

Численные методы

Лекция 5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

САРАЕВ ПАВЕЛ ВИКТОРОВИЧ

ФГБОУ ВПО «Липецкий государственный технический университет»
Кафедра АСУ

Липецк – 2017

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1 Численные методы решения систем нелинейных уравнений

- Постановка задачи
- Метод Ньютона

2 Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

- Постановка задачи
- Метод Гаусса
- LU-разложение

1. Постановка задачи |

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $f_i(\cdot)$ – вещественнозначные нелинейные функции от n вещественных переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Обозначим:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix};$$

1. Постановка задачи II

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (СНУ) в векторно-матричном виде:

$$F(x) = 0$$

Предположим, что СНУ (1) может быть преобразована:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_2(x) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_n(x) \end{array} \right. \quad (2)$$

В векторно-матричном виде – задача о неподвижной точке отображения:

$$x = \Phi(x)$$

1. Постановка задачи III

Метод простых итераций (МПИ) (метод последовательных приближений):

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В развернутом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{array} \right. \quad (3)$$

Метод покоординатных итераций:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}) \end{array} \right. \quad (4)$$

1. Постановка задачи IV

Приведение СНУ из формы (1)) в форму (2)):

$$F(x) = 0;$$

$$AF(x) = 0; \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det(A) \neq 0;$$

$$x + AF(x) = x;$$

$$x = x - AF(x) \tag{5}$$

Сравнивая с (2):

$$\Phi(x) = x - AF(x)$$

Задача: выбрать A , чтобы итерационный процесс **сходился**.

2. Метод Ньютона |

Пусть $\{A_k\}$ – последовательность невырожденных вещественных матриц размера $n \times n$.

Последовательность задач

$$x = x - A_k F(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

имеет те же решения, что и (5).

Итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Если $A_k \equiv A$ – метод ???

Если A_k различны при разных k , формула (7) определяет большое семейство итерационных методов.

Пусть

$$A_k = [F'(x^{(k)})]^{-1},$$

2. Метод Ньютона II

где $F'(x^{(k)})$ – матрица Якоби:

$$F'(x) = J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Пример.

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} e^{x_1} \cdot \sin x_2 \\ (x_1^2 + 2x_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$J(x) =$$

Явная формула **метода Ньютона**, обобщающего на многомерный случай скалярный метод Ньютона:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \quad (7)$$

2. Метод Ньютона III

Другая форма:

$$[F'(x^{(k)})] \left(x^{(k+1)} - x^{(k)} \right) = -F(x^{(k)}).$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$[F'(x^{(k)})]p^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

относительно вектора поправки $p^{(k)}$ и далее

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + p^{(k)}.$$

То же самое получится, если разложить $F(x)$ в ряд Тейлора:

$$F(x^{(k+1)}) = F(x^{(k)}) + [F'(x^{(k)})](x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \dots$$

Таким образом, **метод Ньютона** – метод **пошаговой линеаризации**.

С ростом n на каждой итерации вычислительные затраты растут непропорционально быстро. Уменьшение этих затрат – главное направление модификации метода Ньютона.

2. Метод Ньютона IV

Модифицированный метод Ньютона: матрица Якоби вычисляется и обращается один раз – в начальной точке $x^{(0)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(k)}),$$

но приводит к значительному росту количества итераций.
СНУ общего вида (возможно, $m \neq n$):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Вместо (7) – метод Ньютона с псевдообращением для решения СНУ:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^+ F(x^{(k)}), \quad (9)$$

где $[F'(x^{(k)})]^+$ – псевдообратная матрица к матрице Якоби.

2. Метод Ньютона V

Условия Мура-Пенроуза:

$$\begin{aligned}AA^+A &= A; \\A^+AA^+ &= A^+; \\(AA^+)^T &= AA^+; \\(A^+A)^T &= A^+A.\end{aligned}$$

Свойства A^+ :

- 1 существует для любой матрицы;
- 2 единственна;
- 3 для квадратной невырожденной матрицы $A^+ = A^{-1}$;
- 4 если A – матрица полного столбцового ранга, то

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

1. Постановка задачи |

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (10)$$

В векторно-матричном виде:

$$Ax = b$$

Выделяют виды СЛАУ:

- $m = n - ???$
- $m > n - ???$
- $m < n - ???$

2 класса методов решения СЛАУ: **прямые и итерационные**. Прямые решают задачу за конечное число арифметических операций. Итерационные методы находят решение в результате бесконечного повторения единообразных действий. Эффективность методов решения СЛАУ зависит от структуры и свойств матрицы A : размера, обусловленности, симметричности, заполненности и др.

2. Метод Гаусса I

Наиболее популярный метод решения СЛАУ – **метод Гаусса**.

Прямой ход предназначен для приведения матрицы к треугольному (точнее, трапециевидному) виду путём исключения x_1 из 2-го, 3-го и т.д. уравнений, затем x_2 из 3-го, 4-го и т.д.:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \vdots \end{array} \right.$$

где

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)},$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot b_k^{(k-1)}$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1; i, j = k+1, \dots, n.$$

2. Метод Гаусса II

По определению полагаем:

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, b_i^{(0)} = b_i.$$

Треугольная форма позволяет последовательно одно за другим вычислить значения неизвестных, начиная с последнего. Это – суть обратного хода метода Гаусса.

Пересчёт определяется формулой:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} x_j \right)$$

$k = n, n-1, \dots, 1$. Сумма равна 0 по определению, если нижний предел суммирования больше верхнего.

Технология получения решения, минимизирующая влияние ошибок округлений:

- 1 постолбцовый (построчный, по всей матрице) выбор главного элемента (наибольший по модулю);
- 2 целесообразно произвести масштабирование (уравновешивание) системы: разделить все числа каждой строки на наибольшее число строки.

3. LU-разложение I

Пусть A – квадратная матрица $n \times n$, L – нижняя (левая) треугольная $n \times n$, U – верхняя (правая) треугольная $n \times n$.

Теорема. Если все главные миноры A не равны 0, то существуют такие матрицы L , U что

$$A = LU.$$

Если элементы диагонали одной из матриц L , U ненулевые, то такое разложение **единственно**.

Будем находить l_{ij} ($i > j$) и u_{ij} ($i \leq j$) такие, чтобы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. LU-разложение II

Выполнив перемножения, приходим к $n \cdot n$ уравнениям относительно $n \cdot n$ неизвестных:

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11}, & u_{12} &= a_{12}, & \dots, & u_{1n} &= a_{1n}, \\ l_{21}u_{11} &= a_{21}, & l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22}, & \dots, & l_{21}u_{1n} + u_{2n} &= a_{2n}, \\ &\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots \\ l_{n1}u_{11} &= a_{n1}, & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} &= a_{n2}, & \dots, & l_{n1}u_{1n} + \dots + u_{nn} &= a_{nn}. \end{aligned}$$

относительно неизвестных $u_{11}, u_{12}, \dots, l_{21}, \dots$

Значения находятся одно за другим в следующем порядке:

- из 1-й строки,
- из оставшейся части 1-го столбца,
- из оставшейся части 2-й строки,
- из оставшейся части 2-го столбца
- и т.д.

3. LU-разложение III

Все элементы могут быть получены с помощью всего двух формул:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq j;$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right), \quad i > j;$$

При практическом выполнении разложения (факторизации) матрицы необходимо:

- 1 переключение с одной формулы на другую,
- 2 осторожность, т.к. могут оказаться равными нулю диагональные элементы U (отсюда требование на главные миноры). Для этого надо элементы u_{jj} сравнивать с нулем (малым числом).

3. LU-разложение IV

Для определенных классов матриц требования теоремы о разложении заведомо выполняются. Это относится, в частности, к **матрицам с диагональным преобладанием**:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Вместе СЛАУ

$$Ax = LUx = b$$

решаются две СЛАУ:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

- 1 относительно y – с нижнетреугольной основной матрицей;
- 2 относительно x – с верхнетреугольной основной матрицей.

3. LU-разложение V

Пример. Найти LU-разложение матрицы и решить СЛАУ $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Решение.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

3. LU-разложение VI

Из 1-й строки:

$$u_{11} = 2, \quad u_{11} = 5, \quad u_{11} = 7$$

Из оставшейся части 1-го столбца:

$$l_{21} = 2, \quad l_{31} = 3$$

Из оставшейся части 2-й строки:

$$u_{22} = 2, \quad u_{23} = 6$$

Из оставшейся части 2-го столбца:

$$l_{32} = 1$$

Из оставшейся части 3-й строки:

$$u_{33} = -10$$

3. LU-разложение VII

Т.о.:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

1. $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Получается:

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

2. $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

3. LU-разложение VIII

Получается:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- 1 Наиболее известный метод решения систем нелинейных уравнений – метод Ньютона. Его модификация – метод Ньютона с псевдообращением – может быть применен для решения системы произвольной размерности.
- 2 ЧМ решения СЛАУ бывают прямыми и итерационными.
- 3 СЛАУ общего вида с квадратной основной матрицей системы могут решаться методом Гаусса (с выбором главного элемента), методом на основе LU-разложения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие.– М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005.– 432 с.
- 2 Шевцов Г.С., Крюкова О.Г., Мызникова Б.И.. Численные методы линейной алгебры: Учеб. пособие.– М.: Инфра-М, 2008.– 480 с.
- 3 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М: Наука, 1987.– 600 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!