

## 8. РАСЧЕТ ВАЛА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА СТАТИЧЕСКУЮ И УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ.

На рис.1,а приведен чертеж одного из вариантов компоновки вала, передающего вращающий момент  $M = 1 \text{ кНм}$  от одного шкива (колеса) к другому. Вал закреплен в двух подшипниках качения, радиальном  $A$  (шарнирно-подвижная опора, условно обозначенная ПО) и радиально-упорном  $B$  (шарнирно-неподвижная опора, условно обозначенная НО), располагающихся в сечениях 2 и 4 соответственно. В сечении 1 находится ведомый шкив диаметра  $D_1 = 0.4 \text{ м}$ , представляющий собой косозубое зубчатое колесо, входящее в зацепление с другим колесом в составе зубчатой передачи в точке (полюсе), определяемой углом  $\alpha_1 = 30^\circ$  (см.рис.2, а ). Ведущий шкив диаметра  $D_2 = 0.5 \text{ м}$ , находящийся в сечении 3, включен в плоскоременную передачу с углом наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_2 = 60^\circ$  (см.рис.3, а ).

Изобразим в аксонометрии схему приложения внешних сил к валу (см.рис.1, б ). Для упрощения дальнейших расчетов приведем к оси вала внешние силы, приложенные в точках, не лежащих на оси вала, при этом сразу будем раскладывать их на составляющие, направленные вдоль координатных осей.

Рассмотрим зубчатое зацепление (см.рис.2, б).

Внешний вращающий момент  $M_{K1} = M$  получается при переносе на ось

$$\text{вала окружной силы } F_t: M = F_t \frac{D_1}{2} \Rightarrow F_t = \frac{2M}{D} = \frac{2 \cdot 1}{0.4} = 5 \text{ (кН)}.$$

Будем считать, что параметры зубчатой передачи таковы, что мы получили для осевой и радиальной сил следующие численные выражения:

$$F_x = 0.3F_t = 1.5(\kappa H), F_r = 0.4F_t (\kappa H).$$

При параллельном переносе на ось вала осевой силы  $F_x$ , приложенной в точке зацепления на начальной окружности зубчатого колеса, возникают моменты

$$M_{y1} = F_x \frac{D_1}{2} \cos \alpha_1 = 1.5 \cdot \frac{0.4}{2} \cdot \cos 30^\circ = 0.26 (\kappa Hm),$$

$$M_{z1} = F_x \frac{D_1}{2} \sin \alpha_1 = 1.5 \cdot \frac{0.4}{2} \cdot \sin 30^\circ = 0.15 (\kappa Hm),$$

сама же сила остается неизменной  $X_1 = F_x = 1.5 (\kappa H)$ .

При переносе радиальной силы  $F_r$  не возникает моментов, т.к. она действует вдоль радиуса окружности и, следовательно, пересекает ось вала.

Для удобства дальнейших расчетов разложим  $F_t$  и  $F_r$  на составляющие по осям  $y$  и  $z$  и просуммируем их (см. рис. 2, б):

$$Y_1 = F_t \cos 30^\circ - F_r \sin 30^\circ = 5 \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ = 3.33 (\kappa H)$$

$$Z_1 = F_t \sin 30^\circ + F_r \cos 30^\circ = 5 \sin 30^\circ + 2 \cos 30^\circ = 4.23 (\kappa H)$$

Рассмотрим ременную передачу (см.рис.3, б ). Внешний вращающий момент  $M_{\kappa 2} = M$ , возникающий при переносе сил натяжения ремней на ось вала, равен:  $M = T \frac{D_2}{2} - t \frac{D_2}{2}$ . Принимаем соотношение между силами натяжения набегающей и сбегавшей ветвей ремня  $T = 2t$ , отвечающее некоторым заданным параметрам ременной передачи. Тогда получим

$$M = t \frac{D_2}{2} \Rightarrow t = \frac{2M}{D_2} = 4 (\kappa H), T = 2t = 2 \cdot 4 = 8 (\kappa H).$$

Суммарная сила давления шкива на ось вала направлена под углом  $\alpha_2 = 60^\circ$  к горизонту и равна  $F = T + t = 12 (\kappa H)$  (см. рис. 3, б). Ее составляющие

$$Y_2 = F \cdot \sin \alpha_2 = 10.4 \text{ (кН)}; Z_2 = F \cdot \cos \alpha_2 = 6 \text{ (кН)}$$

Теперь все внешние силы приведены к оси вала (см.рис.1, в ).

В соответствии с принципом суперпозиции, рассмотрим по отдельности внешние нагрузки, соответствующие разным видам деформации.

Силы, действующие вдоль оси вала, обуславливают деформацию растяжения. Найдем горизонтальную реакцию в опоре А

$$\sum F_x: -X_1 + R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = X_1 = 1.5 \text{ (кН)}.$$

Вычислим продольные силы на участках вала. Очевидно, внешние силы, действующие по одну сторону от сечения на любом участке вала, одинаковы и равны  $X_1$  или  $R_{Ax}$ , поэтому  $N_{x1} = N_{x2} = N_{x3} = 1.5 \text{ (кН)}$  (эпюра на рис.4, а).

Построим эпюру крутящего момента (рис.4, б), учитывая, что на 1 и 2 участке по одну сторону от любого сечения находятся внешние моменты  $M_{к1}$  или  $M_{к2}$ , а на 3 участке (справа) - ничего:

$$M_{x1} = M_{x2} = M_{к1} = M_{к2} = 1 \text{ (кНм)}, \quad M_{x3} = 0.$$

Рассмотрим плоский изгиб, связанный с силами, действующими в вертикальной плоскости (рис.31). Вертикальные реакции находятся из уравнений равновесия:

$$\sum M_{z(\cdot)A}: -Y_1 \cdot 0.3 + M_{z1} - Y_2 \cdot 0.2 + R_{By} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{By} = \frac{3.33 \cdot 0.3 - 0.15 + 10.4 \cdot 0.2}{0.7} = 4.18 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_{z(\cdot)B}: -Y_1 \cdot 1 + M_{z1} + Y_2 \cdot 0.5 - R_{Ay} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{Ay} = \frac{-3.33 \cdot 1 + 0.15 + 10.4 \cdot 0.5}{0.7} = 2.89 \text{ (кН)}.$$

Статическая проверка:  $\sum F_y: R_{Ay} + R_{By} + Y_1 - Y_2 = 0$ . Эпюра

изгибающего момента  $M_z$  строится по алгоритму метода сечений с

учетом правила знаков (см. рис. 4, в). На трех участках выбираются произвольные сечения, расстояния до которых обозначаются  $x_1, x_2, x_3$ :

$$0 \leq x_1 \leq L_1 = 0.3 \text{ м}, M_z(x_1)_{\text{слева}} = Y_1 \cdot x_1 - M_{z1} = 3.33x_1 - 0.15,$$

$$M_z(0) = -0.15 (\kappa H\text{м}); \quad M_z(0.3) = 0.85 (\kappa H\text{м});$$

$$0 \leq x_2 \leq L_2 = 0.2 \text{ м},$$

$$M_z(x_2)_{\text{слева}} = Y_1 \cdot (x_2 + L_1) - M_{z1} + R_{Ay} \cdot x_2 = 6.22x_2 + 0.85,$$

$$M_z(0) = 0.85 (\kappa H\text{м}); \quad M_z(0.2) = 2.09 (\kappa H\text{м});$$

$$0 \leq x_3 \leq L_3 = 0.5 \text{ м},$$

$$M_z(x_3)_{\text{справа}} = R_{By} \cdot x_3 = 4.18 \cdot x_3, \quad M_z(0) = 0; \quad M_z(0.5) = 2.09 (\kappa H\text{м}).$$

Силы, действующие в горизонтальной плоскости, представлены на рис.4, г. Уравнения равновесия:

$$\sum M_{y(\cdot)A}: -Z_1 \cdot 0.3 - M_{y1} - Z_2 \cdot 0.2 - R_{Bz} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{Bz} = -\frac{4.23 \cdot 0.3 + 0.26 + 6 \cdot 0.2}{0.7} = -3.9 (\kappa H);$$

$$\sum M_{y(\cdot)B}: -Z_1 \cdot 1 - M_{y1} + Z_2 \cdot 0.5 + R_{Az} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{Az} = \frac{4.23 \cdot 1 + 0.26 - 6 \cdot 0.5}{0.7} = 2.13 (\kappa H).$$

Проверим найденные реакции:  $\sum F_z: R_{Az} + R_{Bz} - Z_1 + Z_2 = 0$ . Эпюра

$M_y$  также строится по алгоритму метода сечений:

$$0 \leq x_1 \leq L_1 = 0.3 \text{ м}, M_y(x_1)_{\text{слева}} = Z_1 \cdot x_1 + M_{y1} = 4.23x_1 + 0.26,$$

$$M_y(0) = 0.26 (\kappa H\text{м}); \quad M_z(0.3) = 1.53 (\kappa H\text{м});$$

$$0 \leq x_2 \leq L_2 = 0.2 \text{ м},$$

$$M_y(x_2)_{\text{слева}} = Z_1 \cdot (x_2 + L_1) + M_{y1} - R_{Az} \cdot x_2 = 2.1x_2 + 1.53,$$

$$M_y(0) = 1.53 (\kappa H\text{м}); \quad M_z(0.2) = 1.95 (\kappa H\text{м});$$

$$0 \leq x_3 \leq L_3 = 0.5 \text{ м},$$

$$M_y(x_3)_{справа} = -R_{Bz} \cdot x_3 = 3.9 \cdot x_3, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(0.5) = 1.95 \text{ (кНм)}.$$

Эпюру  $M_y$  построим в плоскости  $xOz$  в аксонометрии (см. рис. 4, г).

Поскольку сечение вала круглое, в нем будет происходить плоский изгиб в плоскости, перпендикулярной суммарному вектору изгибающего момента  $M_{изг}$ . Определим опасное сечение, построив эпюру  $M_{изг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$  (рис.4, д). Заметим, что эта эпюра очерчена по кривой на участках 1 и 2, а на участке 3, где моменты  $M_y$  и  $M_z$  равны нулю на одном из концов, – по прямой.

Сопоставляя эпюры  $M_x$  и  $M_{изг}$ , находим опасное сечение – это сечение 3 слева. Внутренние усилия в нем:  $N_x = 1.5 \text{ кН}$ ,  $M_x = 1 \text{ кНм}$ ,  $M_y = 1.95 \text{ кНм}$ ,  $M_z = 2.09 \text{ кНм}$ ,  $M_{изг} = 2.86 \text{ кНм}$ . (см.рис.5,а)

Первоначальный подбор сечения по 3-ей теории прочности без учета продольной силы производится по формуле:

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1^2 + 1.95^2 + 2.09^2}}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.0289 \text{ (м)}.$$

Диаметр сечения  $d = 2R = 0.0578 \text{ (м)} = 57.8 \text{ (мм)}$ , округляя его до ближайшего бóльшего стандартного значения по ГОСТ 3478-79 (см. п. 7 в задании для курсовой работы), принимаем  $d = 60 \text{ (мм)} = 0.060 \text{ (м)}$ .

Вычислим геометрические характеристики сечения:

$$\text{площадь } A = \frac{\pi d^2}{4} = 2.83 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2\text{)},$$

$$\text{осевой момент сопротивления } W = \frac{\pi d^3}{32} = 2.12 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^3\text{)},$$

$$\text{полярный момент сопротивления } W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 4.24 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Вычислим нормальные напряжения в точках  $B$  и  $C$ , наиболее удаленных от нейтральной оси (см.рис.5,б):

$$\sigma_B = \frac{N_x}{A} + \frac{M_{изг}}{W} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{2.83 \cdot 10^{-3}} + \frac{2.86 \cdot 10^3}{2.12 \cdot 10^{-5}} = 0.5 + 134.8 = 135.3 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_C = \frac{N_x}{A} - \frac{M_{изг}}{W} = 0.5 - 134.8 = -134.3 \text{ (МПа)}.$$

Касательные напряжения во всех точках контура равны:

$$\tau_B = \tau_C = \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{1 \cdot 10^3}{4.24 \cdot 10^{-5}} = 23.6 \text{ (МПа)}.$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке  $B$  по третьей теории прочности равно (см.рис.5,б):

$$\sigma_{экв B} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} = \sqrt{135.3^2 + 4 \cdot 23.6^2} = 143.3 \text{ (МПа)} < [\sigma].$$

Как видно, диаметр, подобранный без учета продольной силы  $N_x$ , удовлетворяет условию прочности.

Рассмотрим напряженное состояние элемента материала, выделенного из боковой поверхности вала в окрестности опасной точки (см.рис.6):  $\sigma_x = 135.3 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = 23.6 \text{ МПа}$ . Главные напряжения вычислим по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{135.3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{135.3^2 + 4 \cdot 23.6^2} = 67.65 \pm 71.65 = \frac{139.3 \text{ МПа}}{-4 \text{ МПа}}. \end{aligned}$$

В соответствии с правилом нумерации главных напряжений

$$\sigma_1 = 139.3 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -4 \text{ МПа}.$$

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 23.6}{135.3} = -0.349 \Rightarrow \alpha_0 = -9.6^\circ.$$

Главные площадки и главные напряжения представлены на рис.5.

Проведем теперь расчет на усталостную прочность, считая известными коэффициенты  $K_\sigma = 2.1$ ,  $K_f = 0.9$ ,  $K_d = 0.7$ , причем  $K_d$  можно определить по  $d = 60 \text{ мм}$  из таблицы 1 (см. задание для курсовой работы).

Среднее напряжение цикла равно нормальному напряжению от продольной силы, постоянному по всей площади сечения, амплитудное же значение напряжения связано с линейно изменяющимися по высоте сечения нормальными напряжениями от изгиба:

$$\sigma_m = \frac{N_x}{A} = 0.5 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = \frac{M_{изг}}{W} = 134.8 \text{ МПа}.$$

При вращении вала нормальные напряжения изменяются от  $\sigma_{\max} = \sigma_B = 135.3 \text{ (МПа)}$  до  $\sigma_{\min} = \sigma_C = -134.3 \text{ (МПа)}$  (см.рис.7).

Вычислим приведенную амплитуду циклических напряжений

$$\sigma_a^* = \frac{K_\sigma}{K_F \cdot K_d} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m = \frac{2.1}{0.9 \cdot 0.7} \cdot 134.8 + 0.5 \cdot 0.5 = 449.58 \text{ (МПа)}.$$

Здесь принято соотношение пределов прочности и выносливости

$$\psi_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} = 0.5.$$

Теперь, считая предел выносливости равным  $\sigma_{-1} = 300 \text{ МПа}$ , определим коэффициент запаса по усталостной прочности:

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = \frac{300}{449.58} = 0.667 \leq [S] = 1.7.$$

Как видно, условие усталостной прочности  $S_\sigma \geq [S]$  не выполняется.

Поскольку нормальные напряжения обратно пропорциональны  $d^3$ ,

увеличим диаметр в  $\gamma$  раз ( $\gamma = \sqrt[3]{\frac{1.7}{0.667}} = 1.37$ ) и округлим его до

ближайшего стандартного значения:  $d = 1.37 \cdot 60 = 82.2 \text{ (мм)} \Rightarrow d = 85 \text{ (мм)}$ .

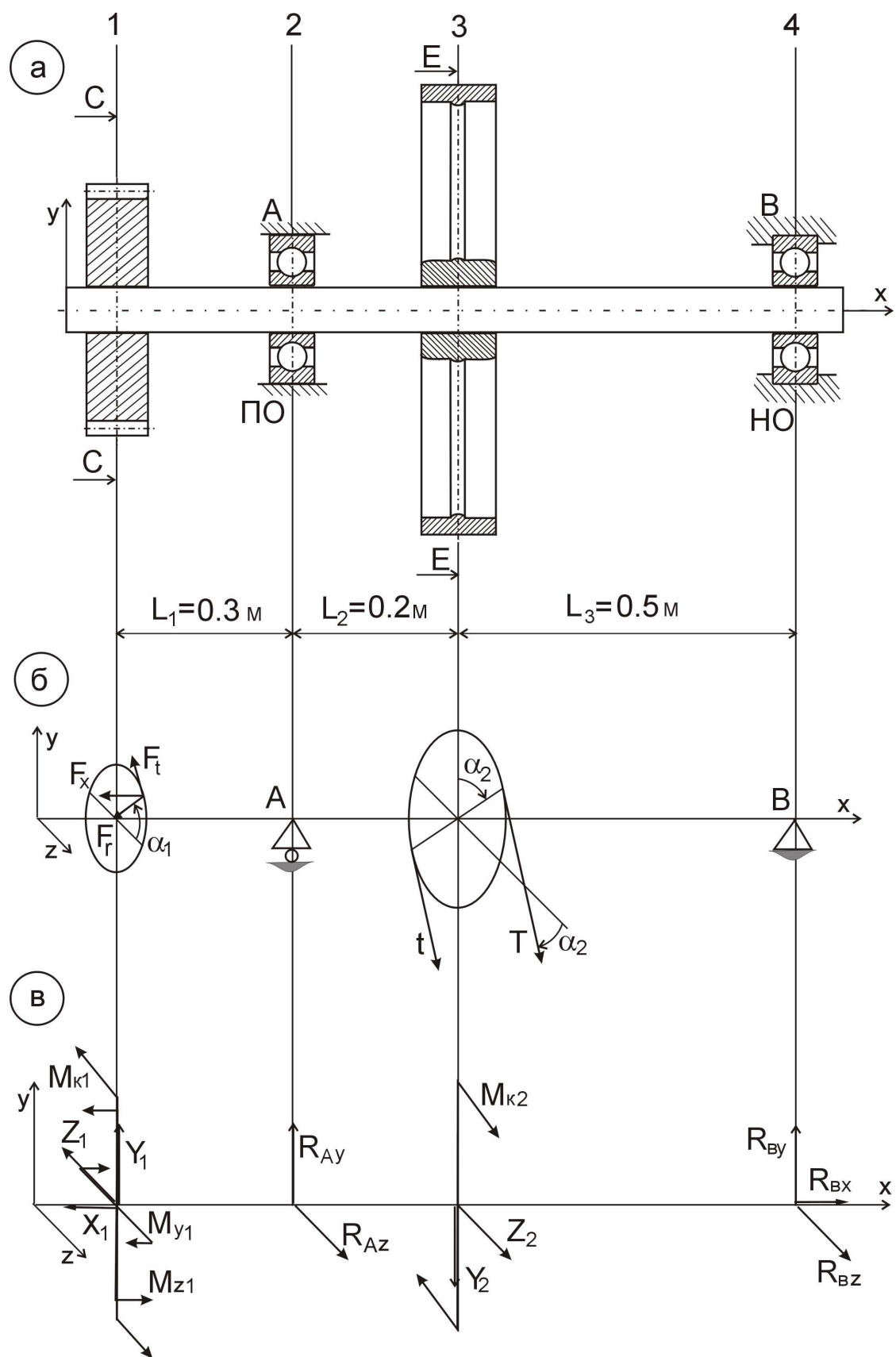
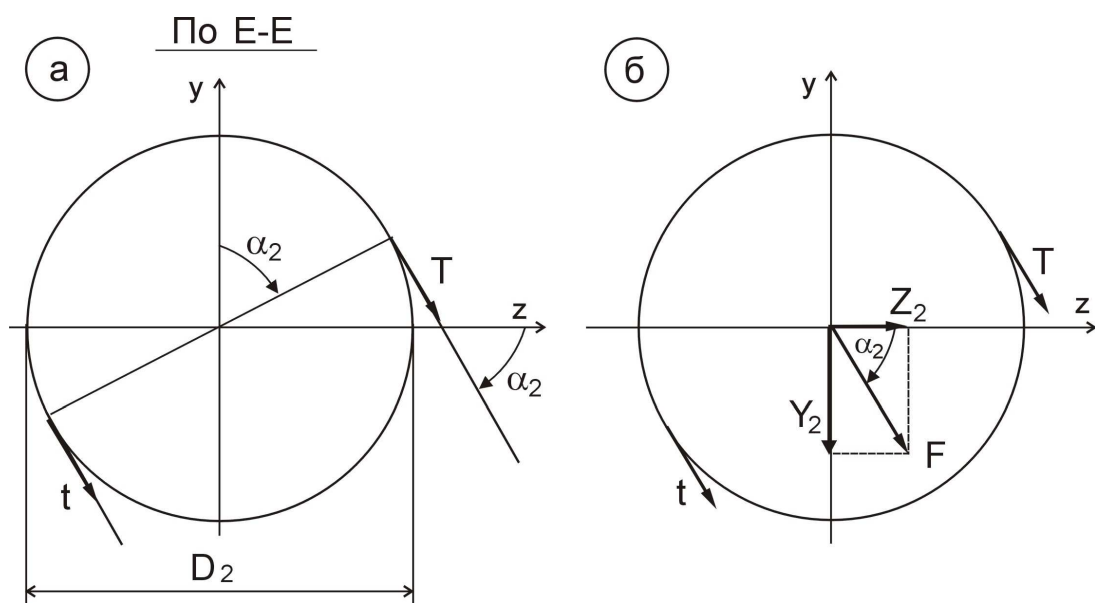
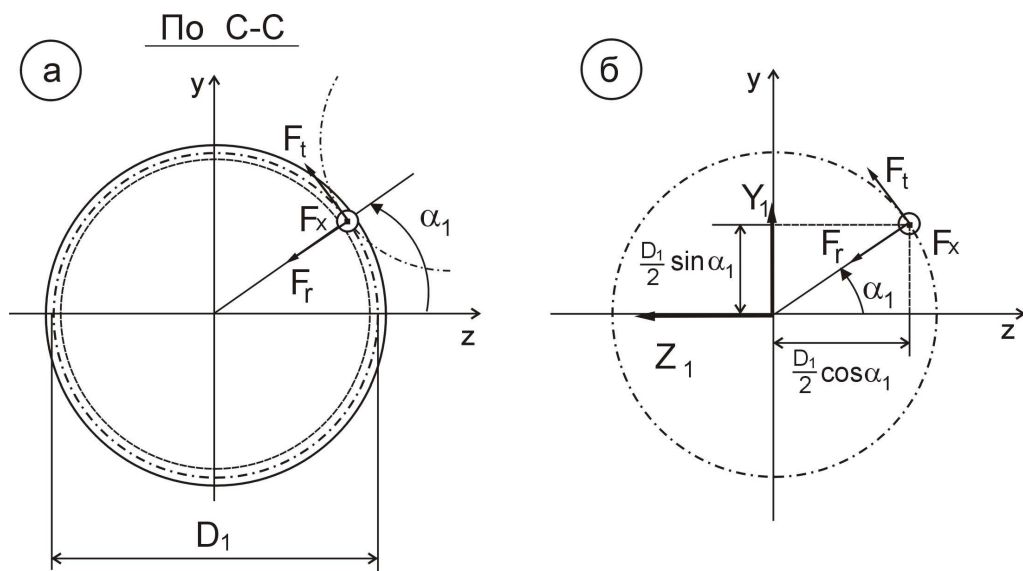


Рис.1





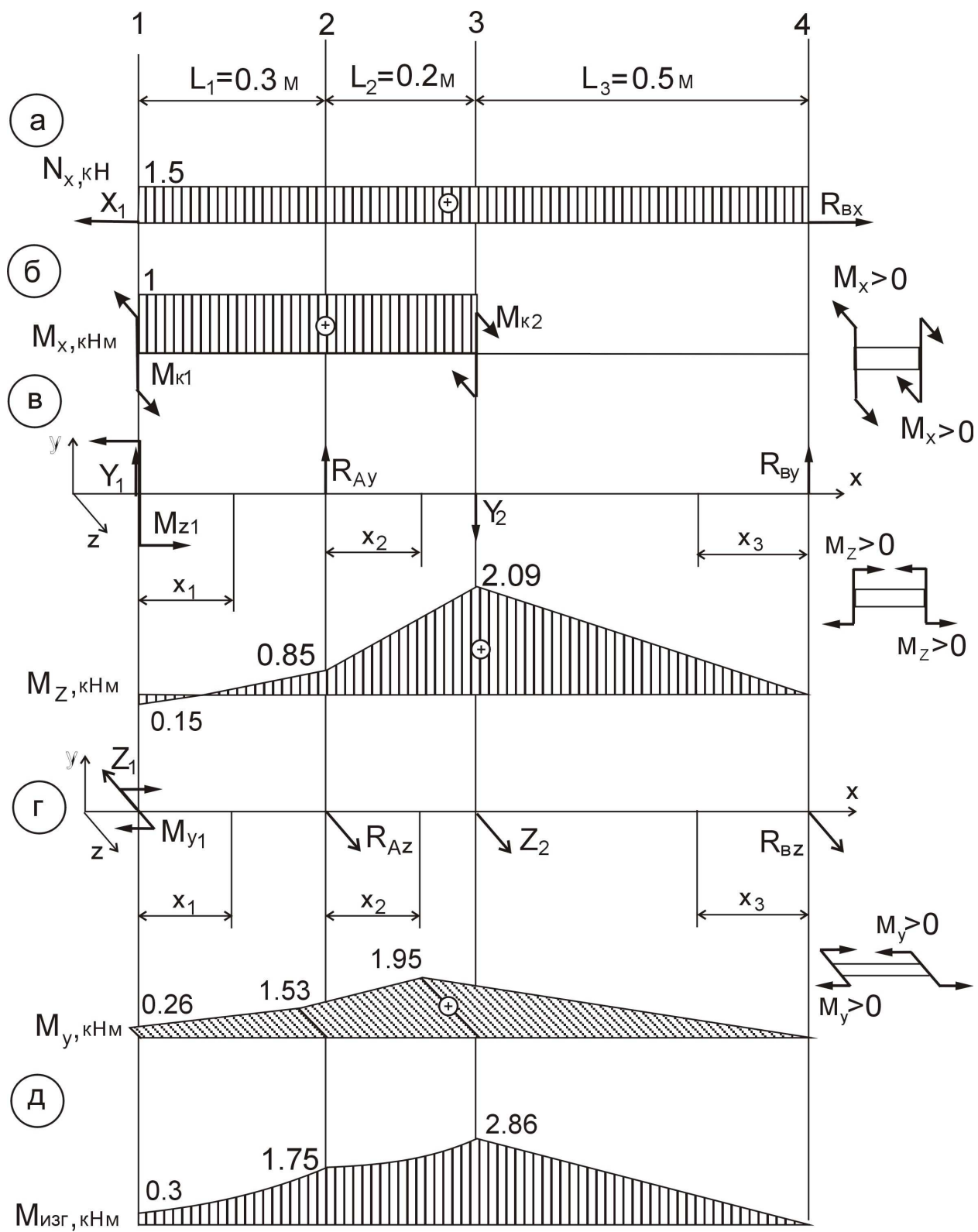


Рис.4

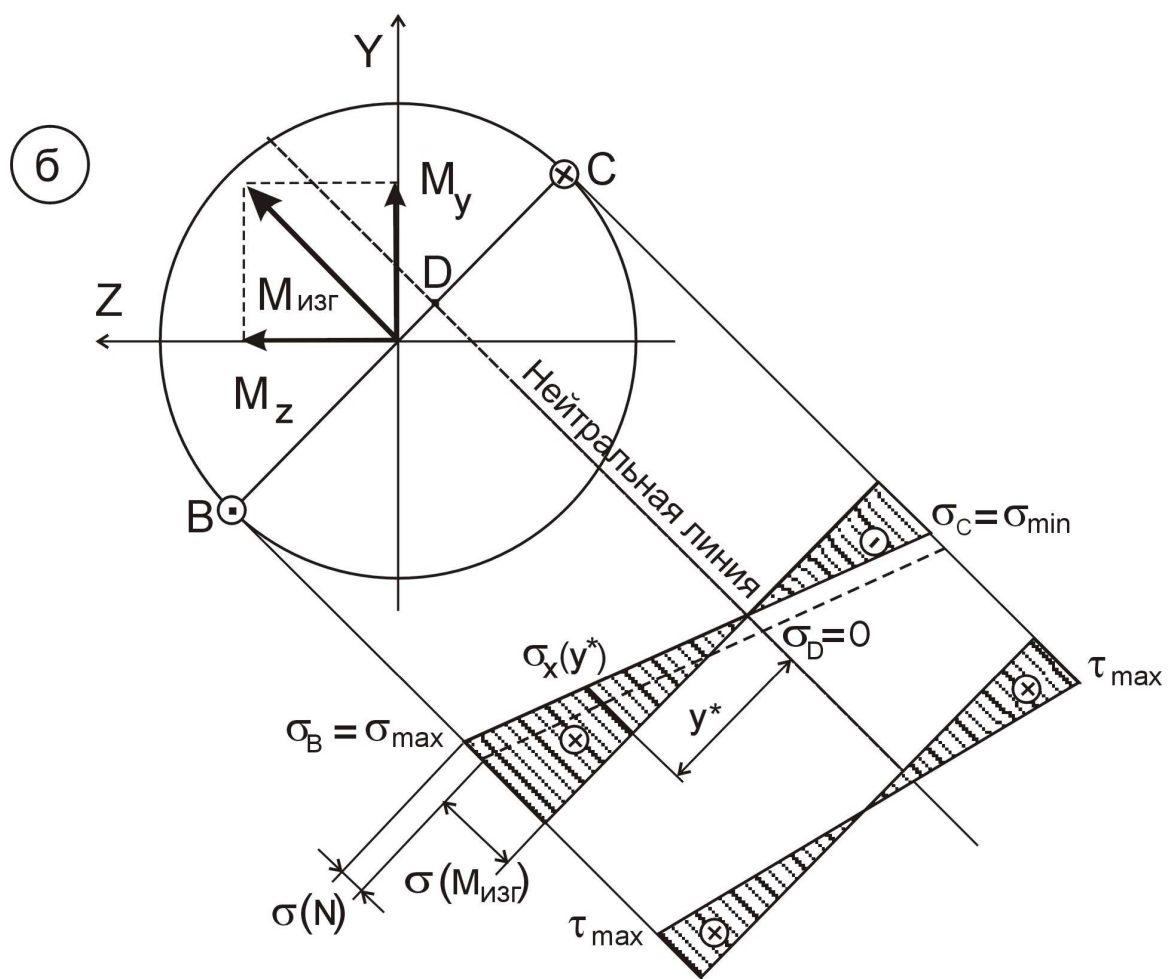
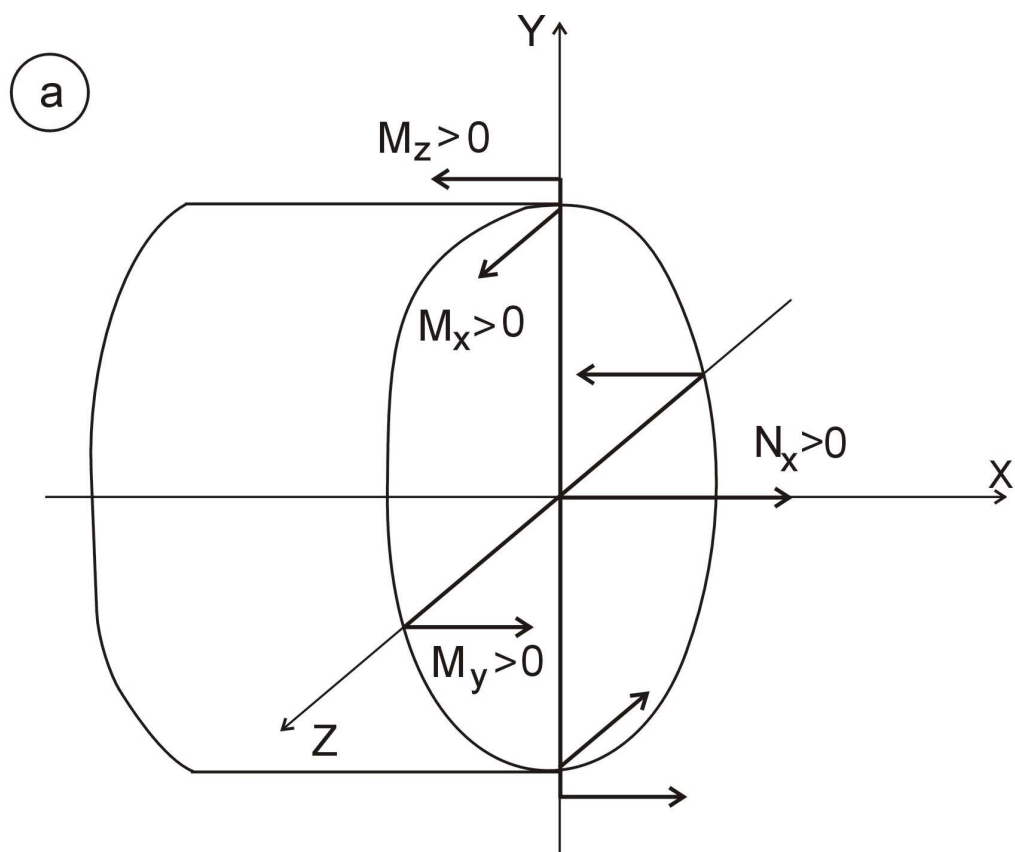


Рис.5

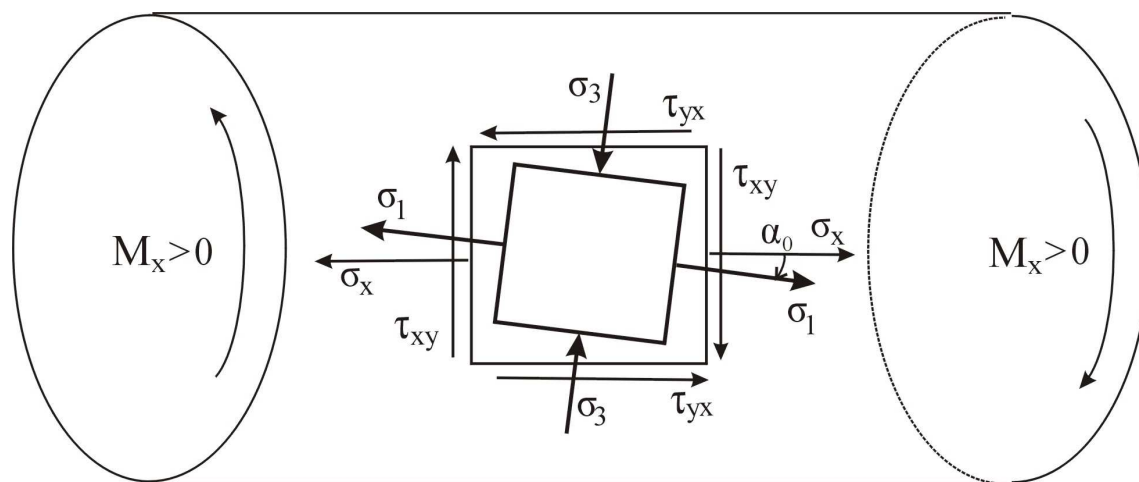
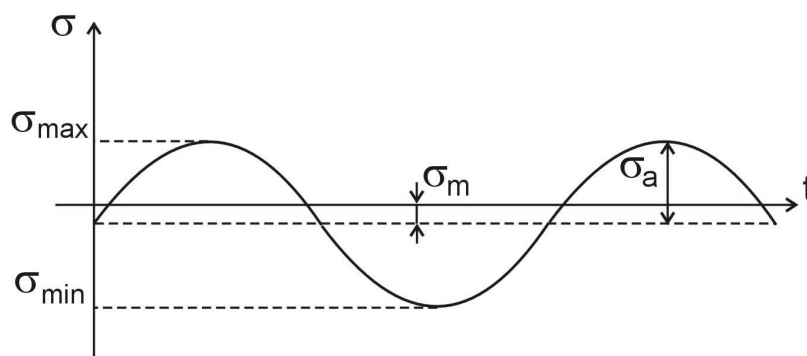


Рис.6

а



б

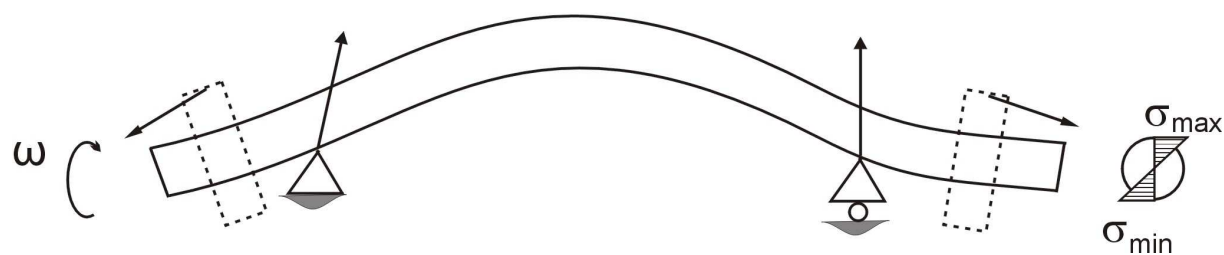


Рис.7