Министерство образования и науки Российской Федерации

Алтайский государственный технический
университет им И.И. Ползунова

А.С. Киркинский, М.А. Макарова

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ

Методические рекомендации и варианты заданий контрольных работ для студентов-заочников

Барнаул 2008

УДК 519.1 (075.8)

Киркинский А.С., Макарова М.А. Введение в дискретную математику: Методические рекомендации и варианты заданий контрольных работ для студентов-заочников. – Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул : АлтГТУ, 2008. – 72 с.

Пособие предназначено для студентов-заочников специальности “Прикладная информатика” и других специальностей, учебные планы которых содержат курсы дискретной математики. Включены начальные сведения о множествах, высказываниях, предикатах, булевых функциях. Приведено задание для контрольной работы (30 вариантов). Имеются образцы решения задач.

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики АлтГТУ

Рецензент – к.т.н., доцент Зайцев В.П.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это пособие содержит начальные сведения о множествах, операциях с множествами, о предикатах и о действиях с предикатами. Рассматриваются также булевы функции (другое название – функции алгебры логики).

Основные понятия теории множеств являются вводными не только к курсу дискретной математики, но и к любому математическому курсу. Более того, язык теории множеств, принятый в математике, широко применяется теперь и в других областях науки и практики.

Общезначимыми являются и начала математической логики. Ведь логика – это анализ методов рассуждений. Если используется математический аппарат, то это – математическая логика. Язык математической логики позволяет избежать многих неточностей и поэтому активно используется везде, где применяется математика.

Всё это объясняет интерес к математической логике всех, кто занимается математикой или её применениями. Однако сейчас, во времена бурного развития и использования электронно-вычислительной техники, этот интерес резко возрос. Дело в том, что после создания первых ЭВМ выяснилось, что теоретический аппарат для расчёта самых разных вычислительных систем уже есть – он создан в математической логике.

Особую роль для областей науки и техники, опирающихся на применение вычислительных машин, играют разделы дискретной математики. Методы дискретной математики важны для изучения различных управляющих систем, систем связи, средств хранения, обработки и передачи информации. Дискретная математика применяется при решении многих экономических задач.

Курс дискретной математики изучают студенты целого ряда технических специальностей. Для специальности “прикладная информатика” он состоит из двух частей. Во второй части будут рассмотрены элементы теории графов и конечных автоматов.

1. МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

Математическое понятие ***множество*** формировалось постепенно из наших общих представлений о совокупности, наборе каких-либо предметов. Оно не имеет строгого определения. В математике более сложные объекты определяются, объясняются через более простые. Поэтому некоторые самые основные понятия не определяются, их смысл поясняется на примерах.

Пример 1. Можно рассматривать

а) множество книг, стоящих на полке;

б) множество букв в слове “*книга*”;

в) множество всех треугольников на плоскости, и т. д.

Множества мы будем обычно обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, M, $N,\ldots$. Множество состоит из ***элементов***. Запись

$$a \in M\,, \quad b \notin M$$

означает, что a – элемент множества M (a принадлежит M), а b не является элементом M (b не принадлежит M).

Множество можно задать перечислением элементов:

$$M = \{a, и, г, к, н\}.$$

Другой способ задания – с помощью свойства, характеризующего элементы множества:

$$N = \{\, x \mid x - \text{буква, входящая в слово "}\textit{книга}\text{"} \,\}.$$

Вертикальную черту | в задании множества можно рассматривать как сокращение слов “*таких, что…*”. Легко заметить, что множества M и N в нашем примере ***равны***: $M = N$, т. е. состоят из одних и тех же элементов.

Множество A называется ***подмножеством*** (частью) множества B, если каждый элемент A принадлежит также и множеству B. Используется запись:

$$A \subseteq B\,.$$

Заметим, что само множество тоже является своим подмножеством: $B \subseteq B$.

Множество, в котором нет ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается знаком $\varnothing$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Пример 2. Перечислим все подмножества множества $M=\{a,b,c\}$. Их 8 штук: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$.

Перейдём к определению действий (***операций***) над множествами.

Пересечением множеств A и B называется множество $A\cap B$, состоящее из элементов, входящих и в A, и в B:

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ и } x\in B\}.$$

Объединением множеств A и B называется множество $A\cup B$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B. Можно записать так:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ или } x\in B\},$$

имея в виду “неразделительное или”, т. е. в $A\cup B$ входят и элементы $A\cap B$.

Разностью $A\setminus B$ называется множество тех элементов A, которые не входят в B:

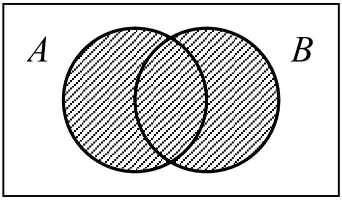
$$A\setminus B=\{x\mid x\in A,\ \ x\notin B\}.$$

Дополнением к множеству A называется множество $\overline{A}$, состоящее из элементов, не входящих в A:

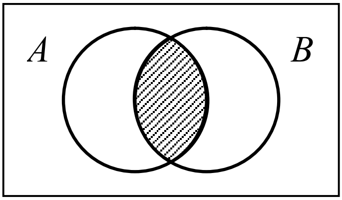
$$\overline{A}=\{x\mid x\notin A\}.$$

Конечно, в $\overline{A}$ нельзя включать любые предметы, не являющиеся элементами A. Работая, например, с числовыми множествами, глупо было бы включать в дополнение деревья в лесу или книги на полке. Поэтому всегда считают, что все множества, участвующие в решении данной задачи, являются подмножествами некоторого общего, ***универсального*** множества U. Тогда дополнение $\overline{A}$ можно определить так: $\overline{A}=U\setminus A$.

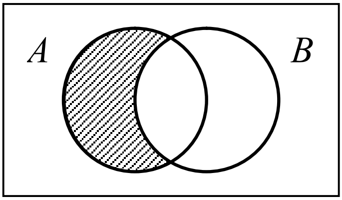
Операции над множествами можно наглядно проиллюстрировать с помощью ***диаграмм Эйлера–Венна***:



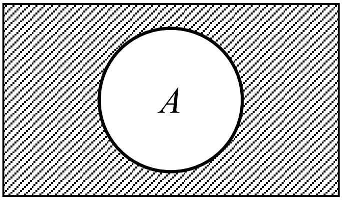
Объединение $A \cup B$



Пересечение $A \cap B$



Разность $A \setminus B$



Дополнение $\overline{A}$

<u>Пример 3.</u> Пусть A – множество чётных целых чисел, B – множество целых чисел, делящихся на 5. Требуется определить множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$. В качестве универсального множества будем рассматривать множество всех целых чисел Z.

$$A \cap B = \left\{x \in Z \mid x \text{ чётно и } x \text{ делится на } 5\right\} =$$
$$= \left\{x \in Z \mid x \text{ делится на } 10\right\};$$
$$A \cup B = \left\{x \in Z \mid x \text{ чётно или } x \text{ делится на } 5\right\} =$$
$$= \left\{x \in Z \mid x \text{ оканчивается на } 0, 2, 4, 5, 6 \text{ или } 8\right\};$$
$$A \setminus B = \left\{x \in Z \mid x \text{ чётно и не делится на } 5\right\} =$$
$$= \left\{x \in Z \mid x \text{ оканчивается на } 2, 4, 6 \text{ или } 8\right\};$$
$$B \setminus A = \left\{x \in Z \mid x \text{ делится на 5 и нечётно}\right\} =$$
$$= \left\{x \in Z \mid x \text{ оканчивается на } 5\right\};$$
$$\overline{A} = \left\{x \in Z \mid x \text{ нечётно}\right\} \text{ – множество нечётных чисел.}$$

Работая с множествами, будем использовать знак $\Rightarrow$ вместо слов “*если ..., то ...*”, знак $\Leftrightarrow$ заменяет слова “*тогда и только тогда*”.

<u>Пример 4.</u> Доказать или опровергнуть соотношение алгебры множеств $\overline{X} \cap Y \subseteq Z \Leftrightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y} \cup Z$.

Пусть выполняется $\overline{X} \cap Y \subseteq Z$. Докажем, что тогда $\overline{X} \subseteq \overline{Y} \cup Z$. Для этого возьмём произвольный элемент $a \in \overline{X}$. Возможны два случая: $a \in Y$ или $a \in \overline{Y}$. Пусть $a \in Y$. Так как $\overline{X} \cap Y \subseteq Z$, то тогда $a \in Z$ и, значит, $a \in \overline{Y} \cup Z$. Если же $a \in \overline{Y}$, то тоже, очевидно, $a \in \overline{Y} \cup Z$. Итак, $a \in \overline{X} \Rightarrow a \in \overline{Y} \cup Z$, что и требовалось. Таким образом, доказано:

$$\overline{X} \cap Y \subseteq Z \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y} \cup Z.$$

Теперь в обратную сторону: пусть выполняется $\overline{X} \subseteq \overline{Y} \cup Z$. Требуется доказать, что $\overline{X} \cap Y \subseteq Z$. Возьмём какой-нибудь $b \in \overline{X} \cap Y$. Но тогда $b \in \overline{X}$ и, по условию, $b \in \overline{Y} \cup Z$. Так как $b \in Y$, то $b \notin \overline{Y}$. Значит, $b \in Z$. Итак, $b \in \overline{X} \cap Y \Rightarrow b \in Z$. Следовательно:

$$\overline{X} \subseteq \overline{Y} \cup Z \Rightarrow \overline{X} \cap Y \subseteq Z.$$

Доказанные соотношения равносильны требуемому:

$$\overline{X} \cap Y \subseteq Z \Leftrightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y} \cup Z.$$

Если утверждение в условии ложно, то установить это можно с помощью диаграммы – см. решение задачи 2 в разделе 4.

Рассмотрим ещё одну операцию над множествами. ***Декартовым произведением*** множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Элементами $A \times B$ являются ***упорядоченные*** пары элементов, первый – из A, второй – из B. Обратите внимание на запись: мы употребляем круглые скобки, когда важен порядок элементов: $(2,3)$ и $(3,2)$ – это разные упорядоченные пары.

Если же порядок не важен, то будем писать фигурные скобки: $\{2,3\}=\{3,2\}$, так как это множество, состоящее из чисел 2 и 3.

Пример 5. Найдём декартово произведение множеств $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$:

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}.$$

Пример 6. Доказать тождество алгебры множеств:

$$X\times\left(\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)=X\times\overline{(Y\cup Z)}.$$

Первый сомножитель декартова произведения и в левой, и в правой частях равенства одинаковый – это множество X. Таким образом, чтобы доказать тождество, достаточно установить справедливость соотношения $\overline{Y}\cap\overline{Z}=\overline{Y\cup Z}$.

Возьмем $b\in\left(\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)$. Тогда $b\in\overline{Y}$ и $b\in\overline{Z}$. Значит, $b\notin Y$ и $b\notin Z$. Отсюда следует, что $b\notin(Y\cup Z)$. Поэтому $b\in\overline{(Y\cup Z)}$. Итак, любой элемент множества $\overline{Y}\cap\overline{Z}$ содержится и во множестве $\overline{Y\cup Z}$, т. е.

$$\overline{Y}\cap\overline{Z}\subseteq\overline{Y\cup Z}.$$

Докажем обратное включение. Пусть $b\in\overline{(Y\cup Z)}$. Тогда $b\notin(Y\cup Z)$. Поэтому $b\notin Y$ и $b\notin Z$, или, другими словами $b\in\overline{Y}$ и $b\in\overline{Z}$. Следовательно, $b\in\left(\overline{Y}\cap\overline{Z}\right)$. Итак, любой элемент множества в правой части равенства является элементом и левой части, т. е.

$$\overline{Y\cup Z}\subseteq\overline{Y}\cap\overline{Z}.$$

Полученные нами два включения и означают равенство множеств.

Теперь рассмотрим важнейшее в математике понятие отображения. Пусть имеются два множества: A, B. ***Отображением*** множества A во множество B называется правило f, позволяющее для каждого элемента a множества A найти соответствующий ему, вполне определённый элемент $f(a)$ множества B:

$$f:\ A \to B.$$

Более строгий подход к определению отображения, основанный на понятии бинарного отношения, можно найти, например, в [5].

Множество A называется ***областью определения*** отображения f. Вместо слова "отображение" можно употреблять термин "функция" – это то же самое. В школьном курсе математики изучаются в основном функции, определённые на числовых множествах:

$$f:\ D \to R,$$

где область определения D является подмножеством множества действительных чисел R. Мы будем рассматривать и другие ситуации.

<u>Пример 7.</u> Пусть T – множество треугольников, S – множество окружностей на плоскости; $s(t)$ – окружность, описанная около треугольника t. Получаем отображение

$$s:\ T \to S,$$

сопоставляющее каждому треугольнику описанную около него окружность.

Обратим внимание: любое отображение $f:\ A \to B$ удовлетворяет двум обязательным требованиям.

Для каждого элемента a из A можно найти его значение $f(a)$:

$$\forall a \in A \quad \exists b \in B:\ f(a) = b.$$

Значение $f(a)$ определяется единственным образом:

$$\forall a \in A \quad f(a) = b_1,\ f(a) = b_2 \ \Rightarrow\ b_1 = b_2.$$

Здесь мы использовали логические символы, которые могут оказаться неизвестными читателю. Эти символы очень удобны, мы будем часто ими пользоваться, поэтому разъясним их подробно. Знак $\forall$ называется ***квантором всеобщности***, служит сокращением слов "*для всех*", или "*для любого*", "*любой*". Знак $\exists$ называется ***квантором существования***, служит сокращением слова "*существует*". В математической логике кванторы являются важными понятиями и изучаются глубоко, однако мы будем пока считать их лишь удобными сокращениями слов.

Множество $\{f(a) \mid a \in A\}$ называется ***областью значений*** отображения f. Если $f(a) = b$, то говорят, что b является ***образом*** a при отображении f (или значением функции f на аргументе a).

Множество упорядоченных пар

$$\{(a,b) \mid f(a) = b\}$$

называется ***графиком*** отображения f. Ясно, что график – это подмножество декартова произведения $A \times B$.

Рассмотрим свойства, которыми могут обладать отображения. Отображение $f:\ A \to B$ называется ***инъективным***, если

$$f(a_1) = b,\ f(a_2) = b \ \Rightarrow \ a_1 = a_2 .$$

Другими словами, инъективное отображение переводит разные элементы в разные:

$$a_1 \neq a_2 \ \Rightarrow \ f(a_1) \neq f(a_2).$$

Отображение $f:\ A \to B$ называется ***сюръективным*** (или отображением A ***на*** B), если

$$\forall b \in B \ \ \exists a \in A:\ f(a) = b .$$

При сюръективном отображении любой элемент $b \in B$ является образом некоторого элемента $a \in A$.

Отображение называется ***биективным***, если оно является инъективным и сюръективным. При биективном отображении каждому $b \in B$ соответствует определённый $a \in A$, поэтому используется двусторонняя стрелка:

$$f:\ A \leftrightarrow B .$$

В этом случае говорят, что между множествами A и B установлено ***взаимно однозначное соответствие***.

В примере 7 отображение является сюръективным и не является инъективным, так как в любую окружность можно вписать много различных треугольников.

Пример 8. Пусть $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $M = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ – множество чётных натуральных чисел. Рассмотрим отображение $\alpha : N \to M$, действующее по правилу: $\alpha(n) = 2n$. Если $n_1 \neq n_2$, то $2n_1 \neq 2n_2$, поэтому α инъективно. Любое чётное число из M является образом некоторого натурального $n \in N$. Значит, α – сюръективно и, следовательно, биективно: $\alpha : N \leftrightarrow M$. Каждому натуральному $n \in N$ соответствует одно чётное, и наоборот: каждому чётному числу соответствует одно натуральное. Между множествами N, M установлено взаимно однозначное соответствие.

Введём понятие мощности множества. Если множество состоит из конечного числа элементов: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, то его ***мощностью*** называется число n (число элементов). Распространим понятие мощности на бесконечные множества. Множества A, B называются ***равномощными***, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Как видно из примера 8, бесконечное множество может иметь одинаковую мощность со своим подмножеством. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется ***счётным***. Можно сказать, что это “самая маленькая” бесконечная мощность. Множество действительных чисел не является счётным. Его мощность называется мощностью ***континуума***.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Высказывания и логические операции

2.1.1. Основные понятия

Высказыванием называется предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно является истинным или оно является ложным. Таким образом, каждому высказыванию сопоставляется одно из двух значений истинности, которые будем обозначать буквами $И$ и $Л$. Сами высказывания будем обозначать буквами латинского алфавита A, B, C, … . Запись

$$|A| = И$$

означает, что буквой A обозначено истинное высказывание.

<u>Пример 9.</u> Предложение “*Луна является спутником Земли*” есть истинное высказывание. Утверждение “ $2 + 3 = 8$ ” есть ложное высказывание. Предложения “*Добрый вечер!*”, “*Сколько вам лет?*”, “ $2x > 3$ ” не являются высказываниями, так как им нельзя приписать какое-либо значение истинности.

Из простых высказываний можно построить более сложные с помощью ***операций*** над высказываниями (логических связок). Основными логическими операциями являются конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация и эквиваленция.

Конъюнкцией высказываний A, B называется высказывание $A \& B$ (читается “A и B”, “A конъюнкция B”), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A, B.

Это определение можно дать в виде таблицы:

A	B	$A \& B$
$И$	$И$	$И$
$И$	$Л$	$Л$
$Л$	$И$	$Л$
$Л$	$Л$	$Л$

Такая таблица называется ***таблицей истинности*** для сложного высказывания $A \& B$. В русском языке конъюнкции лучше всего соответствует соединение предложений союзом "и", но возможно использование и других средств языка. Решающее значение здесь имеет таблица истинности. Если способ образования сложного предложения удовлетворяет этой таблице, значит это конъюнкция.

Для конъюнкции часто используются и другие обозначения:

$$A \& B = A \wedge B = AB.$$

Пример 10. Высказывание "*Волга впадает в Каспийское море, а Обь впадает в Чёрное море*" есть конъюнкция двух высказываний. Высказывание " *Обь впадает в Чёрное море* " ложно, поэтому и вся конъюнкция ложна.

Определение других логических связок дадим сразу с помощью таблиц истинности.

Дизъюнкцией высказываний A, B называется высказывание $A \vee B$ (читается "A или B"), имеющее следующую таблицу истинности:

A	B	$A \vee B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

Отметим, что в русском языке дизъюнкции соответствует неразделительное "или", т. е. "A или B" здесь понимается как "или A, или B, или и то, и другое".

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\neg A$ (читается "не A", "отрицание A"), удовлетворяющее таблице истинности:

A	$\neg A$
И	*Л*
Л	*И*

Импликация $A \to B$ – это высказывание, определяемое таблицей:

A	B	$A \to B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*

Высказывание A называется ***посылкой***, B – ***заключением*** импликации. Читать формулу $A \to B$ можно так: “из A следует B”, “если A, то B”, “A влечёт B”, “A достаточно для B”. Однако соответствие этих русских оборотов речи и импликации далеко не полное. С точки зрения русской речи выражение “*Если Лондон столица Франции, то трижды два – шесть*” довольно бессмысленно, но из приведённой таблицы видно, что в алгебре логики это утверждение считается истинным.

Рассмотрим ещё одну логическую связку – ***эквиваленцию***. Она определяется следующей таблицей:

A	B	$A \leftrightarrow B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*

При чтении используются обороты: “A эквивалентно B”, “A тогда и только тогда, когда B”, “A необходимо и достаточно для B”. Как и в случае импликации, соответствие русского языка и логического определения неполное. Поэтому для определения значения истинности следует обращаться к таблице.

<u>Пример 11.</u> Высказывание “*Равенство* $\sin 30° = 1$ *эквивалентно равенству* $2 + 5 = 8$” есть эквиваленция двух ложных высказываний. Следовательно, оно истинно.

Применяя несколько логических операций, можно получить примеры более сложных высказываний.

2.1.2. Формулы алгебры высказываний

Пропозициональной переменной (или переменным элементарным высказыванием) называется произвольное высказывание, конкретный вид которого неизвестен. Другими словами, это переменная, принимающая значения во множестве высказываний. Термин “пропозициональная” отражает тип переменной: “proposition” (англ.) – предложение, высказывание. Будем обозначать пропозициональные переменные буквами X, Y, Z, U, … . ***Логическими константами*** (или постоянными элементарными высказываниями) являются символы $И$ – истинное элементарное высказывание, $Л$ – ложное элементарное высказывание.

Применяя логические операции не к конкретным высказываниям, а к пропозициональным переменным, мы получим ***формулу алгебры высказываний***. Дадим строгое определение этого понятия.

1) Пропозициональные переменные и логические константы есть формулы.
2) Если Φ_1, Φ_2 – формулы, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$, $(\neg\Phi_1)$ также являются формулами.
3) Других формул, кроме описанных в 1) и 2), нет.

Определения такого типа называются индуктивными: сначала определяются самые простые формулы, затем указывается, как из простых строятся более сложные.

Чтобы избежать нагромождения скобок, условимся, что при отсутствии скобок логические операции выполняются в следующем порядке:

$$\neg, \&, \vee, \to, \leftrightarrow.$$

Кроме того, внешние скобки в формуле писать не обязательно.

Пример 12. Запись $(((X \to Y) \& Z) \to (X \vee Z))$ является формулой алгебры высказываний (проверьте это!). Пользуясь соглашением об опускании скобок, эту же формулу можно записать проще: $(X \to Y) \& Z \to X \vee Z$.

Если в формулу вместо переменных подставлять постоянные высказывания, то она превратится в сложное высказывание. Важно, что его значение истинности зависит лишь от значений истинности подставляемых высказываний (и не зависит от их конкретного содержания). Поэтому для каждой формулы алгебры высказываний можно построить таблицу истинности.

Пример 13. Построить таблицу истинности для формулы

$$(X \vee Y) \to X .$$

X	Y	$X \vee Y$	$(X \vee Y) \to X$
И	*И*	*И*	*И*
И	*Л*	*И*	*И*
Л	*И*	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*И*

Здесь столбец значений истинности формулы $X \vee Y$ промежуточный. Использование промежуточных столбцов удобно при работе со сложными формулами.

Теперь ясно, что формулу алгебры высказываний можно рассматривать как функцию значений входящих в неё переменных, причём каждая из переменных и сама функция могут принимать лишь два значения: *И* и *Л* .

Особую роль играют тождественно истинные формулы, или тавтологии. Формула алгебры высказываний называется ***тавтологией***, если она принимает значение *И* при любом наборе значений входящих в неё переменных. Формула алгебры высказываний, которая при любом наборе значений переменных принимает значение $Л$, называется ***тождественно ложной***. Если же существует такой набор значений переменных, на котором формула принимает значение $И$, то такая формула называется ***выполнимой***. Аналогично, ***опровержимой*** называется формула, которая может обращаться в ложное высказывание при некоторых значениях входящих в неё переменных.

Пример 14. Формула $X \to (Y \to X)$ является тавтологией. Чтобы убедиться в этом, построим таблицу истинности:

X	Y	$Y \to X$	$X \to (Y \to X)$
$И$	$И$	$И$	$И$
$И$	$Л$	$И$	$И$
$Л$	$И$	$Л$	$И$
$Л$	$Л$	$И$	$И$

Две формулы называются ***равносильными***, если они имеют одинаковые таблицы истинности. Равносильность формул $Ф_1$ и $Ф_2$ будем записывать так:

$$Ф_1 \equiv Ф_2.$$

Ясно, что $Ф_1 \equiv Ф_2$ тогда и только тогда, когда формула $Ф_1 \leftrightarrow Ф_2$ является тавтологией.

Приведём примеры равносильных формул, выражающие важнейшие законы логики высказываний.

1) $X \vee Y \equiv Y \vee X$ – коммутативность дизъюнкции;
2) $X \& Y \equiv Y \& X$ – коммутативность конъюнкции;
3) $X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z$ – ассоциативность дизъюнкции;
4) $X \& (Y \& Z) \equiv (X \& Y) \& Z$ – ассоциативность конъюнкции;
5) $X \vee X \equiv X$ – идемпотентность дизъюнкции;
6) $X \& X \equiv X$ – идемпотентность конъюнкции;

7) $X \vee (Y \,\&\, Z) \equiv (X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции;

8) $X \,\&\, (Y \vee Z) \equiv (X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, Z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

9) $\neg(\neg X) \equiv X$ – закон двойного отрицания;

10) $\neg X \,\&\, X \equiv Л$ – закон противоречия;

11) $\neg X \vee X \equiv И$ – закон исключённого третьего;

12) $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \,\&\, \neg Y$

13) $\neg(X \,\&\, Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$ – законы де Моргана.

Перечисленные законы логики высказываний отражают свойства операций $\neg$, $\&$, $\vee$. Импликация и эквиваленция легко выражаются через эти операции:

14) $X \to Y \equiv \neg X \vee Y$;

15) $X \leftrightarrow Y \equiv (X \to Y) \,\&\, (Y \to X) \equiv (\neg X \vee Y) \,\&\, (\neg Y \vee X)$.

Равносильности 1) – 15) будут использованы в дальнейшем.

2.2. Элементы логики предикатов

2.2.1. Одноместные предикаты

В каждом высказывании всегда можно выделить субъект (то, о чём говорится) и предикат – то, что говорится о данном субъекте. В то же время часто встречаются выражения, грамматически имеющие форму высказываний, но вместо конкретных субъектов содержащие переменные величины. Такое выражение можно получить из любого высказывания, заменив в нём субъект на переменную величину.

Пример 15. В высказывании “ *8 – чётное число*” заменим субъект “ 8 ” на переменную x, принимающую значения во множестве целых чисел. Полученное выражение “ x *– чётное число*” является предикатом.

Одноместным предикатом на множестве M называется всякое предложение, содержащее переменную x, такое, что при замене x любым предметом из M получается высказывание.

Множество M называется ***областью определения*** предиката; x – ***предметная переменная***. Для предикатов используются обозначения: $P(x)$, $Q(y)$, $R(z)$, … .

Областью истинности предиката $P(x)$ называется подмножество $J_P \subseteq M$, задаваемое равенством

$$J_P = \{a \in M \mid |P(a)| = И\}.$$

Заметим, что иногда вместо записи $|P(a)| = И$ употребляется более короткая запись: $P(a)$. Действительно, для предиката $x > 0$ обычно не пишут $|5 > 0| = И$, а пишут короче: $5 > 0$.

Предикат $P(x)$ называется ***тождественно истинным***, если $J_P = M$, ***тождественно ложным***, если $J_P = \varnothing$, ***выполнимым***, если $J_P \neq \varnothing$, ***опровержимым***, если $J_P \neq M$.

Пример 16.

а) $P(x)$: $x + 3 > 0$. Область определения – множество действительных чисел R. Очевидно, что $J_P =]-3, \infty[$. Предикат $P(x)$ является и выполнимым, и опровержимым.

б) $Q(x)$: $\sin x + \cos x = 3$, $x \in R$. Ясно, что $J_Q = \varnothing$. Т. е. $Q(x)$ – тождественно ложный предикат.

Предикаты $P(x)$, $Q(x)$ на множестве M будем называть ***равносильными*** и записывать $P(x) \equiv Q(x)$, если

$$J_P = J_Q.$$

2.2.2. Логические операции и кванторы

Логические операции $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, рассмотренные выше для высказываний, применяются и для работы с предикатами.

Пусть $P(x)$, $Q(x)$ – предикаты на множестве M. Тогда $(P \& Q)(x)$, $(P \vee Q)(x)$, $(\neg P)(x)$, $(P \rightarrow Q)(x)$,

$(P \leftrightarrow Q)(x)$ – новые предикаты, заданные на M, такие, что для любого $a \in M$

$$\left|(P \& Q)(a)\right| = \left|P(a) \& Q(a)\right|,$$
$$\left|(P \vee Q)(a)\right| = \left|P(a) \vee Q(a)\right|,$$
$$\left|(\neg P)(a)\right| = \left|\neg P(a)\right|,$$
$$\left|(P \to Q)(a)\right| = \left|P(a) \to Q(a)\right|,$$
$$\left|(P \leftrightarrow Q)(a)\right| = \left|P(a) \leftrightarrow Q(a)\right|.$$

Заметим, что если переменные в предикатах $P(x)$, $Q(y)$ обозначены по-разному, то в результате выполнения логических операций одноместный предикат уже не получится.

Определим ещё две операции над одноместными предикатами – так называемые ***операции навешивания кванторов***. Запись $\forall x\, P(x)$ является записью высказывания, которое истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ – тождественно истинный предикат. Запись $\exists x\, P(x)$ есть запись высказывания, которое истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ – выполнимый предикат.

Пример 17. Предикат $2x + 3 \le 0$ – выполнимый, поэтому $\exists x(2x + 3 \le 0)$ – истинное высказывание. Тождественно истинным этот предикат не является, поэтому высказывание $\forall x(2x + 3 \le 0)$ – ложно.

Обратим внимание на то, что в записи $\forall x\, P(x)$ так же, как и в записи $\exists x\, P(x)$, формально присутствует переменная x. Однако подставлять вместо x элементы области определения нельзя, получится бессмысленное выражение. Такие переменные, входящие вместе с квантором, называются ***связанными***. Переменные, входящие без квантора, называются ***свободными***.

2.2.3. Многоместные предикаты

Говорят, что на множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ задан n-***местный предикат***, если задано предложение $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, содержащее переменные $x_1,\ldots,x_n$ и превращающееся в высказывание при замене каждого x_i элементом $a_i \in M_i$, $i=1,2,\ldots,n$. В том случае, если $M_1=M_2=\ldots=M_n=M$, говорят, что предикат $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ задан на множестве M.

Пример 18.

а) Выражение $x>y$ – двухместный предикат, определённый на множестве действительных чисел R.

б) “*Два треугольника подобны*”. Если речь идет о двух данных фиксированных треугольниках, то это – высказывание. Если же треугольники не зафиксированы, то фактически приведённое предложение содержит две переменные, т. е. является двухместным предикатом на множестве треугольников.

Областью истинности предиката $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданного на множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$, называется множество

$$J_P=\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\, a_1\in M_1,\ldots,a_n\in M_n, \left| P(a_1,\ldots,a_n)\right| = И\}.$$

Полезно рассматривать область истинности J_P как подмножество множества

$$M_1\times M_2\times\ldots\times M_n=\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\, a_1\in M_1,\ldots,a_n\in M_n\}.$$

Это множество, состоящее из упорядоченных наборов элементов, называется декартовым произведением множеств $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$.

Классификация многоместных предикатов по их областям истинности и определение логических операций проводятся так же, как и для одноместных предикатов.

Пример 19. Выражение “$x\ge 0$ или $y\ge 0$, или $xy\ge 0$” – двухместный предикат, который является дизъюнкцией трёх более простых предикатов. Область истинности – все пары действительных чисел, т. е. это – тождественно истинный предикат.

Кванторы существования и всеобщности могут употребляться и с многоместными предикатами. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикат, определённый на множествах M_1, $M_2, \ldots, M_n$. Тогда $\forall x_1\, P(x_1, \ldots, x_n)$ – $(n-1)$-местный предикат на множествах $M_2, \ldots, M_n$, который истинен на наборе $(a_2, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ тождественно истинен. Аналогично $\exists x_1\, P(x_1, \ldots, x_n)$ – $(n-1)$-местный предикат на $M_2, \ldots, M_n$, который истинен на $(a_2, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ является выполнимым.

Пример 20. Рассмотрим двухместный предикат на R

$$P(x, y):\ x^2 = y.$$

С помощью кванторов из $P(x, y)$ можно образовать четыре одноместных предиката:

$$\forall x\,(x^2 = y),\quad \forall y\,(x^2 = y),\quad \exists x\,(x^2 = y),\quad \exists y\,(x^2 = y).$$

Первые два предиката тождественно ложны, последний – тождественно истинен. Областью истинности предиката $\exists x\,(x^2 = y)$ является множество неотрицательных действительных чисел.

Пример 21. Найти области истинности предикатов. Предметные переменные принимают значения из множества действительных чисел.

а) $P(x): \exists y\,(e^y \le 3x - 12)$;

б) $P(x): \forall y\,(e^y \le 3x - 12)$;

в) $P(x): \exists y\,(xy^2 + 2y + 1 \le 0)$;

г) $P(x): \forall y\,(xy^2 + 2y + 1 \le 0)$;

д) $P(x): \exists y\,(xy^2 + 2y + 1 = 0)$.

Решение.

а) $P(x): \exists y \left(e^{y} \le 3x - 12\right)$.

Областью истинности этого предиката являются значения переменной x, при которых существует такое значение y, что выполняется неравенство $e^{y} \le 3x - 12$. Так как при любом y $e^{y} > 0$, причём e^{y} может быть как угодно маленьким положительным числом, то только при условии $3x - 12 > 0$ можно найти значение y, которое обращает выражение $e^{y} \le 3x - 12$ в верное неравенство. Т. е. должно выполняться $3x > 12$. Следовательно, область истинности данного предиката: $\{x \mid x > 4\} = (4, +\infty)$.

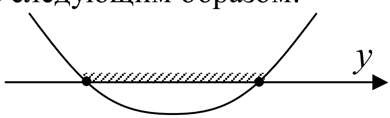
б) $P(x): \forall y \left(e^{y} \le 3x - 12\right)$.

Областью истинности этого предиката являются такие значения переменной x, при которых для любого y выполняется неравенство $e^{y} \le 3x - 12$. Так как функция e^{y} не ограничена сверху, то, очевидно, не существует значения x, которое обращало бы предикат в истинное высказывание. Таким образом, область истинности данного предиката – пустое множество, т. е. предикат тождественно ложный.

в) $P(x): \exists y \left(xy^{2} + 2y + 1 \le 0\right)$.

Область истинности – значения x, при которых существует решение неравенства $xy^{2} + 2y + 1 \le 0$. Квадратное относительно y уравнение $xy^{2} + 2y + 1 = 0$ имеет корни, если дискриминант больше или равен нулю: $2^{2} - 4 \cdot x \cdot 1 \ge 0$, т. е. $x \le 1$. Рассмотрим три случая.

Если $x > 0$, то решение неравенства $xy^{2} + 2y + 1 \le 0$ можно изобразить следующим образом:



Неравенство имеет решение, если существуют корни уравнения $xy^2 + 2y + 1 = 0$, т. е. при $x \le 1$.

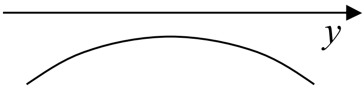
Если $x < 0$, то ветви параболы будут направлены вниз, а значит, существуют значения y, при которых $xy^2 + 2y + 1 \le 0$.

Если $x = 0$, неравенство принимает вид $2y + 1 \le 0$, которое справедливо при значениях $y \le -1/2$.

Итак, область истинности предиката – промежуток $(-\infty; 1]$.

г) $P(x): \forall y \left(xy^2 + 2y + 1 \le 0\right)$.

Областью истинности данного предиката являются значения x, при которых для любого y справедливо $xy^2 + 2y + 1 \le 0$. Решение этого неравенства подробно было рассмотрено в примере в). Очевидно, что при $x \ge 0$ существуют значения y, при которых будет выполняться обратное неравенство $xy^2 + 2y + 1 > 0$, т. е. такие x не входят в область истинности $P(x)$. Исследуем случай $x < 0$.



Ветви параболы направлены вниз, и, следовательно, неравенство будет выполняться для любого y, если x такое, что уравнение $xy^2 + 2y + 1 = 0$ не имеет корней, т. е. при $x > 1$. Но мы сейчас рассматриваем случай $x < 0$. Значит, этот вариант также не даёт значений для области истинности. Таким образом, данный предикат тождественно ложный.

д) $P(x): \exists y \left(xy^2 + 2y + 1 = 0\right)$.

Корень квадратного уравнения существует, если дискриминант неотрицателен. Значит, область истинности в этом случае $\{x \mid x \le 1\} = (-\infty, 1]$.

Если предикат с квантором имеет свободную переменную, то можно навесить квантор и по этой переменной. Если все переменные входят с кванторами, свободных переменных нет, то получен 0-местный предикат, т. е. высказывание.

Рассмотрим простейшие правила навешивания кванторов.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $P(x,y)$ – двухместный предикат на множестве M. Тогда

$$\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y),$$
$$\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y),$$

т. е. соседние одноимённые кванторы можно переставлять.

Доказательство. Докажем первое соотношение. Допустим, что левая часть – истинное высказывание:

$$\left| \forall x \forall y\, P(x,y) \right| = И \,.$$

Тогда, по определению операции навешивания квантора $\forall$, предикат $\forall y\, P(x,y)$ тождественно истинен. Возьмём произвольный элемент $a \in M$. Тогда $\left| \forall y\, P(a,y) \right| = И$. Поэтому, как и выше, $P(a,y)$ – тождественно истинный предикат, т. е. для произвольного $b \in M$ имеем $\left| P(a,b) \right| = И$. Так как a – произвольный элемент, то отсюда следует, что предикат $P(x,b)$ тождественно истинен. Следовательно, $\left| \forall x\, P(x,b) \right| = И$. Так как b – произвольный элемент, то это означает, что предикат $\forall x\, P(x,y)$ тождественно истинен. Следовательно, $\left| \forall y \forall x\, P(x,y) \right| = И$.

Итак, из истинности левой части следует истинность правой. Соотношение симметрично относительно x, y, поэтому обратное рассуждение можно не проводить. Второе соотношение доказывается аналогично.

Теорема справедлива и для n-местных предикатов, т. е.

$$\forall x_i \, \forall x_j \, P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \forall x_j \, \forall x_i \, P(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\exists x_i \, \exists x_j \, P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \exists x_j \, \exists x_i \, P(x_1, \ldots, x_n).$$

Разноимённые кванторы переставлять можно не всегда.

Пример 22.

$$\left|\forall x\, \exists y\ (x+y=0)\right| = И\,,$$
$$\left|\exists y \forall x\ (x+y=0)\right| = Л\,.$$

Отметим однако, что импликация высказываний

$$\exists x \forall y\, P(x,y) \to \forall y \exists x\, P(x,y)$$

всегда истинна. Действительно, если $\left|\exists x \forall y\, P(x,y)\right| = И$, то $\forall y\, P(x,y)$ – выполнимый предикат, т. е. существует $a \in M$ такой, что $\left|\forall y\, P(a,y)\right| = И$. Значит, $P(a,y)$ – тождественно истинен, т. е. для любого $b \in M$ $\left|P(a,b)\right| = И$. Теперь ясно, что $\left|\exists x\, P(x,b)\right| = И$ для любого $b \in M$. Значит, $\left|\forall y \exists x\, P(x,y)\right| = И$. Итак, если посылка истинна, то и заключение истинно, что доказывает истинность импликации.

Ещё одно важное правило связано с отрицанием выражений, содержащих кванторы.

Теорема 2. Для любого одноместного предиката $P(x)$

$$\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ (\neg P(x)),$$
$$\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ (\neg P(x)).$$

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Если $P(x)$ тождественно истинен, то и в левой, и в правой части – ложное высказывание. Если $P(x)$ является опровержимым, то оба высказывания истинны. Итак, в любом случае высказывания в левой и правой частях соотношения принимают одинаковые значения истинности. Второе утверждение доказывается аналогично.

Правило можно распространить и на многоместные предикаты:

$$\neg(\forall x_i\ P(x_1,\ldots,x_n)) \equiv \exists x_i\ (\neg P(x_1,\ldots,x_n)),$$
$$\neg(\exists x_i\ P(x_1,\ldots,x_n)) \equiv \forall x_i\ (\neg P(x_1,\ldots,x_n)).$$

3. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

3.1. Основные понятия

Изучая формулы алгебры высказываний, мы видели, что любую формулу можно рассматривать как функцию от нескольких переменных. Каждая переменная может принимать одно из двух значений: $И$ или $Л$. Значением функции также является либо $И$, либо $Л$. Функции такого вида возникают и при изучении других вопросов.

Рассмотрим некоторое устройство, имеющее несколько входов и один выход:

Внутренняя структура устройства нам сейчас не важна. Важно лишь, что на каждый из входов может быть подан один из двух сигналов. Характер сигналов может быть различным: высокое напряжение и низкое напряжение, наличие или отсутствие электрического импульса и др. Мы будем обозначать возможные сигналы числами 1 и 0. На выходе также возможны лишь 0 или 1, причём результат однозначно определяется набором входных сигналов. Такое устройство называется ***функциональным элементом***. Соединяя выход одного функционального элемента с одним из входов другого, можно конструировать ***схемы из функциональных элементов***. Если сигнал на i-ом входе обозначить переменной x_i, а на выходе – y, то работа функционального элемента (или схемы) полностью описывается некоторой функцией $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Будем говорить также, что функциональный элемент (или схема) ***реализует*** функцию $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Символы для значений переменных функции не играют большой роли: употребляются 0 и 1, $Л$ и $И$, возможны другие варианты. Поэтому при описании работы схем из функциональных элементов и при изучении формул алгебры высказываний мы имеем дело с функциями одного и того же типа. Это так называемые ***функции алгебры логики***, или ***булевы функции***.

Перейдём к точным определениям. Пусть B – множество, состоящее из двух элементов: 0 и 1:

$$B = \{0, 1\}.$$

Упорядоченный набор элементов множества B будем называть ***двоичным кортежем***. Таким образом, двоичный кортеж – это упорядоченный набор, состоящий из нулей и единиц, например, $(0, 0, 1, 0, 1)$. ***Булева функция*** от n переменных – это отображение f, которое каждому двоичному кортежу длины n ставит в соответствие либо 0, либо 1. Будем обозначать такую функцию символом $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, считая, что переменные x_1, $x_2, \ldots,$ x_n принимают значение 0 или 1.

Используя понятие декартова произведения множеств, можно булеву функцию от n переменных рассматривать как отображение

$$f: \quad B^n \to B,$$

где $B^n = B \times B \times \ldots \times B$, $\quad B = \{0, 1\}$.

Равенство булевых функций $f_1 = f_2$ понимается как равенство отображений.

Булевы функции названы в честь Дж. Буля, английского математика, положившего начало применению математики в логике.

3.2. Стандартная нумерация двоичных кортежей и булевых функций

Пусть дан двоичный кортеж $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Его ***стандартным номером*** называется число

$$i = x_1 \cdot 2^0 + x_2 \cdot 2^1 + \ldots + x_n \cdot 2^{n-1}.$$

Заметим, что если номер i записать в двоичной системе счисления, то получим:

$$i = (x_n\, x_{n-1} \ldots x_1)_2.$$

Это подсказывает способ восстановления кортежа по его номеру: номер нужно записать в двоичной системе, а затем полученную запись переписать в обратном порядке. Отсюда, кроме того, сразу следует, что двоичных кортежей длины n существует 2^n. Действительно, каждому числу от нуля (в двоичной записи $000\ldots0$) до 2^n-1 (в двоичной записи $111\ldots1$) соответствует ровно 1 кортеж.

<u>Пример 23.</u> Пусть номер двоичного кортежа $i=97$, а его длина $n=7$. Требуется восстановить кортеж. Запишем $i=97$ в двоичной системе счисления. Так как $97=64+32+1=2^6+2^5+2^0$, то $(97)_{10}=(1100001)_2$. Отсюда получаем искомый кортеж: $(1,0,0,0,0,1,1)$.

Мы будем использовать указанное взаимнооднозначное соответствие между двоичными кортежами и их стандартными номерами при работе с булевыми функциями: вместо $f(0,1,1)$ будем писать $f^{(3)}(6)$, считая, что оба выражения обозначают значение функции f на кортеже длины 3 с номером 6.

Булева функция от n переменных может быть задана таблицей:

i	$f(i)$
0	$f(0)$
1	$f(1)$
$\ldots$	$\ldots$
2^n-1	$f(2^n-1)$

Однако часто нам будет удобнее пользоваться таблицей, в которой кроме номеров указаны и сами кортежи. Например, для случая трёх переменных такая таблица выглядит следующим образом:

i	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	$f(0)$
1	0	0	1	$f(1)$
2	0	1	0	$f(2)$
3	0	1	1	$f(3)$
4	1	0	0	$f(4)$
5	1	0	1	$f(5)$
6	1	1	0	$f(6)$
7	1	1	1	$f(7)$

Удобен именно обратный порядок переменных, так как в этом случае столбцы x_3, x_2, x_1 дают двоичную запись номера. Такая таблица называется ***стандартной***.

В правом столбце таблицы может стоять любой двоичный кортеж. Значит различных булевых функций от n переменных существует 2^{2^n} – ровно столько, сколько существует различных двоичных кортежей длины 2^n.

Стандартным номером булевой функции называется номер кортежа её значений в стандартной таблице:

$$m = f(0)\cdot 2^0 + f(1)\cdot 2^1 + \ldots + f\left(2^n - 1\right)\cdot 2^{2^n - 1}.$$

Очевидно, что своим номером m и числом аргументов n булева функция однозначно определяется, поэтому будем использовать для неё обозначение $f_m^{(n)}$.

<u>Пример 24.</u> Построить стандартную таблицу для функции $f_{167}^{(3)}$.

Найдём двоичный кортеж значений данной функции. Его длина равна $2^3 = 8$, номер $i = 167$. Запишем номер функции в

двоичной системе счисления. Напомним, что для этого нужно представить i в виде суммы степеней двойки. Полезно знать эти числа:
$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$. Для функций трёх аргументов этих значений достаточно.

Выделяем указанные слагаемые, начиная с самого большого:

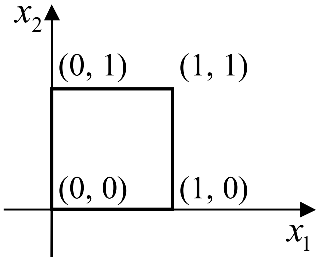
$$
\begin{array}{ll}
167 = 128 + 39, & 39 = 32 + 7; \\
167 = 128 + 32 + 7, & 7 = 4 + 3; \\
167 = 128 + 32 + 4 + 3, & 3 = 2 + 1; \\
167 = 128 + 32 + 4 + 2 + 1. &
\end{array}
$$

Итак, $167 = 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. Следовательно, в двоичной системе номеру $i = 167$ соответствует запись 10100111 (так как в данной сумме отсутствуют слагаемые 2^6, 2^4, 2^3, то в соответствующих разрядах записываем 0). Теперь нужно записать полученный номер в обратном порядке. Значит, искомый кортеж – $(1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$. Строим таблицу:

i	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

3.3. Геометрический способ задания булевых функций

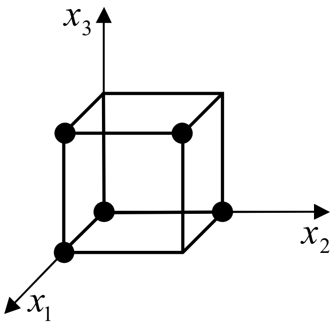
Каждый двоичный кортеж длины n можно рассматривать как набор координат некоторой точки в n-мерном пространстве. Заметим, что эти точки являются вершинами единичного n-мерного куба. В частности, при $n = 2$ двоичные кортежи соответствуют вершинам квадрата:



Аналогично, кортежи длины 3 изображаются в виде вершин куба в 3-мерном пространстве. Это позволяет задавать булевы функции от двух и трёх переменных геометрически. Для этого вершины, соответствующие кортежам, на которых функция принимает значение 1, отмечают как-либо, например, жирной точкой.

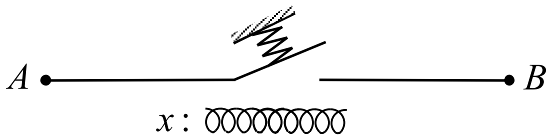
<u>Пример 25.</u> Построить геометрическое изображение функции $f_{167}^{(3)}$.

Стандартная таблица этой функции построена в примере 24. Пользуясь этой таблицей, строим геометрическое изображение:



3.4. Релейно-контактные схемы (РКС)

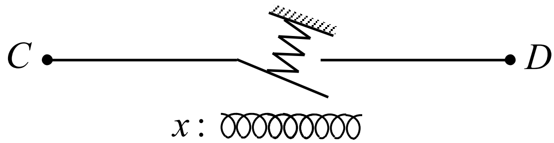
Опишем ещё один способ реализации булевых функций. Каждой булевой переменной x поставим в соответствие реле, соединённое с замыкающим или размыкающим контактом. Реле с замыкающим контактом можно схематично изобразить так:



Если в катушке тока нет ($x=0$), то пружина оттягивает контакт, и проводник AB ток не проводит. Если $x=1$, в катушке есть ток, то контакт притягивается, и проводник AB проводит ток. Для простоты такой контакт будем обозначать:

$$\text{———} \; x \; \text{———}$$

Наряду с замыкающими нам потребуются и размыкающие контакты:



Ясно, что при $x=1$ CD ток не проводит, а при $x=0$ контакт замкнут, и CD проводит ток. Размыкающий контакт реле будем обозначать так:

$$\text{———} \; \bar{x} \; \text{———}$$

Используя различные соединения проводников с реле и контактами, будем конструировать ***релейно-контактные схемы*** (РКС) с одним входом и одним выходом (двухполюсники). Такая РКС может находиться в одном из двух устойчивых состояний: проводить ток или нет.

Пример 26. Рассмотрим РКС

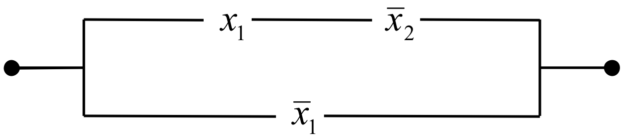


Схема проводит ток при $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, а также при $x_1 = 0$ и любом значении x_2.

Теперь каждой РКС, имеющей в своём составе реле x_1, x_2, …, x_n с контактами различных типов, поставим в соответствие булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ так, чтобы $f = 1$ в точности на тех двоичных кортежах $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, для которых при $x_i = \alpha_i$ схема проводит ток. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***функцией проводимости*** данной РКС. Функция проводимости определяется для РКС однозначно. Однако у различных РКС функции проводимости могут совпадать. Такие РКС называются равносильными.

Определение функции проводимости данной РКС является задачей анализа РКС. Другая основная задача – синтез РКС по заданной функции проводимости. В данном пособии рассматриваются лишь основные связи РКС и булевых функций, подробно теория РКС не изучается.

3.5. Фиктивные и существенные аргументы булевых функций

Говорят, что аргумент x_i булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является ***существенным***, если $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq$ $\neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ хотя бы для одного набора значений остальных аргументов. В противном случае, т. е. если выполнено равенство $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то x_i называется ***фиктивным*** аргументом.

Для определения существенности или фиктивности аргумента x_i булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поступим следующим образом. Разобьём все двоичные кортежи длины n на два подмножества:

$$T_0 = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\},$$
$$T_1 = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1\}.$$

Затем построим множества $T_0'(x_i)$ и $T_1'(x_i)$, которые получаются из T_0 и T_1 путём вычёркивания координаты x_i во всех кортежах. Если $T_0'(x_i) \cap T_1'(x_i) \neq \varnothing$, т. е. в $T_0'(x_i)$ и $T_1'(x_i)$ есть один и тот же кортеж длины $n-1$, например, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, то ясно, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, и аргумент x_i – существенный. Если же $T_0'(x_i) \cap T_1'(x_i) = \varnothing$, то неравенство такого вида невозможно, т. е. x_i – фиктивный аргумент.

<u>Пример 27.</u> Исследовать на существенность и фиктивность все аргументы функции $f_{165}^{(3)}$.

Построим стандартную таблицу данной функции. Так как $165 = 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^0$, то таблица имеет вид:

i	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Выпишем множества T_0 (строки, в которых значение функции равно 0) и T_1 (строки, в которых значение функции равно 1):

T_0:

x_3	x_2	x_1
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

T_1:

x_3	x_2	x_1
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Исследуем x_1. Из таблиц T_0 и T_1 вычёркиваем столбцы значений переменной x_1:

$T_0'(x_1)$:

x_3	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

$T_1'(x_1)$:

x_3	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Так как $T_0'(x_1) \cap T_1'(x_1) \neq \varnothing$, т. е. в таблицах $T_0'(x_1)$ и $T_1'(x_1)$ есть одинаковые строки (в данном случае все строки таблицы $T_0'(x_1)$ являются и строками $T_1'(x_1)$, но вообще достаточно совпадения хотя бы одной строки), то x_1 – существенный аргумент.

Исследуем x_2:

$T_0'(x_2)$:

x_3	x_1
0	1
0	1
1	0
1	0

$T_1'(x_2)$:

x_3	x_1
0	0
0	0
1	1
1	1

Ни одна из строк таблицы $T_0'(x_2)$ не встречается в таблице $T_1'(x_2)$. Это означает, что $T_0'(x_2) \cap T_1'(x_2) = \varnothing$, следовательно, x_2 – фиктивный аргумент.

Исследование x_3 проводится аналогично.

Функции, все аргументы которых фиктивны, являются константами. Особую роль играют функции, все аргументы которых существенны. Число булевых функций, существенно зависящих от n аргументов, можно найти по формуле Г.А. Крылова:

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \, 2^{2^{n-i}},$$

где $C_n^i = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i}, \quad C_n^0 = 1$.

В частности,

$$A_1 = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i C_1^i \, 2^{2^{1-i}} = (-1)^0 C_1^0 \, 2^{2^1} + (-1)^1 C_1^1 \, 2^{2^0} = 4 - 2 = 2$$

,

$$A_2 = (-1)^0 C_2^0 \, 2^{2^2} + (-1)^1 C_2^1 \, 2^{2^1} + (-1)^2 C_2^2 \, 2^{2^0} = 16 - 8 + 2 = 10$$

.

3.6. Основные булевы функции и их свойства

В этом разделе рассмотрим булевы функции, которые часто встречаются в математической логике и кибернетике. Иногда их называют элементарными булевыми функциями.

Сначала рассмотрим булевы функции одной переменной. Составим сводную таблицу всех четырёх таких функций:

i	x	$f_0^{(1)}$	$f_1^{(1)}$	$f_2^{(1)}$	$f_3^{(1)}$
0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

Ясно, что $f_0^{(1)}$ и $f_3^{(1)}$ – константы, т. е. аргумент x в этих функциях является фиктивным. Далее, $f_2^{(1)}(x) = x$ – функция, значение которой совпадает с аргументом. Наконец, $f_1^{(1)}(x)$ называется ***отрицанием*** или ***инверсией***. Применяются следующие обозначения:

$$f_1^{(1)}(x) = \bar{x} = \neg x .$$

Заметим, что эта функция соответствует формуле $\neg X$ в алгебре высказываний.

Теперь перейдём к рассмотрению булевых функций двух аргументов. Всего таких функций существует $2^{2^2} = 2^4 = 16$. Составим для них сводную стандартную таблицу. Для упрощения записи опустим верхний индекс (2) у всех функций.

i	x_2	x_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
2	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Как было подсчитано, есть только 10 булевых функций от двух существенных аргументов. Поэтому 6 функций содержат фиктивные переменные. Выделим их в первую очередь:

$f_0(x_1, x_2) = 0$, $f_{15}(x_1, x_2) = 1$ – константы;

$f_{10}(x_1, x_2) = x_1$, $f_{12}(x_1, x_2) = x_2$ – функции-аргументы;

$f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_2$, $f_5(x_1, x_2) = \bar{x}_1$ – отрицания.

Выделим, далее, функции, соответствующие простейшим формулам алгебры высказываний. Формуле $X \vee Y$ соответствует функция $f_{14}(x_1, x_2)$. Будем называть её ***дизъюнкцией*** и использовать обозначение:

$$f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 .$$

Аналогично:

$f_8(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2 = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$ – ***конъюнкция***;

$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ – ***импликация***;

$f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \to x_1$ – ***обратная импликация***;

$f_9(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ – ***эквиваленция***.

Оставшиеся пять функций можно рассматривать как отрицания уже перечисленных. Однако они имеют самостоятельные названия и обозначения:

$f_1(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \downarrow x_2$ – ***стрелка Пирса***;

$f_7(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} = x_1 \mid x_2$ – ***штрих Шеффера***;

$f_2(x_1, x_2) = \overline{x_1 \to x_2} = x_1 \Delta x_2$ – ***функция запрета***;

$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_2 \to x_1} = x_2 \Delta x_1$ – ***обратный запрет***;

$f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2} = x_1 + x_2$ – ***сложение по модулю 2***.

Свойства отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации, эквиваленции в точности аналогичны свойствам соответствующих логических операций. Однако, они очень важны, поэтому перечислим их ещё раз.

Коммутативность, ассоциативность, идемпотентность дизъюнкции выражаются тождествами:

$$x \vee y = y \vee x,$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$$
$$x \vee x = x.$$

Теми же свойствами обладает конъюнкция:

$$x\,y = y\,x,$$
$$(x\,y)z = x(y\,z),$$
$$x\,x = x.$$

Между собой эти функции связаны законами дистрибутивности:

$$x(y \vee z) = x\,y \vee x\,z,$$
$$x \vee y\,z = (x \vee y)(x \vee z).$$

Справедливы: закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{x}} = x,$$

закон противоречия:

$$\bar{x}\,x = 0,$$

закон исключённого третьего:

$$\bar{x} \vee x = 1,$$

законы де Моргана:

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y},$$
$$\overline{x\,y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

В дальнейшем часто будут использоваться ***законы поглощения***:

$$x(y \vee x) = x$$
$$x \vee y\,x = x,$$

а также правила действий с константами:

$$x \vee 0 = x,$$
$$x \vee 1 = 1,$$
$$x \cdot 0 = 0$$
$$x \cdot 1 = x.$$

Импликацию и эквиваленцию необходимо уметь выражать через остальные функции:

$$x \to y = \bar{x} \vee y,$$

$$x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x).$$

Каждое из приведенных свойств можно доказать, построив таблицы для функций, стоящих в правой и в левой частях равенства, и убедившись, что столбцы значений функций совпадают.

Пример 28. Доказать, что $x \to y = \bar{x} \vee y$.

Проверим совпадение левой и правой частей на всех четырёх кортежах длины 2:

$i = 0$: $0 \to 0 = 1$; $\bar{0} \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$;

$i = 1$: $1 \to 0 = 0$; $\bar{1} \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$;

$i = 2$: $0 \to 1 = 1$; $\bar{0} \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$;

$i = 3$: $1 \to 1 = 1$; $\bar{1} \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$.

Рассмотрим свойства остальных функций. Стрелка Пирса $x \downarrow y$ и штрих Шеффера $x \mid y$ обладают свойством коммутативности:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{y \vee x} = y \downarrow x;$$

$$x \mid y = \overline{x\,y} = \overline{y\,x} = y \mid x.$$

Заметим, что ассоциативный закон ни для одной из этих функций не справедлив. Действительно:

$$0 \downarrow (0 \downarrow 1) = 0 \downarrow 0 = 1,$$

$$(0 \downarrow 0) \downarrow 1 = 1 \downarrow 1 = 0,$$

т. е. $x \downarrow (y \downarrow z) \neq (x \downarrow y) \downarrow z$. Аналогичный пример можно привести и для $x \mid y$. Это требует большой внимательности при расстановке скобок. Выражение $x \downarrow y \downarrow z$ вообще смысла не имеет, так как при различных способах расстановки скобок получаются разные функции.

Отметим ещё два важных свойства:

$$x \downarrow x = \overline{x \vee x} = \bar{x},$$

$$x \mid x = \overline{x\,x} = \bar{x}.$$

Сложение по модулю 2 определяется тождеством:

$$x+y=\overline{x \leftrightarrow y}.$$

Отсюда следуют свойства этой функции:

$$x+y=y+x,$$

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$

$$x(y+z)=xy+xz,$$

$$x+0=x,$$

$$x+1=\bar{x},$$

$$x+x=0.$$

Значение булевых функций от одного и двух переменных состоит в том, что через них можно выразить любую другую функцию.

3.7. Нормальные формы

Рассмотрим булеву функцию двух переменных:

$$f(x,\alpha)=x^{\alpha}=\begin{cases} x, & \text{если } \alpha=1, \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha=0. \end{cases}$$

Будем называть x^{α} ***двоичной степенной функцией***. Построив стандартную таблицу легко убедиться, что

$$x^{\alpha}=(x \leftrightarrow \alpha),$$

т. е. x^{α} есть просто другая форма записи эквиваленции. Также легко заметить справедливость свойства:

$$\overline{x^{\alpha}}=\bar{x}^{\alpha}=x^{\bar{\alpha}}.$$

Элементарной конъюнкцией называется выражение

$$K=x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},$$

где x_1, $x_2,\ldots$, x_n – не обязательно различные переменные, $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ – некоторый двоичный кортеж.

Аналогично определяется ***элементарная дизъюнкция***:

$$D=x_1^{\alpha_1}\vee x_2^{\alpha_2}\vee\ldots\vee x_n^{\alpha_n}.$$

Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется ***правильной***, если каждая переменная, с учётом вхождения под знаком отрицания, встречается в ней не более одного раза. Правильная элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется

полной относительно данной группы переменных, если каждая переменная из указанной группы входит ровно один раз.

Пример 29. Рассмотрим элементарные конъюнкции и дизъюнкции:

$$K_1 = x_1^0 \cdot x_2^1 \cdot x_1^1 = \bar{x}_1 x_2 x_1,$$
$$K_2 = x^0 \cdot y^1 \cdot z^0 \cdot x^0 = \bar{x}\, y\, \bar{z}\, \bar{x},$$
$$K_3 = x^1 \cdot y^0 = x\, \bar{y},$$
$$D_1 = x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3,$$
$$D_2 = x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_2^1 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_2,$$
$$D_3 = x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_1^0 \vee x_3^0 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3.$$

Правильными здесь являются только K_3 и D_1. D_1 – полна относительно переменных x_1, x_2, x_3. K_3 – полна относительно x, y, но неполна относительно x, y, z.

Заметим, что выражения x, $\bar{z}$ и т. п. являются как элементарными конъюнкциями, так и элементарными дизъюнкциями.

Дизъюнктивной нормальной формой (***ДНФ***) называется всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций. ***Конъюнктивной нормальной формой*** (***КНФ***) называется всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Пример 30.

$$x\, y\, \bar{z} \vee x\, \bar{y} \vee z \quad \text{– ДНФ;}$$
$$(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{x} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) \quad \text{– КНФ.}$$

Выражение $\bar{x} \vee y \vee z$ является ДНФ, так как $\bar{x}$, y, z – элементарные конъюнкции. В то же время $\bar{x} \vee y \vee z$ является и КНФ, так как в конъюнкции элементарных дизъюнкций может быть, в частности, всего одна скобка. Аналогично, выражение $\bar{x}\, y\, z$ является одновременно и ДНФ, и КНФ.

Теорема 3. Каждая булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима в ДНФ от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 4. Каждая булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ представима в КНФ от переменных $x_1,\ldots, x_n$.

Доказательство этих теорем в данном пособии не приводится. Заметим, однако, что булевы функции одной переменной можно представить в ДНФ и КНФ следующим образом:

$$f_0^{(1)}(x)=0=x\,\overline{x};$$

$$f_1^{(1)}(x)=\overline{x};$$

$$f_2^{(1)}(x)=x;$$

$$f_3^{(1)}(x)=1=x\vee\overline{x}.$$

Можно предложить следующий алгоритм для приведения аналитически заданной булевой функции к ДНФ и КНФ.

1) С помощью основных тождеств удалить операции $\to$, $\leftrightarrow$, $|$, $\downarrow$, $+$, т. е. оставить в заданном выражении только операции $\neg$, $\&$, $\vee$.
2) С помощью законов де Моргана преобразовать выражение так, чтобы отрицание применялось только к аргументам.
3) Используя законы дистрибутивности, преобразовать так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкции (при приведении к ДНФ) или наоборот (при приведении к КНФ).

Пример 31. Привести к ДНФ и КНФ булеву функцию

$$f(x,y,z)=(x\vee y)\leftrightarrow z.$$

Выполним пункты 1) и 2):

$$(x\vee y)\leftrightarrow z=((x\vee y)\to z)(z\to(x\vee y))=$$
$$=(\overline{x\vee y}\vee z)(\overline{z}\vee x\vee y)=(\overline{x}\,\overline{y}\vee z)(\overline{z}\vee x\vee y).$$

Для приведения к КНФ пользуемся тождеством

$$x\,y\vee z=(x\vee z)(y\vee z).$$

Получим КНФ:

$$(\overline{x}\,\overline{y}\vee z)(\overline{z}\vee x\vee y)=(\overline{x}\vee z)(\overline{y}\vee z)(\overline{z}\vee x\vee y).$$

Для приведения к ДНФ пользуемся тождеством

$$x(y \vee z) = x\,y \vee x\,z\,.$$

Получим ДНФ:

$$(\bar{x}\,\bar{y} \vee z)(\bar{z} \vee x \vee y) = (\bar{x}\,\bar{y} \vee z)\bar{z} \vee (\bar{x}\,\bar{y} \vee z)x \vee (\bar{x}\,\bar{y} \vee z)y =$$
$$= \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee z\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,x \vee z\,x \vee \bar{x}\,\bar{y}\,y \vee z\,y\,.$$

Последнее выражение можно упростить, вычеркнув нулевые члены. Заметим, что ДНФ и КНФ определяются для данной булевой функции неоднозначно. Например,

$$x \to y = \bar{x} \vee y\,,$$
$$x \to y = x\,y \vee \bar{x}\,y \vee \bar{x}\,\bar{y}\,.$$

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (***СДНФ***) относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется всякая ДНФ, в которой все элементарные конъюнкции попарно различны, правильны и полны. ***Совершенная конъюнктивная нормальная форма*** (***СКНФ***) определяется аналогично.

Теорема 5. Всякая булева функция, не равная тождественно 0, однозначно представима в виде СДНФ, причём это представление выражается формулой:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1} x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}\,.$$

Теорема 6. Всякая булева функция, не равная тождественно 1, однозначно представима в виде СКНФ, причём это представление выражается формулой:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0} x_1^{\bar{\alpha}_1}\, x_2^{\bar{\alpha}_2} \ldots x_n^{\bar{\alpha}_n}\,.$$

Доказательство этих теорем в данном пособии также не приводятся.

Теоремы 5 и 6 дают, в частности, правила построения СДНФ, СКНФ для таблично заданных функций.

Пример 32. Построить СДНФ и СКНФ для функции $f_{13}^{(3)}$.

Построим сначала таблицу для $f_{13}^{(3)}$. Так как $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$, то таблица имеет вид:

i	α_3	α_2	α_1	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Для построения СДНФ выбираем кортежи, на которых функция равна 1: $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$. Напомним, что в кортеже переменные записываются в порядке возрастания номера, а в таблице они представлены в обратном порядке.

Для каждого кортежа записываем соответствующую элементарную конъюнкцию: в конъюнкции всех трёх аргументов ставим знаки отрицания над теми x_i, у которых α_i в кортеже равны нулю. Рассмотрим кортеж $(0,0,0)$. В нём $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, значит, все три переменные записываем со знаком отрицания. Получаем элементарную конъюнкцию $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_2^{\alpha_2} = \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3$. Кортежу $(0,1,0)$ соответствует элементарная конъюнкция $\bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3$, так как здесь $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Для кортежа $(1,1,0)$ получаем $x_1\, x_2\, \bar{x}_3$.

По формуле теоремы 5 строим СДНФ:

$$f_{13}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3 \vee x_1\, x_2\, \bar{x}_3 .$$

Рассматривая остальные кортежи (на которых функция равна 0), строим СКНФ по формуле теоремы 6:

$$f_{13}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\cdot$$
$$\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$
.

Здесь, наоборот, значению $\alpha_i = 1$ в кортеже соответствует запись $\bar{x}_i$ в элементарной дизъюнкции, а значению $\alpha_i = 0$ – x_i. Т. е., например, для кортежа №1 $(1,0,0)$ получаем элементарную дизъюнкцию $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee x_2^{\bar{\alpha}_2} \vee x_3^{\bar{\alpha}_3} = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$.

Если булева функция задана аналитически, то можно сначала представить её в ДНФ (или КНФ), а затем преобразовать в СДНФ (или СКНФ).

Для функций, представленных в СДНФ, удобно строить релейно-контактную схему. Каждой элементарной конъюнкции соответствует одна из параллельных ветвей, в которой последовательно соединены реле x_1, $x_2, \ldots, x_n$ с контактами различных типов: замыкающими для x_i и размыкающими для $\bar{x}_i$.

<u>Пример 33.</u> Построить РКС для функции из примера 32.

Для данной функции была получена СДНФ:

$$f_{13}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_2\,\bar{x}_3 .$$

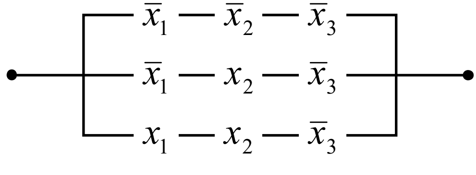
Сначала построим ветвь схемы для каждой элементарной конъюнкции:

$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$: ——— $\bar{x}_1$ —— $\bar{x}_2$ —— $\bar{x}_3$ ———

$\bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_3$: ——— $\bar{x}_1$ —— x_2 —— $\bar{x}_3$ ———

$x_1\,x_2\,\bar{x}_3$: ——— x_1 —— x_2 —— $\bar{x}_3$ ———

Теперь соединим эти ветви параллельно, получим РКС заданной функции:

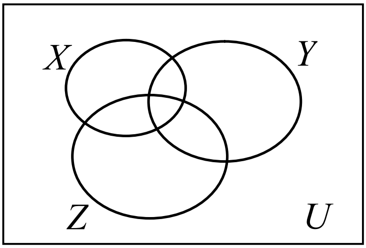


4. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

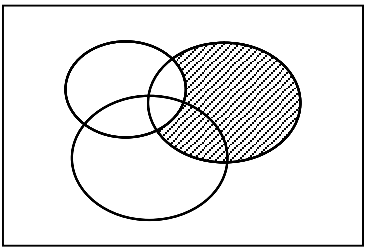
Задача 1. Доказать тождество алгебры множеств:

$$\left(Y \setminus X\right) \cup Z = \left(Y \cup Z\right) \setminus \left(\left(X \cap Y\right) \setminus Z\right)$$

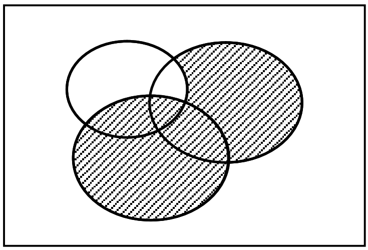
Решение. Проведём доказательство с помощью диаграмм Эйлера–Венна. Изобразим множества X, Y, Z кругами. Считаем, что X, Y, Z есть подмножества некоторого универсального множества U, изображаемого прямоугольником.



Отметим штриховкой на диаграмме множество $Y \setminus X$, а затем его объединение с множеством Z:

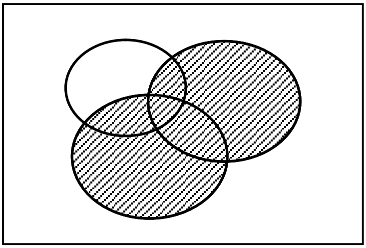


$Y \setminus X$

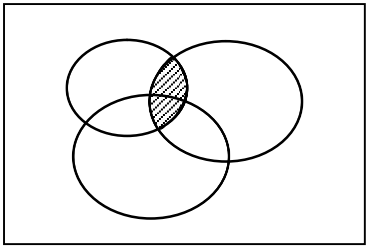


$\left(Y \setminus X\right) \cup Z$

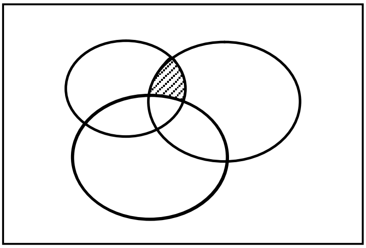
Теперь – снова графически – выполним действия в правой части равенства. Сначала строим объединение множеств Y и Z; затем пересечение множеств X и Y, разность $X \cap Y$ и Z. Последний шаг – изображение множества $\left(Y \cup Z\right) \setminus \left(\left(X \cap Y\right) \setminus Z\right)$.



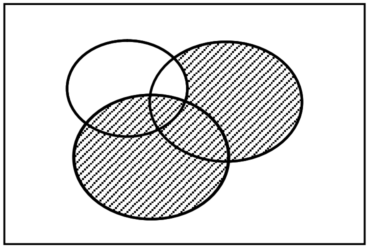
$Y \cup Z$



$X \cap Y$



$(X \cap Y) \setminus Z$



$(Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \setminus Z)$

Последняя диаграмма совпадает с диаграммой множества $(Y \setminus X) \cup Z$. Поэтому $(Y \setminus X) \cup Z = (Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \setminus Z)$, что и требовалось доказать.

Использование диаграмм Эйлера–Венна позволяет достаточно наглядно исследовать соотношения алгебры множеств. Рассмотрим и другой, более строгий способ доказательства тождества.

Сначала докажем, что

$$(Y \setminus X) \cup Z \subseteq (Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \setminus Z).$$

Возьмём $a \in (Y \setminus X) \cup Z$. Допустим, $a \in Z$. Тогда $a \in Y \cup Z$ и $a \notin (X \cap Y) \setminus Z$. Значит, $a \in (Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \setminus Z)$. Теперь пусть $a \notin Z$. Тогда $a \in Y \setminus X$, т. е. $a \in Y$ и $a \notin X$. Отсюда следует, что $a \in Y \cup Z$ и $a \notin X \cap Y$. Значит, $a \notin (X \cap Y) \setminus Z$, $a \in (Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \setminus Z)$. Итак, в любом случае

$$a \in (Y \setminus X) \cup Z \;\Rightarrow\; a \in (Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \setminus Z),$$

включение доказано.

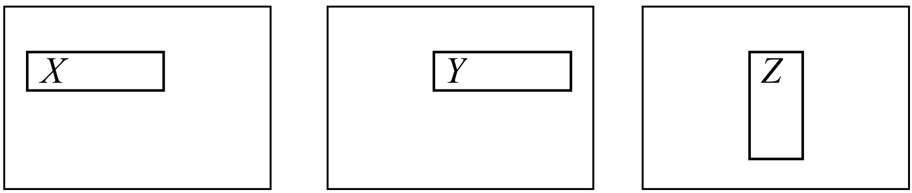
Проверим обратное включение:

$$\left(Y \cup Z\right) \setminus \left(\left(X \cap Y\right) \setminus Z\right) \subseteq \left(Y \setminus X\right) \cup Z .$$

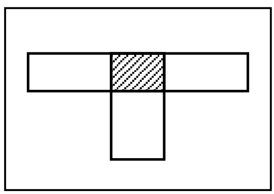
Пусть $b \in \left(Y \cup Z\right) \setminus \left(\left(X \cap Y\right) \setminus Z\right)$. Тогда $b \in Y \cup Z$. Если $b \in Z$, то ясно: $b \in \left(Y \setminus X\right) \cup Z$. Допустим, $b \notin Z$. Значит, $b \in Y$. Тогда $b \notin X$ (если $b \in X$, то $b \in X \cap Y$, т. е. $b \in \left(X \cap Y\right) \setminus Z$, а это противоречит тому, что $b \in \left(Y \cup Z\right) \setminus \left(\left(X \cap Y\right) \setminus Z\right)$). Из $b \in Y$, $b \notin X$ следует, что $b \in Y \setminus X$, а значит $b \in \left(Y \setminus X\right) \cup Z$. Обратное включение доказано, а вместе с ним и требуемое равенство.

<u>**Задача 2.**</u> Доказать или опровергнуть соотношение алгебры множеств: $X \cup Y = X \cup Z \Rightarrow Y = Z$.

<u>Решение.</u> Попытки доказать это утверждение так, как это было сделано в примере 4 (в разделе 1), не приводят к успеху. Попробуем нарисовать диаграмму. Возьмём три множества



и изобразим их на одной диаграмме



Множества $X \cap Y$ и $X \cap Z$, очевидно, совпадают (на диаграмме это множество заштриховано). Однако при этом $Y \neq Z$. Следовательно, утверждение опровергнуто.

Задача 3. Построить таблицу истинности, определить тип формулы алгебры высказываний: $((A \& B) \to (\neg A \vee C)) \leftrightarrow B$.

Решение. Для сокращения записей введём обозначение: $D = (A \& B) \to (\neg A \vee C)$

A	B	C	$A \& B$	$\neg A$	$\neg A \vee C$	D	$D \leftrightarrow B$
И	*И*	*И*	*И*	*Л*	*И*	*И*	*И*
И	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*Л*
Л	*И*	*И*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*
Л	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*Л*

Последний столбец соответствует заданной формуле $((A \& B) \to (\neg A \vee C)) \leftrightarrow B$.

Формула является выполнимой и опровержимой, так как может принимать и истинное, и ложное значение.

Задача 4. Преобразовать формулу алгебры высказываний в дизъюнкцию элементарных конъюнкций:

$$\neg(\neg A \leftrightarrow B) \& (A \vee C).$$

Решение. Сначала преобразуем выражение так, чтобы в формуле остались только следующие операции: отрицание $\neg$, конъюнкция $\&$ и дизъюнкция $\vee$. Для этого воспользуемся тождеством $X \leftrightarrow Y \equiv (\neg X \vee Y) \& (\neg Y \vee X)$.

$$\varPhi = \neg(\neg A \leftrightarrow B) \& (A \vee C) =$$
$$= \neg((\neg(\neg A) \vee B) \& (\neg B \vee \neg A)) \& (A \vee C) =$$
$$= \neg((A \vee B) \& (\neg B \vee \neg A)) \& (A \vee C).$$

С помощью законов де Моргана $\neg(X \& Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \& \neg Y$, добьёмся, чтобы отрицание применялось только к простым высказываниям:

$$\Phi = (\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee \neg A)) \& (A \vee C) =$$

$$= ((\neg A \& \neg B) \vee (\neg(\neg B) \& \neg(\neg A))) \& (A \vee C) =$$

$$= ((\neg A \& \neg B) \vee (A \& B)) \& (A \vee C).$$

Для получения дизъюнкции элементарных конъюнкций используем тождество $X \& (Y \vee Z) = (X \& Y) \vee (X \& Z)$. Тогда:

$$\Phi = ((\neg A \& \neg B) \& (A \vee C)) \vee ((A \& B) \& (A \vee C)) =$$

$$= (\neg A \& \neg B \& A) \vee (\neg A \& \neg B \& C) \vee (A \& B \& A) \vee (A \& B \& C)$$

Полученное выражение можно упростить, если заметить, что

$$\neg A \& \neg B \& A = (\neg A \& A) \& \neg B = Л \& \neg B = Л,$$

$A \& B \& A = A \& B$. Используя тождество $Л \vee X = X$, запишем окончательное выражение:

$$\Phi = (\neg A \& \neg B \& C) \vee (A \& B) \vee (A \& B \& C).$$

<u>Задача 5.</u> Найти области истинности предикатов. Предметные переменные принимают значения из множества действительных чисел. В пункте б) изобразить область истинности на плоскости.

а) $P(x)$: $\forall y\, (\cos y \le 5x + 8)$;

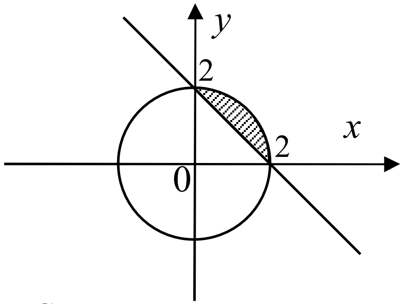
б) $Q(x, y)$: $(x + y \ge 2) \& (x^2 + y^2 \le 4)$.

<u>Решение.</u>

а) Областью истинности данного предиката является множество значений x, при которых для любого y выполняется неравенство $\cos y \le 5x + 8$. Так как $\cos y \le 1$, то предикат обращается в истинное высказывание при $5x + 8 \ge 1$. Таким образом, область истинности $J_P = [-7/5\, , \infty)$.

б) Область истинности предиката $Q(x, y)$ – это множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют двум неравенствам: $x + y \ge 2$ и $x^2 + y^2 \le 4$. Из первого условия получаем, что искомая область находится над прямой

$x + y = 2$, а из второго – что она расположена в круге радиуса 2 с центром в начале координат. Пересечение этих двух множеств точек и будет областью истинности J_Q. Изобразим эту область с помощью штриховки.



<u>Задача 6.</u> С помощью навешивания кванторов образовать из предиката все возможные высказывания, определить их значения истинности: $P(x, y): x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$.

<u>Решение.</u> Область определения предиката – все пары действительных чисел. Чтобы получить высказывание из двухместного предиката, нужно навесить два квантора – по каждой переменной. Так как соседние одноимённые кванторы можно переставлять, а разноимённые кванторы – не всегда, то следует рассмотреть следующие высказывания:

$\exists x \, \exists y \;\; x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$ – истинное высказывание, так как, например, при $x = 1$, $y = 0$ выполняются оба условия, содержащихся в предикате.

$\exists x \, \forall y \;\; x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$ – истинное. Поскольку $\sin y \le 1$ для любого y, то, например, при $x = 1$ и любом y предикат становится истинным высказыванием.

$\forall y \, \exists x \;\; x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$ – истинное высказывание. Рассуждения аналогичны, порядок кванторов в данном случае не существенен.

$\forall x \, \exists y \;\; x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$ – ложное, так как не существует такого y, при котором для любого x будет справедливо $x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$. Например, для $x = -10$ не выполняется ни одно из этих условий, независимо от значения y.

$\exists y \, \forall x \;\; x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$,

$\forall x \, \forall y \;\; x \in \{1, 2, 3\} \& (\sin y \le x)$ – также ложные высказывания.

Задача 7. Булева функция от трёх переменных задана своим стандартным номером: $f_{200}^{(3)}$. Построить для неё таблицу, геометрическое представление, исследовать на существенность все аргументы, представить в СДНФ, построить релейно-контактную схему.

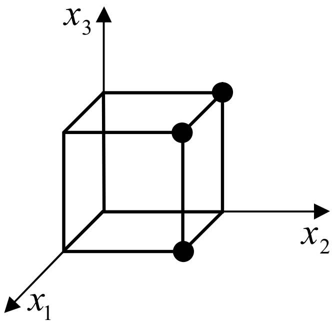
Решение. Представим номер функции в виде суммы степеней числа 2:

$$200 = 128 + 72 = 128 + 64 + 8 = 2^7 + 2^6 + 2^3.$$

Значит кортеж значений функции $f_{200}^{(3)}$: $(0,0,0,1,0,0,1,1)$, т. е. запишем 1 в строках с номером 3, 6 и 7. Строим таблицу:

i	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Пользуясь таблицей, строим геометрическое изображение функции. Отметим жирными точками вершины куба с координатами $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ и $(1,1,1)$.



Теперь исследуем на существенность аргументы функции. Для этого выпишем множество кортежей T_0, на которых $f_{200}^{(3)} = 0$, и множество кортежей T_1, на которых $f_{200}^{(3)} = 1$.

T_0:

x_3	x_2	x_1
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	0	1

T_1:

x_3	x_2	x_1
0	1	1
1	1	0
1	1	1

Исследуем x_1. Из таблиц T_0 и T_1 вычёркиваем столбцы значений переменной x_1:

$T_0'(x_1)$:

x_3	x_2
0	0
0	0
0	**1**
1	0
1	0

$T_1'(x_1)$:

x_3	x_2
0	**1**
1	1
1	1

Так как в таблицах $T_0'(x_1)$ и $T_1'(x_1)$ есть одинаковая строка $(0,1)$, т. е. $T_0'(x_1) \cap T_1'(x_1) \neq \varnothing$ то x_1 – существенный аргумент.

Далее исследуем x_2. Из таблиц T_0 и T_1 вычёркиваем столбцы значений переменной x_2:

$T_0'(x_2)$:

x_3	x_1
0	0
0	**1**
0	0
1	**0**
1	**1**

$T_1'(x_2)$:

x_3	x_1
0	**1**
1	**0**
1	**1**

В таблицах $T_0'(x_2)$ и $T_1'(x_2)$ есть одинаковые строки, они выделены жирным шрифтом, т. е. $T_0'(x_2) \cap T_1'(x_2) \neq \varnothing$. Следовательно, x_2 – существенный аргумент.

Аналогично исследуем x_3.

$T_0'(x_3)$:

x_2	x_1
0	0
0	1
1	**0**
0	0
0	1

$T_1'(x_3)$:

x_2	x_1
1	1
1	**0**
1	1

Поскольку $T_0'(x_3) \cap T_1'(x_3) = \{(1,0)\} \neq \varnothing$ то и x_3 – существенный аргумент.

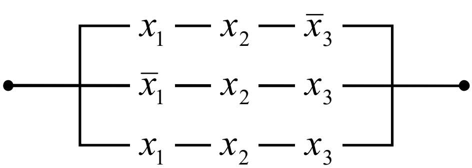
Таким образом, все аргументы функции $f_{200}^{(3)}$ существенные.

Далее представим функцию в СДНФ. Выпишем кортежи с номерами 3, 6 и 7, на которых функция принимает значение 1, и составим для каждого из них соответствующую элементарную конъюнкцию:

$$i = 3:\ (1,1,0) \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 \bar{x}_3;$$
$$i = 6:\ (0,1,1) \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 x_2 x_3;$$
$$i = 7:\ (1,1,1) \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 x_3.$$

Получаем СДНФ: $f_{200}^{(3)} = (x_1 x_2 \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 x_2 x_3) \vee (x_1 x_2 x_3)$.

Используя СДНФ, построим релейно-контактную схему (РКС) функции. В ней будет три параллельных ветви, так как СДНФ содержит три элементарные конъюнкции. В каждой ветви последовательно соединены три реле – по числу аргументов функции:



<u>Задача 8.</u> Преобразовать булеву функцию а) в конъюнктивную нормальную форму; б) в дизъюнктивную нормальную форму. $f(x,y,z)=(x+yz)\downarrow(y\vee z)$.

<u>Решение.</u> Сначала удалим из заданного выражения операции $+$ и $\downarrow$ с помощью тождеств:

$$x_1\downarrow x_2=\overline{x_1\vee x_2}=\bar{x}_1\bar{x}_2,\quad x_1+x_2=\overline{x_1\leftrightarrow x_2}=x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_2 .$$

$$f(x,y,z)=\left(x\cdot\overline{yz}\vee\bar{x}yz\right)\downarrow(y\vee z)=\overline{\left(x\cdot\overline{yz}\vee\bar{x}yz\right)}\,\overline{(y\vee z)}.$$

Применяя законы де Моргана, преобразуем выражение так, чтобы отрицание применялось только к аргументам:

$$f(x,y,z)=\overline{\left(x\cdot\overline{yz}\right)}\cdot\overline{\left(\bar{x}yz\right)}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}=\left(\bar{x}\vee\overline{\overline{yz}}\right)\left(x\vee\overline{yz}\right)\bar{y}\,\bar{z}=$$

$$=\left(\bar{x}\vee yz\right)\left(x\vee\overline{yz}\right)\bar{y}\,\bar{z}=\left(\bar{x}\vee yz\right)\left(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\right)\bar{y}\,\bar{z}\,.$$

а) Для приведения к КНФ пользуемся тождеством

$$x_1x_2\vee x_3=(x_1\vee x_3)(x_2\vee x_3).$$

Получим КНФ: $f(x,y,z)=(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\vee z)(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})\bar{y}\,\bar{z}$.

б) Для приведения к ДНФ пользуемся тождеством

$$x_1(x_2\vee x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\,.$$

Получим:

$$f(x,y,z)=\left((\bar{x}\vee yz)x\vee(\bar{x}\vee yz)\bar{y}\vee(\bar{x}\vee yz)\bar{z}\right)\bar{y}\,\bar{z}=$$

$$=\left(\bar{x}x\vee xyz\vee\bar{x}\,\bar{y}\vee y\bar{y}z\vee\bar{x}\bar{z}\vee yz\bar{z}\right)\bar{y}\,\bar{z}\,.$$

Выражение в скобках можно упростить, заметив, что:

$$\bar{x}x=0\,,\ y\bar{y}z=0\cdot z=0\,,\ yz\bar{z}=y\cdot 0=0\,,\ x\vee 0=x\,.$$

Тогда $f(x,y,z)=\left(xyz\vee\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\right)\bar{y}\,\bar{z}=$

$$=x\,y\,z\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{z}\,\bar{y}\,\bar{z}=0\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,.$$

Таким образом, получаем ДНФ: $f(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$.

5. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

<u>Задача 1.</u> Доказать тождество алгебры множеств:

1.1. $\left(X \cup Y\right) \cap Z = \left(X \cap Z\right) \cup \left(Y \cap Z\right)$;

1.2. $\left(X \cap Y\right) \cup Z = \left(X \cup Z\right) \cap \left(Y \cup Z\right)$;

1.3. $X \cap \left(X \cup Y\right) = X$;

1.4. $X \cup \left(X \cap Y\right) = X$;

1.5. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$;

1.6. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

1.7. $X \cap \left(\overline{X} \cup Y\right) = X \cap Y$;

1.8. $X \cup \left(\overline{X} \cap Y\right) = X \cup Y$;

1.9. $\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) = X$;

1.10. $\left(X \cup Y\right) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right) = X$;

1.11. $X \setminus \left(X \setminus Y\right) = X \cap Y$;

1.12. $X \setminus \left(X \cap Y\right) = X \setminus Y$;

1.13. $X \cup \left(Y \setminus X\right) = X \cup Y$;

1.14. $\left(X \cup Y\right) \cup \left(X \cap Y\right) = X \cup Y$;

1.15. $X \setminus \left(Y \cap Z\right) = \left(X \setminus Y\right) \cup \left(X \setminus Z\right)$;

1.16. $X \setminus \left(Y \cup Z\right) = \left(X \setminus Y\right) \cap \left(X \setminus Z\right)$;

1.17. $\left(X \setminus Y\right) \setminus Z = \left(X \setminus Z\right) \setminus \left(Y \setminus Z\right)$;

1.18. $X \cap \left(Y \setminus Z\right) = \left(X \cap Y\right) \setminus \left(X \cap Z\right)$;

1.19. $\left(X \cap Y\right) \setminus Z = X \cap \left(Y \setminus Z\right)$;

1.20. $\left(X \cup Y\right) \setminus Z = \left(X \setminus Z\right) \cup \left(Y \setminus Z\right)$;

1.21. $\left(X \cup Y\right) \cup Z = X \cup \left(Y \cup Z\right)$;

1.22. $X \cap \left(Y \cup Z\right) = \left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z\right)$;

1.23. $X \cup Y = \left(X \cap \overline{Y}\right) \cup \left(Y \cap \overline{X}\right)$;

1.24. $X \cup \left(X \cup Y\right) = Y$;

1.25. $X \cup Y = \left(X \cup Y\right) \cup \left(X \cap Y\right)$;

1.26. $X \setminus Y = X \cup \left(X \cap Y\right)$;

1.27. $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;
1.28. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$;
1.29. $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$;
1.30. $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$.

Задача 2. Доказать или опровергнуть соотношение алгебры множеств:
2.1. $(X \cup Y = X \cup Z) \& (X \cap Y = X \cap Z) \Rightarrow Y = Z$;
2.2. $(X_1 \subseteq X_2) \& (Y_1 \subseteq Y_2) \Leftrightarrow (X_1 \cup Y_1) \subseteq (X_2 \cup Y_2)$;
2.3. $(X \cup Y = Y) \& (X \cap Y = \varnothing) \Rightarrow X = \varnothing$;
2.4. $(X_1 \subseteq X_2) \& (Y_1 \subseteq Y_2) \Leftrightarrow (X_1 \cap Y_1) \subseteq (X_2 \cap Y_2)$;
2.5. $(X \cap Y = \varnothing) \& (X \cup Y = U) \Rightarrow Y = \overline{X}$ (здесь U – универсальное множество);
2.6. $(X_1 \subseteq X_2) \Leftrightarrow (X_1 \cup Y) \subseteq (X_2 \cup Y)$;
2.7. $X \cup Y = U \Leftrightarrow \overline{X} \subseteq Y$ (здесь U – универсальное множество);
2.8. $(X_1 \subseteq X_2) \Leftrightarrow (X_1 \cap Y) \subseteq (X_2 \cap Y)$;
2.9. $X \cap Y \subseteq Z \Leftrightarrow X \subseteq \overline{Y} \cup Z$;
2.10. $X \subseteq \overline{(Y \cup Z)} \& Y \subseteq \overline{(X \cup Z)} \Rightarrow Y = \varnothing$;
2.11. $X \subseteq Y \cup Z \Leftrightarrow X \cap \overline{Y} \subseteq Z$;
2.12. $X \cap \overline{Y} \subseteq Z \Rightarrow X \cap Y \cap Z \neq \varnothing$;
2.13. $(X \setminus Y) \cup Y = X \Leftrightarrow Y \subseteq X$;
2.14. $X \cap Y \neq \varnothing \& X \cap Z \neq \varnothing \& Z \cap Y \neq \varnothing \Rightarrow X \cap Y \cap Z \neq \varnothing$;
2.15. $(X \cap Y) \cup Z = X \cap (Y \cup Z) \Leftrightarrow Z \subseteq X$;
2.16. $(X \setminus Z) \subseteq (Y \setminus Z) \Rightarrow X \subseteq Y$;
2.17. $X \subseteq Y \Rightarrow (X \setminus Z) \subseteq (Y \setminus Z)$;
2.18. $(Z \setminus Y) \subseteq (Z \setminus X) \Rightarrow X \subseteq Y$;
2.19. $X \subseteq Y \Rightarrow (Z \setminus Y) \subseteq (Z \setminus X)$;

2.20. $X \subseteq \overline{Y} \,\&\, Y \subseteq \overline{X} \Rightarrow X = Y$;
2.21. $X \cup Y = Z \Leftrightarrow Y \cup Z = X$;
2.22. $(X \cup Y) \setminus Z \subseteq X \setminus Z \Rightarrow Y = \varnothing$;
2.23. $(X \cap Y \subseteq \overline{Z}) \,\&\, (X \cup Z \subseteq Y) \Rightarrow X \cap Z = \varnothing$;
2.24. $X \cap Y \cap Z \neq \varnothing \Rightarrow (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \neq \varnothing$;
2.25. $X \cup Y = X \cap Y \Rightarrow X \setminus Y = \varnothing$;
2.26. $X \cap Y \subseteq Z \Rightarrow (X \subseteq Z) \vee (Y \subseteq Z)$;
2.27. $(X \cap Y = Z) \,\&\, (X \cup Y = Y) \Rightarrow X = Z$;
2.28. $X \setminus Y \subseteq Z \Rightarrow Z \cap Y \neq \varnothing$;
2.29. $(Y \setminus X = Z) \,\&\, (X \setminus Y = \varnothing) \Rightarrow X = Y \setminus Z$;
2.30. $(Z \setminus (X \cup Y) = \varnothing) \,\&\, (Z \cap Y = \varnothing) \Rightarrow Z = \varnothing$.

Задача 3. Построить таблицу истинности, определить тип формулы алгебры высказываний:
3.1. $\neg(A \to \neg(A \,\&\, B)) \to (A \vee C)$;
3.2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;
3.3. $((A \,\&\, \neg B) \vee (A \,\&\, \neg C)) \leftrightarrow ((A \to B) \,\&\, (A \to C))$;
3.4. $(B \to (A \,\&\, C)) \,\&\, \neg((A \vee C) \to B)$;
3.5. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;
3.6. $(A \to B) \,\&\, \neg((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;
3.7. $((A \vee B) \vee C) \to ((A \vee B) \,\&\, (A \vee C))$;
3.8. $(B \to C) \to ((A \vee B) \to (A \vee C))$;
3.9. $(A \to C) \,\&\, \neg((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;
3.10. $(A \to (B \,\&\, C)) \to ((\neg B \to \neg A) \to \neg B)$;
3.11. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A \,\&\, \neg B) \vee (A \,\&\, B))$;
3.12. $(A \to C) \,\&\, \neg((A \vee B) \to (C \vee B))$;
3.13. $(A \vee B) \to ((\neg A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, \neg B))$;
3.14. $(A \vee (B \,\&\, C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \,\&\, (A \vee C))$;
3.15. $(A \to (B \to C)) \,\&\, \neg((A \to B) \to (A \to C))$;

3.16. $(A \to \neg C) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$;
3.17. $(A \to (B \,\&\, C)) \to ((A \to B) \,\&\, (A \to C))$;
3.18. $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow (\neg A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C)$;
3.19. $((A \to B) \,\&\, (B \to C) \,\&\, (C \to A)) \to A$;
3.20. $((A \leftrightarrow C) \,\&\, B) \vee (A \to (A \vee B))$;
3.21. $(A \,\&\, B \,\&\, C) \leftrightarrow (\neg(A \,\&\, C) \vee \neg B)$;
3.22. $(\neg((A \to C) \,\&\, (B \to \neg A))) \vee (A \,\&\, C)$;
3.23. $\neg(A \to (B \to A)) \to ((B \,\&\, C) \vee \neg A)$;
3.24. $(\neg A \vee (\neg C \,\&\, \neg B)) \leftrightarrow ((A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C))$;
3.25. $(A \vee C) \to (\neg C \leftrightarrow B)$;
3.26. $\neg(\neg A \to (A \to B)) \to (C \vee B)$;
3.27. $(A \to B) \,\&\, \neg((B \to C) \to (A \to C))$;
3.28. $(A \to B) \,\&\, (B \to \neg A) \,\&\, (C \to A)$;
3.29. $((A \to B) \vee (A \to \neg B)) \to ((A \,\&\, C) \to C)$;
3.30. $((A \to B) \,\&\, (B \to C)) \to \neg(A \to C)$.

Задача 4. Преобразовать формулу алгебры высказываний в дизъюнкцию элементарных конъюнкций:
4.1. $((A \to B) \to (C \to \neg A)) \to (\neg B \to \neg C)$;
4.2. $\neg(A \to \neg(A \,\&\, B)) \to (A \vee C)$;
4.3. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
4.4. $(((A \to B) \to \neg A) \to \neg B) \to \neg C) \to C$;
4.5. $(B \to (A \,\&\, C)) \,\&\, \neg((A \vee C) \to B)$;
4.6. $(A \,\&\, (B \vee \neg A)) \,\&\, ((\neg B \to A) \vee B)$;
4.7. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to \neg C) \to (A \to \neg B))$;
4.8. $((A \vee B) \vee C) \to ((A \vee B) \,\&\, (A \vee C))$;
4.9. $((B \,\&\, C) \to A) \leftrightarrow C$;
4.10. $(\neg A \to \neg B) \to ((B \,\&\, C) \to (A \,\&\, C))$;
4.11. $(A \to (B \,\&\, C)) \to ((\neg B \to \neg A) \to \neg B)$;

4.12. $((A \to B) \to C) \to \neg A$;
4.13. $((A \to B) \to \neg A) \to (A \to (B \,\&\, A))$;
4.14. $(A \vee B) \to ((\neg A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, \neg B))$;
4.15. $((A \to B) \,\&\, (B \to C) \,\&\, (C \to A)) \to A$;
4.16. $\neg((A \,\&\, B) \to \neg A) \,\&\, \neg((A \,\&\, B) \to \neg B)$;
4.17. $(A \to \neg C) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$;
4.18. $\neg((A \to C) \,\&\, (B \to \neg A)) \vee (C \,\&\, A)$;
4.19. $(C \to A) \to (\neg(B \vee C) \to A)$;
4.20. $((A \to B) \,\&\, (B \to C) \,\&\, (C \to A)) \to A$;
4.21. $(A \to \neg C) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$;
4.22. $\neg((A \,\&\, B) \to A) \vee (A \,\&\, (B \vee C))$;
4.23. $(\neg((A \to C) \,\&\, (B \to \neg A))) \vee (A \,\&\, C)$;
4.24. $(A \leftrightarrow B) \,\&\, \neg(A \,\&\, C)$;
4.25. $\neg(A \,\&\, (B \vee C)) \to ((A \,\&\, B) \vee C)$;
4.26. $(A \vee C) \to (\neg C \leftrightarrow B)$;
4.27. $((A \vee C) \to (B \vee \neg C)) \to (A \vee B)$;
4.28. $(A \,\&\, B) \to ((\neg A \vee \neg C) \to B)$;
4.29. $(A \to B) \,\&\, (B \to \neg A) \,\&\, (C \to A)$;
4.30. $(A \,\&\, (B \to C)) \vee \neg(\neg C \to (A \vee B))$.

Задача 5. Найти области истинности предикатов. Предметные переменные принимают значения из множества действительных чисел. В пункте б) изобразить область истинности на плоскости.

5.1. а) $P(x)$: $\forall y\,(\sin y \le 2x + 5)$;

б) $Q(x, y)$: $(x^2 + y^2 \ge 4) \,\&\, (x^2 + y^2 \le 16)$.

5.2. а) $P(x)$: $\forall y\,(\cos y \le 8x - 3)$;

б) $Q(x, y)$: $(y^2 > 2x) \,\&\, (x^2 + y^2 < 25)$.

5.3. а) $P(x)$: $\exists y\,(\sin y \le 3x + 4)$;

б) $Q(x,y)$: $(x-y<2)\,\&\,(x>y-4)$.

5.4. а) $P(x)$: $\exists y\,(\cos y \geq 2x+7)$;

б) $Q(x,y)$: $(3>2x-y)\,\&\,(y\leq 2x+6)$.

5.5. а) $P(x)$: $\exists y\,(e^y \leq 5x-20)$;

б) $Q(x,y)$: $\dfrac{2x+y}{y-x} \in [-1,1]$.

5.6. а) $P(x)$: $\forall y\,(e^y \leq 7x+20)$;

б)

$Q(x,y)$: $\left((x+2)^2+(y-1)^2 \leq 144\right)\&\left(x^2+(y-1)^2>16\right)$

.

5.7. а) $P(x)$: $\forall y\,(e^y \geq 4x+5)$;

б) $Q(x,y)$: $\left((x-32)^2+(y+2)^2 \leq 169\right)\&\left(x^2<2y\right)$.

5.8. а) $P(x)$: $\exists y\,(e^y \geq 2x+6)$;

б) $Q(x,y)$: $(4\geq x-y)\,\&\,(2y\geq -x)\,\&\,(x>0)\,\&\,(y>0)$.

5.9. а) $P(x)$: $\forall y\,(y^2+xy+4=0)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\leq 1\right)\&\left(x^2\leq 1+\dfrac{y^2}{4}\right)$.

5.10. а) $P(x)$: $\exists y\,(y^2+xy+9=0)$;

б) $Q(x,y)$: $(y^2>x-4)\,\&\,(x^2+y^2<225)$.

5.11. а) $P(x)$: $\exists y\,(y^2+xy+16\leq 0)$;

б) $Q(x,y)$: $(y^2=2|x|)\vee(x^2=1)$.

5.12. а) $P(x)$: $\forall y\,(y^2+xy+16\geq 0)$;

б) $Q(x,y)$: $(y^2\leq 4)\vee(x^2=9)$.

5.13. а) $P(x)$: $\forall y\,(\ln(y^2+1)\geq x^2-4)$;

б) $Q(x,y)$: $\exists z\left((x-z)^2+y^2\leq 4\right)$.

5.14. а) $P(x)$: $\forall y\left(\ln\left(y^2+1\right)\le x^2+13\right)$;

б) $Q(x,y)$: $|x|+|y|\le 1$.

5.15. а) $P(x)$: $\exists y\left(\ln\left(y^2+1\right)\ge x^2+1\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(y^2+x^2\ge 2y\right)$.

5.16. а) $P(x)$: $\exists y\left(\ln\left(y^2+1\right)\le x-1\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(y^2+x^2\ge 2y+2x\right)$.

5.17. а) $P(x)$: $\forall y\left(x\ge y\vee x\le y^2\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\exists z\left(x^2+y^2<z^2\right)$.

5.18. а) $P(x)$: $\exists y\left(x\ge y\vee x\le y^2\right)$;

б) $Q(x,y)$: $(x+y\le 1)\vee(x+y\ge 5)$.

5.19. а) $P(x)$: $\exists y\left(xy^2+6y+1=0\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\exists z(xz=x+y)$.

5.20. а) $P(x)$: $\exists y\left(xy^2+6y+1\le 0\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(x^2+5x+6\le 0\right)$.

5.21. а) $P(x)$: $\forall y\left(xy^2-4y+1\le 0\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(y\le x^2\right)\&(x+y\le 2)\&(y\ge 0)$.

5.22. а) $P(x)$: $\forall y\left(xy^2-4y+1\ge 0\right)$;

б) $Q(x,y)$: $(xy\ge 2)\&(x-y\le 0)\&(y\le 4)$.

5.23. а) $P(x)$: $\forall y\left(x\le y\to x^2\le y^2\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(\left(x^2+y^2\le 1\right)\&(x-y\le 0)\right)\vee(2\le x\le 4)$.

5.24. а) $P(x)$: $\exists y\left(x\le y\to x^2\le y^2\right)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(\left(x^2+4y^2\le 1\right)\vee(x=|y|)\right)$.

5.25. а) $P(x)$: $\exists y(xy+9=3x+3y)$;

б) $Q(x,y)$: $\left(|x+y|\le 1\right)\vee\left(x^2+y^2=1\right)$.

5.26. а) $P(x)$: $\forall y(xy+9=3x+3y)$;

б) $Q(x,y)$: $\exists z((xz=3)\,\&\,(yz=6))$.

5.27. а) $P(x)$: $\forall y\ (xy-x+7y-7=0)$;

б) $Q(x,y)$: $\exists z(xz=3\ \&\ y\in[1,2])$.

5.28. а) $P(x)$: $\exists y\ (xy-x+7y-7=0)$;

б) $Q(x,y)$: $(y\geq x^2)\,\&\,(x\geq y^2)$.

5.29. а) $P(x)$: $\exists y\ (x^2\leq y\ \&\ y\leq 3x)$;

б) $Q(x,y)$: $(xy\geq 2)\,\&\,(x^2+y^2\leq 8)$.

5.30. а) $P(x)$: $\exists y\ (x^2\leq 4y\ \&\ y\leq 4x)$;

б) $Q(x,y)$: $(xy\leq 2)\vee(x-y=0)$.

<u>**Задача 6.**</u> С помощью навешивания кванторов образовать из предиката все возможные высказывания, определить их значения истинности.

6.1. $P(x,y)$: $x+y^2=3$;

6.2. $P(x,y)$: $x^2+y\leq 3$;

6.3. $P(x,y)$: $(x+3y\leq 0)\vee(x>5)$;

6.4. $P(x,y)$: $((x-3)y>1)\,\&\,((5-x)y>1)\,\&\,(x\in[3,5])$;

6.5. $P(x,y)$: $(x^2-7x+6<0)\,\&\,(y>0)$;

6.6. $P(x,y)$: $(ye^{-x}>1)\,\&\,(ye^{x}>1)$;

6.7. $P(x,y)$: $(y>5x)\,\&\,(x<0\to y>0)$;

6.8. $P(x,y)$: $(y<-x^2)\,\&\,(x<-1)$;

6.9. $P(x,y)$: $(-x^2<y<x^2)\,\&\,(y<0)$;

6.10. $P(x,y)$: $(x>1\to y>1)$;

6.11. $P(x,y)$: $(x^2-4x+3<0)\vee(y^2<-3)$;

6.12. $P(x,y)$: $(y=\operatorname{tg}x)\vee(x=0)$;

6.13. $P(x,y)$: $(x^2+y^2\geq 1)\,\&\,(|x|\leq 1)$;

6.14. $P(x,y)$: $|y|\cdot(x^2+1)\le 1$;

6.15. $P(x,y)$: $(16+6y-y^2\ge 0)\,\&\,(\cos(x-y)\le 2)$;

6.16. $P(x,y)$: $y\in\{1,3,5\}\,\&\,(x^2+y>0)$;

6.17. $P(x,y)$: $(-x^2\le y\le x^2)$;

6.18. $P(x,y)$: $|y|\le|x|$;

6.19. $P(x,y)$: $y^2\ge 4x$;

6.20. $P(x,y)$: $|y|\le x^2+1$;

6.21. $P(x,y)$: $(y-\sin x<3)\,\&\,(\cos x<y-1)$;

6.22. $P(x,y)$: $\neg(x\in\{3,5\}\,\&\,y\in[3,5])$;

6.23. $P(x,y)$: $(x^2+1\le 2x)\vee(y^2+2y<3)$;

6.24. $P(x,y)$: $x\in\{3,5\}\vee y\in\{3,5\}$;

6.25. $P(x,y)$: $(x^2-y^2>1)\vee(x-y=0)$;

6.26. $P(x,y)$: $(x^2-y^2\le 1)$;

6.27. $P(x,y)$: $(x+2\le y\le x+4)$;

6.28. $P(x,y)$: $(y<x^2)\vee(x>100)$;

6.29. $P(x,y)$: $y>7x+12$;

6.30. $P(x,y)$: $\neg(x+y^2=7)$.

Задача 7. Булева функция от трёх переменных задана своим стандартным номером. Построить для неё таблицу, геометрическое представление, исследовать на существенность все аргументы, представить в СДНФ, построить релейно-контактную схему.

7.1. $f_{19}^{(3)}$; 7.2. $f_{25}^{(3)}$; 7.3. $f_{30}^{(3)}$;

7.4. $f_{35}^{(3)}$; 7.5. $f_{47}^{(3)}$; 7.6. $f_{55}^{(3)}$;

7.7. $f_{61}^{(3)}$; 7.8. $f_{68}^{(3)}$; 7.9. $f_{76}^{(3)}$;

7.10. $f_{85}^{(3)}$; 7.11. $f_{95}^{(3)}$; 7.12. $f_{106}^{(3)}$;

7.13. $f_{118}^{(3)}$; 7.14. $f_{131}^{(3)}$; 7.15. $f_{136}^{(3)}$;
7.16. $f_{142}^{(3)}$; 7.17. $f_{149}^{(3)}$; 7.18. $f_{157}^{(3)}$;
7.19. $f_{166}^{(3)}$; 7.20. $f_{176}^{(3)}$; 7.21. $f_{187}^{(3)}$;
7.22. $f_{193}^{(3)}$; 7.23. $f_{198}^{(3)}$; 7.24. $f_{203}^{(3)}$;
7.25. $f_{211}^{(3)}$; 7.26. $f_{224}^{(3)}$; 7.27. $f_{239}^{(3)}$;
7.28. $f_{245}^{(3)}$; 7.29. $f_{251}^{(3)}$; 7.30. $f_{102}^{(3)}$;

<u>Задача 8.</u> Преобразовать булеву функцию а) в конъюнктивную нормальную форму; б) в дизъюнктивную нормальную форму.

8.1. $f(x,y,z)=(z\to x)\left(\overline{(x\vee y)}\to (z\downarrow x)\right)$;
8.2. $f(x,y,z)=((x\,|\,\bar{y})\vee z)\leftrightarrow (z+x)$;
8.3. $f(x,y,z)=(y\to (x\vee (x+z)))\to \overline{yz}$;
8.4. $f(x,y,z)=\bar{x}z\to ((y\downarrow x)\vee (z\downarrow x))$;
8.5. $f(x,y,z)=((x+yz)\to \bar{y}\cdot\bar{x})\to (x\,|\,y)$;
8.6. $f(x,y,z)=(y\,|\,z)\leftrightarrow \left(x\to \overline{(y\vee z)}\right)$;
8.7. $f(x,y,z)=(x\vee \bar{y}\vee z)\to (z\downarrow (y\vee x))$;
8.8. $f(x,y,z)=(\bar{z}\vee (x\to y))\leftrightarrow (y\to zx)$;
8.9. $f(x,y,z)=((z\downarrow x)\downarrow \bar{x})\to \overline{(y\vee z)}$;
8.10. $f(x,y,z)=(xz+y\bar{z})\to (yz\vee x\bar{z})$;
8.11. $f(x,y,z)=(x\vee \bar{z})(xy\to (y\,|\,z))$;
8.12. $f(x,y,z)=(z\to ((x\,|\,z)\,|\,\bar{y}))\vee \overline{(x+z)}$;
8.13. $f(x,y,z)=\overline{((x\downarrow y)\to z)}\to (y\vee \bar{x})z$;
8.14. $f(x,y,z)=((z\to x)\to y)\vee ((x\,|\,z)\to y)$;
8.15. $f(x,y,z)=\overline{(x\bar{z}\vee z\vee y)}\vee (yz\to xz)$;
8.16. $f(x,y,z)=(x\downarrow z)\overline{((y\to x)\to z)}$;

8.17. $f(x,y,z)=(x\to(\bar{z}\mid(y\vee x)))\bar{z}$;

8.18. $f(x,y,z)=(z\vee(x\to y))\downarrow(x\vee y)$;

8.19. $f(x,y,z)=\overline{(xyz\to z)}\to(z+y)$;

8.20. $f(x,y,z)=((x\to z)(y\to z))\to(x\mid(y\vee z))$;

8.21. $f(x,y,z)=(y\vee xz)\downarrow\left(x\to\overline{(y\vee z)}\right)$;

8.22. $f(x,y,z)=\left(z\to\overline{(x\vee y)}\right)(y\to(y\mid z))$;

8.23. $f(x,y,z)=((zx)\mid(y\to x))\vee\overline{(x\vee z)}$;

8.24. $f(x,y,z)=((zy\to\bar{x})\downarrow(x\vee z))\vee y$;

8.25. $f(x,y,z)=(x+y)\to\overline{(y\vee xz\vee yz)}$;

8.26. $f(x,y,z)=(\bar{x}\vee\bar{y})(z\to\bar{y})\to(z\mid y)$;

8.27. $f(x,y,z)=(y\leftrightarrow(xz\vee y))\to(y\mid(xz))$;

8.28. $f(x,y,z)=(x\vee y)\overline{(z\to x)}\to(y+z)$;

8.29. $f(x,y,z)=((z\vee\bar{x})\to(y\vee xz))\to\overline{zx}$;

8.30. $f(x,y,z)=(yz\to x(y\vee\bar{z}))+xz$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 366 с.
2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М. : Высшая школа, 1986. – 311 с.
3. Киркинский А.С. Функции алгебры логики : Учебное пособие. / Алт. политехн. ин-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул : б.и., 1989. – 95 с.
4. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : Учебное пособие. – М. : Логос, 2000. – 240 с.
5. Павловский Е.В. Дискретная математика : Учебное пособие. Часть 1. / Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова, Центр дистанционного обучения. Барнаул : Изд-во АлтГТУ, 2003. – 240 с.
6. Киркинский А.С. Элементы дискретной математики : Методические рекомендации и варианты заданий контрольных работ для студентов-заочников. – Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул : АлтГТУ, 2008. – 48 с.