Курсовая работа
по курсу «Дифференциальные уравнения».
Выполнил студент группы 7о-201С Иванов И.И.
Вариант №1

Этап #6

Задание:

Вариант №1	***Этап #6***
$2x^2y''+(3x-2x^2)\cdot y'-(x+1)\cdot y=0$ $y(1)=0,\quad y'(1)=1$	**<u>Задание</u>**. 1. Найти приближенно-аналитическое решение задачи Коши методом неопределенных коэффициентов. 2. Найти приближенно-аналитическое решение задачи Коши методом последовательного дифференцирования.

<u>Дано:</u> $2x^2y''+(3x-2x^2)\cdot y'-(x+1)\cdot y=0 \quad y(1)=0,\quad y'(1)=1$.
Здесь: $x_0=1,\quad y(x_0)=y_0=0,\quad y'(x_0)=y'_0=1$.

Выразим из дифференциального уравнения старшую производную и проанализируем правую часть:

$$y''=\underbrace{\frac{-(3x-2x^2)\cdot y'+(x+1)\cdot y}{2x^2}}_{f(x,y,y')} \quad\Rightarrow\quad f(x,y,y')=\frac{-(3x-2x^2)\cdot y'+(x+1)\cdot y}{2x^2}$$

Т.к. функция $f(x,y,y')$ является аналитической в начальной точке $(x_0,y_0,y'_0)=(1,0,1)$, решение будем искать в виде бесконечного ряда по степеням $(x-x_0)=(x-1)$.

Часть1. Метод неопределенных коэффициентов.

Будем искать решение задачи Коши в виде:

$$y=C_0(x-1)^0+C_1(x-1)^1+C_2(x-1)^2+C_3(x-1)^3+C_4(x-1)^4+C_5(x-1)^5+\ldots=$$
$$=C_0+C_1(x-1)+C_2(x-1)^2+C_3(x-1)^3+C_4(x-1)^4+C_5(x-1)^5+\ldots$$

Тогда:

$$y' = C_1(x-1)^0 + 2C_2(x-1)^1 + 3C_3(x-1)^2 + 4C_4(x-1)^3 + 5C_5(x-1)^4 + ... =$$
$$= C_1 + 2C_2(x-1) + 3C_3(x-1)^2 + 4C_4(x-1)^3 + 5C_5(x-1)^4 + ...$$

$$y'' = 2C_2(x-1)^0 + 6C_3(x-1)^1 + 12C_4(x-1)^2 + 20C_5(x-1)^3 + ... =$$
$$= 2C_2 + 6C_3(x-1)^1 + 12C_4(x-1)^2 + 20C_5(x-1)^3 + ...$$

Выпишем коэффициенты дифференциального уравнения:

коэффициент при y'' :	$g_1(x) = 2x^2$
коэффициент при y' :	$g_2(x) = 3x - 2x^2$
коэффициент при y :	$g_3(x) = -(x+1)$
коэффициент при свободном члене :	$g_4(x) = 0$

Коэффициент $g_4(x)$ является конечным рядом по степеням $(x-1)$: $g_4(x) = 0 \cdot (x-1)^0$. Представим остальные коэффициенты $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ в виде рядов по степеням $(x-1)$, используя формулу Тейлора: $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$

Замечание !
Коэффициенты ДУ представляющие собой любые числовые константы не нужно раскладывать в ряд, поскольку любая константа M может быть представлена конечным рядом по степеням $(x - x_0)$: $M = M \cdot (x - x_0)^0$.

Также не нужно раскладывать в ряд коэффициенты, уже являющиеся конечными рядами по степеням $(x - x_0)$, например коэффициент $3x^2$ по степеням x, т.к. $3x^2 = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$ - конечный ряд.

$g_1(x) = 2x^2$ $\quad g_1(1) = 2$
$g_1'(x) = 4x$ $\quad g_1'(1) = 4$
$g_1''(x) = 4$ $\quad g_1''(1) = 4$
$g_1'''(x) = 0$ $\quad g_1'''(1) = 0$

$$\Rightarrow \quad g_1(x) = \frac{2}{0!}(x-1)^0 + \frac{4}{1!}(x-1)^1 + \frac{4}{2!}(x-1)^2 = 2 + 4(x-1) + 2(x-1)^2$$

$g_2(x) = 3x - 2x^2$ $\quad g_2(1) = 1$
$g_2'(x) = 3 - 4x$ $\quad g_2'(1) = -1$
$g_2''(x) = -4$ $\quad g_2''(1) = -4$
$g_2'''(x) = 0$ $\quad g_2'''(1) = 0$

$$\Rightarrow \quad g_2(x) = \frac{1}{0!}(x-1)^0 + \frac{-1}{1!}(x-1)^1 + \frac{-4}{2!}(x-1)^2 = 1 - (x-1) - 2(x-1)^2$$

$g_3(x) = -(x-1)$	$g_3(1) = -1$	$\Rightarrow$	$g_3(x) = \frac{-2}{0!}(x-1)^0 + \frac{-1}{1!}(x-1)^1 = -2-(x-1)$
$g_3'(x) = -1$	$g_3'(1) = -1$		
$g_3''(x) = 0$	$g_3''(1) = 0$		

Перепишем исходное уравнение, используя представление в виде рядов для y, y', y'' и всех коэффициентов:

$$\{\ 2+4(x-1)+2(x-1)^2\ \}\cdot\{\ 2C_2+6C_3(x-1)+12C_4(x-1)^2+20C_5(x-1)^3+...\ \}+$$

$$+\{\ 1-(x-1)-2(x-1)^2\ \}\cdot\{\ C_1+2C_2(x-1)+3C_3(x-1)^2+4C_4(x-1)^3+5C_5(x-1)^4+...\ \}+$$

$$+\{\ -2-(x-1)\ \}\cdot\{\ C_0+C_1(x-1)+C_2(x-1)^2+C_3(x-1)^3+C_4(x-1)^4+C_5(x-1)^5+...\ \}=0$$

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые при одинаковых степенях $(x-1)$, а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $(x-1)$ в левой и правой части уравнения:

	левая часть		правая часть
$(x-1)^0$	$4C_2+C_1-2C_0$	=	0
$(x-1)^1$	$12C_3+8C_2-C_1+2C_2-C_0-2C_1$	=	0
$(x-1)^2$	$24C_4+24C_3+4C_2+3C_3-2C_2-2C_1-C_1-2C_2$	=	0
$(x-1)^3$	$40C_5+48C_4+12C_3+4C_4-3C_3-4C_2-2C_3-C_2$	=	0

Окончательно получена система 4-х алгебраических уравнений с 6-ю неизвестными:

$$\begin{cases} -2C_0+C_1+4C_2=0 \\ -C_0-3C_1+10C_2+12C_3=0 \\ -3C_1+27C_3+24C_4=0 \\ -5C_2+7C_3+52C_4+40C_5=0 \end{cases}$$

Определим коэффициенты C_0 и C_1 из начальных условий:

$y(1)=0 \quad\Rightarrow\quad C_0+C_1(1-1)+C_2(1-1)^2+C_3(1-1)^3+...=0$, следовательно, $C_0=0$.

$y'(1)=1 \quad\Rightarrow\quad C_1+2C_2(1-1)+3C_3(1-1)^2+4C_4(1-1)^3+...=1$, следовательно, $C_1=1$.

Тогда система для определения коэффициентов примет вид:

$$\begin{cases} -2\cdot 0+1+4C_2=0 \\ -0-3\cdot 1+10C_2+12C_3=0 \\ -3\cdot 1+27C_3+24C_4=0 \\ -5C_2+7C_3+52C_4+40C_5=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4C_2=-1 \\ 10C_2+12C_3=3 \\ 27C_3+24C_4=3 \\ -5C_2+7C_3+52C_4+40C_5=0 \end{cases}$$

Определим коэффициенты C_2 и C_3 из системы, получим: $C_2=-\frac{1}{4}$, $C_3=\frac{11}{24}$.

Окончательно, запишем приближенно-аналитическое решение задачи Коши.

Ответ: $\boxed{y=(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{11}{24}(x-1)^3+...}$

Часть2. Метод последовательного дифференцирования.

Будем искать решение задачи Коши в виде: $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot(x-x_0)^k$, где $a_k=\frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$

Из начальных условий: $y(1)=0 \quad \Rightarrow \quad a_0=\frac{y(1)}{0!}=\frac{0}{1}=0$

$y'(1)=1 \quad \Rightarrow \quad a_1=\frac{y'(1)}{1!}=\frac{1}{1}=1$

Найдем y'' из дифференциального уравнения:

$$y''=\frac{(x+1)y-(3x-2x^2)y'}{2x^2}=\frac{xy+y-3xy'+2x^2y'}{2x^2}$$

Вычислим y'' в точке $x_0=1$ при условии, что $y(1)=0$, $y'(1)=1$:

$$y''(1)=\frac{1\cdot y(1)+y(1)-3\cdot 1\cdot y'(1)+2\cdot 1^2\cdot y'(1)}{2\cdot 1^2}=\frac{1\cdot 0+0-3\cdot 1\cdot 1+2\cdot 1^2\cdot 1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_2=\frac{y''(1)}{2!}=\frac{-1/2}{2}=-\frac{1}{4}$$

Найдем y''', продифференцировав y'' по x:

$$y''' = \left(\frac{xy + y - 3xy' + 2x^2y'}{2x^2}\right)' =$$

$$= \frac{(y + xy' + y' - 3y' - 3xy'' + 4xy' + 2x^2y'')2x^2 - 4x(xy + y - 3xy' + 2x^2y')}{4x^4} =$$

$$= \frac{y + xy' + y' - 3y' - 3xy'' + 4xy' + 2x^2y''}{2x^2} - \frac{xy + y - 3xy' + 2x^2y'}{x^3} =$$

$$= \frac{y}{2x^2} + \frac{y'}{2x} + \frac{y'}{2x^2} - \frac{3y'}{2x^2} - \frac{3y''}{2x} + \frac{2y'}{x} + y'' - \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^3} + \frac{3y'}{x^2} - \frac{2y'}{x} =$$

$$= \frac{y}{2x^2} + \frac{y'}{2x} + \frac{y'}{2x^2} + \frac{3y'}{2x^2} - \frac{3y''}{2x} + y'' - \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^3}$$

Вычислим y''' в точке $x_0 = 1$ при условии, что $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = -\frac{1}{2}$:

$$y'''(1) = \frac{y(1)}{2 \cdot 1^2} + \frac{y''(1)}{2 \cdot 1} + \frac{y'(1)}{2 \cdot 1^2} + \frac{3y'(1)}{2 \cdot 1^2} - \frac{3y''(1)}{2 \cdot 1} + y''(1) - \frac{y(1)}{1^2} - \frac{y(1)}{1^3} =$$

$$= \frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3 \cdot (-1/2)}{2} + (-\frac{1}{2}) - \frac{0}{1} - \frac{0}{1} = \frac{11}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_3 = \frac{y'''(1)}{3!} = \frac{11/4}{6} = \frac{11}{24}}$$

Окончательно, запишем приближенно-аналитическое решение задачи Коши.

Ответ: $\boxed{y = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{11}{24}(x-1)^3 + \ldots}$