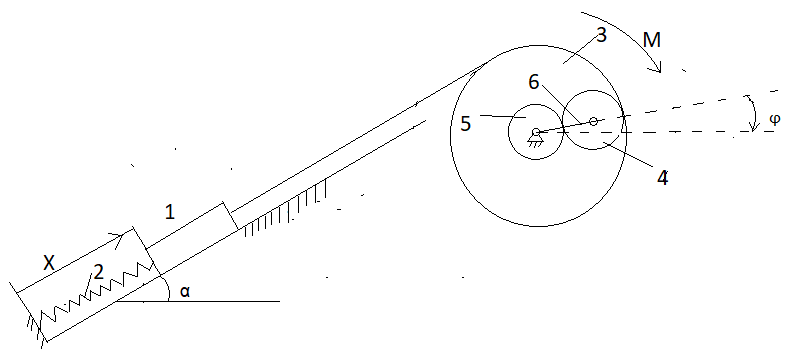
Дано:

1. Призма массы
2. Пружинка жесткостью и длины
3. Однородный диск радиуса и массы
4. Однородный диск массы и радиуса
5. Однородный диск радиуса и массы
6. Невесомый стержень, к которому приложена пара сил с моментом

Задание:

1. При неподвижном диске 5 и отсутствии пружинки найти угловую скорость диска 4 в тот момент времени, когда тело 1 опустилось на расстояние , если в начальный момент времени система находилась в покое.
2. В соответствии с принципом Д’Аламбера найти давление на диск 3 со стороны других тел (как функцию )
3. В условиях пункта 1 записать уравнения движения системы в соответствии с принципом Д’Аламбера-Лагранжа.
4. Получить дифференциальные уравнения системы в соответствии с уравнениями Лагранжа 2-го рода в обобщенных координатах .
5. Найти положения равновесия и исследовать на устойчивость.
6. В условиях пункта 1 и наличии пружинки найти период малых колебаний
7. Найти первые интегралы системы из пункта 4.

**Пункт 1**



Дано:

,,,,,,

Найти:

Решение:

В соответствии с интегральной формулировкой теоремы об изменении кинетической энергии механической системы запишем: .

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то примем .

Тогда ,

где

Запишем кинетическую энергию тела 1:

Кинетическая энергия тела 3:

Применяя теорему Кёнига, запишем кинетическую энергию тела 4:

Тогда

Выразим все неизвестные значения через известные данные и искомую

Используя мгновенный центр скоростей, запишем:

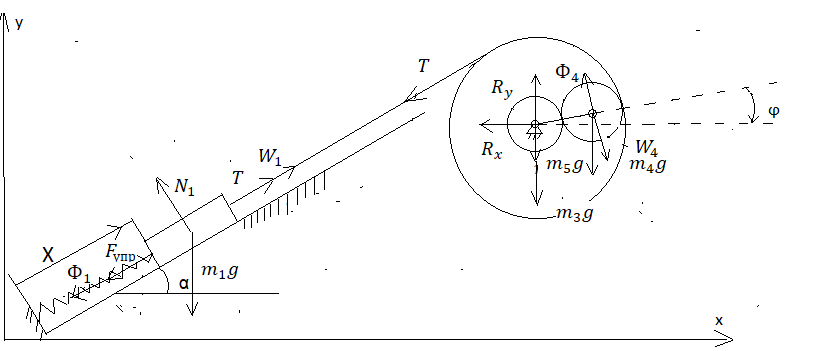
Откуда

По формуле Эйлера:

Запишем уравнение в конечном виде:

Упростим полученное уравнение и выразим отсюда

**Пункт 2**



Дано:

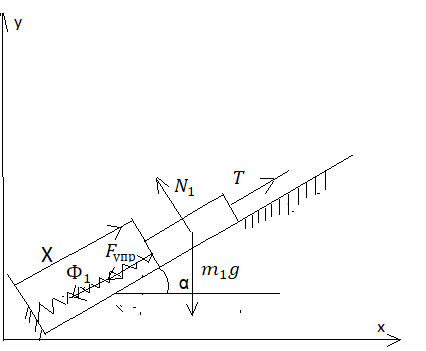
,,,,,,,,

Найти:

Решение:

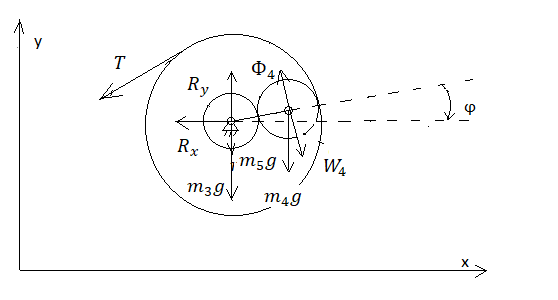
Разделим исходную систему на две и для каждой получившейся системы запишем принцип Д’Аламбера

Система 1:



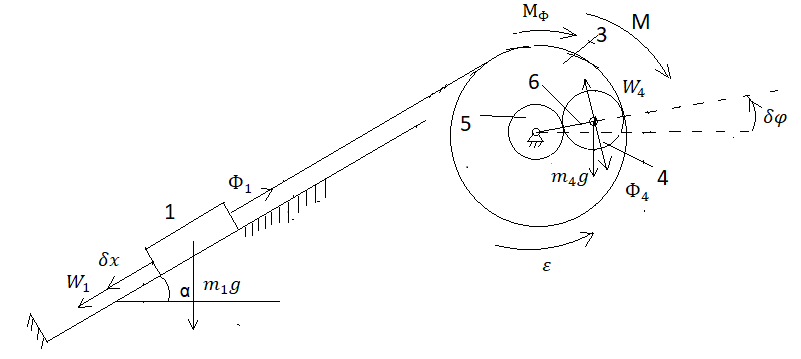
Найдем из данных уравнений силу реакции нити

Система 2:



Найдем проекции силы реакции шарнира

**Пункт 3**



Дано:

,,,,,,

Найти:

Уравнения движения системы в соответствии с принципом Д’Аламбера-Лагранжа.

Решение:

Определим число степеней свободы системы: ;

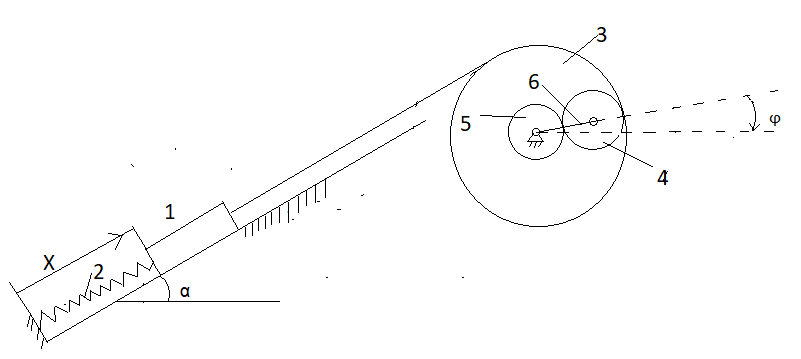
Запишем уравнение движения в соответствии с принципом Д’Аламбера-Лагранжа:

Найдем силы и моменты сил инерции: , ,

Свяжем между собой возможные перемещения с помощью формулы Эйлера: , ,

Запишем уравнение движения в конечном виде после математических преобразований и сокращения возможных перемещений:

**Пункт 4**



Дано:

,,,,,,,,

Найти:

Дифференциальные уравнения системы в соответствии с уравнениями Лагранжа 2-го рода в обобщенных координатах .

Решение:

Определим число степеней свободы: ; , .

Запишем кинетическую энергию системы:

Запишем кинетическую энергию тела 1:

Кинетическая энергия тела 3:

Применяя теорему Кёнига, запишем кинетическую энергию тела 4:

Из условия равенства линейных скоростей тел 4 и 5 в точке их соприкосновения найдем угловую скорость тела 5:

Найдем угловую скорость тела 4:

Тогда кинетическая энергия тела 5 равна:

Запишем кинетическую энергию системы с учетом всех математических преобразований:

Движение системы будем рассматривать при случае, когда она является консервативной ().

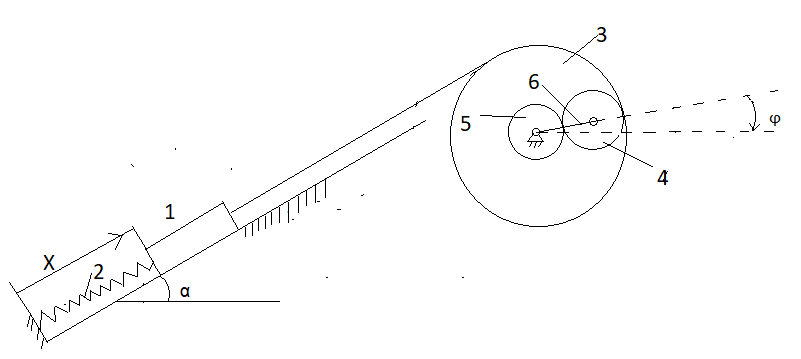
Вычислим потенциальную энергию системы:

Вычислим обобщенные силы:

Вычислим частные производные кинетической энергии:

Запишем систему дифференциальных уравнений в конечном виде:

**Пункт 5**

****

Дано:

,,,,,,,,

Найти:

Положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость.

Решение:

Определим число степеней свободы: ; , .

Вычислим потенциальную энергию системы:

Найдем положение равновесия системы по обобщенной координате :

Отсюда

Исследуем найденное положение равновесия на устойчивость. Для этого исследуем на минимум потенциальную энергию в окрестности положения равновесия в соответствии с теоремой Лагранжа-Дирихле.

Определим знак второй производной потенциальной энергии в точке

Следовательно, в точке потенциальная энергия имеет минимум. Система устойчива.

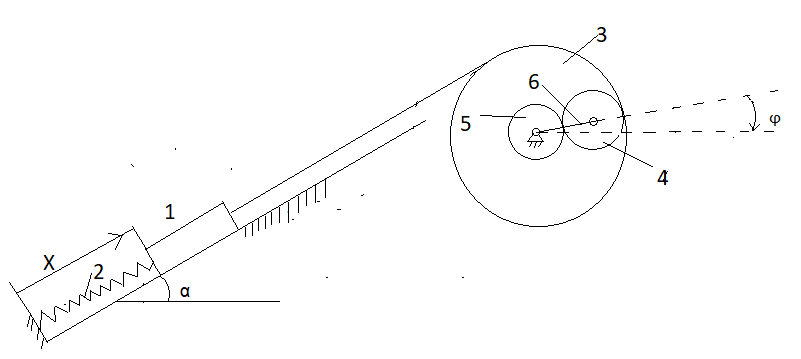
Найдем положение равновесия системы по обобщенной координате :

Отсюда

Исследуем найденное положение равновесия на устойчивость.

В точке потенциальная энергия максимальна. Система неустойчива.

**Пункт 6**



Дано:

,,,,,,

Найти:

Решение:

Определим число степеней свободы ;

Период малых колебаний будем находить при условии, что система консервативна ().

Запишем кинетическую энергию системы:

Исключим из выражения кинетической энергии все обобщенные координаты после 2-го порядка:

Найдем частные производные кинетической энергии:

Запишем потенциальную энергию системы:

Исключим из выражения потенциальной энергии все обобщенные координаты после 2-го порядка:

Используя разложение в ряд Тейлора:

Найдем частные производные потенциальной энергии:

Составим систему дифференциальных уравнений в соответствии с уравнениями Лагранжа 2-го рода:

Найдем круговую частоту колебаний как решение характеристической системы дифференциальных уравнений.

Запишем изменение обобщенных координат в виде гармонического закона и подставим в полученную систему уравнений:

Сократим полученную систему на и приравняем определитель полученной матрицы к нулю:

Решим полученное уравнение при ненулевой частоте:

Найдем период колебаний:

**Пункт 7**

Дано:

,,,,,,,,

Найти:

Первые интегралы уравнений Лагранжа 2-го рода.

Решение:

Первые интегралы будем находить при условии, что система консервативна ().

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы, найденные в пункте 4.

Запишем обобщенный интеграл энергии:

Циклических координат нет, так как все обобщенные координаты входят в уравнения Лагранжа явно. Следовательно, циклического интеграла для данных уравнений Лагранжа не существует.