МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА (МИИТ)»
(РУТ (МИИТ)

Одобрено кафедрой
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»

Протокол №___ от____________ 201___г.
Автор: ______________________________

ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ С МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Теория вероятностей и математическая статистика

Уровень ВО: *Бакалавриат*

Форма обучения: Заочная

Курс: *2*

Специальность/Направление: *09.03.03 Прикладная информатика (ПИб)*

Специализация/Профиль/Магистерская программа: *(ИИ) Прикладная информатика в информационной сфере*

Москва

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Контрольная работа выполняется и оформляется при соблюдении правил:

1. Контрольная работа излагается в отдельной ученической тетради предпочтительно пастой (чернилами) синего цвета (красный цвет только для преподавателя).

2. На обложке записывается
   - название дисциплины,
   - номер контрольной работы,
   - название факультета,
   - фамилия, имя, отчество студента,
   - учебный шифр.

3. Номер варианта выбирается по последней цифре учебного шифра, проставленного в зачетной книжке.

4. Задачи располагаются в порядке, указанном в задании на контрольную работу под своими номерами.

5. Условие задачи полностью, без сокращений переписывается из задания на контрольную работу. После условия задачи отдельной строкой записывается слово "Решение", а далее последовательно по пунктам с подробными объяснениями, без сокращений слов, аккуратно и четко, со ссылками на необходимые теоремы, утверждения, определения понятий и формулы излагается ход решения.

6. Оставляются поля для замечаний преподавателя.

Выполненную контрольную работу необходимо предъявить преподавателю для проверки. Преподаватель делает замечания к решениям задач, указывает на недостатки оформления и выносит заключение "Контрольная работа №... допущена к зачету" или "Контрольная работа №… не допущена к зачету". Студент учитывает и устраняет замечания в той же тетради после заключения преподавателя, правильно и подробно излагая соответствующие преобразования и объяснения в разделе "Работа над замечаниями".

Зачет по контрольной работе студент получает лишь только после выполнения работы над замечаниями и собеседования с преподавателем.

Практикум имеет целью оказать учебно-методическую помощь студенту в закреплении и проверке степени усвоения изученного учебного материала, ответы на вопросы для самопроверки содержатся в теоретических сведениях, упражнения выполняются по аналогии с типовым решением задач.

Самостоятельная работа при подготовке к зачету по учебному материалу рабочей программы ориентирована на изучение рекомендуемой литературы.

Пример методических указаний к решению задач по теории вероятностей

Классическое определение вероятности события А

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события А, а n – общее число элементарных исходов испытания, если эти элементарные исходы равновозможные и образуют полную группу.
Для решения задач теории вероятности используют понятие числа сочетаний. Числом сочетаний из n элементов по k в каждом, называют число соединений, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов и которые отличаются хотя бы одним элементом.
Число сочетаний из n по k обычно обозначается C_n^k

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n! (то есть n факториал) означает произведение всех натуральных чисел от единицы до n, т.е.

$$n!=1\times 2\times 3...n.$$

Например $C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5}{(1\times 2\times 3)\times(1\times 2)}=10$

Пример: В партии из 20 деталей имеется 18 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 4 стандартных.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 5 деталей из 20 деталей, то есть C_{20}^5 (числу сочетаний из 20 элементов по 5 элементов)
Число элементарных исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (что среди 5 деталей ровно 4 стандартных) можно сосчитать следующим образом: четыре стандартных детали можно взять из 18 стандартных деталей C_{18}^4 способами; при этом оставшаяся одна деталь $(5-4=1)$ должна быть нестандартной. Взять одну нестандартную деталь из $(20-18=2)$ двух нестандартных можно C_2^1 способами.

Итак, число благоприятствующих исходов равно

$$C_{18}^4\times C_2^1=\frac{18!}{4!\times 14!}\times\frac{2!}{1!\times 1!}=\frac{15\times 16\times 17\times 18}{1\times 2\times 3\times 4}\times\frac{1\times 2}{1\times 1}=6120$$

Общее число элементарных исходов

$$C_{20}^5=\frac{20!}{5!\times 15!}=\frac{16\times 17\times 18\times 19\times 20}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}=15504$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события к общему числу всех исходов. При этом оставшаяся одна деталь $(5-4=1)$ должна быть нестандартной. Взять одну нестандартную деталь из $(20-18=2)$ двух нестандартных можно C_2^1 способами.

Итак, число благоприятствующих исходов равно

$$C_{18}^4 \times C_2^1 = \frac{18!}{4!\times 14!} \times \frac{2!}{1!\times 1!} = \frac{15\times 16\times 17\times 18}{1\times 2\times 3\times 4} \times \frac{1\times 2}{1\times 1} = 6120$$

Общее число элементарных исходов

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{5!\times 15!} = \frac{16\times 17\times 18\times 19\times 20}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 15504$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события к общему числу всех исходов.

$$P = \frac{6120}{15504} = \frac{765}{1938} = \frac{255}{646}$$

Справедливы следующие теоремы:

1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий:
   Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.
   $$P(A+B) = P(A) + P(B)$$
2. Теорема умножения вероятностей независимых событий:
   Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.
   $$P(A\times B) = P(A)\times P(B)$$
3. Теорема умножения вероятностей зависимых событий:
   Вероятность совместного появления двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило.
   $$P(AB) = P(A)\cdot P_{(A)}B$$

Обратите внимание на то, что теорема 2 является частным случаем теоремы 3, так как для независимых событий $P_{(A)}B$ - вероятность события В при условии наступления события А, то есть условная вероятность, равна безусловной вероятности $P(B)$.

4. Теорема сложения вероятностей совместных событий: Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теоремы верны не только для двух событий, но и для большого числа.

Пример 1. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4 , можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

Введем обозначения событий:

Событие A- ни при одном выстреле не будет промаха.

Событие A_1 - при первом выстреле не будет промаха.

Событие A_2 - при втором выстреле не будет промаха.

…

Событие A_i - при i-м выстреле не будет промаха (i=1,2,3…n)

Интересующее нас событие A состоит в совмещении событий $A_1, A_2 \dots A_n$

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 ... A_n$$

$P(A_i) = 0.8$, при i= 1,2,3…n

События A_i независимы в совокупности, поэтому применим теорему умножения независимых событий.

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n) = 0.8$$

По условию задачи

$$0.8^n < 0.4$$

Следовательно

$$\text{И } \lg 0.8 < \lg 0.4$$

Т.к. $\lg 0.8 < 0$

И $> \dfrac{\lg 0.4}{\lg 0.8}$

И получим, что $n \geq 5$

Если события $A_1, A_2 \dots A_n$ независимы в совокупности и их вероятности равны $P_1,\ P_2 \dots P_n$;

Пусть в результате испытания может наступить один из них, или любые два, или любые три, или так далее, или все эти события, или не одного из них, то справедлива теорема 5. Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из $A_1, A_2 \dots A_n$, независимых в совокупности, равна разнице между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2} ... \overline{A_n}$

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 ... q_n$$

Если все события имеют одинаковую вероятность P, то вероятность появления хотя бы одного из них

$$P(A) = 1 - q^n \qquad\qquad (q = 1 - p)$$

Пример. В электронную цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятность отказа элементов
$P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.2$, $P_3 = 0.3$
Найти вероятность того, что тока в цепях не будет. Так как элементы включены последовательно, тока в цепи не будет, если откажет хотя бы один элемент. Искомая вероятность
$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.2)(1 - 0.3) = 1 - 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.496$

Теорема 6. (формула полной вероятности)
Вероятность события *A*, которое может наступать лишь при появлении одного из событий $B_1, B_2 ..., B_n$, образующая полную группу, равна сумме и произведений вероятностей каждой из гипотезна соответствующую условную вероятность события А :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1) +\ P(B_2) + \ldots +\ P(B_n) = 1$

Теорема 7. (Формула Байеса)
Пусть событие Ф может наступать лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1,\ B_2, .., \ B_n$, которые образуют полную группу событий . Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоцененные по формуле Байеса

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i} \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \qquad (i=1,2,...n)$$

Пример. Число грузовых автомашин проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2 .Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0.1; для легковой машины эта вероятность равна 0.2. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность того, что это грузовик. Введем обозначения событий. А- событие заключающееся в том, что машина подъехала на заправку. Сделаем 2 гипотезы. B_1-машина легковая. B_2-машина грузовая.

Подсчитаем вероятность того, что выбранная наудачу машина будет заправляться.

$$P(A) = P\left(B_1\right) \cdot P_{B1}(A) + P\left(B_2\right) \cdot P_{B2}(A).$$

$$P_{B1}(A) = 0.2. \quad P_{B2}(A) = 0.1.$$

$$P\left(B_1\right) = \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}. \ P\left(B_2\right) = \frac{3}{5}.$$

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot 0.2 + \frac{3}{5} \cdot 0.1 = 0.14.$$

Событие А произошло. Машина подъехала заправиться. Вероятность того, что это грузовая машина: $P\left(B_2\right)=\dfrac{P\left(B_2\right)\cdot P_{B2}(A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{5}\cdot 0.1}{0.14}=\dfrac{3}{7}$.

Теорема 8 (Формула Бернулли). Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна P (а не наступления q=1-p), события наступят ровно К раз, равна:

$$P_n(K)=C_n^k\cdot P^k\cdot q^{n-k}.$$

Пример. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей 2 мальчика (вероятность рождения мальчика равна 0.51). Обозначим А событие, состоящее в рождении мальчика. Можно сказать, что производятся испытания, при которых вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний и зависит от других испытаний и равна P=0.51. Вероятность того что в пяти независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события А равна P=0.51(q=0.49) событие А наступит ровно 2 раза равна: $P_5(2)=C_5^2\cdot P^2\cdot q^{5-2}=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0.51^2\cdot 0.49^3\approx 0.312$.

С помощью этих теорем можно решить первую задачу.

Задача $\sqrt{2}$. Относится к разделу непрерывные случайные величины. Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин. Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные изолированные значения. Дискретная случайная величина задается таблицей или графиком, или аналитически. Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности: $M(X)=X_1P_1+X_2P_2+\dots X_nP_n$. Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2$ (1) Так же дисперсию удобно вычислять по формуле: $D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2$ (2). Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии $\delta(X)=\sqrt{D(X)}$.Очевидно, невозможно задать непрерывную случайную величину таблицей, так как она принимает все значения из какого-либо конечного или бесконечного промежутка, таких значений бесчисленное множество, перечислить их нельзя. Для задания непрерывной случайной величины используют функции распределения. Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x т.е. $F(x)=P(X<x)$

.Иногда вместо слов “функция распределения’’ говорят “интегральная функция распределения’’. Эта функция обладает следующими свойствами:

1.Значение функции распределяется

Линия принадлежит отрезку $\left[0;1\right]$

$$O \le X \le 1$$

2.Функция распределения, неубывающая функция

$F\left(X_2\right) \ge F\left(X_1\right)$ если $X_2 > X_1$

3.Вероятность того, что случайная величина x примет значение, заключенное в интервале

(a,b) равна приращению интегральной функции распределения на этом интервале.

$$P\left(a < x < b\right) = F(b) - F(a)$$

4.Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное

Значение равное нулю $P\left(x = x_1\right) = 0$

5.Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a,b), то

$F(x) = 0$ при $x \le a$

$F(x) = 1$ при $x \ge b$

6.Справедливы следующие соотношения

$\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

Функцию распределения иначе называют интегральной функцией распределения, потому что имеется дифференциальная функция распределения или функция плотности распределения.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a,b) определяется равенством

$$P\left(a < x < b\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Зная плотность распределения, можно найти интегральную функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства функции плотности:

1.Плотность распределения неотрицательна, то есть $f(x) \ge 0$

2.Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах

от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то $\int\limits_a^b f(x)dx=1$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси X, определяется так:

$$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \text{, где}$$

$f(x)$ - плотность распределения случайной величины X.

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу (a,b), то

$$M(x)=\int\limits_a^b xf(x)dx$$

Медианой $M(x)$ непрерывной случайной величины X называют, то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Медианой $M_e(x)$ непрерывной случайной величины X называют, то ее возможное значение, которое определяется следующим равенством:

$$P\left[x<M_e(x)\right]=P\left[x>M_e(x)\right]$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(x)\right]^2 f(x)dx$$

Соответствующим формуле (* *) из части, посвященной дискретным случайным величинам, или

Пример: Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \sin 2x & \text{при } 0<x\le\frac{\pi}{4} \\ 1 & x>\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

1.Найдем плотность распределения X.

Плотность распределения равна первой производной от функции распределения

$$F(x)=F^{'}(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2\cos 2x & \text{при } 0<x\le\frac{\pi}{4} \\ 0 & x>\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Заметим, что при $x=0$ производная $F^{'}(x)$ не существует.

2.Найдем вероятность того, что X примет значения из интервала $\left(\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right)$

а) Можно воспользоваться формулой:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a)$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$F\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

б) Можно воспользоваться формулой:

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x dx=\begin{bmatrix}2x=t\\ 2dx=dt\\ \frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{6}\\ -\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=\sin t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3. Найдем математическое ожидание величины *X*.

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot 2\cos x2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x)cos2x\cdot d(2x)=$$

$$=\begin{bmatrix}2x=t\\ 0\to 0\\ \frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt=\frac{\pi}{2}\left[t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-1\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

4. Найдем дисперсию случайной величины *X*. Воспользуемся формулой:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(x)\right]^2=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x^2\cos 2xdx-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$$

Непрерывные случайные величины могут быть распределены равномерно. Равномерным называют распределение вероятностей случайной величины *X*, если на интервале (a,b), которому принадлежат все возможные значения *X*, плотность сохраняет постоянное значение, а именно $f(x)=\frac{1}{b-a}$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Непрерывные случайные величины могут быть распределены по показательному закону. Показательным законом или экспоненциальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, заданной плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} \text{при } x\geq 0\\ 0 \text{ при } x<0\end{cases}$$

λ -положительная постоянная величина.

Непрерывные случайные величины могут быть распределены по нормальному закону. Нормальным называют закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X*, плотность которой имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где a – математическое ожидание,

δ - среднестатистическое отклонение *X*.

Вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (α,β)

$$P(\alpha<x<\beta)\Phi\left(\frac{\beta\cdot a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \text{ где}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x l^{-\frac{t2}{2}}dt \text{ - функция Лапласа}$$

Вероятность данного отклонения (т.е. вероятность того, что нормально распределённая величина X отклонится от своего математического ожидания a не более чем на δ)

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Во всех учебниках по теории вероятности имеются таблицы значений функции Лапласа и соответствующей функции плотности.

Для нормального распределения справедливо “правило трёх сигм”

$$P(|X-a|<3\sigma)=0{,}9973$$

Что означает, что 99,73% значений нормально распределенной величины X лежит в интервале

$$(a-3\sigma;a+3\sigma).$$

Хорошо видно на графике функции плотности нормально распределённой случайной величины X .

Пример. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания x примет значении, заключенное в интервале (12; 14)

Функция плотности случайной величины x имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} l \frac{-(x-10)^2}{8}$$

Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha \lhd x \lhd \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\tau}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\tau})$$

$$\mathrm{P}(12 \lhd x \lhd 14) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$$

Значения Ф взяты из таблицы значений функции:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Задача 1

1–10. 1. Подбрасываются две игральные кости. Требуется: 1) описать множество элементарных случайных событий, 2) найти вероятности событий A={выпадение двух «шестерок»}, B = {выпадение хотя бы одной «шестерки»}, C = {выпадение одной «шестерки»}.

2. В контейнере находятся 40 телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что 3 наудачу выбранных телевизора не будут иметь дефектов.

3. Аудитор проверяет три счета. Вероятность правильного оформления счета равна 0,9. Найти вероятности событий A = {правильно оформлены три счета}, B= {правильно оформлены два счета}, C = {правильно оформлен один счет}, D= {правильно оформлен хотя бы один счет}.

4. Инвестор наудачу приобретает акции 2-х фондов из 10. Среди 10 фондов 4 невыгодные. Найти вероятности событий A = {инвестор вкладывает деньги в выгодные фонды}, B= {инвестор вкладывает деньги в невыгодные фонды}, C={инвестор вкладывает деньги хотя бы в один выгодный фонд}.

5. В каждом из двух ящиков содержатся 6 черных и 4 белых шара. Из первого ящика наудачу переложили во второй ящик 1 шар. Найти вероятность того, что два наугад взятые шара из второго ящика будут белыми.

6. На склад поступают однотипные детали с двух заводов – №1 и №2. Завод №1 поставляет 30% деталей, из которых 10% имеют низкое качество. Завод №2

производит детали, из которых 80% имеют высокое качество. Найти вероятность того, что наугад взятая со склада деталь будет высокого качества.

7. Из 3-х урн наудачу извлекается один шар в соответствие с правилом: при подбрасывании игральной кости если выпадает 1 очко, то выбирается урна 1; если выпадает 2, 3 или 4 очка, то выбирается урна 2; если выпадает 5 или 6 очков, то урна 3. В урне 1 находится 10 шаров, из них 2 красных, в урне 2 – 15 шаров, из них 3 красных, в урне 3 – 20 шаров, из них 10 красных. Найти вероятности событий A = {будет извлечен красных шар}, B = {извлеченный красный шар принадлежит урне 1}.

8. В магазине представлена обувь 3-х фабрик: 30% обуви поставила фабрика 1, 25% – фабрика 2, остальную обувь – фабрика 3. Покупатель выбирает обувь наудачу. Процент возврата обуви, изготовленной фабрикой 1 – 3%, фабрикой 2 – 1%, фабрикой 3 – 0,5%. Найти вероятности событий A = {обувь покупателем не будет возвращена}, B = {невозвращенная обувь изготовлена фабрикой 3}.

9. Автомат изготавливает однотипные детали, 5% произведенной продукции оказывается бракованной. Найти вероятность того, что из четырех последовательно изготовленных деталей будут бракованными не более двух.

10. Вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при пяти последовательных выстрелах будет не менее четырех попаданий.

Задача 2

11–16. Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X. Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) схематично построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

4) найти математическое ожидание и дисперсию X;

5) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (α,β).

11. $$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ Ax^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$
$\alpha=1, \quad \beta=1{,}7.$

12. $$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1, \\ A\sqrt{x} & \text{при} \quad 1\le x\le 4, \\ 0 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$
$\alpha=2, \quad \beta=3.$

13. $$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1, \\ Ax^3 & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$
$\alpha=1{,}1 \quad \beta=1{,}5.$

14. $$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<2, \\ A(x+1) & \text{при} \quad 2\le x\le 4, \\ 0 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$
$\alpha=3, \quad \beta=3{,}5.$

15. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1 \\ Ax & \text{при} \quad 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{при} \quad x>2 \end{cases}$

$\alpha=2, \quad \beta=3.$

16. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<-1, \\ Ax^4 & при \quad -1\le x\le 1, \\ 0 & при \quad x>1. \end{cases}$

$\alpha=0{,}5, \quad \beta=1.$

17–20. Задана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Требуется:
1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) определить коэффициент A;
3) схематично построить графики $F(x)$ и $f(x)$;
4) найти математическое ожидание и дисперсию X;
5) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (α,β).

17. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ Ax^2 & при \quad 0\le x\le 2, \\ 1 & при \quad x>2. \end{cases}$

$\alpha=1, \quad \beta=2.$

18. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ Ax^3 & при \quad 0\le x\le 4, \\ 1 & при \quad x>4. \end{cases}$

$\alpha=2, \quad \beta=3.$

19. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ Ax^4 & при \quad 0\le x\le 3, \\ 1 & при \quad x>3. \end{cases}$

$\alpha=1, \quad \beta=2.$

20. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ Ax & при \quad 0\le x\le 5, \\ 1 & при \quad x>5. \end{cases}$

$\alpha=2, \quad \beta=4.$

Задача 3

21–30. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Требуется:
1) написать плотность распределения вероятностей $f(x)$ и схематично построить ее график;
2) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (α, β).

21.	$a=1$,	$\sigma=5$,	$\alpha=0{,}5$,	$\beta=3$.	22.	$a=9$,	$\sigma=5$,	$\alpha=2$,	$\beta=8$.
23.	$a=2$,	$\sigma=4$,	$\alpha=1$,	$\beta=5$.	24.	$a=8$,	$\sigma=3$,	$\alpha=1$,	$\beta=6$.
25.	$a=3$,	$\sigma=2$,	$\alpha=2$,	$\beta=8$.	26.	$a=6$,	$\sigma=4$,	$\alpha=0$,	$\beta=5$.
27.	$a=4$,	$\sigma=4$,	$\alpha=3$,	$\beta=6$.	28.	$a=4$,	$\sigma=6$,	$\alpha=5$,	$\beta=9$.
29.	$a=5$,	$\sigma=6$,	$\alpha=4$,	$\beta=9$.	30.	$a=2$,	$\sigma=3$,	$\alpha=4$,	$\beta=8$.

Задача 4

31–40. Производится некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью p. Опыт повторяют в неизменных условиях n раз.

31. $n=900;\ p=0{,}3$. Определить вероятность того, что в 900 опытах событие A произойдет от 250 до 320 раз.

32. $n=800; p=0,4$. Определить вероятность того, что относительная частота появления события A отклонится от $p=0,4$ не более, чем на 0,05.

33. $n=1000; p=0,6$. Определить вероятность того, что в 1000 опытах событие A произойдет не менее чем 580 раз.

34. $n=700; p=0,45$. Определить вероятность того, что в 700 опытах событие A произойдет в меньшинстве опытов.

35. $n=900; p=0,5$. Определить вероятность того, что в 900 опытах событие A произойдет в большинстве опытов.

36. $n=800; p=0,6$. Определить вероятность того, что в 800 опытах относительная частота появления события A отклонится от вероятности $p=0,6$ не более, чем на 0,05.

37. $n=1000; p=0,4$. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события A от $p=0,4$ можно ожидать с вероятностью 0,9.

38. $p=0,6$. Определить сколько раз (n) надо провести опыт, чтобы с вероятностью большей, чем 0,9 можно было ожидать отклонения относительной частоты появления события A от $p=0,6$ не более, чем 0,05.

39. $n=900; p=0,8$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события A отклонится от $p=0,8$ не более, чем на 0,1.

40. $n=800; p=0,4$. Определить вероятность того, что в 800 опытах событие A произойдет от 300 до 400 раз.

Задача 5

41–50. В результате 10 независимых измерений некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные, приведенные в таблице. Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего истинное значение величины X с доверительной вероятностью 0,95.

№ зад	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
41.	1,2	2,3	2,7	2,1	2,6	3,1	1,8	3,0	1,7	1,4
42.	3,7	4,2	4,4	5,3	3,5	4,0	3,3	3,8	4,1	5,2
43.	5,3	3,7	6,2	3,9	4,4	4,9	5,0	4,1	3,8	4,2
44.	6,3	6,8	4,9	5,5	5,3	5,2	6,1	6,6	6,0	5,7
45.	7,1	6,3	6,2	5,8	7,7	6,8	6,7	5,9	5,7	5,1
46.	7,9	7,7	8,7	8,1	6,3	9,0	7,8	8,3	8,6	8,4
47.	6,3	8,2	8,4	9,1	8,6	8,3	8,9	8,0	9,6	7,9
48.	6,9	7,3	7,1	9,5	9,7	7,9	7,6	9,1	6,6	9,9
49.	8,7	8,9	6,9	9,4	9,3	8,5	9,2	9,9	8,6	6,4
50.	3,1	5,2	3,9	4,4	5,3	5,9	4,2	4,6	4,8	3,9

Задача 6

51–60. Отдел технического контроля проверил n партий однотипных изделий и установил, что число X нестандартных изделий в одной партии имеет эмпирическое распределение, приведенное в таблице, в одной строке которой указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии, а в другой строке – количество n_i партий, содержащих x_i нестандартных изделий. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X (число нестандартных изделий в одной партии) распределена по закону Пуассона.

№ зад	$n=\sum n_i$	x_i	0	1	2	3	4	5
51.	1000	n_i	370	360	190	63	14	3
52.	500	n_i	70	140	135	95	40	20
53.	1000	n_i	380	380	170	58	10	2
54.	500	n_i	220	180	75	20	4	1
55.	1000	n_i	403	370	167	46	12	2
56.	400	n_i	185	180	13	13	7	2
57.	1000	n_i	155	265	266	194	83	37
58.	500	n_i	194	186	88	26	5	1
59.	1000	n_i	440	365	145	41	8	1
60.	500	n_i	201	184	85	22	7	1