ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 4

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Разбор типовых задач

Пусть дана последовательность

$$u_1(x), u_2(x),\ \dots, u_n(x), \dots$$

тогда выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется **функциональным рядом**.

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

называется **степенным рядом** с центром в точке x_0.

Рассмотрим частичные суммы ряда

$$S_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

Сумма степенного ряда:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Множество X всех точек x, в которых ряд сходится, называется **областью сходимости** степенного ряда.

Рассмотрим ряд с центром $x_0 = 0$.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

Теорема (Абеля).

1) Если степенной ряд (1) сходится при некотором $x = b \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком x, для которого $|x| < |b|$.

2) Если степенной ряд (1) расходится при некотором $x = b_1$, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |b_1|$.

Существует такое число R_0, называемое **радиусом сходимости**, что ряд (1) сходится при $|x| < R_0$ и расходится при $|x| > R_0$.

На концах интервала в точках $x = -R_0$ и $x = R_0$ ряд может

а) сходиться абсолютно,

б) сходиться условно,

в) расходиться.

Вопрос о сходимости ряда в этих точках решается отдельно.

Как вычислять радиус сходимости?

Рассмотрим абсолютный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \tag{2}$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = |x| \cdot L$$

где

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Тогда ряд (2) сходится абсолютно, если $|x|\cdot L < 1$,

т.е. если $L \neq 0$, то

$$|x| < \frac{1}{L}$$

если $L = 0$, то

$$|x| < +\infty.$$

Ряд (2) расходится, если,

$$|x| > \frac{1}{L}.$$

Следовательно,

$$R_0 = \frac{1}{L}.$$

Радиус сходимости степенного ряда (5) вычисляется по формуле

$$R_0 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (3)$$

Аналогично, радиус сходимости степенного ряда (2) вычисляется по формуле

$$R_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (4)$$

Область $(-R_0, R_0)$ называется **интервалом** сходимости.

Для определения **области сходимости** исследуется сходимость в граничных точках $x = -R_0$ и $x = R_0$.

Граничные точки, в которых ряд сходится, присоединяются к интервалу сходимости.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

Решение.

Для этого ряда $a_n = n!$. По формуле (3)

$$R_0 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Ответ: Область сходимости: $\{0\}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Решение.

Для этого ряда

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

По формуле (3)

$$R_0 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Ответ: Область сходимости: $(-\infty;+\infty)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2x)^n}{n}$$

Решение.

1 способ.

Для этого ряда

$$|a_n| = \frac{2^n}{n}$$

По формуле (3)

$$R_0 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)}{n\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

2 способ.

Для определения интервала сходимости можно непосредственно применить признак Даламбера как в доказательстве теореме о радиусе сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x)^{n+1}n}{(n+1)\cdot(2x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot|2x| = |2x|.$$

Для выполнения условия сходимости нужно, чтобы

$$|2x| < 1.$$

Следовательно, $|x| < \frac{1}{2}$, $R_0 = \frac{1}{2}$, интервал сходимости $\left(-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right)$.

Для определения области сходимости исследуем сходимость в граничных точках.

При $x = \frac{1}{2}$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

который сходится условно.

При $x = -\frac{1}{2}$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который расходится. так как расходится гармонический ряд.

Ответ: Область сходимости: $\left(-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right]$.

Для степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{5}$$

интервал сходимости определяется условием

$$|x-x_0| < R_0 , \tag{6}$$

а радиус сходимости определяется по формуле (3) или по формуле (4) или непосредственно по признаку Даламбера (или Коши).

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n+1)}$$

Решение. Применяя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1} n(n+1)}{(n+1)(n+2)\cdot(x-2)^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}|x-2|\left(\frac{n}{n+2}\right) = |x-2|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right) = |x-2| .$$

Для выполнения условия сходимости нужно, чтобы

$$|x-2|<1 ,$$

или

$$-1 < x-2 < 1$$

или

$$1 < x < 3$$

Следовательно, $R_0 = 1$, интервал сходимости $(1;3)$.

Для определения области сходимости исследуем сходимость в граничных точках.

При $x = 3$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Применим первый признак сравнения:

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

а ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится так как $p = 2$.

Следовательно, в точке $x = 3$ ряд сходится абсолютно.

При $x = 1$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Так как абсолютный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

как доказано сходится, то и исследуемый ряд сходится.

Ответ: Область сходимости: $[1;3]$.

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Формула Тейлора

Пусть $f(x)$ достаточное число раз дифференцируема в точке x_0. По n производным в точке x_0 составим многочлен

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (1)$$

Многочлен $S_n(x)$ называется **многочленом Тейлора** порядка n с центром в точке x_0. для функции $f(x)$.

Коэффициенты

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (2)$$

называются коэффициентами формулы Тейлора с центром в точке x_0.

Если $f(x)$ - многочлен степени n, то его можно записать в форме многочлена Тейлора для любого x_0 в качестве центра.

Таким образом, для многочлена

$$f(x) = P_n(x) = S_n(x)$$

Если $f(x)$ любая функция, то ее можно представить в виде

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad (3)$$

Функция $R_n(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора с центром в точке x_0 для функции $f(x)$. Что можно сказать о величине остаточного члена?

Пусть функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Тогда для любого $x \in U(x_0)$

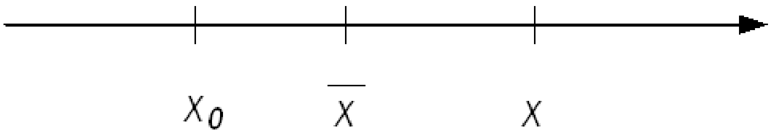
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{4}$$

причем остаточный член $R_n(x)$ имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1 \tag{5}$$

При этом θ зависит от n.

Замечание 1. Остаток имеет тот же вид, что каждый член формулы Тейлора, только производная берется в смещенной точке $\bar{x} = x_0 + \theta(x - x_0)$:



Формула (5) называется остаточным членом формулы Тейлора в **форме Лагранжа**.

Определение рядов Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 производные любого порядка.

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6}$$

называется рядом Тейлора с центром в точке x_0 для функции $f(x)$.

Ряд Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (7)$$

называется рядом Маклорена для функции $f(x)$.

Поставим в соответствие функции $f(x)$ ряд (6):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

В каких случаях ряд Тейлора сходится и к какой функции?

Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора

1) Для сходимости ряда Тейлора в интервале необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

2) Если выполняется неравенство

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M$$

тогда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$.

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

В соответствие с этими требованиями для основных элементарных функций получены следующие разложения в ряд Маклорена.

Основные разложения.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad x \in (-\infty;+\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad x \in (-\infty;+\infty)$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n =$$

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 \ldots \qquad x \in (-1;+1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad x \in (-1;+1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \qquad x \in (-1;+1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad x \in (-1;1]$$

$$arctgx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad x \in [-1;1]$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \ldots \qquad x \in [-1;1]$$

Пример 5. Используя основные разложения, разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = xe^{-\frac{x}{2}},$$

указать интервал сходимости.

Решение. Так как

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$$

то

$$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n n!},$$

Заменив n+1 на n, заменим индекс суммирования

$$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$x\in(-\infty;+\infty)$

Пример 6. Используя основные разложения, разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x)=\frac{x}{2+x},$$

указать интервал сходимости.

Решение. Так как

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1;+1)$$

то

$$f(x)=\frac{x}{2+x}=\frac{x+2-2}{2+x}=1-\frac{2}{2+x}=1-\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=$$

$$1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n}$$

Определим интервал сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}2^n}{2^{n+1}x^n}\right| = \frac{|x|}{2}.$$

Для выполнения условия сходимости нужно, чтобы

$$|x| < 1,$$

Интервал сходимости $x \in (-2;+2)$.

Пример 7. Используя основные разложения, разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \ln(8+x),$$

указать интервал сходимости.

Решение. Так как

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad x \in (-1;1]$$

то

$$f(x) = \ln(8+x) = \ln 8\left(1+\frac{x}{8}\right) = \ln 8 + \ln\left(1+\frac{x}{8}\right) = \ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{8^n n}$$

Определим интервал сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}8^n n}{8^{n+1}(n+1)x^n}\right| = \frac{|x|}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)} = \frac{|x|}{8}.$$

Для выполнения условия сходимости нужно, чтобы

$$\frac{|x|}{8} < 1,$$

Интервал сходимости $x \in (-8;+8)$.

Пример 8. Выпишите три первых ненулевых члена ряда Тейлора для функции

$$f(x)=\ln\left(e^x+x\right)$$

с центром в точке $x_0=0$.

Решение. Так как

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6!}(x-x_0)^3+\ldots,$$

то вычислим функцию и ее первые производные в центре разложения:

$$f(0)=\ln 1=0,$$

$$f'(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x},\ f'(0)=2$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+x)-(e^x+1)^2}{\left(e^x+x\right)^2}=\frac{xe^x-2e^x-1}{\left(e^x+x\right)^2},$$

$$f''(0)=-3,$$

$$f'''(x)=\frac{(e^x+xe^x-2e^x)\left(e^x+x\right)^2-2(xe^x-2e^x-1)(e^x+1)(e^x+x)}{\left(e^x+x\right)^4}$$

$$f'''(0)=11$$

Следовательно,

$$f(x)=\ln\left(e^x+x\right)=2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3\ldots.$$

Пример 9. Используя основные разложения, разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x)=e^{2x}$$

с центром в точке $x_0=1$, указать интервал сходимости.

Решение. Разложить в ряд Тейлора с центром $x_0=1$ означает разложить функцию по степеням $(x-1)$. Сделаем замену переменных:

$$t=x-1$$

Тогда

$$f(x)=e^{2x}=e^{2t+2}=e^2\cdot e^{2t}$$

Так как

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

То

$$f(x) = e^2 \cdot e^{2t} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n!}$$

с интервалом сходимости $x \in (-\infty; +\infty)$

Пример 10. Используя основные разложения, разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

с центром в точке $x_0 = -2$, указать интервал сходимости.

Решение. Разложить в ряд Тейлора с центром $x_0 = -2$ означает разложить функцию по степеням $(x+2)$. Сделаем замену переменных:

$$t = x + 2$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{x-4} = \frac{1}{t-6} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{-t}{6}}$$

Так как

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad x \in (-1; +1)$$

то

$$f(x) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{-t}{6}} = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n t^n}{6^n} = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{6^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{6^{n+1}}$$

Определим интервал сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} 6^n}{6^{n+1} (x+2)^n} \right| = \frac{|x+2|}{6}.$$

Для выполнения условия сходимости нужно, чтобы

$$\frac{|x+2|}{6} < 1,$$

Откуда

$$-6 < x+2 < 6;$$

$$-8 < x < 4$$

Интервал сходимости $x \in (-8;+4)$.

Пример 11. Используя основные разложения, разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 6)$$

с центром в точке $x_0 = -1$, указать интервал сходимости.

Решение. Разложить в ряд Тейлора с центром $x_0 = -1$ означает разложить функцию по степеням $(x+1)$. Сделаем замену переменных:

$$t = x - 1$$

Тогда

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 6) = \ln(x^2 + 2x + 2 + 4) = \ln((x+1)^2 + 4) = \ln(t^2 + 4) = \ln 4\left(1 + \frac{t^2}{4}\right) =$$

$$= \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{t^2}{4}\right)$$

Так как

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

то

$$f(x) = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n}}{4^n n} = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x+1)^{2n}}{4^n n}$$

Определим интервал сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{2n+2} 4^n n}{4^{n+1} (x+1)^{2n} (n+1)} \right| = \frac{|x+1|^2}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|^2}{4}.$$

Для выполнения условия сходимости нужно, чтобы

$$\frac{|x+1|^2}{4}<1,$$

Откуда

$$|x+1|^2<4;$$

$$|x+1|<2;$$

$$-2<x+1<2;$$

$$-3<x<1.$$

Интервал сходимости $x\in(-3;+1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Варианты задачи 1. Найти интервал и область сходимости степенного ряда:

1	а)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n\cdot n}$	б)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$	в)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{7^n(n+1)}.$
2	а)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x+2)^n}{3n^2+5}.$	б)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n^3}$	в)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-1)^n}{0{,}6^n n^2}.$
3	а)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{2n+1}}$	б)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{\sqrt{n^2+n}}.$	в)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^n\cdot\sqrt{n^3}}.$
4	а)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x-2)^n}{3n^2-2}.$	б)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n+1}}{4^n\sqrt[3]{n^4}}.$	в)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n(n^3+1)}$
5	а)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$	б)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{0{,}5^n\cdot\sqrt{n}}.$	в)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{\sqrt{2n^2+3}}.$
6	а)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}.$	б)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$	в)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{\sqrt{5n^2+1}}.$
7	а)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{3n+1}}.$	б)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n n}.$	в)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}$
8	а)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{\sqrt{5n^2+1}}.$	б)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(n+1)}$	в)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n n^2}.$

9	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6x-1)^n}{6^n\sqrt{n}}$.	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{2n-1}}$.	в)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n(n^2+1)}$
10	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot n^2}$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{7^n n^2}$.	в)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{6n^2-2}}$.

Варианты задачи 2. Используя основные разложения, разложить в ряд Маклорена функцию, указать интервал сходимости.

1. $f(x)=e^{-3x}$
2. $f(x)=\ln(10+x)$
3. $f(x)=\frac{x}{4+x}$
4. $f(x)=x^2e^{-x^2}$
5. $f(x)=\sin\frac{x}{3}$
6. $f(x)=\ln(3+x)$
7. $f(x)=\frac{x}{3+x}$
8. $f(x)=\ln(2-x)$
9. $f(x)=\sqrt{2-x}$
10. $f(x)=\cos\frac{x}{5}$

Варианты задачи 3. Выпишите три первых ненулевых члена ряда Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0.

1. $f(x)=3^x$, $x_0=1$
2. $f(x)=\sqrt[3]{3+x}$, $x_0=5$
3. $f(x)=\sqrt{(2+x)^3}$, $x_0=-1$
4. $f(x)=2^x$, $x_0=1$
5. $f(x)=\sqrt{x^3}$, $x_0=1$
6. $f(x)=tgx$, $x_0=\frac{\pi}{4}$
7. $f(x)=\left(3+e^{-2}\right)^2$, $x_0=0$

8. $f(x)=\sqrt{(3-x)^3}$, $x_0=1$.
9. $f(x)=e^x \sin x$, $x_0=0$
10. $f(x)=e^x \cos x$, $x_0=0$

Варианты задачи 4. Используя основные разложения, разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ с центром в точке x_0, указать интервал сходимости.

1. $f(x)=e^{-2x}$, $x_0=2$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$, $x_0=-1$
3. $f(x)=\ln(x^2+6x+9)$, $x_0=1$
4. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, $x_0=2$
5. $f(x)=\ln(x^2+4x+8)$, $x_0=-2$
6. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $x_0=1$
7. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0=-2$
8. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $x_0=1$
9. $f(x)=e^{3x}$, $x_0=1$
10. $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$, $x_0=-2$

Варианты заданий в зависимости от номера в списке группы:

В верхней строчке таблицы номер студента в списке группы,

В ячейки на пересечении столбца с номером студента в списке группы со строчкой с номером задачи стоит номер варианта этой задачи.

	Варианты практического задания 4 модуля 4																													
Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	8	6	1	9	1	3	1	8	6	2	6	8	5	5	6	6	6	6	7	5	7	3	8	9	7	4	3	4	1
2	7	7	6	9	10	3	4	8	7	3	4	9	5	5	6	3	2	1	3	8	3	3	7	8	6	7	8	2	7	2
3	2	7	9	1	7	7	2	6	8	6	9	10	8	7	10	3	3	3	4	3	9	3	1	6	10	8	4	1	1	7
4	7	6	7	4	4	6	9	1	7	6	8	8	10	5	5	4	7	3	5	3	2	3	1	7	8	4	6	3	8	9

Требования к оформлению задания

Предоставляется развернутое описание решения задач. Если выполненное задание фотографируете, то размещайте фотографии в word-файле с титульным листом. Указывайте номер задачи, а в скобках номер варианта.

Критерии оценивания выполненного задания

Максимальное количество баллов за выполнение практического задания – 10 баллов.