**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 2**

**ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

**Разбор типовых задач**

**Уравнения, допускающие понижение порядка**

Рассмотрим случаи, когда уравнение второго порядка:

$$F\left(x, y^{''}, y^{'}, y\right)=0$$

Можно свести к уравнению первого порядка заменой переменной.

**А)** Случай, когда в уравнение не входит зависимая переменная *y*. Следует сделать замену $y^{'}=z(x)$.

**Пример**  Найти общее решение уравнения второго порядка

*Решение*. Замена , приводит к ДУ первого порядка:

.

Это однородное ДУ. Решим полученное ДУ, полагая

Подставим в уравнение, получим

Интегрируя почленно, находим

Обратная замена дает общее решение ДУ первого порядка относительно*z*:

Обратная замена в найденное решение *z* вновь приводит к простейшему ДУпервого порядка

Интегрируя по частям, найдем общее решение:

**Ответ:**

**Б)** Случай, когда в уравнение не входит независимая переменная *x*. Следует сделать замену

$$y^{'}=p\left(y\right).$$

Тогда по формулам дифференцирования сложной функции:

$$y^{''}=p\frac{dp}{dy}.$$

**Пример**  Найти общее решение ДУ

*Решение*. Замена приводит к уравнению первого порядка

.

Это уравнение относительно «*p*» с разделяющимися переменными.

Решим полученное ДУ путем разделения переменных и интегрирования. Получим:

Обратная замена в найденное решение приводит к ДУ первого порядка:

Это ДУ с разделяющимися переменными.

Решим полученное ДУ, вновь разделяя переменные и интегрируя. Получим:

Складывая (\*) и (\*\*) получим:

Обратим внимание, что в преобразовании найденного общего решения *y* использована формула для гиперболического косинуса

**Ответ:**

**Пример**  Найти решение начальной задачи

*Решение.* Замена ( т.е. *y* – независимая переменная) и приводит к ДУ первого порядка:

.

Т.к. (в соответствии с начальным условием , то решим ДУ

 (\*)

Это ДУ относительно «*p*» с разделяющимися переменными.

Решим полученное ДУ путем разделения переменных и интегрирования. Получим:

;

общее решение.

Найдем решение начальной задачи. Для этого найдем С1, используя начальное условие: при *y*=1: .

Получим

.

Подставим С1 в общее решение, получим частное решение ДУ (\*)

*p*=*y*.

Обратная замена в найденное частное решение приводит к ДУ первого порядка

,

 (\*\*)

Решим полученное ДУ вновь разделяя переменные и интегрируя:

общее решение ДУ (\*\*).

Найдем решение начальной задачи. Для этого найдем , используя начальное условие: при *x=0, y=1.* Получим:



Подставим  в общее решение, получим частное решение: 

**Ответ:** .

**Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка (ЛОДУ) называется уравнение вида:

 **,**  (1)

Если  и  - два линейно независимые решения ЛОДУ (1), то его общее решение задается формулой:

 , (2)

где - произвольные постоянные.

Любые два линейно независимые решения ЛОДУ (1)  и  называются его *фундаментальной системой решений.*

Не существует общих методов нахождения фундаментальной системы для уравнений (1) общего вида, но для уравнений с постоянными коэффициентами такой метод существует.

Рассмотрим равнение с постоянными коэффициентами:

 , (3)

где  - постоянные действительные числа, причем .

Уравнение

. (4)

называется *характеристическим* *уравнением* для ЛОДУ (3).

Корни квадратного уравнения (4) определяются формулой:

, (5)

где  - дискриминант.

В зависимости от знака дискриминанта возможны три различных случая, определяющие вид фундаментальной системы решений ЛОДУ (3):

|  |  |
| --- | --- |
| : |  |
| : |  |
| :  |  |

**Пример**  Решить уравнение:

.

*Решение.* Составим характеристическое уравнение:

 .

у которого , и которое имеет два решения:

 и .

По таблице для случая общее решение исходного уравнения имеет вид:

.

где - произвольные постоянные.

**Ответ***:* .

**Пример**  Решить уравнение:

.

*Решение.* Составим характеристическое уравнение:

.

Оно имеет единственный корень кратности 2. Дискриминант . По таблице для случая общее решение данного уравнения имеет вид:

.

**Ответ:** .

**Пример**  Решить уравнение:

.

*Решение.* Составим характеристическое уравнение

.

Оно имеет два комплексно - сопряженных корня:

.

Тогда действительная и мнимая части корней: ,

и по таблице для  общее решение рассмотренного уравнения имеет вид:

.

**Ответ:** .

**Пример**  Решить начальную задачу:

.

*Решение.* Составим характеристическое уравнение

.

Оно имеет единственный корень: кратности 2. Общее решение данного в примере уравнения имеет вид:

.

Поскольку в начальных условиях задана производная решения, то вычислим производную решения:

.

Подставив найденные выражения в начальные условия: при , получим систему:

.

Следовательно,



и начальная задача имеет решение:

.

**Ответ**: .

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

***Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка* (ЛНДУ)** называется уравнение вида:

 , (6)

Для ЛНДУ общее решение равно сумме общего решения соответствующего общего решения ЛОДУ (1):

 

и некоторого частного решения неоднородного уравнения 

 . (7)

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка сводится к:

1) построению фундаментальной системы решений однородного уравнения;

2) нахождению некоторого частного решения неоднородного уравнения.

Рассмотрим уравнения с постоянными коэффициентами, так как для них можно построить фундаментальную систему решений.

***Метод вариации постоянных***

Рассмотрим уравнение вида:

 , (8)

где  - постоянные действительные числа, причем .

Рассмотрим общий метод нахождения общего решения, при любой правой части.

Однородное уравнение

 

имеет общее решение

 

где  - постоянные.

Решение уравнения ЛНДУ (8) представим в виде

, (9)

где  - неизвестные функции.

Введем обозначения:

 

которые определяются из системы.

 (10)

Поскольку определитель системы (10) является определителем Вронского, то система (10) имеет единственное решение. Тогда искомые функции определяются интегрированием:

, ,

которые следует подставить в (9).

**Пример** Найти общее решение уравнения



Соответствующее однородное уравнение:

.

Характеристическое уравнение:

, , .

Линейно независимые решения:

 и .

Ищем решение неоднородного уравнения в виде

.

Если

 и , то система (10) имеет вид

,

откуда

.

Подставим во второе уравнение:

;

;



,

Откуда .

Тогда

,

.

Общее решение имеет вид

,

.

При некоторых видах функции  частное решение  можно найти, не прибегая к интегрированию, а с помощью **метода неопределенных коэффициентов.**

***Метод неопределенных коэффициентов в случае ***

Рассмотрим ЛНДУ вида:

 , (11)

где − действительное число, −многочлен от *x* степени *n* ()с действительными коэффициентами.

Тогда ЛНДУ (11) имеет частное решение вида

 (12)

где а)  − многочлен по  той же степени , что и .

б) число *s* равно кратности  как **корня** **характеристического уравнения**

. (13)

 Возможны три значения числа *s*:

1. Если  не является корнем уравнения (13), то говорят, что его кратность равна нулю. Тогда .

Если дискриминант уравнения (13) , то .

Если , то  и .

1. Если  корень уравнения (13) кратности 1,то .

Этот случай возможен, если  и  , 

1. Если  корень уравнения (13) кратности 2,то .

Этот случай возможен, если  и  кратности 2.

Замечание.

,

,

,

.

Коэффициенты многочлена  определяются методом неопределенных коэффициентов. Для этого функцию (12) вместе с ее производными подставляют в уравнение (11) и, так как полученное выражение должно быть тождеством, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях .

**Пример**  Найти общее решение уравнения:

.

*Решение.* 1) Соответствующее ЛОДУ имеет вид



Найдем общее решение . Его характеристическое уравнение



 имеет  и единственный корень: . Поэтому общее решение имеет вид:

.

2) Найдем частное решение вида:



Так как  не является корнем характеристического уравнения, то .

В правой части , откуда  и многочлен с неопределенными коэффициентами имеет вид.

.

Тогда, частное решение  ищем в виде

.

Дифференцируя, находим

,

.

Подставим в заданное уравнение и получим



Сокращая на и приводя подобные слагаемые, получим



и приравнивая коэффициенты при  и , получим систему:

|  |  |
| --- | --- |
| При :при : |  |

Откуда

.

Следовательно, .

3) Общее решение заданного ЛНДУ имеет вид:

 .

**Ответ:** 

**Пример** Найти общее решение уравнения:

.

*Решение.* 1) *.* Соответствующее ЛОДУ имеет вид



Найдем его общее решение Характеристическое уравнение

 имеет  и корни: . Поэтому общее решение имеет вид:

,

2) Найдем частное решение  вида :



Так как  совпадает с одним из двух корней характеристического уравнения, то 

Многочлен , откуда  и

.

Тогда:

,

Дважды дифференцируя, получим

,

.

Подставим в уравнение (11) :

 .

Сокращая на и приводя подобные слагаемые, получим уравнение:



откуда

.

Следовательно, .

3) Общее решение имеет вид:

.

**Ответ:** 

**Пример** Найти общее решение уравнения:

.

*Решение.* 1) Соответствующее ЛОДУ имеет вид

.

Найдем его общее решение Характеристическое уравнение  имеет корни: . Поэтому

.

2) Найдем частное решение  вида



Так как  совпадает с одним из двух корней характеристического уравнения, то . Многочлен , откуда  и

.

Тогда

,

,

.

Подставим  в исходное уравнение:

 

Приравняем коэффициенты при ,  и ,и получим систему:

|  |  |
| --- | --- |
| при :при :при : |  |

Откуда: 

Следовательно,

.

3) Общее решение имеет вид

.

***Метод неопределенных коэффициентов в случае***

******

Рассмотрим ЛНДУ вида:

, (14)

где некоторые действительные числа.

ЛНДУ (14) имеет частное решение вида

 (15)

где (13) – характеристическое уравнение  .

Неопределенные коэффициенты  и  определяются после подстановки соответствующего выражения (15) вместе с его производными в уравнение (14) и приравнивания коэффициентов отдельно при  и .

**Пример** Найти общее решение уравнения:

.

*Решение.* 1) Соответствующее ЛОДУ имеет вид

.

Его характеристическое уравнение



имеет комплексные корни:

, .

Поэтому

 

2) Так как число  **не** является корнем характеристического уравнения, то  ищем в виде:

 .

Дважды дифференцируя, получим

 ,

 .

Подставим в исходное уравнение:

 

Приведем подобные слагаемые:



Приравняем коэффициенты при  и , и получим систему:

|  |  |
| --- | --- |
| при :при : |  |

откуда



.

Следовательно,

 

3) Общее решение имеет вид:

 .

**Ответ:** 

**Пример** Найти общее решение уравнения:

.

*Решение.* 1) Соответствующее ЛОДУ имеет вид



Его характеристическое уравнение  имеет корни: .

Поэтому

.

2) Найдем частное решение .

Так как число  является корнем характеристического уравнения, то  ищем в виде:

 .

Тогда

 ,

 .

Подстановка  в исходное уравнение после сокращений приводит к уравнению вида:

 .

Приравнивая коэффициенты при  и , получим:

.

Следовательно,

 .

3) Общее решение имеет вид:

 .

**Ответ:** 

***Принцип наложения***

Если  - частное решение ЛНДУ

,

а  - частное решение ЛНДУ

,

то функция  является решением ЛНДУ

 .

**Пример** Найти общее решение уравнения:

.

*Решение.* 1) Соответствующее однородное уравнение



имеет характеристическое уравнение  с корнями: . Поэтому:

 .

2) Согласно принципу наложения, надо найти частные решения двух уравнений:

  (\*)

и

 . (\*\*)

 Частное решение уравнения (\*) имеет вид:

.

Подстановка в уравнение дает: . и 

 Частное решение уравнения (\*\*) имеет вид

.

Поэтому

 ,

 

Подстановка этих выражений в уравнение (\*\*) приводит к уравнению

 .

Отсюда  и

.

Следовательно, исходное уравнение согласно принципу наложения имеет частное решение:



3) Общее решение уравнения имеет вид:

 .

**Ответ:** 

**Задачи для самостоятельного решения**

**Варианты задачи 1.** Решите уравнения методом понижения порядка:

1. а)  б) 
2. а)  б) 
3. а)  б) 
4. а)  б) 
5. а)  б) 
6. а)  б) 
7. а)  б) 
8. а)  б) 
9. а)  б) 
10. а)  б) 

**Варианты задачи 2.** Решите начальные или краевые задачи для ЛОДУ второго порядка.

1. ****
2. ****
3. ****
4. ****
5. ****
6. ****
7. ****
8. ****
9. ****
10. ****

**Варианты задачи 3.** Найдите общее решение ЛНДУ второго порядка с неоднородностью вида ******. Частное решение неоднородного уравнения следует искать методом неопределенных коэффициентов.

1. а)  б) 
2. а)  б) 
3. а)  б) 
4. а)  б) 
5. а)  б) 
6. а)  б) 
7. а)  б) 
8. а)  б) 
9. а)  б) 
10. а)  б) 

**Варианты задачи 4.** Найдите общее решение ЛНДУ второго порядка с неоднородностью вида ******. Частное решение неоднородного уравнения следует искать методом неопределенных коэффициентов.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 

**Варианты задачи 5.** Найдите общее решение ЛНДУ методом вариации постоянных.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 

**Варианты заданий в зависимости от номера в списке группы:**

В верхней строчке таблицы номер студента в списке группы,

В ячейки на пересечении столбца с номером студента в списке группы со строчкой с номером задачи стоит номер варианта этой задачи.



**Требования к оформлению задания**

Предоставляется развернутое описание решения задач. Если выполненное задание фотографируете, то размещайте фотографии в word-файле с титульным листом. Указывайте номер задачи, а в скобках номер варианта.

**Критерии оценивания выполненного задания**

Максимальное количество баллов за выполнение практического задания – 10 баллов.

Практикум выполнен при наборе не менее 65% от суммы баллов за выполнение практических заданий.